

Edición 1
Digital



FONDO EDITORIAL

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE TAYACAJA
DANIEL HERNÁNDEZ MORILLO

ESTÁTICA APLICADA CON MATHCAD



Hector Aroquipa Velasquez

Estática aplicada con Mathcad



La investigación, su esencia y arte.

HECTOR AROQUIPA VELASQUEZ

Pampas – Perú
2024

Estática aplicada con Mathcad

© Dr. Hector Aroquipa Velasquez
Dirección: Av. Salaverry 2146, Distrito de San Isidro, Lima ± Perú
haroquipa@it-sayari.com
Telf: +51 942 055 586

Editada por:

© Universidad Nacional Autónoma de Tayacaja Daniel Hernández Morillo
(UNAT) - Fondo Editorial.
Dirección: Bolognesi N° 416, Tayacaja, Huancavelica -Perú
info@unat.edu.pe
Telf: (+51) 67 -990847026
Web: <https://unat.edu.pe/>

Primera edición digital: Mayo 2024

Libro digital disponible en <https://fondoeditorial.unat.edu.pe>

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N° 202404602

ISBN: 978-612-5123-21-3

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, su tratamiento información, la transmisión de ninguna otra forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

Agradeciendo

La realización de este libro, desde su concepción hasta su conclusión, ha sido un viaje que no podría haber sido posible sin la contribución y el apoyo de muchas personas. Deseo expresar mi sincero agradecimiento a todos aquellos que participaron de manera directa o indirecta en la elaboración, redacción y edición de este trabajo.

En primer lugar, agradezco a mis colegas y docentes que compartieron su experiencia y sabiduría, y cuyos valiosos consejos y conocimientos han enriquecido las páginas de este libro. Su guía y apoyo fueron fundamentales en la creación de esta obra.

Un reconocimiento especial merece el **Ing. Bach. Iván Parisuaña**, cuya significativa contribución a este libro ha marcado la diferencia. Su dedicación incansable y profundo conocimiento en el campo de la estática han sido una fuente de inspiración y un activo invaluable.

A mis estudiantes, quienes a lo largo de los años me han desafiado y motivado a buscar una mejor manera de transmitir conocimientos, les agradezco por ser la razón por la cual este libro existe. Espero que este trabajo les sea de utilidad en su búsqueda de comprender los fundamentos de la estática.

A mis hijos, HD Russell y HM Alessandro, quiero expresar un agradecimiento especial. Vuestra ductilidad emocional y elasticidad en vuestras actitudes fueron una fuente constante de inspiración. Vuestras sonrisas y energía positiva iluminaron los momentos más desafiantes de la vida. Este libro, en última instancia, es un testimonio de la importancia de la educación y el aprendizaje, y está dedicado a vosotros.

Finalmente, a todos aquellos que de alguna manera contribuyeron a este proyecto, ya sea a través de comentarios, sugerencias, o apoyo emocional, les agradezco de todo corazón. Este libro es un esfuerzo colectivo, y su participación ha dejado una huella imborrable en estas páginas.

Con gratitud,

Hector AROQUIPA VELASQUEZ

Prefacio

La estática es una disciplina que, aunque a menudo pasa desapercibida, es la columna vertebral de la ingeniería. Desde las estructuras más grandes y complejas hasta los objetos cotidianos que utilizamos a diario, la estática es la fuerza silenciosa que garantiza que todo permanezca en su lugar. Este libro, "Estática: Fundamentos y Aplicaciones Prácticas", nace de la necesidad de proporcionar a estudiantes y profesionales una comprensión sólida y práctica de esta disciplina fundamental.

- **Un Viaje de Descubrimiento:**

En el corazón de este libro se encuentra un enfoque en el aprendizaje experiencial. Cada capítulo ha sido diseñado cuidadosamente para guiar a los lectores en un viaje de descubrimiento, comenzando desde los conceptos más básicos y avanzando hacia aplicaciones más complejas. Creemos firmemente que la mejor manera de aprender la estática es a través de la práctica, por lo que hemos incluido más de 400 ejemplos ilustrativos que cubren una amplia gama de situaciones.

- **Soluciones Prácticas con PTC Mathcad:**

No nos detenemos en la teoría. A lo largo del libro, presentamos soluciones completas de ejemplos utilizando PTC Mathcad. Esto no solo demuestra los conceptos en acción, sino que también permite a los lectores comprender cómo aplicar la estática en situaciones del mundo real. En esta era de la tecnología, creemos que la aplicación práctica de los conocimientos es esencial.

- **Ejercicios y Desafíos:**

Al final de cada capítulo, los lectores encontrarán una serie de ejercicios y desafíos. Estos problemas están diseñados para ayudar a los estudiantes a afianzar los procedimientos y reforzar la comprensión de los conceptos. La práctica es la clave para dominar la estática, y estos ejercicios son el camino hacia ese dominio.

- **La Aplicación en el Mundo Real:**

La estática no se limita a las páginas de un libro. A través de ejemplos, soluciones en PTC Mathcad y ejercicios, preparamos a los estudiantes y profesionales para enfrentar los desafíos reales que encontrarán en su carrera. Reconociendo que la estática es una base esencial para otras disciplinas, alentamos a los lectores a llevar a cabo la implementación de códigos de programación en Python o Matlab. Esto permitirá una transferencia efectiva de conocimientos a áreas como la resistencia de materiales y la mecánica de materiales.

- **El Comienzo de un Viaje:**

Este libro es un punto de partida en tu viaje hacia el dominio de la estática. Ya sea que estés estudiando ingeniería civil, mecánica o cualquier campo relacionado, los principios aquí presentados son esenciales. Esperamos que esta obra te proporcione una comprensión sólida y aplicable de la estática y te prepare para enfrentar los desafíos de la ingeniería.

Estamos encantados de acompañarte en este viaje de descubrimiento y aprendizaje. ¡Bienvenidos al mundo de la estática!

Contenido

I

FUERZAS Y REDUCCIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS

1 FUERZAS Y REDUCCIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS	13
1.1 Introducción a la mecánica	13
1.1.1 Principios de la Mecánica	14
1.1.2 Sistema de unidades	17
1.2 Métodos para resolver vectores	17
1.3 Vectores fuerza	18
1.3.1 Sistema de unidades	20
1.3.2 Ejercicios Resueltos	22
1.3.3 Ejercicios Propuestos	31
1.4 Componentes Rectangulares de una fuerza	36
1.4.1 En el plano coordenado 2D	36
1.4.2 Ejercicios resueltos	38
1.4.3 Ejercicios propuestos	47
1.4.4 En el espacio 3D	53
1.4.5 Ejercicios resueltos	55
1.4.6 Ejercicios propuestos	61
1.5 Análisis de cuerpo rígido	66
1.6 Producto vectorial de dos vectores	66
1.6.1 Producto vectorial en componentes rectangulares	67
1.6.2 Momento de una fuerza	68
1.6.3 Ejercicios resueltos	71
1.6.4 Ejercicios propuestos	77
1.7 Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y una par	80
1.7.1 Ejercicios resueltos	83

1.7.2	Ejercicios propuestos	93
1.8	Momento de una fuerza con respecto a un eje dado	98
1.8.1	Ejercicios resueltos	99
1.8.2	Ejercicios propuestos	105

II EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA Y CUERPO RÍGIDO

2	EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA Y CUERPO RÍGIDO	109
2.1	Equilibrio de una partícula en el plano	109
2.1.1	Ejercicios Resueltos	111
2.1.2	Ejercicios propuestos	121
2.2	Equilibrio de una partícula en el espacio	126
2.2.1	Ejercicios resueltos	127
2.2.2	Ejercicios propuestos	136
2.3	Equilibrio de un cuerpo rígido en el plano	140
2.3.1	Ejercicios resueltos	142
2.3.2	Ejercicios propuestos	150

III ANÁLISIS DE ARMADURAS

3	ANÁLISIS DE ARMADURAS	157
3.1	Introducción	157
3.2	Armaduras en el plano	159
3.3	Método de los nodos	162
3.3.1	Ejercicios resueltos	164
3.3.2	Ejercicios propuestos	186
3.4	Método de las secciones	198
3.4.1	Ejercicios Resueltos	200
3.4.2	Ejercicios propuestos	216

IV CENTROS DE GRAVEDAD DE UN CUERPO RÍGIDO EN EL PLANO

4 CENTROS DE GRAVEDAD	229
4.1 Centros de gravedad de un cuerpo rígido	229
4.1.1 Clasificación de los centros de gravedad	231
4.1.2 Centro de Gravedad: Lineal- Ejercicios Resueltos	236
4.1.3 Centro de Gravedad: Lineal- Ejercicios Propuestos	244
4.1.4 Centro de Gravedad: Área - Ejercicios Propuestos	248
4.1.5 Centro de Gravedad: Área- Ejercicios Propuestos	258
4.1.6 Centro de Gravedad: Área Compuesta- Ejercicios Resueltos	262
4.1.7 Centro de Gravedad: Área Compuesta- Ejercicios Propuestos	281
4.1.8 Centro de Gravedad: Masa- Ejercicios Resueltos	292
4.1.9 Centro de Gravedad: Masa- Ejercicios Propuestos	294
4.1.10 Centro de Gravedad: Volumen- Ejercicios Resueltos	299
4.1.11 Centro de Gravedad: Volumen- Ejercicios Propuestos	303
4.1.12 Pappus Guildis- Ejercicios Resueltos	308
4.1.13 Pappus Guildis - Ejercicios propuestos	314

V MOMENTOS DE INERCIA

5 MOMENTOS DE INERCIA	321
5.1 Momento de inercia	321
5.1.1 Momento de inercia de un área	322
5.1.2 Momento polar de inercia	322
5.1.3 Radio de giro de un área	323
5.1.4 Teorema de los ejes paralelos o Teorema de Steiner	324
5.1.5 Momento de inercia de áreas compuestas	324
5.1.6 Producto de inercia para un área y rotación de ejes	324
5.1.7 Momentos de inercia para un área con rotación en los ejes	325
5.1.8 Ejercicios resueltos	327
5.1.9 Ejercicios propuestos	346
5.1.10 Ejercicios resueltos	352
5.1.11 Ejercicios propuestos	369

VI**FUERZAS INTERNAS**

6 FUERZAS INTERNAS	381
6.1 Fuerzas internas	381
6.1.1 Relación entre carga-fuerza cortante y momento flexionante	381
6.1.2 Diagramas de fuerza axial, cortante y momento flector para pórticos simples	385
6.1.3 Ejercicios resueltos	386
6.1.4 Ejercicios propuestos	400
6.1.5 Ejercicios resueltos	410
6.1.6 Ejercicios propuestos	431

VII**CABLES Y ARCOS**

7 CABLES	443
7.1 Cables	443
7.1.1 Cables con cargas concentradas	444
7.1.2 Cables con carga distribuida	445
7.1.3 Cable sometido a su propio peso	446
7.1.4 Ejercicios resueltos	447
7.1.5 Ejercicios propuestos	461

Presentación

Título del Libro: “Estática: Fundamentos y Aplicaciones Prácticas”

La estática es el fundamento sobre el cual se construyen las maravillas de la ingeniería. Desde los rascacielos que se alzan imponentes en el horizonte hasta los puentes que cruzan caudalosos ríos, la estática es la disciplina que garantiza que nuestras creaciones sean seguras y estables. El libro “Estática: Fundamentos y Aplicaciones Prácticas” es una puerta de entrada a este emocionante mundo, diseñado tanto para estudiantes como para profesionales de la ingeniería que desean comprender y aplicar los principios fundamentales de la estática en su trabajo diario.

Nuestra Misión:

En este libro, nuestra misión es clara: brindar una sólida base de conocimientos en estática y, al mismo tiempo, mostrar cómo estos principios se traducen en soluciones prácticas en la ingeniería civil y mecánica. Hemos diseñado cuidadosamente cada capítulo para guiar a los lectores desde los conceptos más básicos hasta los desafíos más complejos. Al hacerlo, hemos optado por un enfoque simple y directo, presentando conceptos puntuales que se pueden aplicar de inmediato.

Características Destacadas:

- **400+ Ejemplos Ilustrativos:** La mejor manera de aprender es a través de la práctica. Por eso, hemos incluido más de 400 ejemplos que abarcan una variedad de situaciones y complejidades. Estos ejemplos son esenciales para asimilar los conceptos y reforzar el entendimiento.
- **Soluciones en PTC Mathcad:** Para llevar la aplicación práctica un paso más allá, presentamos soluciones completas de ejemplos utilizando PTC Mathcad. Esto no solo demuestra la teoría, sino también cómo aplicarla en situaciones del mundo real.
- **Ejercicios y Desafíos:** Al final de cada capítulo, encontrarás una serie de ejercicios y desafíos que te desafiarán a aplicar lo que has aprendido. Estos ejercicios son esenciales para afianzar los procedimientos y reforzar la comprensión.
- **Aplicación en Python y Matlab:** Reconociendo la importancia de la aplicación práctica en otras disciplinas, alentamos a los estudiantes a llevar a cabo la implementación de códigos de programación en Python o Matlab. Esto permite una transferencia efectiva de conocimientos a áreas como la resistencia de materiales y la mecánica de materiales.

A Quién Va Dirigido:

Este libro es ideal para estudiantes de ingeniería civil y mecánica que buscan una introducción sólida y práctica a la estática. También es una valiosa herramienta para profesionales que desean actualizar sus conocimientos o refrescar sus habilidades en esta disciplina fundamental.

Tu Viaje Empieza Aquí:

La estática es el punto de partida para cualquier ingeniero que desee crear estructuras seguras y sólidas. “Estática: Fundamentos y Aplicaciones Prácticas” te llevará en un viaje desde los conceptos básicos hasta la aplicación práctica de la estática en el mundo de la ingeniería. A través de ejemplos, soluciones en PTC Mathcad y desafíos, te prepararemos para enfrentar los desafíos reales que encontrarás en tu carrera.

¡Bienvenidos a un mundo donde la estática cobra vida y se convierte en la base de tus logros en la ingeniería!

Introducción

La estática es una rama fundamental de la mecánica que desempeña un papel crucial en la ingeniería y la ciencia. Se centra en el estudio de los objetos en reposo y las fuerzas que actúan sobre ellos. Este libro, "Estática: Fundamentos y Aplicaciones Prácticas", ha sido creado con el propósito de brindar a los estudiantes una comprensión sólida y accesible de los principios de la estática, con un enfoque en la aplicación práctica de estos conceptos en la ingeniería civil y mecánica.

La estructura de este libro está diseñada para llevar a los estudiantes en un viaje desde los conceptos básicos hasta los desafíos más avanzados en el análisis de estructuras y fuerzas. Cada capítulo aborda de manera simple y sencilla los temas, comenzando desde lo más simple y avanzando hacia lo más complejo. A medida que avanzamos, presentamos ejemplos ilustrativos que permiten a los lectores aplicar los conceptos teóricos de manera práctica. En total, encontrarás más de 400 ejemplos que te ayudarán a asimilar y aplicar los conocimientos de la estática.

Estructura del Libro:

- 1. Fuerzas y Reducción de Sistemas de Fuerzas:** Comenzaremos por explorar cómo analizar y reducir sistemas de fuerzas en estructuras, desarrollando las habilidades necesarias para lidiar con cargas complejas.
- 2. Equilibrio de una Partícula y Cuerpo Rígido:** Profundizaremos en los conceptos de equilibrio, explorando tanto partículas individuales como cuerpos rígidos y aplicando principios que garantizan que no haya movimiento.
- 3. Análisis de Armaduras:** Abordaremos la resolución de armaduras, una parte fundamental en la ingeniería civil, y aprenderemos a analizar sistemas complejos de manera eficiente.
- 4. Centros de Gravedad:** Exploraremos la ubicación de los centros de gravedad y centroides en objetos y estructuras, proporcionando herramientas para el cálculo de equilibrio y diseño.
- 5. Momentos de Inercia:** Estudiaremos momentos de inercia y radios de giro, fundamentales en el análisis de la resistencia de materiales, especialmente en el diseño de estructuras.
- 6. Fuerzas Internas (Vigas y Estructuras):** Analizaremos las fuerzas internas en estructuras y cuerpos rígidos, comprendiendo cómo se distribuyen y afectan a la estabilidad de las mismas.
- 7. Cables:** Exploraremos las propiedades y el comportamiento de los cables en estructuras y sistemas de suspensión, un tema esencial en la ingeniería civil.

Aplicabilidad Práctica:

Una característica destacada de este libro es la presentación de soluciones de ejemplos utilizando PTC Mathcad. Estas soluciones proporcionarán una comprensión más profunda y práctica de los conceptos discutidos. Además, al final de cada capítulo, los estudiantes se enfrentarán a ejercicios que deben resolver para afianzar los procedimientos y el entendimiento. También los alentamos a llevar a cabo la implementación de códigos de programación en Python o Matlab para aplicar lo aprendido en otras áreas cruciales como la resistencia de materiales y la mecánica de materiales.

Este libro es una herramienta esencial para cualquier estudiante o profesional que desee adquirir una comprensión sólida de la estática y aplicar estos conocimientos en la práctica. Esperamos que esta obra sea de gran utilidad en tu formación como ingeniero civil y en tu carrera profesional. ¡Bienvenidos al mundo de la estática!

This page intentionally left blank

A photograph of the Golden Gate Bridge in San Francisco, California. The bridge's iconic orange-red towers and suspension cables are the central focus. The sky is overcast and grey. In the foreground, the dark silhouette of a bridge railing is visible. The text 'FUERZAS Y REDUCCIÓN DE SISTEMA DE FUERZAS' is overlaid in large, bold, yellow capital letters on the left side of the image.

FUERZAS Y REDUCCIÓN DE SISTEMA DE FUERZAS

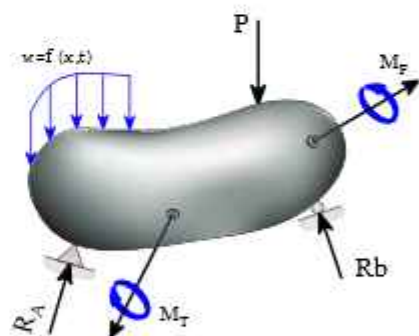
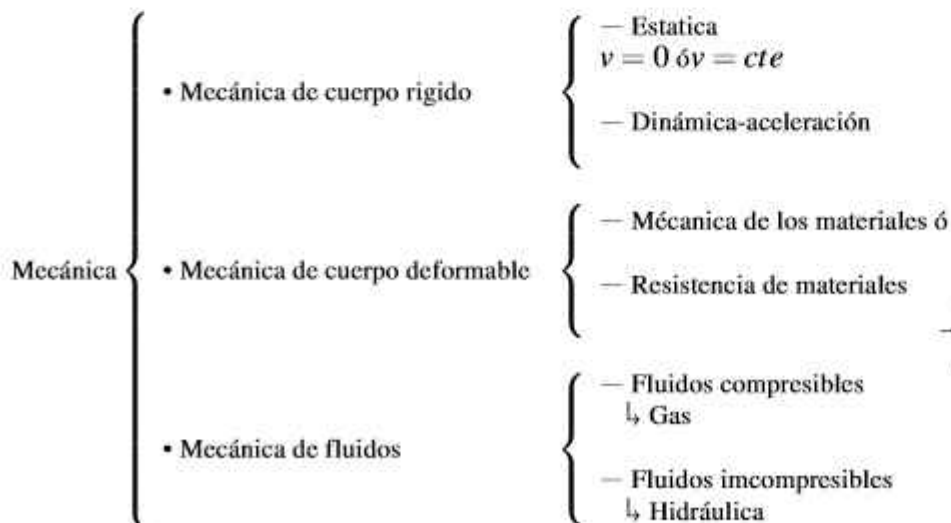
1

1

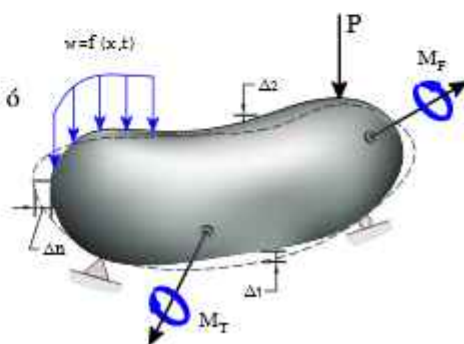
FUERZAS Y REDUCCIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS

1.1. INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA

La mecánica, siendo una disciplina de la ciencia física, se dedica al estudio de fenómenos que ocurren en el mundo físico. Sin embargo, es comúnmente relacionada tanto con las matemáticas como con la ingeniería, lo que conlleva a diversas perspectivas en su enfoque y aplicación. En ingeniería civil, se aplica para analizar y diseñar una amplia gama de estructuras e infraestructura, incluyendo edificios, puentes, sistemas de abastecimiento de agua y drenaje. En consecuencia, la mecánica básica se desglosa en varias áreas clave:



(a)



(b)

Figura 1.1: Cuerpo sometido a fuerzas externas

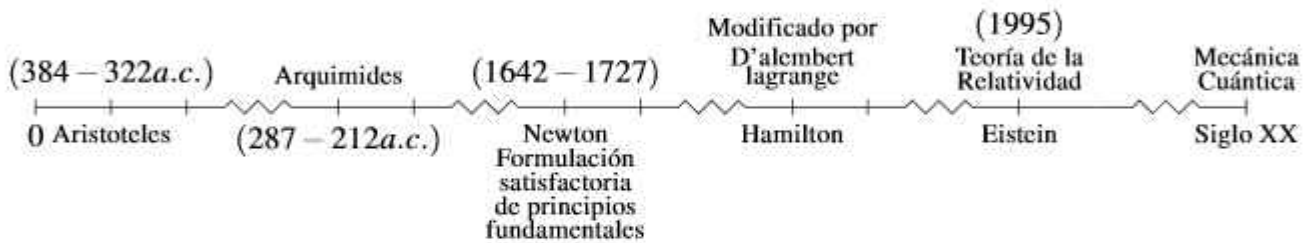


Isaac Newton (Godfrey Kneller, 1689)

La mecánica de materiales o resistencia de materiales es una disciplina de la ingeniería que fusiona principios fundamentales de la física con la ingeniería. Su propósito radica en analizar minuciosamente cómo los materiales reaccionan frente a fuerzas externas, evaluando su capacidad de deformación y resistencia ante diferentes condiciones de carga y temperaturas. Esta rama es esencial para predecir y entender el comportamiento de una variada gama de materiales, desde metales hasta compuestos, y se aplica en innumerables campos de la ingeniería, desde la construcción de estructuras hasta la manufactura de componentes industriales.

1.1.1. PRINCIPIOS DE LA MECÁNICA

Con el paso del tiempo, la ingeniería - Mecánica ha experimentado una constante evolución, remontándose a sus orígenes en:



A. CONCEPTOS

En la actualidad se han reconocido la mecánica Newtoniana como la base de las actuales ciencias de la ingeniería, donde se fundamenta en los conceptos básicos como:

- | | | |
|----------------------------------|---|--|
| Conceptos básicos de la mecánica | } | • Espacio → Ubicación de un objeto (Sistema coordenado + longitud). Describe la posición y trayectoria de un objeto en el tiempo. |
| | | • Tiempo → Variable que permite registrar cuándo ocurren los eventos. Mide la duración y la secuencia de los sucesos. |
| | | • Masa → Propiedad intrínseca de la materia (kg). La masa de un objeto determina su inercia, es decir, su resistencia al cambio de movimiento). |
| | | • Fuerza → Magnitud que causa una aceleración en un objeto y se mide en newtons (N). Describe las interacciones entre objetos y puede ser una causa de cambio en el movimiento (acción de un cuerpo sobre otro). |

Por otro lado, en la mecánica se requiere de conocimientos de conceptos como la **idealización**; que es un enfoque que simplifica la representación de objetos o sistemas para facilitar su análisis. Implica omitir detalles intrincados o complejidades no esenciales con el objetivo de abordar un problema de manera más manejable y comprensible. La idealización es comúnmente utilizada en la mecánica para simplificar la representación de objetos en situaciones específicas, lo que facilita el uso de principios y leyes mecánicas para resolver problemas. Para lo cual, se debe de conocer conceptos de: partícula, cuerpo rígido, sistema de partículas y fuerza concentrada.

- **Partícula** → es una idealización que representa un objeto como un punto material sin dimensiones ni extensión. Se utiliza cuando las dimensiones del objeto son despreciables en comparación con otras magnitudes relevantes.
- **Cuerpo rígido** → es una idealización que representa un objeto sólido que conserva su forma y dimensiones constantes, incluso bajo la influencia de fuerzas y momentos. Esto simplifica el análisis de objetos que no deforman significativamente.
- **Fuerza concentrada** → son ideales para representar fuerzas que actúan en un solo punto en un objeto. Se utilizan para analizar la acción de fuerzas externas o internas en un objeto, lo que simplifica el cálculo de las interacciones.
- **Sistema de Partículas** → es un conjunto de partículas que interactúan entre sí debido a fuerzas internas o externas. Se utiliza para describir sistemas complejos como colecciones de partículas.

Cabe aclarar que en la ingeniería civil, se estudian varios tipos de mecánica que son fundamentales para el diseño, análisis y construcción de estructuras y sistemas de infraestructura. Algunas de las principales ramas de la mecánica que se aplican en la ingeniería civil incluyen:

- **Mecánica de Materiales:** Esta rama se enfoca en el estudio de cómo los materiales, como el concreto, el acero y la madera, responden a cargas y fuerzas externas. Ayuda a determinar la capacidad de los materiales para soportar cargas, su deformación y resistencia, lo que es crucial en el diseño de estructuras y componentes.
- **Mecánica Estructural:** La mecánica estructural se centra en el análisis y diseño de estructuras, como edificios, puentes y presas. Incluye el estudio de la estática y la dinámica de las estructuras para garantizar su estabilidad y seguridad.
- **Mecánica del Suelo:** La mecánica del suelo se ocupa del comportamiento de los suelos y su interacción con las estructuras. Esto es esencial en la cimentación de edificios y la estabilidad de taludes en proyectos de construcción.
- **Mecánica de Fluidos:** La mecánica de fluidos se aplica en la ingeniería civil para estudiar el comportamiento de líquidos y gases en sistemas de tuberías, sistemas de drenaje y sistemas de abastecimiento de agua. También se utiliza en la hidráulica y la hidrología para el diseño de canales y sistemas de gestión del agua.
- **Mecánica de Estructuras Metálicas:** Esta rama se enfoca en el análisis y diseño de estructuras metálicas, como puentes de acero y estructuras de acero en edificios industriales.
- **Mecánica de Vibraciones y Sismología:** La mecánica de vibraciones se aplica para entender el comportamiento de estructuras bajo vibraciones y cargas sísmicas. La sismología se encarga del estudio de los terremotos y su impacto en estructuras.

Estas ramas de la mecánica son esenciales en la ingeniería civil y se utilizan para garantizar la seguridad, la estabilidad y la eficiencia en la construcción de infraestructura y edificaciones. En este texto nos dedicaremos al entendimiento de la mecánica de cuerpo rígido - Estática.

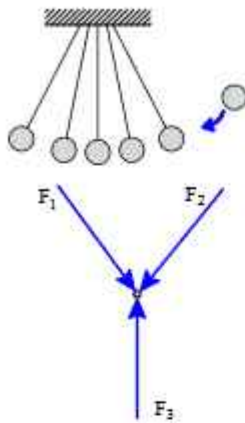


Figura 1.2: Principio de transmutabilidad

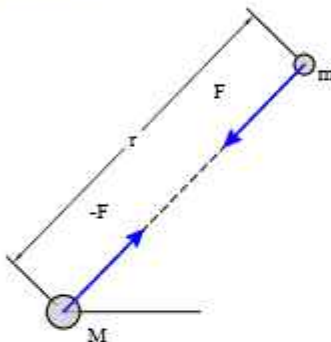


Figura 1.3: Gravitación Universal

B. PRINCIPIOS Los principios fundamentales de la mecánica se basan en las leyes de Newton y conceptos que describen el comportamiento de los objetos en reposo o en movimiento. Los tres principios clave de la mecánica y otras leyes aplicables a la estática son:

1. Primera Ley de Newton (Ley de la Inercia):

- Principio:* Un objeto en reposo tiende a permanecer en reposo, y un objeto en movimiento tiende a permanecer en movimiento a una velocidad constante en línea recta a menos que una fuerza externa actúe sobre él.
- Fórmula:* $F = 0$, donde F es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto.

2. Segunda Ley de Newton (Ley de Fuerza y Aceleración):

- Principio:* La fuerza aplicada a un objeto es igual a la masa del objeto multiplicada por su aceleración.
- Fórmula:* $F = m \cdot a$, donde F es la fuerza en newtons (N), m es la masa en kilogramos (kg) y a es la aceleración en metros por segundo al cuadrado (m/s^2).

3. Tercera Ley de Newton (Ley de Acción y Reacción):

- Principio:* Por cada acción hay una reacción igual y opuesta.
- Esta ley no tiene una fórmula específica, pero establece que las fuerzas siempre ocurren en pares, con una fuerza de acción y una fuerza de reacción que son iguales en magnitud y opuestas en dirección.

4. Ley de Gravitación Universal:

- Principio:* Cualquier objeto en el universo ejerce una fuerza gravitatoria sobre cualquier otro objeto, y esta fuerza es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.
- Fórmula:* $F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$, donde F es la fuerza gravitatoria, G es la constante de gravitación universal, m_1 y m_2 son las masas de los objetos y r es la distancia entre ellos.

5. Ley de Conservación de la Energía:

- Principio:* La energía no puede crearse ni destruirse, solo se transforma de una forma a otra.
- Fórmula:* Fórmula (Energía Cinética): $K \cdot E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$, donde $K \cdot E$ es la energía cinética, m es la masa y v es la velocidad.

6. Ley de Conservación del Momento Lineal:

- Principio:* La cantidad total de momento lineal en un sistema aislado permanece constante.
- Fórmula:* $p = m \cdot v$, donde p es el momento lineal, m es la masa y v es la velocidad.

Estos son algunos de los principios fundamentales de la mecánica, junto con las fórmulas asociadas que se utilizan para describir y analizar el movimiento y las fuerzas en sistemas físicos.

1.1.2. SISTEMA DE UNIDADES

▪ **Sistema Internacional de Unidades (SI):**

Definición: El Sistema Internacional de Unidades (SI) es el sistema métrico moderno y el estándar internacional para medir magnitudes físicas. Utiliza unidades fundamentales, como el metro (m) para la longitud, el kilogramo (kg) para la masa y el segundo (s) para el tiempo. El SI se basa en múltiplos decimales de estas unidades y proporciona una base coherente y uniforme para mediciones precisas en todo el mundo.

▪ **Sistema de Unidades Inglesas:**

Definición: El Sistema de Unidades Inglesas es un sistema de unidades de medida que se utiliza en los Estados Unidos y en algunos otros lugares. Emplea unidades como la pulgada (in) para la longitud, la libra (lb) para la masa y el segundo (s) para el tiempo. Aunque se utiliza en aplicaciones cotidianas, el sistema de unidades inglesas es menos utilizado en la ciencia y la ingeniería en comparación con el SI.

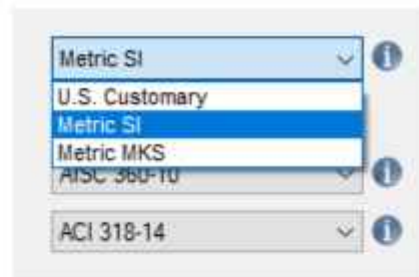


Figura 1.4: Establecer la unidad de trabajo es muy importante, como por ejemplo en el programa CSI ETABS.

Fuerza	Masa	Longitud	Presión
1 kgf=9.807 N	1 gm=0.001 kg	1 cm=0.01 m	1 GPa=145.0 38ksi
1 dyne=1·10 ⁵ N	1 kg=2.205 lb	1 m=3.281 ft	1 kPa=0.145 psi
1 N=0.102 kgf	1 ton=2204.623 lb	1 ft=12 in	1 psi=0.144 ksf
1 kgf=0.002 kip	1 lb=16 oz	1 in=25.4 mm	1 ksf=0.007 ksi
1 kip=4.448 kN	1 oz=0.028 kg	1 mm= 1·10 ³ μm	1 ksi=1.44·10 ⁵ psf
1 kN=224.809 lbf			1 psf=47.88 Pa
1 lbf=4.536·10 ⁻⁴ tonf			1 torr=0.019 psi

1.2. MÉTODOS PARA RESOLVER VECTORES

Existen varios métodos para resolver vectores en física y matemáticas. Aquí presentamos algunos de los métodos más comunes:

▪ **Método de Descomposición en Componentes:**

Este método descompone un vector en sus componentes en ejes ortogonales, generalmente los ejes x e y en el plano y en x, y y z en $3D$.

Para un vector A con magnitud $|A|$ y un ángulo θ con el eje x , se descompone en sus componentes rectangulares:

- Componente en el eje x : $A_x = |A| \cos(\theta)$
- Componente en el eje y : $A_y = |A| \sin(\theta)$

▪ **Método de Suma de Vectores:**

Se utiliza para encontrar la resultante de dos o más vectores.

Para dos vectores A y B :

- Resultante R de dos vectores: $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(\theta)}$
- Donde: A y B son las magnitudes de los vectores y θ es el ángulo entre ellos.

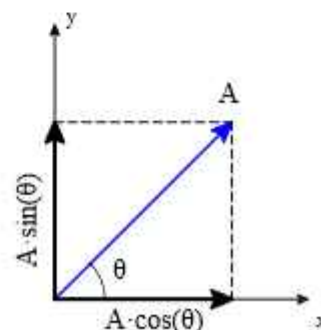


Figura 1.5: Representación de un vector

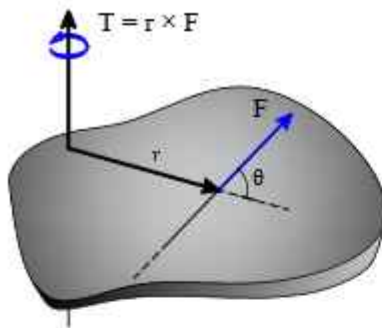


Figura 1.6: Representación de un vector

- **Método del Producto Escalar (Producto Punto):**
Permite calcular el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento.

- Fórmula: $W = F \cdot d \cdot \cos(\theta)$
- Donde: W es el trabajo, F es la magnitud de la fuerza, d es el desplazamiento y θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.

- **Método del Producto Vectorial (Producto Cruz):**
Se utiliza para calcular el momento angular T y la fuerza resultante en un objeto en movimiento curvilíneo.

- Fórmula: $T = r \times F$
- Donde: T es el momento angular, r es el vector de posición y F es la fuerza aplicada.

- **Método de Componentes Rectangulares (Suma de Componentes):**

Se utiliza para encontrar la suma de componentes de varios vectores en ejes ortogonales.

- Fórmula Para varios vectores en el eje x : $R_x = \sum V_{xi}$
- Análogamente para el eje y y z .

1.3. VECTORES FUERZA

Un vector de fuerza es una representación matemática de una fuerza física que actúa sobre un objeto. En la mecánica y en la física en general, las fuerzas se describen utilizando vectores para tener en cuenta su magnitud, dirección y sentido. Un vector de fuerza se caracteriza por dos elementos principales:

- **Magnitud:** Es la medida cuantitativa de la fuerza, usualmente expresada en newtons (N) en el Sistema Internacional de Unidades (SI) o en otras unidades de fuerza, como dynes en el Sistema CGS. La magnitud de la fuerza indica cuán intensa es la acción de la fuerza sobre el objeto.
- **Dirección y sentido:** La dirección indica la línea a lo largo de la cual actúa la fuerza, mientras que el sentido muestra si la fuerza actúa hacia adelante, hacia atrás, hacia arriba o hacia abajo a lo largo de esa dirección. La dirección y el sentido se representan mediante un vector con una flecha que indica la orientación.

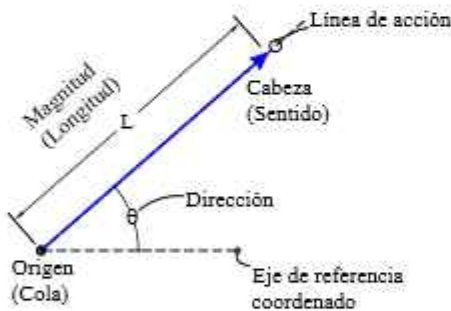


Figura 1.7: Representación de un vector

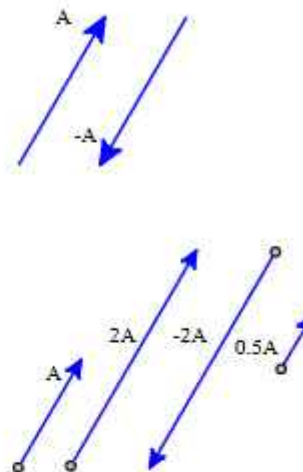
A. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

La multiplicación de un vector por un escalar es una operación que implica escalar el vector original cambiando su magnitud, pero manteniendo su dirección. Esto significa que el resultado R es un nuevo vector que apunta en la misma dirección que el vector original pero tiene una magnitud diferente. El escalar es simplemente un número, y la multiplicación se realiza componente por componente. Para multiplicar un vector A por un escalar k , se realiza la operación de la siguiente manera:

$$R = k \cdot A$$

Donde: k es el escalar y A es el vector. El resultado será un nuevo vector cuya magnitud es igual a $k \cdot |A|$ y que apunta en la misma dirección que A si k es positivo, o en la dirección opuesta si k es negativo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vector "A"} \\ \text{Escalar "a" Unidad (intensidad) (+) ó (-)} \\ |A \times k| = k \cdot A \\ A/k = \frac{1}{k} A \end{array} \right\} k \neq 0$$

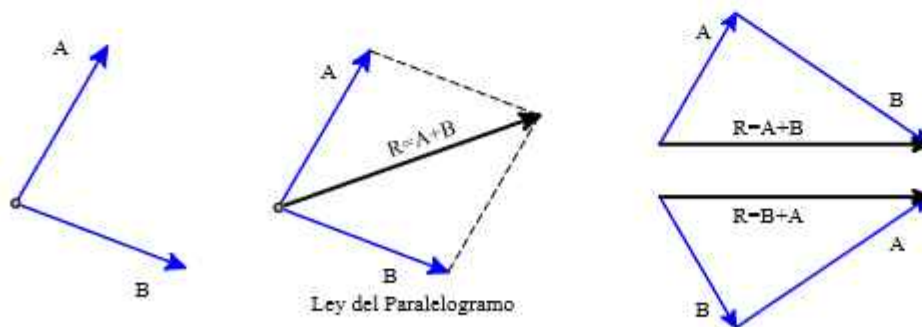


B. SUMA DE VECTORES

La suma de dos vectores es una operación que combina dos vectores para obtener un nuevo vector llamado "vector suma" ó "vector resultante". La suma de vectores se realiza componente por componente, es decir, se suman las componentes correspondientes de los dos vectores para obtener las componentes del vector resultante. El vector suma se calcula de la siguiente manera:

$$R = A + B$$

Donde: A y B son los dos vectores que se suman. Las componentes del vector resultante R son la suma de las componentes correspondientes de A y B



C. RESTA DE VECTORES

$$R = A - B = A + (-B)$$

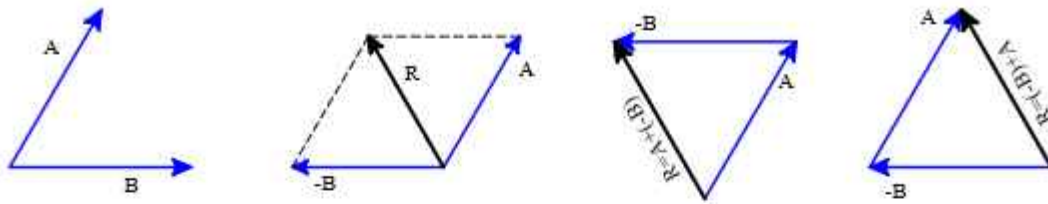


Figura 1.8: Resta de Vectores

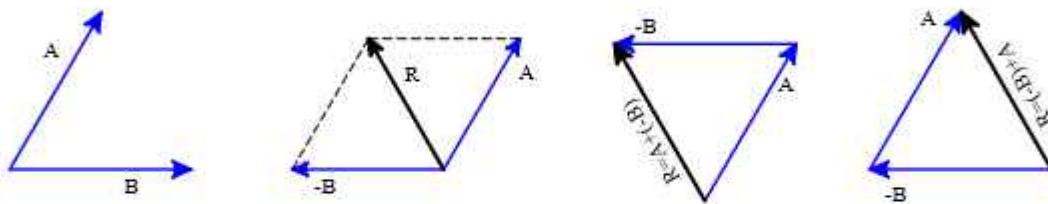


Figura 1.9: Resta de Vectores

D. DIVISIÓN DE VECTORES

La división de un vector por un escalar es la operación inversa de la multiplicación por un escalar. Para dividir un vector A por un escalar k , se realiza la operación de la siguiente manera:

$$R = \frac{A}{k}$$

Esta operación reduce la magnitud del vector original a $\frac{1}{|k|}$ de su magnitud original si k es positivo, y cambia la dirección del vector si k es negativo. La dirección del resultado sigue siendo la misma que la del vector original.

1.3.1. RESOLUCIÓN DE UN VECTOR

La resolución de problemas de vectores requiere una comprensión sólida de dos enfoques fundamentales: el enfoque gráfico y el enfoque trigonométrico. Al abordar estos problemas, se deben seguir ciertas pautas clave: **GRÁFICA**

En el enfoque gráfico, es esencial comenzar dibujando los vectores involucrados, asegurándose de utilizar una escala adecuada para mediciones precisas. La descomposición en componentes en ejes ortogonales puede simplificar cálculos posteriores. Al buscar la resultante de dos vectores, el método del paralelogramo es invaluable. La medición cuidadosa de magnitudes y ángulos es esencial.

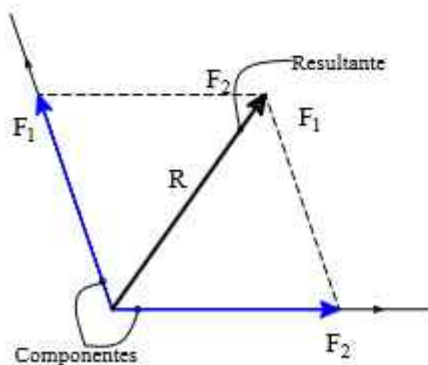


Figura 1.10: Resultante de dos vectores

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El enfoque trigonométrico se basa en la aplicación de funciones trigonométricas como el seno, coseno y tangente para relacionar magnitudes, ángulos y componentes de vectores. Identificar el ángulo correcto y resolver ecuaciones trigonométricas son habilidades esenciales en este enfoque. Los vectores unitarios (i, j, k) pueden simplificar la expresión de componentes.

Ley de cosenos:

$$F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}$$

Ley de senos:

$$\frac{F_1}{\text{sen}(\theta)} = \frac{F_2}{\text{sen}(\beta)} = \frac{F_3}{\text{sen}(\alpha)}$$

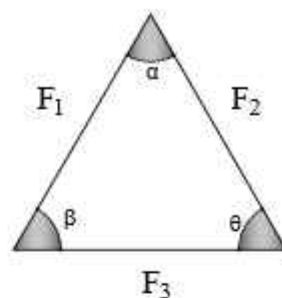
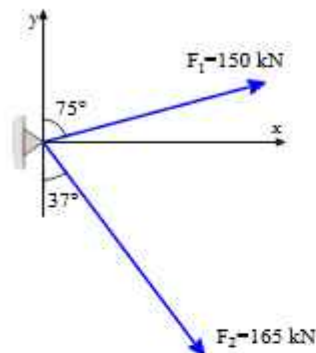


Figura 1.11: Ley de senos y cosenos

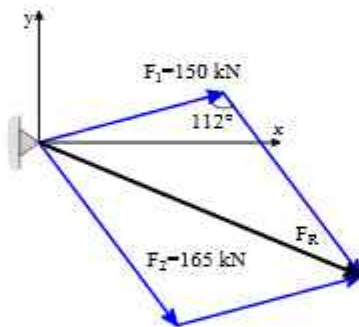
1.3.2. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.1

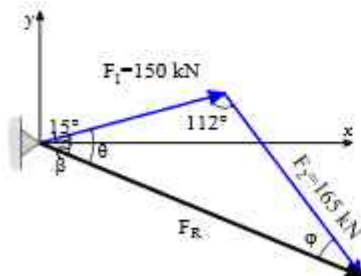
Determine la fuerza resultante y su dirección con respecto al eje x , en sentido de la manecillas del reloj, del sistema de fuerzas mostrado en la figura 1.12 (a).



(a)



(b)



(c)

Figura 1.12

SOLUCIÓN

Datos Iniciales: $F_1 := 150 \text{ kN}$ $F_2 := 165 \text{ kN}$

Paso ①: Ley del paralelogramo, para poder determinar la fuerza resultante debemos usar la ley del paralelogramo, dicho paralelogramo se debe formar dibujando una línea desde la cabeza de F_1 que sea paralela a F_2 , y la otra línea desde la cabeza de F_2 que sea paralela a F_1 . La fuerza resultante F_R , se traza desde el origen hacia el lugar donde estas líneas se intersectan, como se muestra en la figura 1.12 (b).

Paso ②: Solución trigonométrica, aplicamos la ley de cosenos en el triángulo de la figura 1.12 (c); formado a partir del paralelogramo construido, para poder determinar la fuerza resultante

$$F_1 = 150 \text{ kN} \quad F_2 = 165 \text{ kN} \quad \alpha = 112^\circ$$

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cos(\alpha) \cdot F_1 \cdot F_2}$$

$$F_R = 261.282 \text{ kN}$$

Paso ③: Cálculo de la dirección de la fuerza resultante aplicando la ley de senos, según la figura 1.12 (c).

$$\frac{F_2}{\sin(\theta)} = \frac{F_R}{\sin(\alpha)} = \frac{F_1}{\sin(\phi)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{\sin(\alpha) \cdot F_2}{F_R}$$

$$\sin(\theta) \rightarrow \frac{11 \cdot \text{kN} \cdot \sin(112^\circ)}{\sqrt{-(220 \cdot \text{kN}^2 \cdot \cos(112^\circ)) + 221 \cdot \text{kN}^2}} = 0.586$$

$$\theta = \text{asin}(0.586) = 35.874^\circ$$

La dirección de la F_R , será $\beta = \theta - 15^\circ = 20.874^\circ$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} F_R \\ \beta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 261.28 \cdot \text{kN} \\ 20.874^\circ \end{bmatrix}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.2

Para el sistema de fuerzas mostrado en la figura determine trigonómicamente: La magnitud de la fuerza "F" y el ángulo θ , cuando la fuerza resultante es horizontal y tiene una magnitud de $F_R = 380 \text{ kN}$.

SOLUCIÓN

Datos Iniciales:

$$F_1 = 250 \text{ kN} \quad F_R = 380 \text{ kN}$$

Paso ①: Se construye el paralelogramo como se muestra en la figura 1.13 (b), para hallar el valor de F.

Paso ②: Solución trigonométrica: aplicamos la ley de senos en el triángulo de la figura 1.13 (c). Con los datos iniciales y el ángulo que forman las dos fuerzas.

$$F_1 = 250 \text{ kN} \quad F_R = 380 \text{ kN} \quad \alpha = 40^\circ$$

$$\frac{F_1}{\sin(\alpha)} = \frac{F_R}{\sin(140^\circ - \theta)} = \frac{F}{\sin(\theta)} \quad \beta = 140^\circ - \theta$$

$$\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha) \cdot F_R}{F_1} \dots \textcircled{1}$$

$$\sin(\beta) \rightarrow \frac{38 \cdot \sin(40^\circ)}{25} = 0.977$$

$$\theta = 140^\circ - \beta \Rightarrow \theta = 140^\circ - \text{asin}(0.977) = 62.312^\circ$$

Paso ③: Cálculo del valor de F, podemos usar la ley de senos o la ley de cosenos en la figura 1.13 (c).

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_R^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_R \cdot \cos(\theta)}$$

$$F \rightarrow (-190000.0 \cdot \text{kN}^2 \cdot \cos(62.312^\circ) + 206900.0 \cdot \text{kN}^2)^{0.5}$$

$$F = 344.406 \text{ kN}$$

$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} F \\ \theta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 344.406 \cdot \text{kN} \\ 62.312^\circ \end{bmatrix}$$

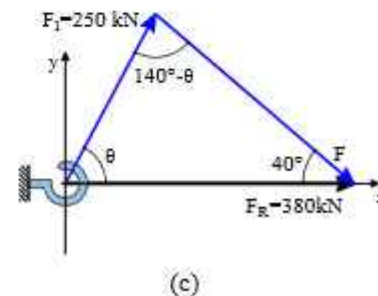
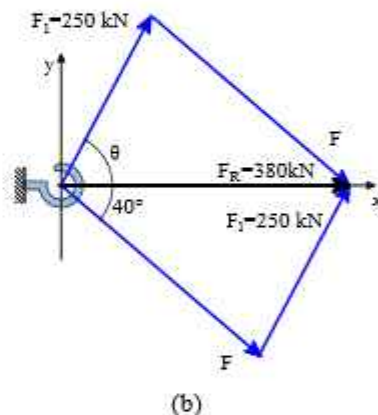
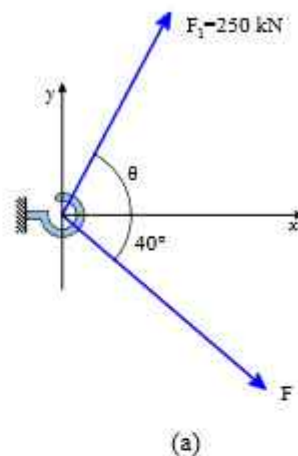
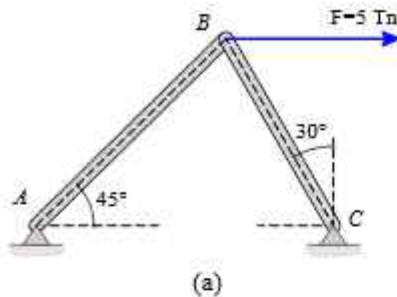


Figura 1.13

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.3

Determine la magnitud de los dos componentes de F , de la estructura mostrada en la figura, componente AB y BC .



SOLUCIÓN

Datos Iniciales:

$$F := 5 \text{ Tn} \quad \alpha := 45^\circ \quad \beta := 60^\circ \quad \theta := 75^\circ$$

Paso ①: En la figura 1.14 (b), se muestra la ley del triángulo (Caso especial de la ley del paralelogramo).

Paso ②: Solución trigonométrica: aplicamos la ley de senos en el triángulo de la figura 1.14 (b), con los datos iniciales:

$$\frac{F_{AB}}{\sin(\beta)} = \frac{F}{\sin(\theta)} = \frac{F_{BC}}{\sin(\alpha)}$$

$$F_{AB} := \frac{F}{\sin(\theta)} \cdot \sin(\beta) = 4.483 \text{ Tn}$$

$$F_{BC} := \frac{F}{\sin(\theta)} \cdot \sin(\alpha) = 3.66 \text{ Tn}$$

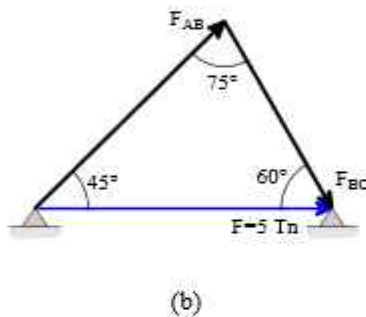


Figura 1.14

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{BC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.483 \\ 3.66 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

Determine la magnitud y dirección de la resultante de las tres fuerzas del sistema mostrado en la figura.

Datos Iniciales: $F_1 := 25 \text{ Tn}$ $F_2 := 15 \text{ Tn}$ $F_3 := 35 \text{ Tn}$

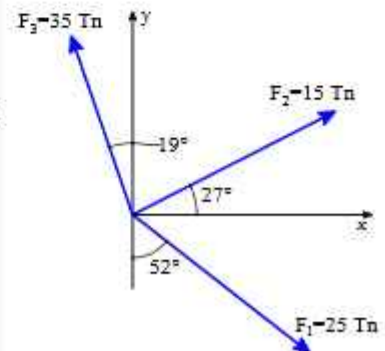
Paso ①: En la figura 1.15 (b), se determinará la primera fuerza resultante F_{R1} de las F_1 y F_2 , para ello se aplicará la ley de cosenos:

$$F_1 = 25 \text{ Tn} \quad F_2 = 15 \text{ Tn} \quad \gamma := 115^\circ$$

$$F_{R1} := \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\gamma)}$$

$$F_{R1} \rightarrow 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-(15 \cdot \text{tonne}^2 \cdot \cos(115 \cdot \text{deg})) + 17 \cdot \text{tonne}^2}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.4



(a)

CONTINUACIÓN

$$F_{R1} = 34.16 \text{ Tn}$$

Paso ②: Cálculo de la dirección de la fuerza resultante F_{R1} aplicando la ley de senos, según la figura 1.15 (c).

$$\frac{F_1}{\sin(\alpha)} = \frac{F_{R1}}{\sin(\gamma)} \quad \sin(\alpha) = \frac{\sin(\gamma) \cdot F_1}{F_{R1}} = 0.66326$$

$$\beta = \text{asin}(0.66326) - 27^\circ = 14.5^\circ$$

Paso ③: En la figura 1.15 (c) se hace uso de la ley de paralelogramo para el cálculo de la fuerza resultante F_R de las F_{R1} y F_3 , para ello se aplicará la ley de cosenos, a partir de la figura 1.15 (d).

$$F_{R1} = 34.16 \text{ Tn} \quad F_3 = 35 \text{ Tn} \quad \phi = 56.5^\circ$$

$$F_R = \sqrt{F_{R1}^2 + F_3^2 - 2 \cdot F_{R1} \cdot F_3 \cdot \cos(\phi)}$$

$$F_R \rightarrow (-2391.2 \cdot \text{tonne}^2 \cdot \cos(56.5 \cdot \text{deg}) + 2391.9056 \cdot \text{tonne}^2)^{0.5}$$

$$F_R = 32.74 \text{ Tn}$$

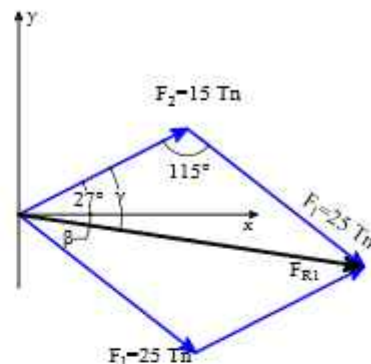
Paso ④: Cálculo de la dirección de la fuerza resultante F_R aplicando la ley de senos, según la figura 1.15 (d).

$$\frac{F_3}{\sin(\theta)} = \frac{F_R}{\sin(\phi)} = \frac{F_{R1}}{\sin(\omega)}$$

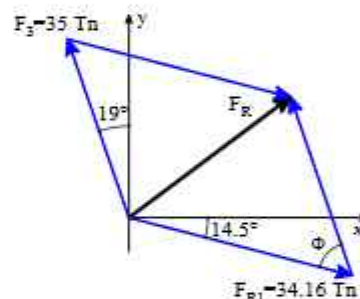
$$\sin(\theta) = \frac{\sin(\phi) \cdot F_3}{F_R} = 0.89136$$

$$\varphi = \text{asin}(0.89136) - \beta = 48.5^\circ$$

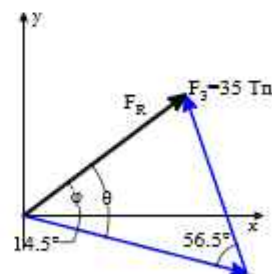
$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} F_R \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.74 \text{ Tn} \\ 48.5^\circ \end{bmatrix}$$



(b)



(c)

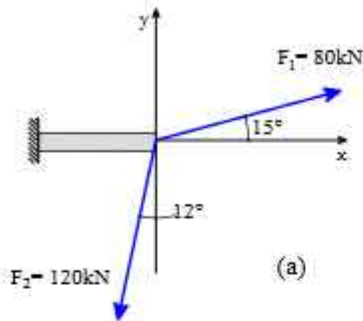


(d)

Figura 1.15

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.5

Determine la magnitud y dirección de la fuerza resultante trigonómicamente, respecto al eje x, para el sistema de fuerzas aplicado en el extremo de la viga en voladizo.



SOLUCIÓN

En la figura 1.16 (c). Aplicamos ley de cosenos para hallar la resultante F_R :

$$F_1 = 80 \text{ kN} \quad F_2 = 120 \text{ kN} \quad \alpha = 63^\circ$$

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cos(\alpha) \cdot F_1 \cdot F_2}$$

$$F_R \rightarrow 40 \cdot \sqrt{-(12 \cdot \text{kN}^2 \cdot \cos(63 \cdot \text{deg})) + 13 \cdot \text{kN}^2}$$

$$F_R = 109.92 \text{ kN}$$

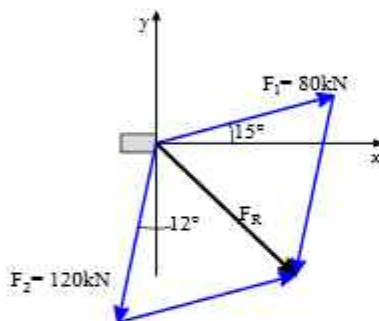
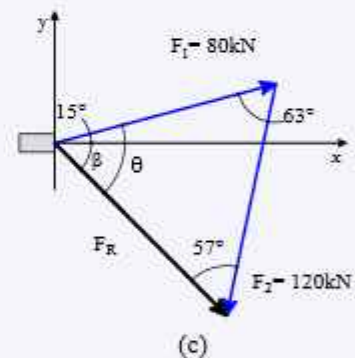
Calculo de la dirección de la fuerza resultante aplicando la ley de senos, según la figura 1.16 (c).

$$\frac{F_2}{\sin(\theta)} = \frac{F_R}{\sin(\alpha)} = \frac{F_1}{\sin(57^\circ)}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\sin(\alpha) \cdot F_2}{F_R} = 0.97271$$

$$\beta = \arcsin(0.97268) - 15^\circ = 61.58^\circ$$

$$\begin{bmatrix} F_R \\ \beta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 109.92 \cdot \text{kN} \\ 61.58 \cdot \text{deg} \end{bmatrix}$$



(b)

Figura 1.16

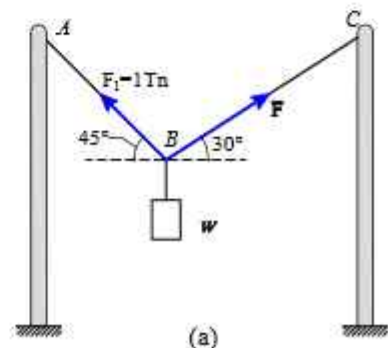
EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.6

Los cables que soportan la caja forman un sistema de fuerzas. Determine: La magnitud de las fuerzas F y w ; w es la resultante del sistema de cables de soporte y se ubica sobre el eje y positivo.

SOLUCIÓN

En la figura 1.17 (c). Aplicamos ley de senos para hallar la resultante F_R y F :

$$F_1 = 1 \text{ Tn} \quad \theta = 60^\circ \quad \beta = 75^\circ \quad \phi = 45^\circ$$



(a)

CONTINUACIÓN

$$\frac{F_1}{\sin(\theta)} = \frac{F_R}{\sin(\beta)} = \frac{F}{\sin(\phi)}$$

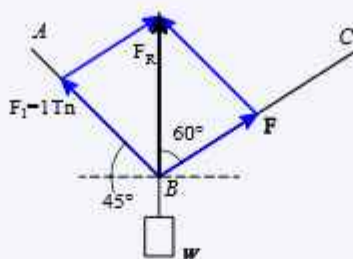
$$F_R = \frac{F_1 \cdot \sin(\beta)}{\sin(\theta)}$$

$$F_R = 1.115 \text{ Tn}$$

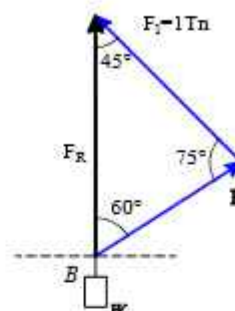
$$F = \frac{F_1 \cdot \sin(\phi)}{\sin(\theta)}$$

$$F = 0.816 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} F_R \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.115 \\ 0.816 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$



(b)



(c)

Figura 1.17

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.7

Determinar las componentes que actúan en las líneas de referencia $x'x'$ e $y'y'$, de la fuerza 25 Tn , si el ángulo $\theta = 30^\circ$.

SOLUCIÓN

Datos Iniciales:

$$F = 25 \text{ Tn}$$

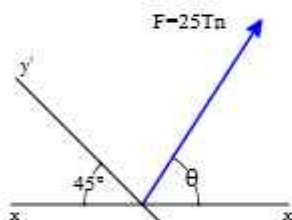
Solución trigonométrica: aplicamos la ley de senos en el triángulo de la figura 1.18 (b).

$$\frac{F_{y'y'}}{\sin(\theta)} = \frac{F_{x'x'}}{\sin(105^\circ)} = \frac{25 \text{ Tn}}{\sin(45^\circ)}$$

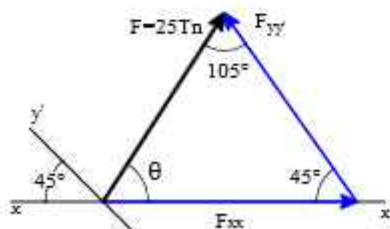
$$F_{y'y'} = \frac{F \cdot \sin(\theta)}{\sin(45^\circ)} = 17.678 \text{ Tn}$$

$$F_{x'x'} = \frac{F \cdot \sin(105^\circ)}{\sin(45^\circ)} = 34.151 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} F_{y'y'} \\ F_{x'x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.678 \\ 34.151 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$



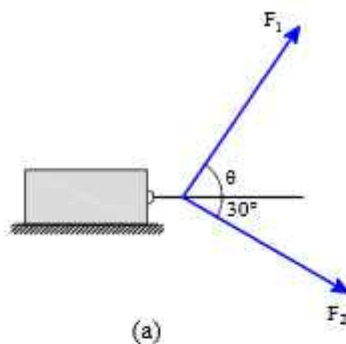
(a)



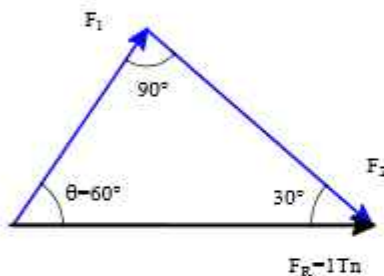
(b)

Figura 1.18

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.8



(a)



(b)

Figura 1.19

Del sistema de fuerzas mostrado en la figura, la fuerza F_1 , debe ser mínima y la resultante tiene una magnitud 1 Tn , que se encuentra sobre el eje "x" positivo. Determine la magnitud de las fuerzas F_1 y F_2 y el ángulo θ .

SOLUCIÓN

Datos Iniciales:

$$F_R = 1 \text{ Tn}$$

Solución trigonométrica: aplicamos la ley de senos en el triángulo de la figura 1.19 (b). Para que la fuerza F_1 sea mínima, la fuerza F_1 y F_2 deben formar un ángulo que forman debe ser 90° , por lo tanto el ángulo $\theta = 60^\circ$

$$\frac{F_R}{\sin(90^\circ)} = \frac{F_2}{\sin(60^\circ)} = \frac{F_1}{\sin(30^\circ)}$$

$$F_2 = \frac{F_R \cdot \sin(\theta)}{\sin(90^\circ)} = 0.866 \text{ Tn} \quad F_1 = \frac{F_R \cdot \sin(30^\circ)}{\sin(90^\circ)} = 0.5 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.866 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

Determine la resultante del sistema de fuerzas y su dirección, medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Datos Iniciales:

$$F_1 = 60 \text{ kN} \quad F_2 = 45 \text{ kN} \quad F_3 = 75 \text{ kN}$$

Solución trigonométrica: aplicamos la ley de cosenos en el triángulo de la figura 1.20 (b). Con los datos iniciales y el ángulo que forman las dos fuerzas.

$$F_1 = 60 \text{ kN} \quad F_2 = 45 \text{ kN} \quad \alpha = 75^\circ$$

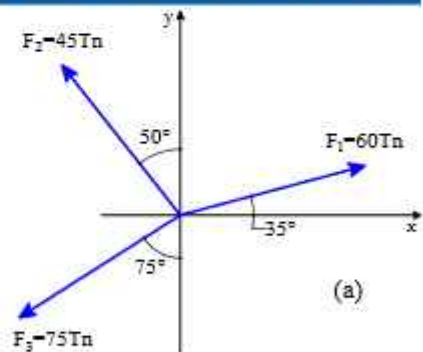
$$F_{R1} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cos(\alpha) \cdot F_1 \cdot F_2} = 65.018 \text{ kN}$$

Calculo de la dirección de la fuerza resultante aplicando la ley de senos, según la figura 1.20 (b).

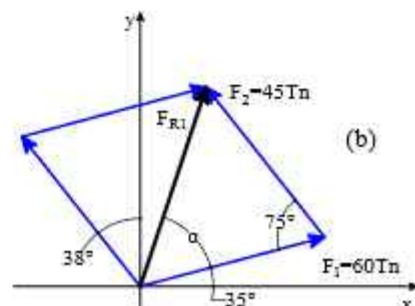
$$\frac{F_2}{\sin(\alpha)} = \frac{F_{R1}}{\sin(75^\circ)} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{\sin(75^\circ) \cdot F_2}{F_{R1}} = 0.669$$

$$\alpha = \arcsin(0.669) = 41.99^\circ \quad \text{ángulo} = \alpha + 35^\circ = 76.99^\circ$$

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.9



(a)



(b)

En la figura 1.20 (d), se determinara la primera fuerza resultante F_R de las fuerzas F_{R1} y F_3 , para ello se aplicara la ley de cosenos:

$$F_{R1} = 65.02 \text{ kN} \quad F_3 = 75 \text{ kN} \quad \phi = 61.99^\circ$$

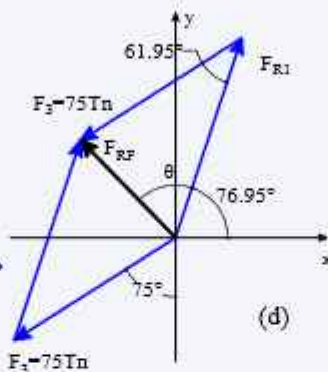
$$F_R = \sqrt{F_{R1}^2 + F_3^2 - 2 \cdot F_{R1} \cdot F_3 \cdot \cos(\phi)} = 72.61 \text{ kN}$$

Calculo de la dirección de la fuerza resultante F_R aplicando la ley de senos, según la figura 1.20 (d).

$$\frac{F_3}{\sin(\theta)} = \frac{F_R}{\sin(\phi)}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\sin(\phi) \cdot F_3}{F_R} = 0.912$$

$$\text{ángulo} = \text{asin}(0.912) + 76.99^\circ = 142.8^\circ$$



CONTINUACIÓN

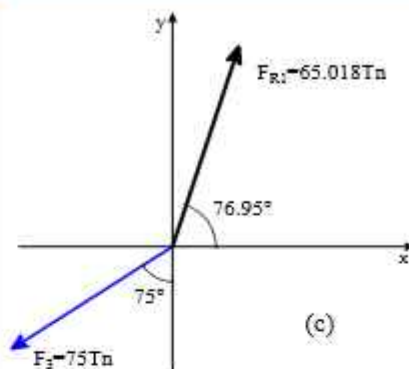


Figura 1.20

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.10

Determine las fuerzas en los elementos CB y BA .

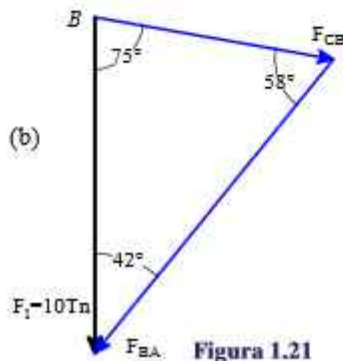
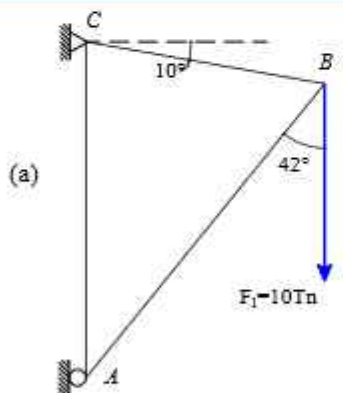


Figura 1.21

SOLUCIÓN

Datos Iniciales:

$$F_1 = 10 \text{ Tn}$$

Solución trigonométrica: aplicamos la ley de senos en el triángulo de la figura 1.21 (b). Con los datos iniciales y el ángulo que forman las dos fuerzas.

$$\frac{F_1}{\sin(58^\circ)} = \frac{F_{BA}}{\sin(80^\circ)} = \frac{F_{CB}}{\sin(42^\circ)}$$

$$F_{BA} = \frac{F_1 \cdot \sin(80^\circ)}{\sin(58^\circ)} = 11.613 \text{ Tn}$$

$$F_{CB} = \frac{F_1 \cdot \sin(42^\circ)}{\sin(58^\circ)} = 7.89 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} F_{BA} \\ F_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.613 \\ 7.89 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.11

Determinar el ángulo θ , usando la ley de senos para que el sistema se encuentre en equilibrio.

SOLUCIÓN

Datos Iniciales:

$$w_1 = 24 \text{ Tn} \quad w_2 = 18 \text{ Tn} \quad T_2 = w_2 = 18 \text{ Tn} \quad \alpha = 37^\circ$$

Solución trigonométrica: aplicamos la ley de senos en el triángulo de la figura 1.22 (b). Con los datos iniciales y el ángulo que forman las dos fuerzas.

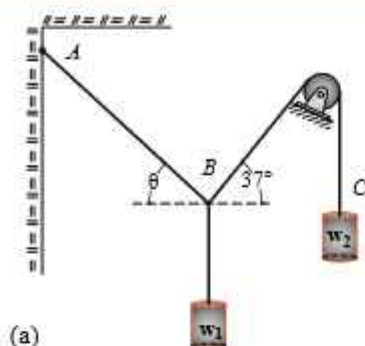
$$T_1 = \sqrt{T_2^2 + w_1^2 - 2 \cdot T_2 \cdot w_1 \cdot \cos(90^\circ - \alpha)}$$

$$T_1 = 19.494 \text{ Tn}$$

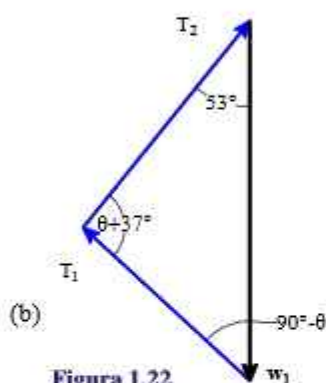
$$\frac{T_2}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{T_1}{\sin(53^\circ)} = \frac{w_1}{\sin(37^\circ + \theta)}$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{\sin(53^\circ) \cdot T_2}{T_1}$$

$$\theta = 90^\circ - \text{asin}\left(\frac{\sin(53^\circ) \cdot T_2}{T_1}\right) = 42.488 \text{ deg}$$



(a)



(b)

Figura 1.22

Determine la fuerza F y la fuerza normal, usando la ley de senos.

SOLUCIÓN

Datos Iniciales:

$$w_1 = 24 \text{ kN}$$

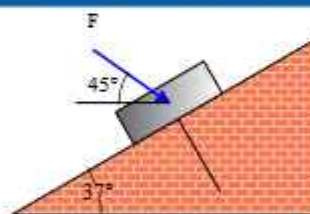
Solución trigonométrica: aplicamos la ley de senos en el triángulo de la figura 1.23 (b).

$$\frac{w_1}{\sin(8^\circ)} = \frac{F}{\sin(37^\circ)} = \frac{N}{\sin(135^\circ)}$$

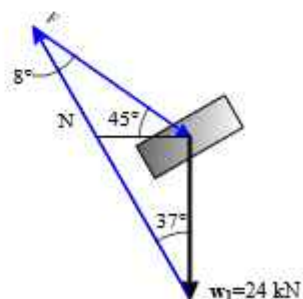
$$F = \frac{\sin(37^\circ)}{\sin(8^\circ)} \cdot w_1 = 103.781 \text{ kN}$$

$$N = \frac{\sin(135^\circ)}{\sin(8^\circ)} \cdot w_1 = 121.939 \text{ kN}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.3.2.12



(a)



(b)

Figura 1.23

1.3.3. EJERCICIOS PROPUESTOS

1

Ejercicios

1.1 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en sentido de las manecillas del reloj.

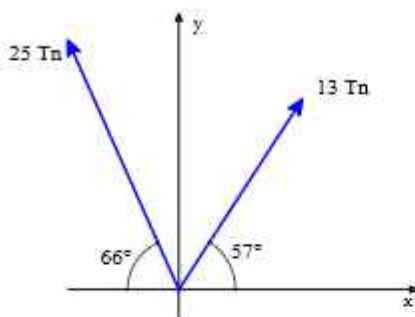


Figura 1.24

1.2 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en sentido de las manecillas del reloj.

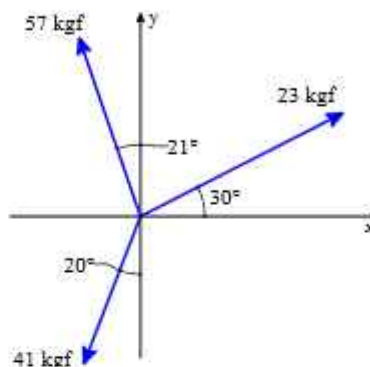


Figura 1.25

1.3 Determine la fuerza F y θ del sistema de fuerzas mostrado en la siguiente figura

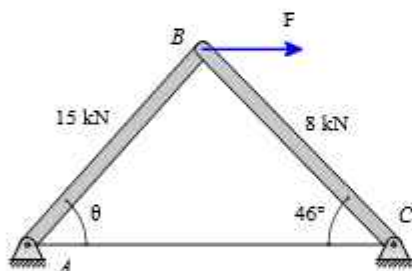


Figura 1.26

1.4 Determine la fuerza F_1 y F_2 , si la magnitud de la fuerza resultante es de $20kN$, si esta está a lo largo del eje y positivo

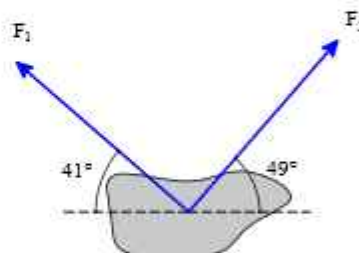


Figura 1.27

1.5 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en sentido de las manecillas del reloj.

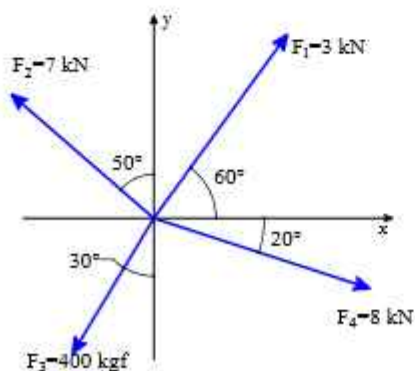


Figura 1.28

1.6 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en sentido de las manecillas del reloj.

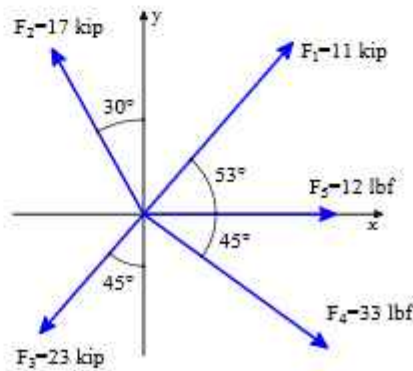


Figura 1.29

1.7 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en sentido de las manecillas del reloj.

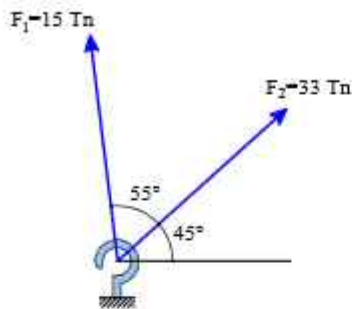


Figura 1.30

1.9 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en sentido de las manecillas del reloj.

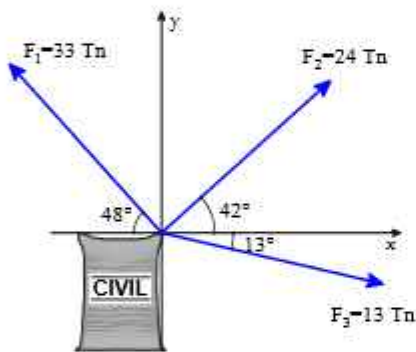


Figura 1.32

1.11 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en sentido de las manecillas del reloj.

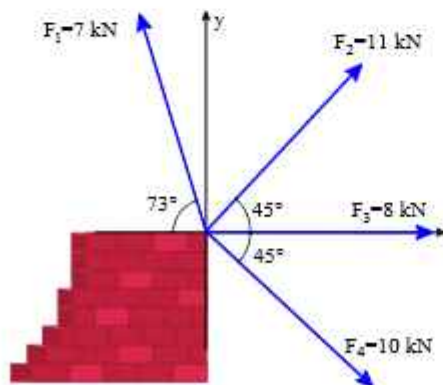


Figura 1.34

1.8 Determine el valor de F_2 y θ , si la fuerza resultante se ubica sobre el eje y^+ , con magnitud de 70kN

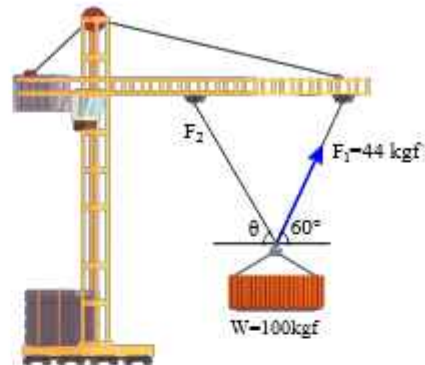


Figura 1.31

1.10 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en sentido de las manecillas del reloj.

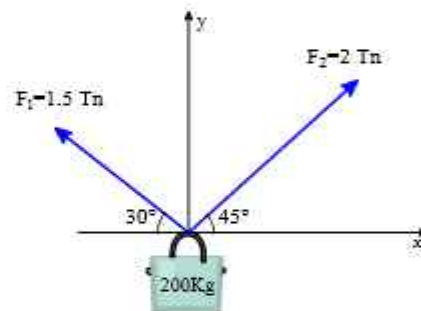


Figura 1.33

1.12 Determine el valor de F_2 y β , si la fuerza resultante se ubica sobre el eje y^+ , con magnitud de 30kN

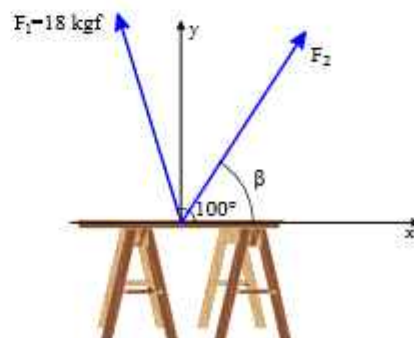


Figura 1.35

1.13 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en sentido de las manecillas del reloj.

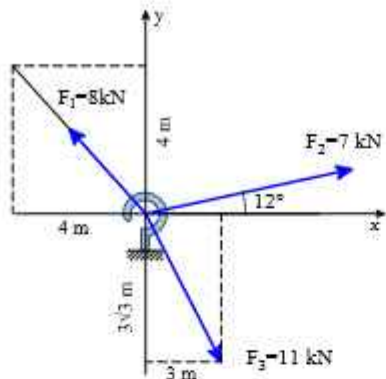


Figura 1.36

1.14 Determine la magnitud de las componentes sobre los eje u y v, de la fuerza 7kN

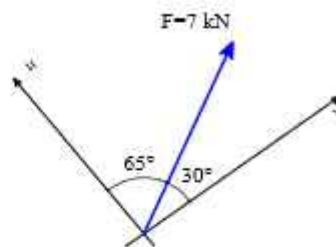


Figura 1.37

1.15 Determine el valor de α y β , si la fuerza resultante se ubica sobre el eje y^+ , con magnitud de 7Tn

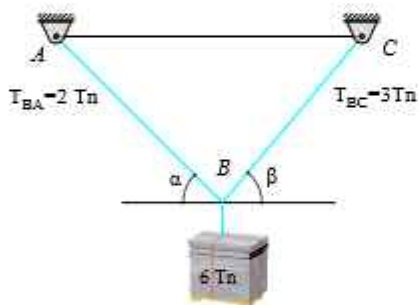


Figura 1.38

1.16 Determine la magnitud de las componentes sobre los eje u y v, de la fuerza 23kN

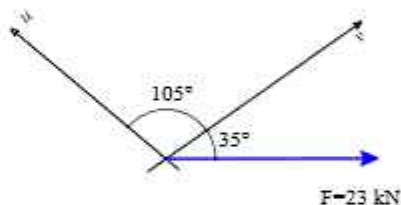


Figura 1.39

1.17 Determine el valor de F_1 y α , si la fuerza resultante se ubica sobre el eje y^+ , con magnitud de 14kN

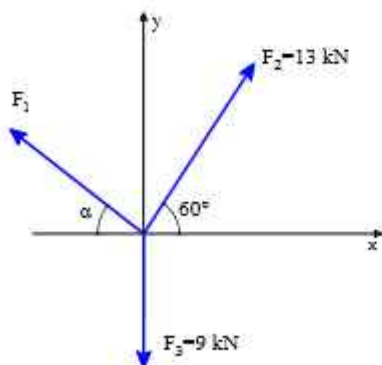


Figura 1.40

1.18 Determine el valor de las fuerzas F_1 y F_2 , si la resultante se ubica como se muestra en la figura.

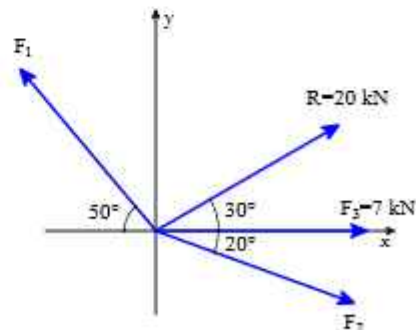


Figura 1.41

1.19 Determine el valor de F_1 y F_2 , si la fuerza resultante se ubica sobre el eje x^+ , con magnitud de 7kN

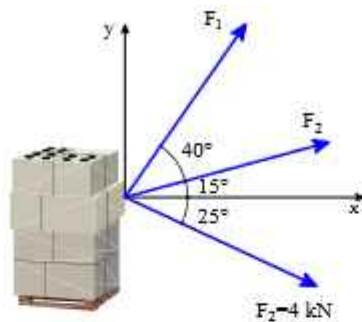


Figura 1.42

1.20 Determinar la fuerza resultante y su dirección en el sentido de las manecillas del reloj

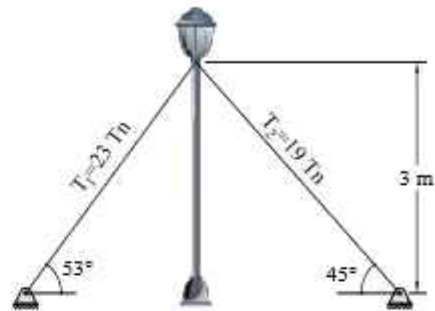


Figura 1.43

1.21 Determine la magnitud de las componentes sobre los eje u y v , de la fuerza resultante.

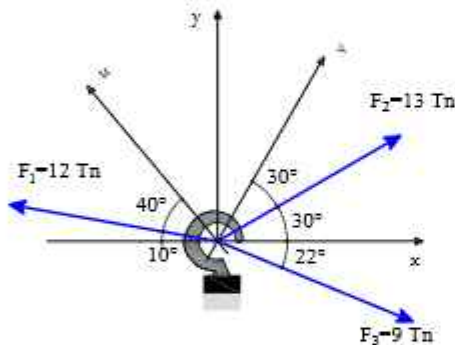


Figura 1.44

1.22 Determinar la magnitud de las componentes de la fuerza 200kN, sobre los ejes y' y xx

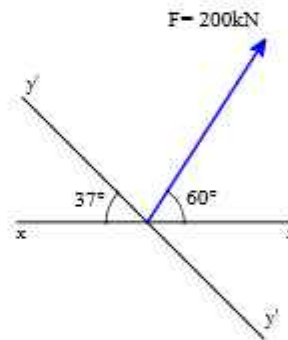


Figura 1.45

1.23 Determine las fuerzas F_1 y F_2 , si la fuerza resultante tiene una magnitud de 50kN, sobre el eje y^+

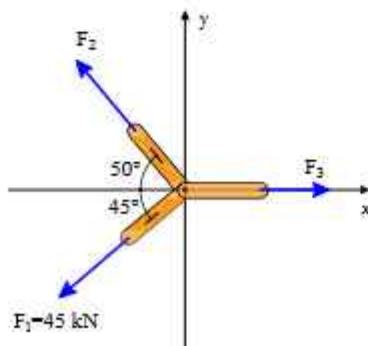


Figura 1.46

1.24 Determinar la fuerza F_1 , si la resultante esta sobre el eje y positivo

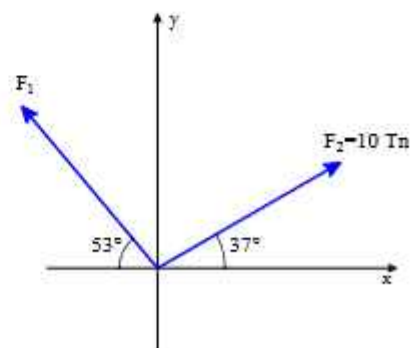


Figura 1.47

1.25 Determinar los ángulos λ y ϕ , si la fuerza resultante tiene una magnitud y dirección de:

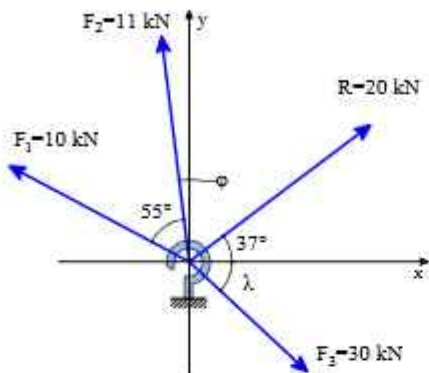


Figura 1.48

1.26 Determinar el ángulo θ , si la fuerza resultante se encuentra sobre el eje y^+

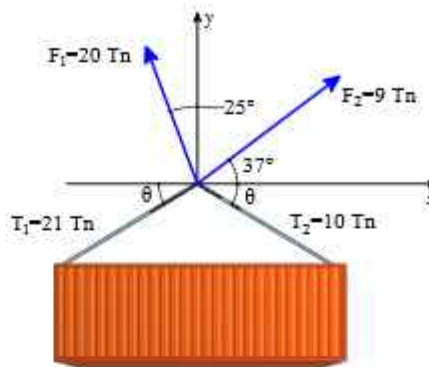


Figura 1.49

1.27 Determine la fuerza F_3 y la magnitud de la resultante si tiene una dirección como se muestra en la figura

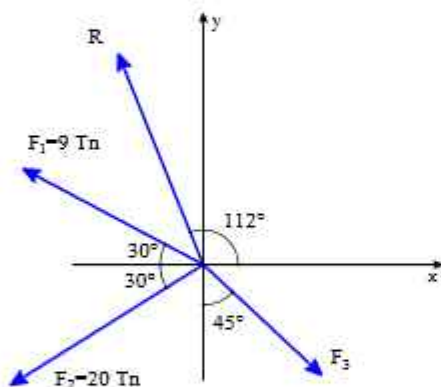


Figura 1.50

1.28 Determine la fuerza necesaria F , para sostener el sistema.

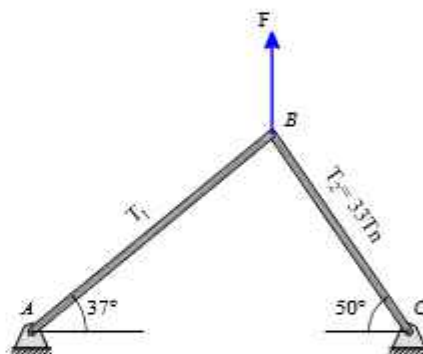


Figura 1.51

1.29 Determine la tensión sobre el cable T_3 , de tal manera que la resultante se encuentre sobre el poste.

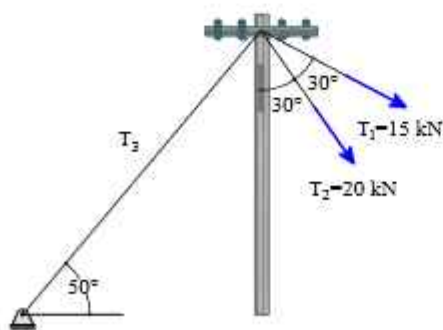


Figura 1.52

1.30 Determine la fuerza F necesaria para sostener el peso de 80 Tn

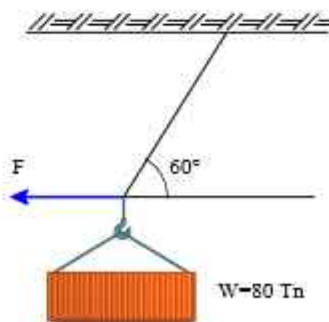
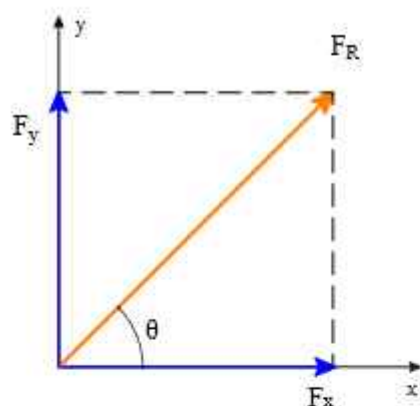
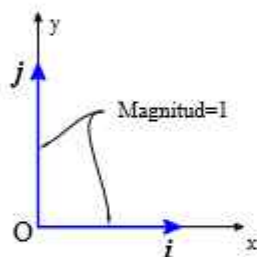


Figura 1.53

1.4. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA



(a)



(b)

1.4.1. EN EL PLANO COORDENADO 2D

Los componentes rectangulares de una fuerza son las dos magnitudes que describen la fuerza en un sistema de coordenadas cartesianas (x, y) . Estas componentes son necesarias para entender la influencia de la fuerza en cada dirección. Es recomendable su aplicación a un conjunto de fuerzas, se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares de la forma siguiente:

$$F_R = F_x + F_y$$

Donde:

- F_x = es la componente de la fuerza en la dirección horizontal (x).
- F_y = es la componente de la fuerza en la dirección vertical (y).
- F_R = es la magnitud de la fuerza.
- θ = es el ángulo entre la fuerza y el eje x .

VECTORES UNITARIOS

Un vector unitario es un vector que tiene una magnitud de 1 y se utiliza para indicar una dirección específica en un sistema de coordenadas. En un sistema de coordenadas cartesianas en plano $2D$ (x, y) , se representa por dos vectores unitarios principales:

- Vector unitario en la dirección del eje x : Denotado como " i ", su magnitud es 1 en la dirección x positiva y 0 en las otras direcciones. Su forma matemática es $i = (1, 0)$.
- Vector unitario en la dirección del eje y : Denotado como " j ", su magnitud es 1 en la dirección y positiva y 0 en las otras direcciones. Su forma matemática es $j = (0, 1)$.

Estos vectores unitarios permiten expresar cualquier vector en el plano como una combinación de sus componentes en las direcciones x, y . Entonces, los vectores unitarios son fundamentales en cálculos vectoriales, ya que facilitan la descripción de direcciones y la descomposición de vectores en sus componentes individuales a lo largo de los ejes.

Las fuerzas escalares multiplicada por su \mathbf{v}_u :

$$\begin{aligned} F_x &= F_x \mathbf{i} & F_y &= F_y \mathbf{j} \\ F_R &= F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Componentes rectangulares de una fuerza en un plano bidimensional (x, y)

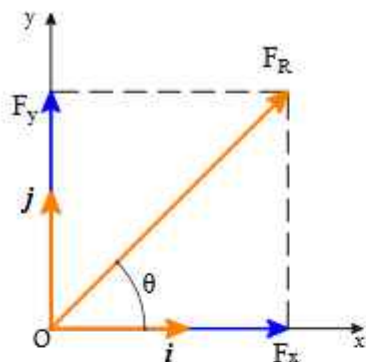


Figura 1.54: Figura.

$$\begin{aligned} F_x &= F_R \cdot \cos(\theta) \\ F_y &= F_R \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dirección de la resultante:

$$\tan(\theta) = \frac{F_y}{F_x}$$

Magnitud de la resultante (teorema de Pitágoras):

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Para un conjunto de fuerzas en el plano:

$$\begin{aligned} \sum F_x = & \\ & -F_3 \cdot \cos(\theta_3) - F_4 \cdot \sin(\theta_4) + F_1 \cdot \cos(\theta_1) + F_2 \cdot \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = & \\ & F_3 \cdot \sin(\theta_3) + F_1 \cdot \sin(\theta_1) + F_2 \cdot \sin(\theta_2) - F_4 \cdot \cos(\theta_4) \end{aligned}$$

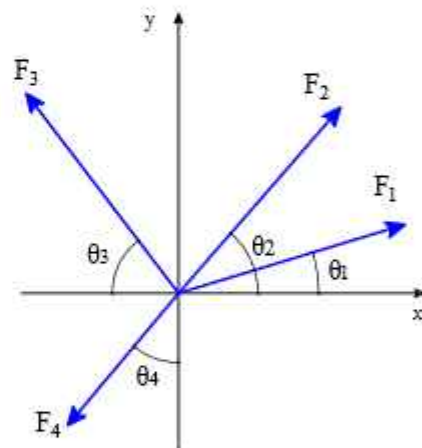


Figura 1.55: Figura.

Dirección de la resultante:

$$\tan(\theta) = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

Magnitud de la resultante por el teorema de Pitágoras:

$$F_R = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2}$$

1.4.2. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 1.4.2.1

Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección, de forma escalar y vectorial.

Notación Escalar

Paso ①: Descomposición de las fuerzas en sus componentes x e y, según la figura 1.56 (b).

$$F_1 = 40 \text{ Tn} \quad \begin{aligned} F_{1x} &= 40 \text{ Tn} \cdot \sin(53^\circ) = 31.945 \text{ Tn} \\ F_{1y} &= 40 \text{ Tn} \cdot \cos(53^\circ) = 24.073 \text{ Tn} \end{aligned}$$

$$F_2 = 20 \text{ Tn} \quad \begin{aligned} F_{2x} &= 20 \text{ Tn} \cdot \sin(37^\circ) = 12.036 \text{ Tn} \\ F_{2y} &= -20 \text{ Tn} \cdot \cos(37^\circ) = -15.973 \text{ Tn} \end{aligned}$$

Paso ②: Tabla de resumen de las fuerzas y sus componentes en x e y

Fuerza	F_x	F_y
Tn	Tn	Tn
40	31.95	24.07
20	12.04	-15.97
$\sum F_i$	43.98	8.10

Paso ③: Determinación de la magnitud de la fuerza resultante y su dirección, como se muestra en la figura 1.56 (c).

$$\sum F_{Rx} = \sum F_x ; \quad F_{Rx} = 43.982 \text{ Tn} \quad (\rightarrow)$$

$$\sum F_{Ry} = \sum F_y ; \quad F_{Ry} = 8.1 \text{ Tn} \quad (\uparrow)$$

$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2} = 44.721 \text{ Tn} \quad \theta := \text{atan}\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right) = 10.435^\circ$$

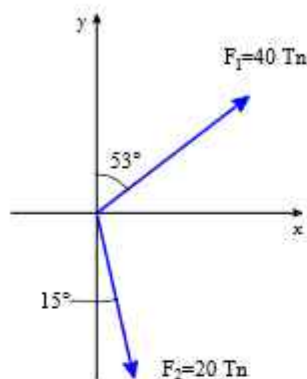
Notación Vectorial

$$F_1 = 40 \text{ Tn} \cdot \cos(37^\circ) i + 40 \text{ Tn} \cdot \sin(37^\circ) j$$

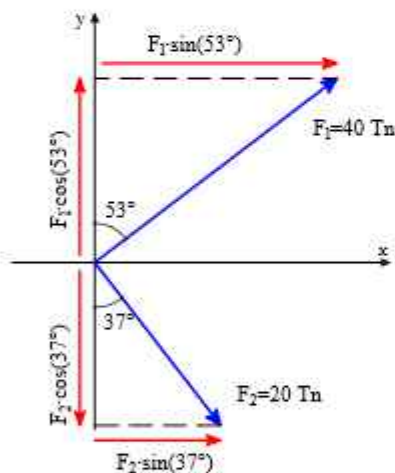
$$F_2 = 20 \text{ Tn} \cdot \sin(37^\circ) i - 20 \text{ Tn} \cdot \cos(37^\circ) j$$

$$F = F_1 + F_2 = (31.945 \text{ Tn} + 12.036 \text{ Tn}) i + \dots \\ \dots (24.073 \text{ Tn} - 15.973 \text{ Tn}) j$$

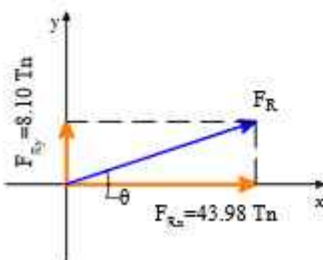
$$F = (43.98 \text{ Tn}) i + (8.10 \text{ Tn}) j$$



(a)



(b)



(c)

Figura 1.56

EJEMPLO RESUELTO 1.4.2.2

Determine el valor de la fuerza F_2 y el ángulo θ , de tal forma que la resultante del sistema de fuerzas se encuentre como se muestra en la figura.

Notación Escalar

Paso ①: Descomposición de las fuerzas en sus componentes x e y, según la figura 1.57 (b).

$$F_1 = 10 \text{ kN} \quad F_{1x} = 10 \text{ kN} \cdot \sin(63^\circ) = 8.91 \text{ kN}$$

$$F_{1y} = 10 \text{ kN} \cdot \cos(63^\circ) = 4.54 \text{ kN}$$

$$F_2 \quad F_{2x} = -F_2 \cdot \cos(\theta)$$

$$F_{2y} = -F_2 \cdot \sin(\theta)$$

$$F_R = 60 \text{ kN} \quad F_{Rx} = 60 \text{ kN} \cdot \cos(53^\circ) = 36.109 \text{ kN}$$

$$F_{Ry} = -60 \text{ kN} \cdot \sin(53^\circ) = -47.918 \text{ kN}$$

Paso ②: Tabla de resumen de las fuerzas y sus componentes en x e y

Fuerza kN	Fx kN	Fy kN
10	8.91	4.54
F_2	$-F_2 \cdot \cos(\theta)$	$-F_2 \cdot \sin(\theta)$
$F_R = 60$	36.11	-47.92

Paso ③: Determinación del valor de F_2 y θ , a partir de la tabla. Finalmente consolidamos en la figura 1.57 (c).

$$\sum F_{Rx} = \sum Fx ; \quad F_2 \cdot \cos(\theta) = -27.199 \text{ kN}$$

$$\sum F_{Ry} = \sum Fy ; \quad F_2 \cdot \sin(\theta) = 52.458 \text{ kN}$$

$$\frac{F_2 \cdot \sin(\theta)}{F_2 \cdot \cos(\theta)} = \frac{52.458 \text{ kN}}{-27.199 \text{ kN}}$$

$$\tan(\theta) = -1.929$$

$$\theta = \text{atan}(-1.929) = -62.598^\circ$$

$$F_2 = \frac{-27.199 \text{ kN}}{\cos(\theta)} = -59.098 \text{ kN}$$

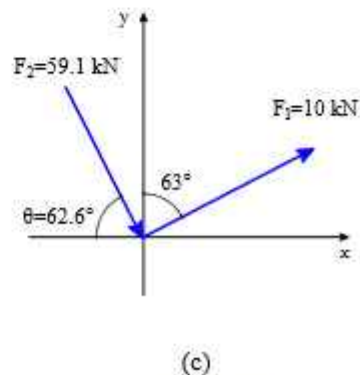
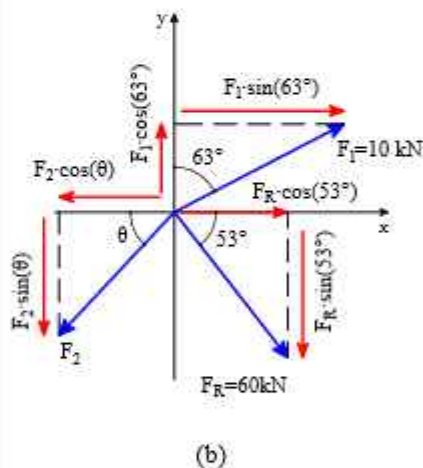
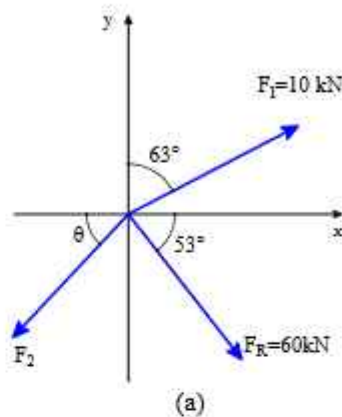


Figura 1.57

EJEMPLO RESUELTO 1.4.2.3

Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección

Notación Escalar

Paso ①: Descomposición de las fuerzas en sus componentes x e y, según la figura 1.58 (b).

$$F_1 := 20 \text{ Tn} \quad F_{1x} := -20 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) = -14.142 \text{ Tn}$$

$$F_{1y} := -20 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) = -14.142 \text{ Tn}$$

$$F_2 := 10 \text{ Tn} \quad F_{2x} := 10 \text{ Tn} \cdot \cos(20^\circ) = 9.397 \text{ Tn}$$

$$F_{2y} := 10 \text{ Tn} \cdot \sin(20^\circ) = 3.42 \text{ Tn}$$

$$F_3 := 50 \text{ Tn} \quad F_{3x} := \frac{3}{5} 50 \text{ Tn} = 30 \text{ Tn}$$

$$F_{3y} := -\frac{4}{5} 50 \text{ Tn} = -40 \text{ Tn}$$

Paso ②: Tabla de resumen de las fuerzas y sus componentes en x e y

Fuerza Tn	Fx Tn	Fy Tn
20	-14.14	-14.14
10	9.40	3.42
50	30.00	-40.00
$\sum F_i$	25.25	-50.72

Paso ③: Determinación de la magnitud de la fuerza resultante y su dirección, como se muestra en la figura 1.58 (c).

$$\sum F_{Rx} = \sum F_x; \quad F_{Rx} = 25.255 \text{ Tn} \quad (\rightarrow)$$

$$\sum F_{Ry} = \sum F_y; \quad F_{Ry} = -50.722 \text{ Tn} \quad (\downarrow)$$

$$F_R := \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2} = 56.661 \text{ Tn} \quad \alpha := \text{atan}\left(\left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right|\right) = 63.531^\circ$$

Notación Vectorial

$$F_1 = -20 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) i - 20 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) j$$

$$F_2 = 10 \text{ Tn} \cdot \cos(20^\circ) i + 10 \text{ Tn} \cdot \sin(20^\circ) j$$

$$F_3 = \frac{3}{5} 50 \text{ Tn} i - \frac{4}{5} 50 \text{ Tn} j$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = (-14.142 \text{ Tn} + 9.397 \text{ Tn} + 30 \text{ Tn}) i + \dots \\ \dots (-14.142 \text{ Tn} + 3.42 \text{ Tn} - 40 \text{ Tn}) j$$

$$F = (25.255 \text{ Tn}) i - (50.722 \text{ Tn}) j$$

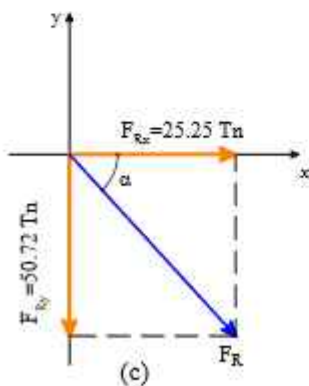
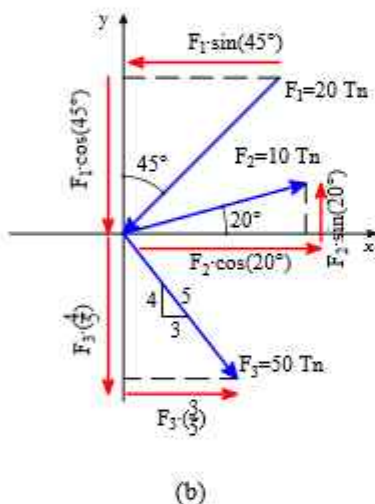
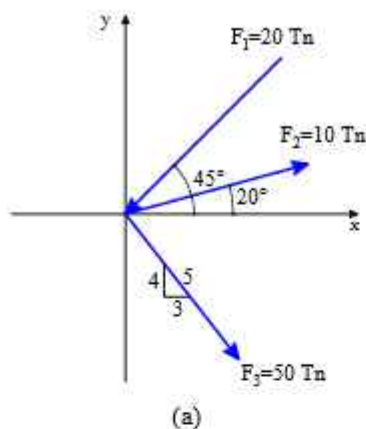


Figura 1.58

EJEMPLO RESUELTO 1.4.2.4

Determine el valor de la fuerza F_2 y el ángulo θ , de tal forma que la resultante del sistema de fuerzas se encuentre como se muestra en la figura.

Notación Escalar

Paso ①: Descomposición de las fuerzas en sus componentes x e y, según la figura 1.59 (b).

$$\begin{aligned}
 F_1 &:= 10 \text{ Tn} & F_{1x} &:= 10 \text{ Tn} \cdot \sin(20^\circ) = 3.42 \text{ Tn} \\
 & & F_{1y} &:= 10 \text{ Tn} \cdot \cos(20^\circ) = 9.397 \text{ Tn} \\
 F_2 & & F_{2x} &= F_2 \cdot \cos(\theta) & F_{2y} &= F_2 \cdot \sin(\theta) \\
 F_3 &:= 80 \text{ Tn} & F_{3x} &:= \frac{3}{5} 80 \text{ Tn} = 48 \text{ Tn} \\
 & & F_{3y} &:= -\frac{4}{5} 80 \text{ Tn} = -64 \text{ Tn} \\
 F_R &:= 30 \text{ Tn} & F_{Rx} &:= 30 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) = 21.213 \text{ Tn} \\
 & & F_{Ry} &:= -30 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) = -21.213 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

Paso ②: Tabla de resumen de las fuerzas y sus componentes en x e y

Fuerza Tn	Fx Tn	Fy Tn
10	3.42	9.40
F_2	$F_2 \cdot \cos(\theta)$	$F_2 \cdot \sin(\theta)$
80	48.00	-64.00
30	21.21	-21.21

Paso ③: Determinación del valor de F_2 y θ , a partir de la tabla. Finalmente consolidamos en la figura 1.59 (c).

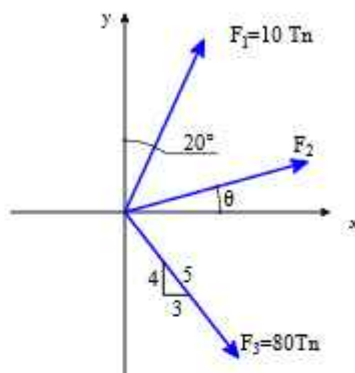
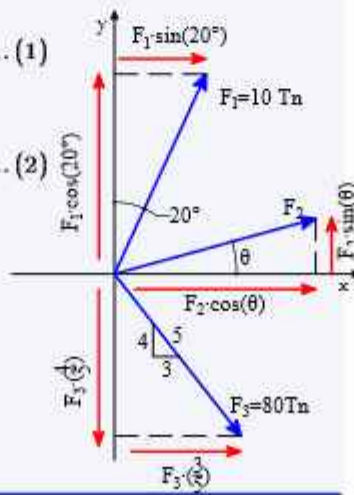
$$\begin{aligned}
 \rightarrow \sum F_{Rx} &= \sum Fx; \\
 F_2 \cdot \cos(\theta) &= -30.207 \text{ Tn} \dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_{Ry} &= \sum Fy; \\
 F_2 \cdot \sin(\theta) &= 33.39 \text{ Tn} \dots (2)
 \end{aligned}$$

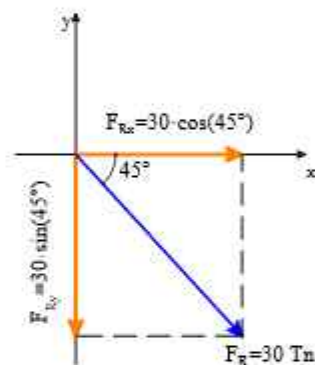
$$\frac{F_2 \cdot \sin(\theta)}{F_2 \cdot \cos(\theta)} = \frac{33.39 \text{ Tn}}{-30.207 \text{ Tn}}$$

$$\theta := \text{atan}(-1.105) = -47.856^\circ$$

$$F_2 = \frac{33.39 \text{ Tn}}{\sin(\theta)} = -45.033 \text{ Tn}$$



(a)



(b)

(c)

(d)

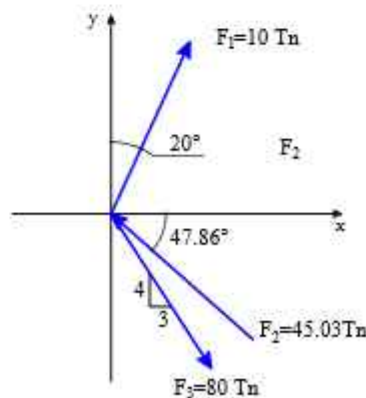


Figura 1.59

EJEMPLO RESUELTO 1.4.2.5

Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección

Notación Escalar

Paso ①: Descomposición de las fuerzas en sus componentes x e y, según la figura 1.60 (b).

$$F_1 = 20 \text{ kip} \quad F_{1x} = 20 \text{ kip} \cdot \cos(40^\circ) = 15.321 \text{ kip}$$

$$F_{1y} = 20 \text{ kip} \cdot \sin(40^\circ) = 12.856 \text{ kip}$$

$$F_2 = 10 \text{ kip} \quad F_{2x} = -10 \text{ kip} \cdot \sin(55^\circ) = -8.192 \text{ kip}$$

$$F_{2y} = 10 \text{ kip} \cdot \cos(55^\circ) = 5.736 \text{ kip}$$

$$F_3 = 15 \text{ kip} \quad F_{3x} = -15 \text{ kip} \cdot \cos(15^\circ) = -14.489 \text{ kip}$$

$$F_{3y} = -15 \text{ kip} \cdot \sin(15^\circ) = -3.882 \text{ kip}$$

$$F_4 = 18 \text{ kip} \quad F_{4x} = \frac{9}{15} 18 \text{ kip} = 10.8 \text{ kip}$$

$$F_{4y} = -\frac{12}{15} 18 \text{ kip} = -14.4 \text{ kip}$$

Paso ②: Tabla de resumen de las fuerzas y sus componentes en x e y

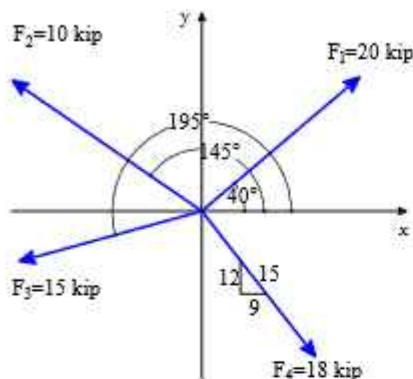
Fuerza kip	F_x kip	F_y kip
20	15.32	12.86
10	-8.19	5.74
15	-14.49	-3.88
18	10.80	-14.40
Σ	3.44	0.31

Paso ③: Determinación de la magnitud de la fuerza resultante y su dirección, como se muestra en la figura 1.60 (c).

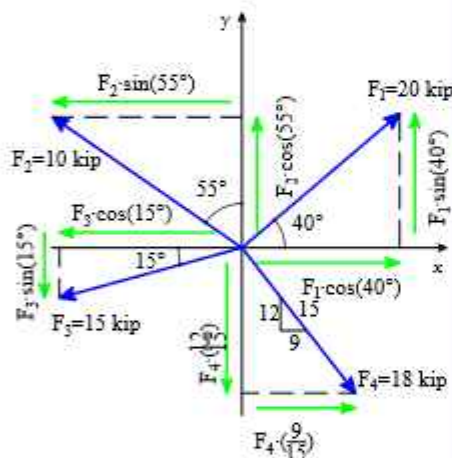
$$\rightarrow \Sigma F_{Rx} = \Sigma F_x; \quad F_{Rx} = 3.44 \text{ kip}$$

$$+\uparrow \Sigma F_{Ry} = \Sigma F_y; \quad F_{Ry} = 0.309 \text{ kip}$$

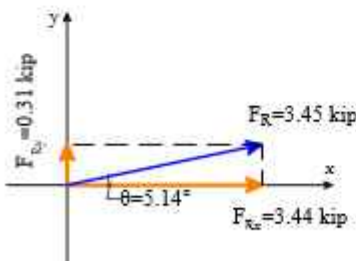
$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2} = 3.454 \text{ kip} \quad \theta = \text{atan}\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right) = 5.136^\circ$$



(a)



(b)



(c)

Figura 1.60

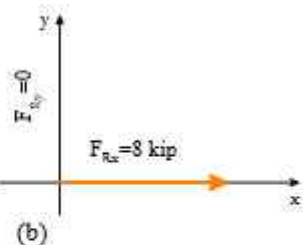
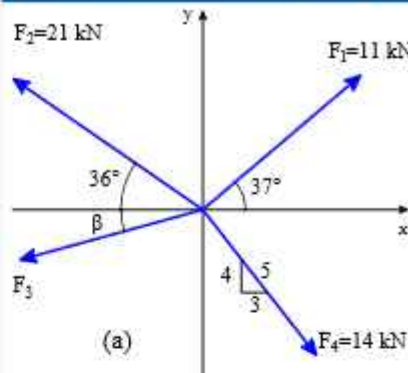
Determine el valor de la fuerza F_3 y el ángulo β , de tal forma que la resultante del sistema de fuerzas se encuentre como se muestra en la figura.

EJEMPLO RESUELTO 1.4.2.6

Notación Escalar

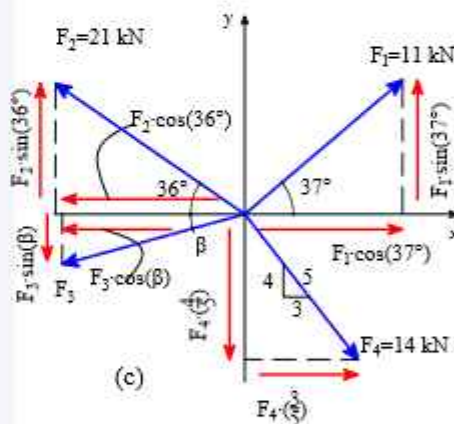
Paso ①: Descomposición de las fuerzas en sus componentes x e y, según la figura 1.61 (b).

$$\begin{aligned}
 F_1 &:= 11 \text{ kN} & F_{1x} &:= 11 \text{ kN} \cdot \cos(37^\circ) = 8.785 \text{ kN} & F_{1y} &:= 11 \text{ kN} \cdot \sin(37^\circ) = 6.62 \text{ kN} \\
 F_2 &:= 21 \text{ kN} & F_{2x} &:= -21 \text{ kN} \cdot \cos(36^\circ) = -16.989 \text{ kN} & F_{2y} &:= 21 \text{ kN} \cdot \sin(36^\circ) = 12.343 \text{ kN} \\
 F_3 & & F_{3x} &:= -F_3 \cdot \cos(\beta) & F_{3y} &:= -F_3 \cdot \sin(\beta) \\
 F_4 &:= 14 \text{ kN} & F_{4x} &:= \frac{3}{5} 14 \text{ kN} = 8.4 \text{ kN} & F_{4y} &:= -\frac{4}{5} 14 \text{ kN} = -11.2 \text{ kN} \\
 F_R &:= 8 \text{ kip} & F_{Rx} &:= 8 \text{ kip} = 35.586 \text{ kN} & F_{Ry} &:= 0 \text{ kip}
 \end{aligned}$$



Paso ②: Tabla de resumen de las fuerzas y sus componentes en x e y

Fuerza kN	Fx kN	Fy kN
11	8.78	6.62
21	-16.99	12.34
F_3	$-F_3 \cdot \cos(\beta)$	$-F_3 \cdot \sin(\beta)$
14	8.40	-11.20
35.59	35.59	0.00



Paso ③: Determinación del valor de F_3 y β , a partir de la tabla. Finalmente consolidamos en la figura 1.61 (c).

$$\rightarrow \sum F_{Rx} = \sum F_x; \quad F_3 \cdot \cos(\beta) = -35.3901 \text{ kN} \quad \dots (1)$$

$$+ \uparrow \sum F_{Ry} = \sum F_y; \quad F_3 \cdot \sin(\beta) = 7.763 \text{ kN} \quad \dots (2)$$

$$\frac{F_3 \cdot \sin(\beta)}{F_3 \cdot \cos(\beta)} = \frac{7.763 \text{ kN}}{-35.3901 \text{ kN}}$$

$$\beta := \text{atan}\left(\frac{7.763 \text{ kN}}{-35.3901 \text{ kN}}\right) = -12.372^\circ \quad F_3 := \frac{-35.3901 \text{ kN}}{\cos(\beta)} = -36.232 \text{ kN}$$

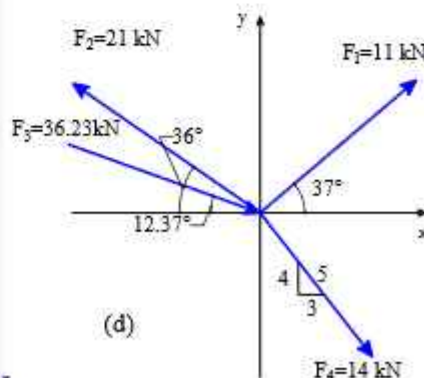
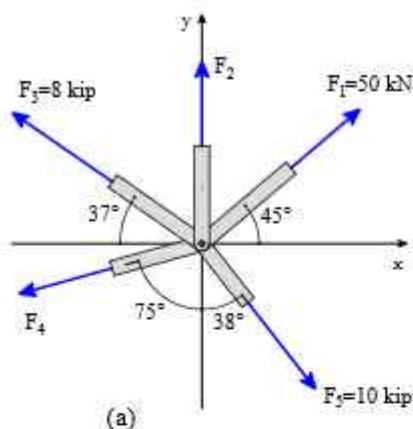


Figura 1.61

EJEMPLO RESUELTO 1.4.2.7

Determine el valor de la fuerza F_2 y F_4 , de tal forma que la resultante del sistema de fuerzas se encuentre sobre el eje x negativo.



Notación Escalar

Paso ①: Descomposición de las fuerzas en sus componentes x e y, según la figura 1.62 (b).

$$F_1 = 50 \text{ kN}$$

$$F_{1x} = 50 \text{ kN} \cdot \cos(45^\circ) = 35.355 \text{ kN}$$

$$F_{1y} = 50 \text{ kN} \cdot \sin(45^\circ) = 35.355 \text{ kN}$$

$$F_3 = 8 \text{ kip}$$

$$F_{3x} = -8 \text{ kip} \cdot \cos(37^\circ) = -28.42 \text{ kN}$$

$$F_{3y} = 8 \text{ kip} \cdot \sin(37^\circ) = 21.416 \text{ kN}$$

$$F_5 = 10 \text{ kip}$$

$$F_{5x} = 10 \text{ kip} \cdot \sin(38^\circ) = 27.386 \text{ kN}$$

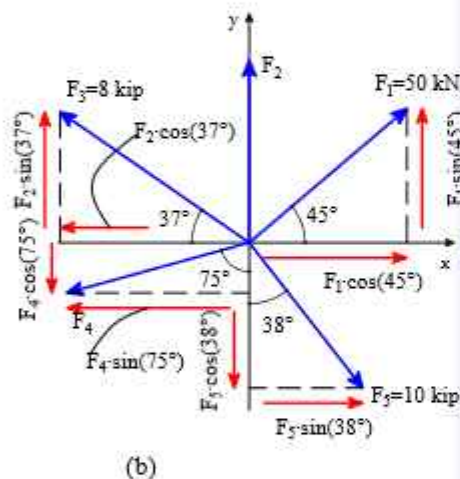
$$F_{5y} = -10 \text{ kip} \cdot \cos(38^\circ) = -35.052 \text{ kN}$$

$$F_2$$

$$F_{2x} = 0 \text{ kN} \quad F_{2y} = F_2$$

$$F_4$$

$$F_{4x} = -F_4 \cdot \sin(75^\circ) \quad F_{4y} = -F_4 \cdot \cos(75^\circ)$$



Paso ②: Tabla de resumen de las fuerzas y sus componentes en x e y

Fuerza	F _x	F _y
kN	kN	kN
50	35.36	35.36
F ₂	0.00	F ₂
35.59	-28.42	21.42
F ₄	$-F_4 \cdot \sin(75^\circ)$	$-F_4 \cdot \cos(75^\circ)$
44.48	27.39	-35.05
F _R	-40.00	0.00

Paso ③: Determinación del valor de F_2 y F_4 , a partir de la tabla. Finalmente consolidamos en la figura 1.62 (c).

$$\rightarrow \sum F_{Rx} = \sum F_x; \quad -F_4 \cdot \sin(75^\circ) = -74.321 \text{ kN}$$

$$F_4 = \frac{74.321 \text{ kN}}{\sin(75^\circ)} = 76.943 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_{Ry} = \sum F_y; \quad F_2 - F_4 \cdot \cos(75^\circ) = -21.719 \text{ kN}$$

$$F_2 = -21.719 \text{ kN} + F_4 \cdot \cos(75^\circ)$$

$$F_2 = -1.805 \text{ kN}$$

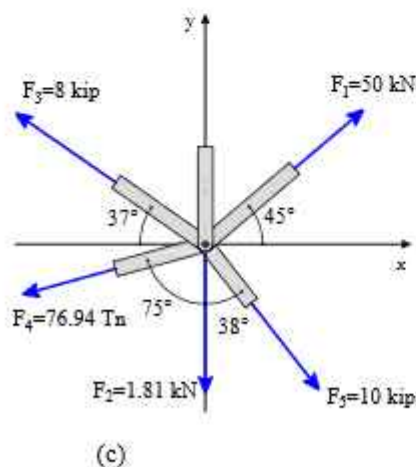


Figura 1.62

Determine la magnitud de la fuerza resultante F_R y el ángulo θ , si la fuerza resultante esta sobre el eje y positivo

Paso ①: Descomposición de las fuerzas en sus componentes x e y, según figura 1.63 (c).

$$F_1 = 500 \text{ lbf} \quad F_{1x} = 500 \text{ lbf} \cdot \cos(\theta)$$

$$F_{1y} = 500 \text{ lbf} \cdot \sin(\theta)$$

$$F_2 = 400 \text{ lbf} \quad F_{2x} = 400 \text{ lbf} \cdot \cos(50^\circ - \theta)$$

$$F_{2y} = 400 \text{ lbf} \cdot \sin(50^\circ - \theta)$$

$$F_3 = 1000 \text{ lbf} \quad F_{3x} = -1000 \text{ lbf} \cdot \cos(\theta)$$

$$F_{3y} = 1000 \text{ lbf} \cdot \sin(\theta)$$

$$F_R \quad F_{Rx} = 0 \quad F_{Ry}$$

Paso ②: Determinamos el valor de θ ,

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_{Rx} = 0$$

$$500 \text{ lbf} \cdot \cos(\theta) + 400 \text{ lbf} \cdot \cos(50^\circ - \theta) - 1000 \text{ lbf} \cdot \cos(\theta) = 0$$

$$\theta = 38.402^\circ$$

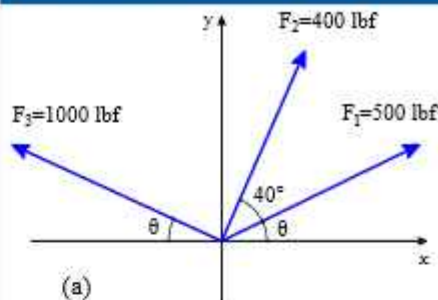
Paso ③: Encontramos la magnitud de la fuerza resultante

$$+\uparrow \sum F_{Ry} = \sum F_y ;$$

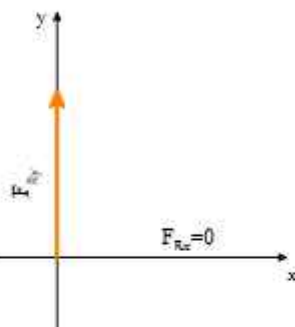
$$F_{Ry} = 500 \text{ lbf} \cdot \sin(\theta) + 400 \text{ lbf} \cdot \sin(50^\circ - \theta) + 1000 \text{ lbf} \cdot \sin(\theta)$$

$$F_{Ry} = 1012.18 \text{ lbf}$$

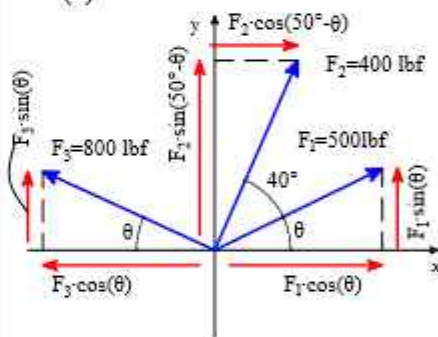
EJEMPLO RESUELTO 1.4.2.8



(a)



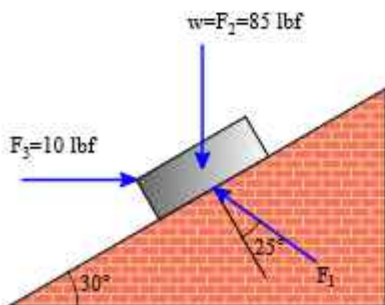
(b)



(c)

Figura 1.63

EJEMPLO RESUELTO 1.4.2.9



(a)

Determine la magnitud de la fuerza F_1 , si la fuerza resultante esta sobre el eje x' positivo, además, determine la magnitud de esta fuerza.

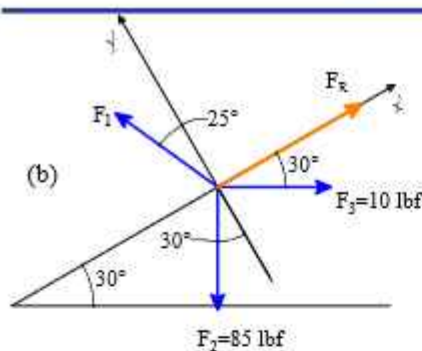
Paso ①: Descomposición de las fuerzas en sus componentes x' e y' , según la figura 1.64 (c).

$$F_1 \quad F_{1x'} = -F_1 \cdot \sin(25^\circ)$$

$$F_{1y'} = F_1 \cdot \cos(25^\circ)$$

$$F_2 = 85 \text{ lbf} \quad F_{2x'} = -85 \text{ lbf} \cdot \sin(30^\circ)$$

$$F_{2y'} = -85 \text{ lbf} \cdot \cos(30^\circ)$$



$$F_3 = 10 \text{ lbf} \quad F_{3x} = 10 \text{ lbf} \cdot \cos(30^\circ)$$

$$F_{3y} = -10 \text{ lbf} \cdot \sin(30^\circ)$$

$$F_R \quad F_{Rx} \quad F_{Ry} = 0$$

Paso ②: Determinamos el valor de la fuerza F_1

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = F_{Ry} = 0$$

$$F_1 \cdot \cos(25^\circ) - 85 \text{ lbf} \cdot \cos(30^\circ) - 10 \text{ lbf} \cdot \sin(30^\circ) = 0$$

$$F_1 = 86.739 \text{ lbf}$$

Paso ③: Encontramos la magnitud de la fuerza resultante

$$+\uparrow \sum F_{Rx} = \sum F_x;$$

$$F_{Rx} = -F_1 \cdot \sin(25^\circ) - 85 \text{ lbf} \cdot \sin(30^\circ) + 10 \text{ lbf} \cdot \cos(30^\circ)$$

$$F_{Rx} = -70.497 \text{ lbf}$$

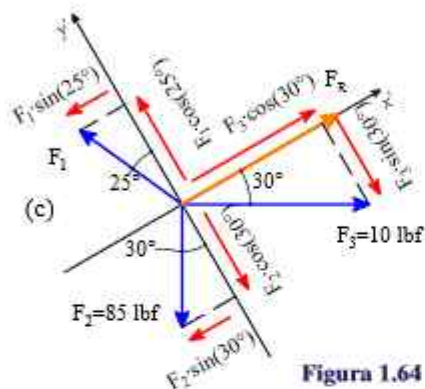


Figura 1.64

Determine el valor de la fuerza F_1 y el ángulo θ , de tal forma que la resultante del sistema de fuerzas se encuentre sobre el eje x'

Paso ①: Descomposición de las fuerzas en sus componentes x e y , según la figura 1.65 (b).

$$F_1 \quad F_{1x} = F_1 \cdot \sin(\theta) \quad F_{1y} = F_1 \cdot \cos(\theta)$$

$$F_2 = 50 \text{ Tn} \quad F_{2x} = -50 \text{ Tn} \quad F_{2y} = 0$$

$$F_3 = 20 \text{ Tn} \quad F_{3x} = 20 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) \quad F_{3y} = -20 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ)$$

$$F_R = 65 \text{ Tn} \quad F_{Rx} = 65 \text{ Tn} \cdot \cos(40^\circ) \quad F_{Ry} = 65 \text{ Tn} \cdot \sin(40^\circ)$$

Paso ②: Determinación del valor de la fuerza F_1 y el ángulo θ

$$\rightarrow \sum F_{Rx} = \sum F_x;$$

$$F_1 \cdot \sin(\theta) - 50 \text{ Tn} + 20 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) = F_R \cdot \cos(40^\circ) \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_{Ry} = \sum F_y;$$

$$F_1 \cdot \cos(\theta) - 20 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) = F_R \cdot \sin(40^\circ) \quad \dots (2)$$

$$F_1 = 102.291 \text{ Tn} \quad \theta = 56.859 \text{ deg}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.4.2.10

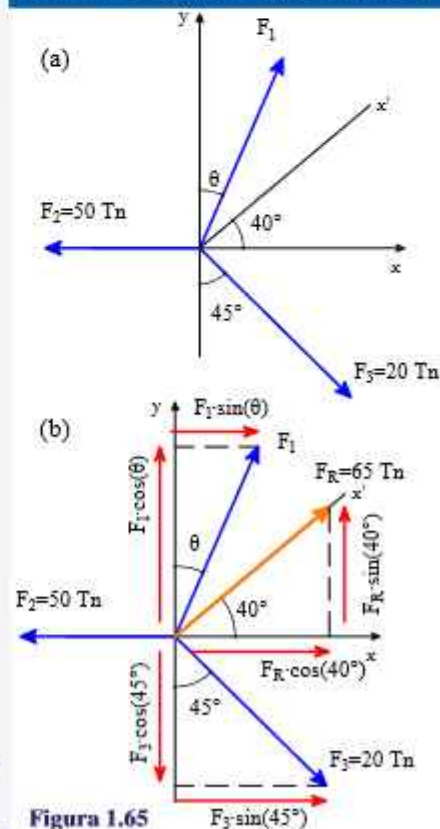


Figura 1.65

1.4.3. EJERCICIOS PROPUESTOS

2

Ejercicios

1.31 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

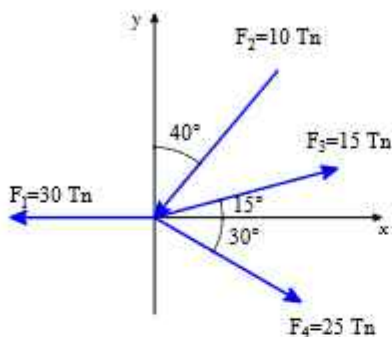


Figura 1.66

1.32 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

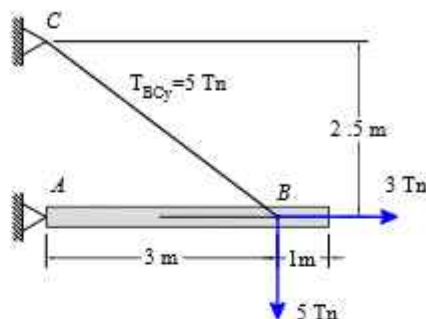


Figura 1.67

1.33 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

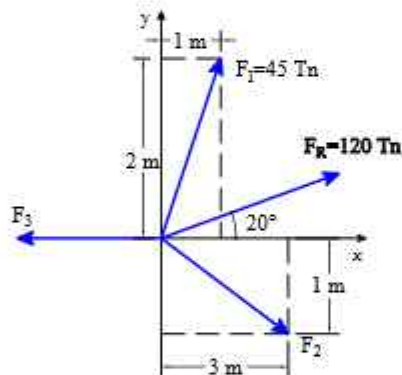


Figura 1.68

1.34 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección, si sobre la barra AB actúa una fuerza de 5 Tn

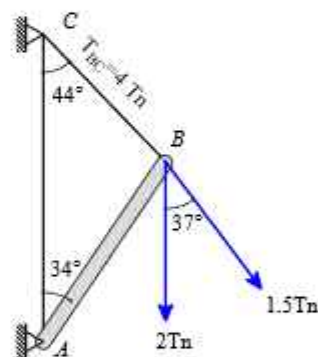


Figura 1.69

1.35 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

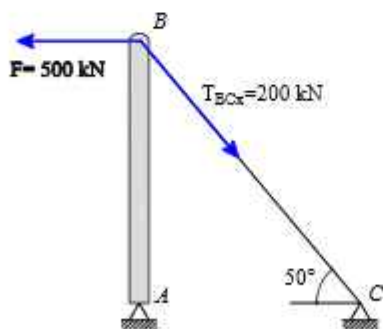


Figura 1.70

1.36 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

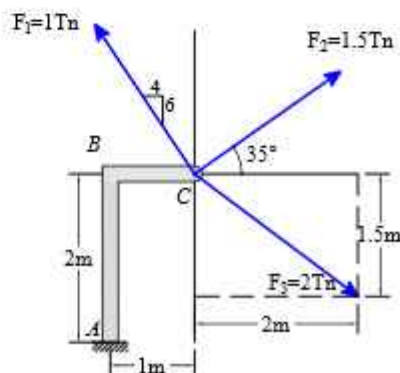


Figura 1.71

1.37 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

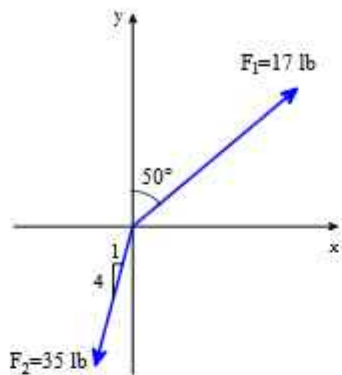


Figura 1.72

1.38 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

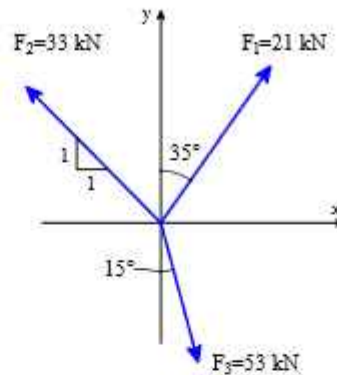


Figura 1.73

1.39 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

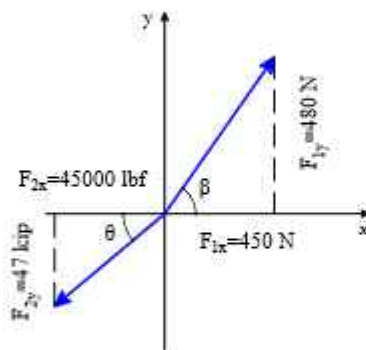


Figura 1.74

1.40 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

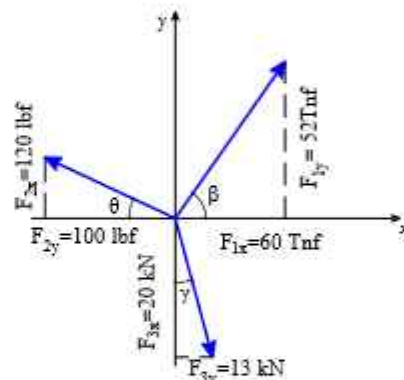


Figura 1.75

1.41 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

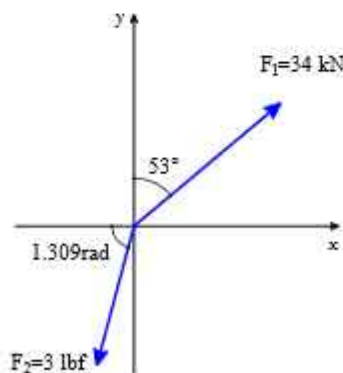


Figura 1.76

1.42 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

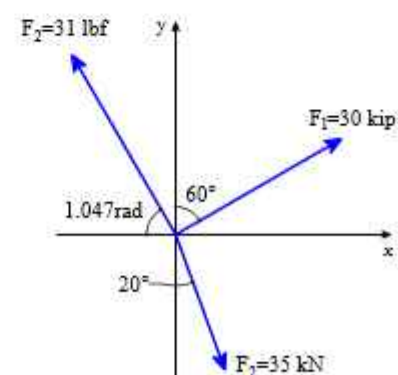


Figura 1.77

1.43 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

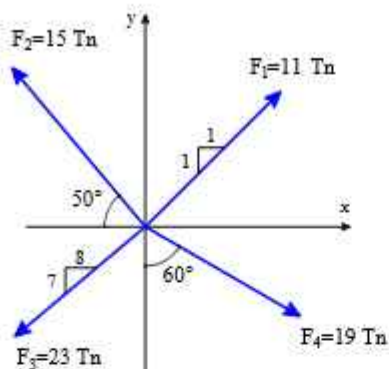


Figura 1.78

1.44 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

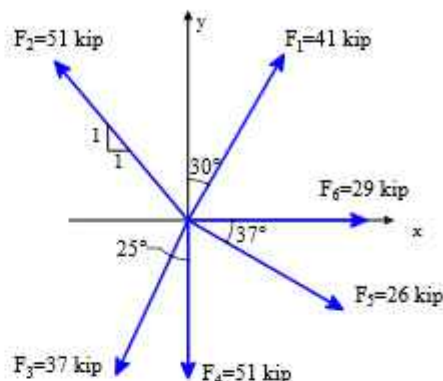


Figura 1.79

1.45 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

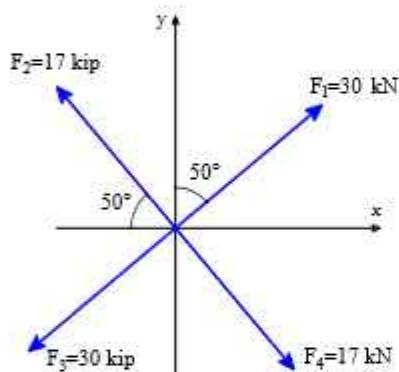


Figura 1.80

1.46 Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

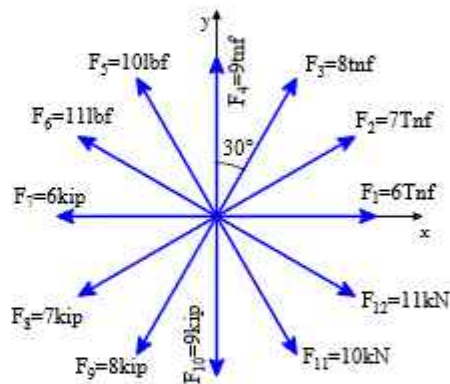


Figura 1.81

1.47 Determinar el valor de la fuerza F_2 y θ , si la fuerza resultante se ubica sobre el eje x^+ .

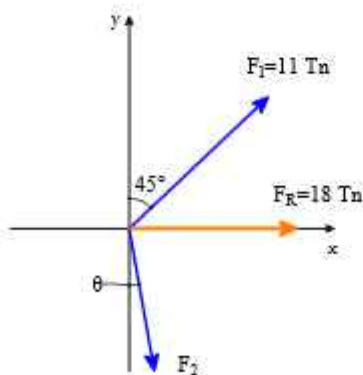


Figura 1.82

1.48 Determinar el valor de la fuerza F_1 y γ , si la fuerza resultante se ubica sobre el eje y^+ .

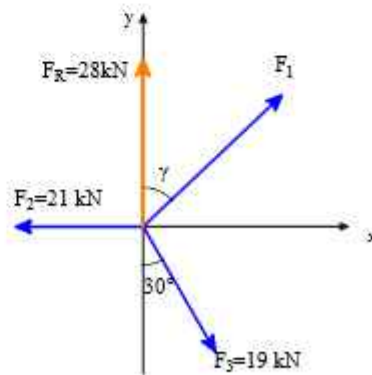


Figura 1.83

1.49 Determinar la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

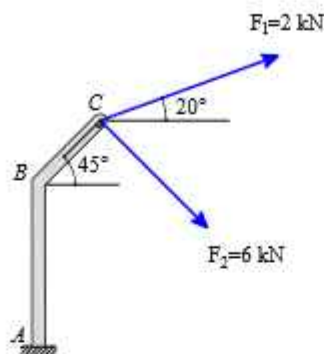


Figura 1.84

1.50 Determinar la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

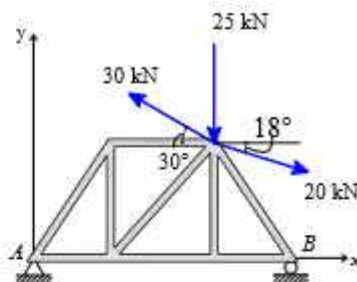


Figura 1.85

1.51 Determinar las componentes sobre los ejes x' e y' , de la fuerza 400 kgf

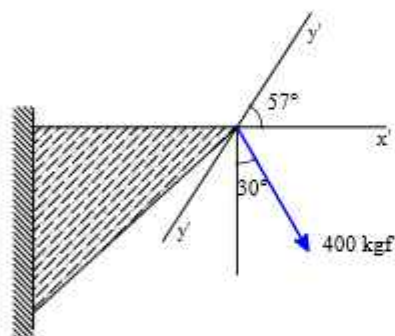


Figura 1.86

1.52 Determinar las componentes sobre los ejes x e y , de la fuerza F_1 y F_2 .

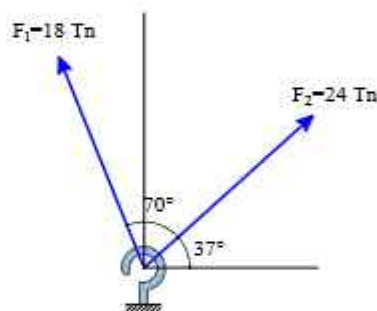


Figura 1.87

1.53 Determinar la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

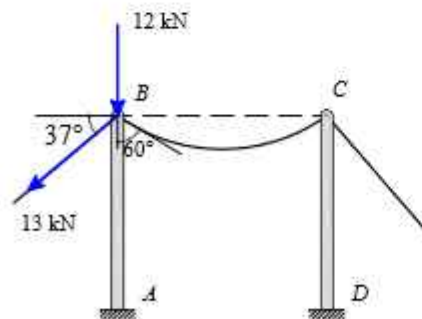


Figura 1.88

1.54 Determinar la magnitud de la fuerza resultante y su dirección, de las dos fuerzas T_{AB} y T_{BC}

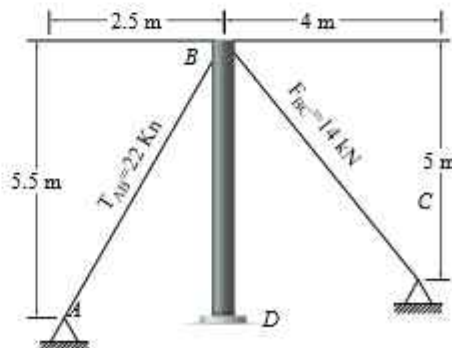


Figura 1.89

1.55 Determinar la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

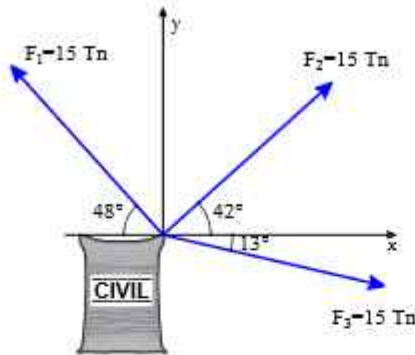


Figura 1.90

1.56 Determinar el valor de F_1 y α , si magnitud de la fuerza resultante es 24kN y se encuentra sobre el eje y^+

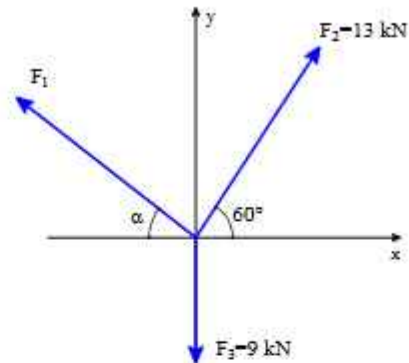


Figura 1.91

1.57 Determinar la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

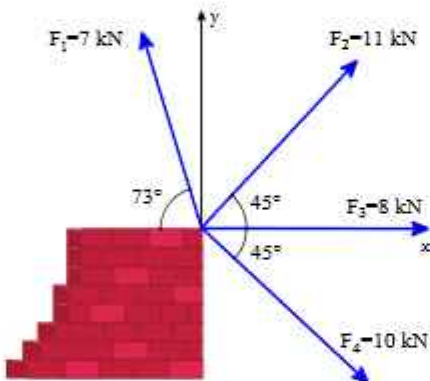


Figura 1.92

1.58 Determine el valor de F_1 y θ , si la fuerza resultante tiene un valor de 34kN (sobre el eje m^+)

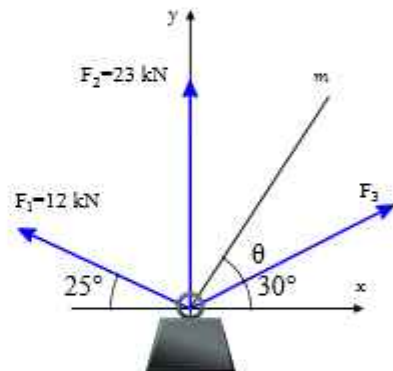


Figura 1.93

1.59 Determinar el valor de F_1 y F_R , si esta última se ubica sobre el eje inclinado positivo.

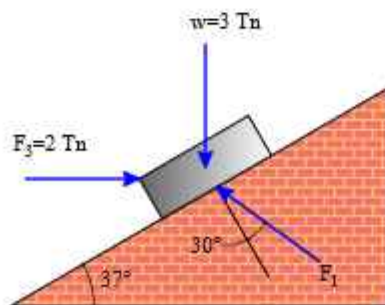


Figura 1.94

1.60 Determinar los valores de θ y β , del siguiente sistema de fuerzas

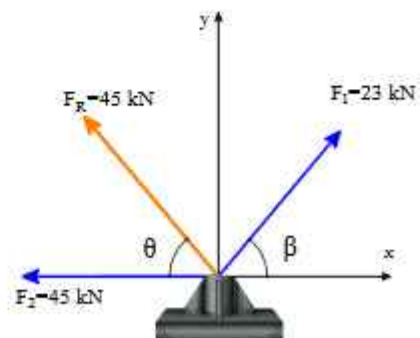


Figura 1.95

1.61 Determine la fuerza resultante y su dirección con respecto al eje x^+ , si la tensión en el cable es $24Tn$

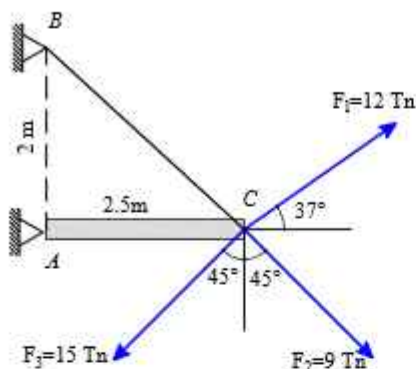


Figura 1.96

1.62 Determine las componentes sobre los ejes m y n

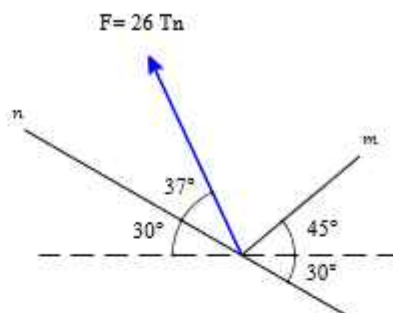


Figura 1.97

1.63 Determine la tensión en el cable AB, si la fuerza resultante se encuentre sobre el eje x^+

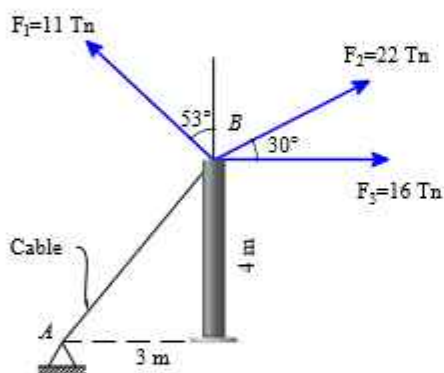


Figura 1.98

1.64 Determine la tensión del cable BC, si la fuerza resultante está a lo largo del poste BD

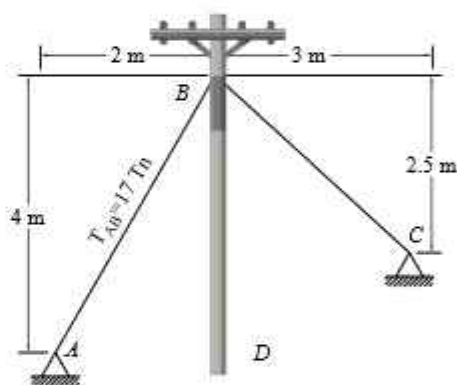


Figura 1.99

1.65 Determine las componentes sobre los ejes m y n de la fuerza $F = 45Tn$

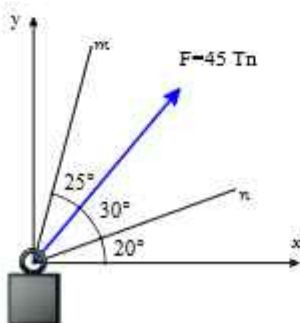


Figura 1.100

1.66 Determine la fuerza resultante y su dirección con respecto al eje x^+

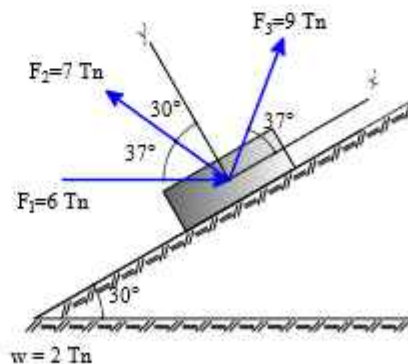


Figura 1.101

1.4.4. EN EL ESPACIO 3D

Un vector unitario es un vector que tiene una magnitud de 1 y se utiliza para indicar una dirección específica en un sistema de coordenadas. Los vectores unitarios son útiles en matemáticas y física para describir la dirección de otros vectores de una manera estandarizada y conveniente.

En un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional (x, y, z) , se suelen utilizar tres vectores unitarios principales:

- Vector unitario en la dirección del eje x : Denotado como " i ", su magnitud es 1 en la dirección x positiva y 0 en las otras direcciones. Su forma matemática es $i = (1, 0, 0)$.
- Vector unitario en la dirección del eje y : Denotado como " j ", su magnitud es 1 en la dirección y positiva y 0 en las otras direcciones. Su forma matemática es $j = (0, 1, 0)$.
- Vector unitario en la dirección del eje z : Denotado como " k ", su magnitud es 1 en la dirección z positiva y 0 en las otras direcciones. Su forma matemática es $k = (0, 0, 1)$.

Estos vectores unitarios permiten expresar cualquier vector en el espacio tridimensional como una combinación de sus componentes en las direcciones " x ", " y ", " z ". Por ejemplo, si tienes un vector F con componentes (F_x, F_y, F_z) , puedes expresarlo como:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad \rightarrow \text{Vector Cartesiano}$$

- Se descompone en sus componentes rectangulares x, y, z

$$F_1 = F \cdot \cos(\theta_2); \quad F_2 = F \cdot \sin(\theta_2)$$

$$F_x = F_2 \cdot \cos(\theta_1) = F \cdot \sin(\theta_2) \cdot \cos(\theta_1)$$

$$F_y = F_2 \cdot \sin(\theta_1) = F \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\theta_1)$$

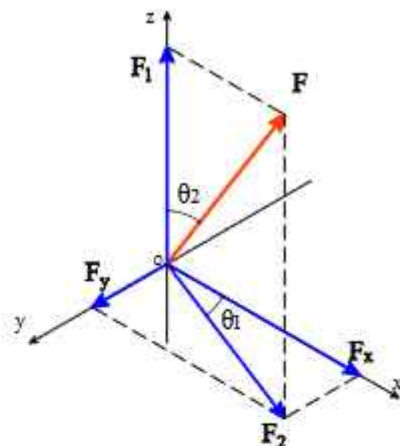
$$F_z = F \cdot \cos(\theta_2)$$

- Para obtener la fuerza resultante, aplicamos el teorema.

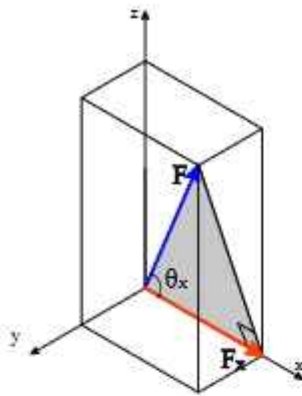
$$F = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2 + \Sigma F_z^2}$$

- Las direcciones que forma con cada componente rectangular $\theta_x, \theta_y, \theta_z$

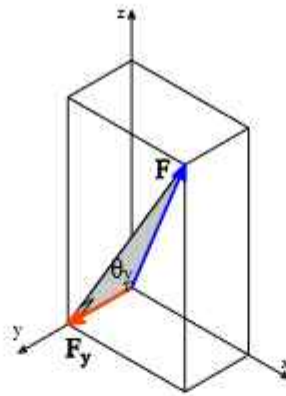
$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cdot \cos(\theta_x) \\ F_y &= F \cdot \cos(\theta_y) \\ F_z &= F \cdot \cos(\theta_z) \end{aligned} \right\} \text{Cosenos Directores}$$



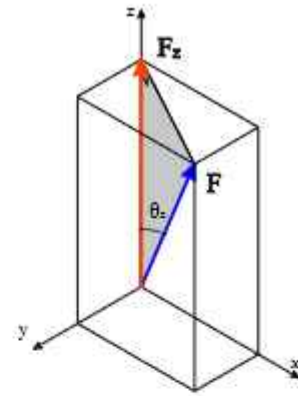
Los vectores unitarios son fundamentales en cálculos vectoriales, ya que facilitan la descripción de direcciones y la descomposición de vectores en sus componentes individuales a lo largo de los ejes.



$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F}$$



$$\cos\theta_y = \frac{F_y}{F}$$



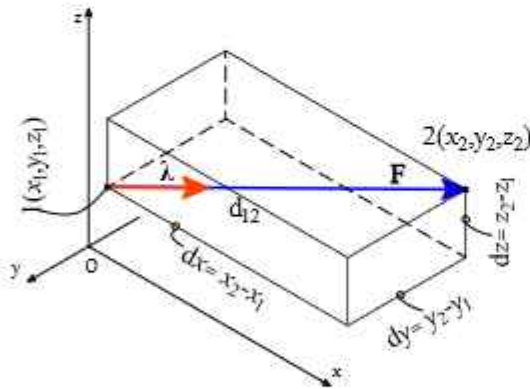
$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$

- Obtención de los cosenos directores

$$u = \frac{\lambda}{F} = \frac{F_x}{F}i + \frac{F_y}{F}j + \frac{F_z}{F}k \quad \longrightarrow \quad u = \cos\theta_x i + \cos\theta_y j + \cos\theta_z k$$

- Además debe cumplir con: $\cos\theta_x^2 + \cos\theta_y^2 + \cos\theta_z^2 = 1$

A. FUERZAS DEFINIDAS EN TÉRMINOS DE SU MAGNITUD Y SU LINEA DE ACCIÓN



$$\overline{d_{12}} = d_x i + d_y j + d_z k$$

$$\lambda = \frac{\overline{d_{12}}}{d_{12}} = \frac{1}{d_{12}} (d_x i + d_y j + d_z k)$$

$$\overline{F} = F\lambda = \frac{F}{d_{12}} (d_x i + d_y j + d_z k)$$

$$F_x = \frac{F \cdot dx}{d_{12}}; \quad F_y = \frac{F \cdot dy}{d_{12}}; \quad F_z = \frac{F \cdot dz}{d_{12}}$$

La distancia "d" entre los puntos 1 y 2:

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Ángulos de los componentes de la magnitud

$$\cos\theta_x = \frac{dx}{d}; \quad \cos\theta_y = \frac{dy}{d}; \quad \cos\theta_z = \frac{dz}{d}$$

1.4.5. EJERCICIOS RESUELTOS

Expresar la fuerza 200 Tn , en un vector cartesiano

Paso ①: Usamos la ley del paralelogramo y trigonometría, para determinar las componentes de la fuerza F en x , y , z ; como se muestra en la figura 1.102 (b).

$$F := 200 \text{ Tn}$$

$$F_z := -200 \text{ Tn} \sin(37^\circ) = -120.363 \text{ Tn}$$

$$F' := 200 \text{ Tn} \cdot \cos(37^\circ) = 159.727 \text{ Tn}$$

$$F_x := 200 \text{ Tn} \cdot \cos(37^\circ) \cdot \cos(45^\circ)$$

$$F_x := 112.944 \text{ Tn}$$

$$F_y := 200 \text{ Tn} \cdot \cos(37^\circ) \cdot \sin(45^\circ)$$

$$F_y := 112.944 \text{ Tn}$$

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$F = (112.944 \text{ Tn}) i + (112.944 \text{ Tn}) j - (120.363 \text{ Tn}) k$$

Comprobación de resultante

$$F := \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 200 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$

Paso ②: Determinación del vector unitario que actúa en la dirección de la fuerza.

$$u = \frac{F}{|F|} = \frac{F_x}{|F|} i + \frac{F_y}{|F|} j + \frac{F_z}{|F|} k$$

$$u = \frac{F}{|F|} = \left(\frac{112.944 \text{ Tn}}{200 \text{ Tn}} \right) i + \left(\frac{112.944 \text{ Tn}}{200 \text{ Tn}} \right) j + \left(\frac{-120.363 \text{ Tn}}{200 \text{ Tn}} \right) k$$

$$u = 0.565 i + 0.565 j - 0.602 k$$

Paso ③: Determinación de los ángulos directores coordenados α , β y γ , figura 1.102 (c).

$$\alpha := \text{acos}(0.565) = 55.598^\circ$$

$$\beta := \text{acos}(0.565) = 55.598^\circ$$

$$\gamma := \text{acos}(-0.602) = 127.013^\circ$$

Comprobación:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1 \quad \text{ok!}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.4.5.1

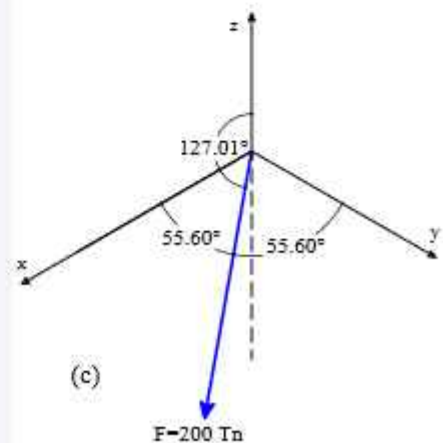
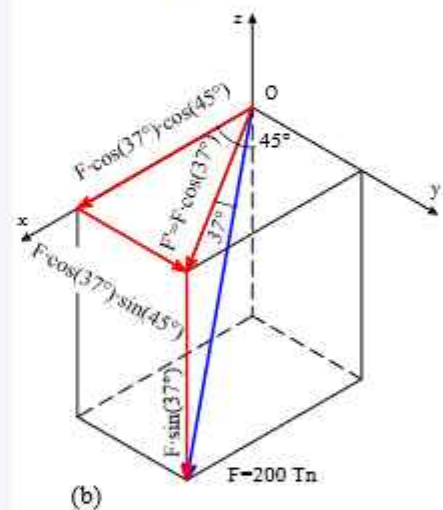
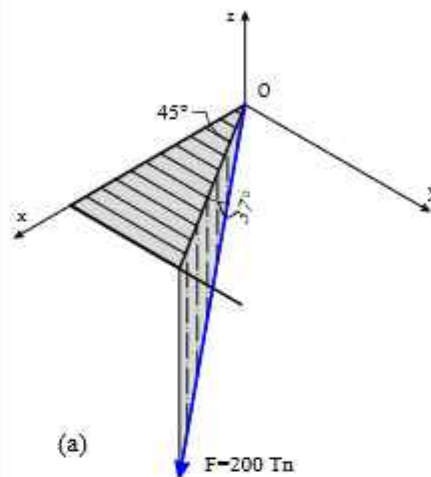


Figura 1.102

EJEMPLO RESUELTO 1.4.5.2

Determine la magnitud de la fuerza resultante y sus ángulos directores coordenados.

Paso ①: Expresamos cada fuerza en su forma de vector cartesiano, figura 1.103 (b).

- Fuerza F_1 :

$$F_1 := 30 \text{ kN} \quad F_2 := 20 \text{ kN}$$

$$\alpha := 135^\circ \quad \beta := 55^\circ$$

El ángulo γ , lo obtenemos de la siguiente forma:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$$

$$\gamma := \text{acos}\left(\sqrt{1 - \cos(135^\circ)^2 - \cos(55^\circ)^2}\right) = 65.573^\circ$$

Determinamos el vector unitario que actúa en la dirección de F_1 y su vector cartesiano, así como para la fuerza F_2 :

$$u_A = \cos(\alpha) i + \cos(\beta) j + \cos(\gamma) k$$

$$u_A = [\cos(\alpha) \quad \cos(\beta) \quad \cos(\gamma)] = [-0.707 \quad 0.574 \quad 0.414]$$

$$F_1 = F_1 \cdot u_A$$

$$F_1 = F_1 \cdot [\cos(\alpha) \quad \cos(\beta) \quad \cos(\gamma)] = [-21.213 \quad 17.207 \quad 12.406] \text{ kN}$$

- Fuerza F_2 :

$$F_2 = F_2 \cdot u_2$$

$$F_2 = F_2 \cdot [1 \quad 0 \quad 0] = [20 \quad 0 \quad 0] \text{ kN}$$

Paso ②: Determinamos la fuerza resultante de la siguiente manera:

$$F_R = \sum F_i \quad \mathbf{F}_R = F_1 + F_2$$

$$[F_x \quad F_y \quad F_z] = \mathbf{F}_R = [-1.213 \quad 17.207 \quad 12.406] \text{ kN}$$

$$F := \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 21.248 \text{ kN}$$

Determinamos el vector unitario en que actúa en la dirección de la fuerza resultante.

$$u_R = \frac{F_R}{F} = \frac{F_x}{F} i + \frac{F_y}{F} j + \frac{F_z}{F} k$$

$$u_R = \left[\frac{F_x}{F} \quad \frac{F_y}{F} \quad \frac{F_z}{F} \right] = [-0.057 \quad 0.81 \quad 0.584]$$

Determinamos los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante, figura 1.103 (c).

$$\alpha := \text{acos}(u_x) = 93.273^\circ$$

$$\beta := \text{acos}(u_y) = 35.92^\circ$$

$$\gamma := \text{acos}(u_z) = 54.277^\circ$$

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$$

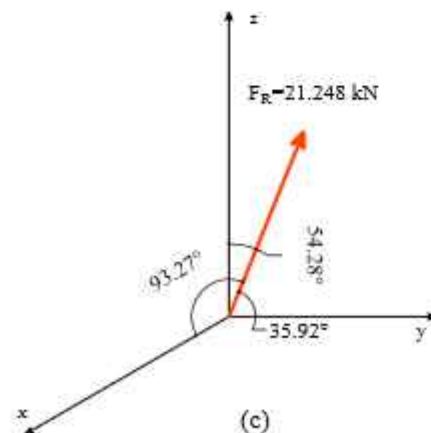
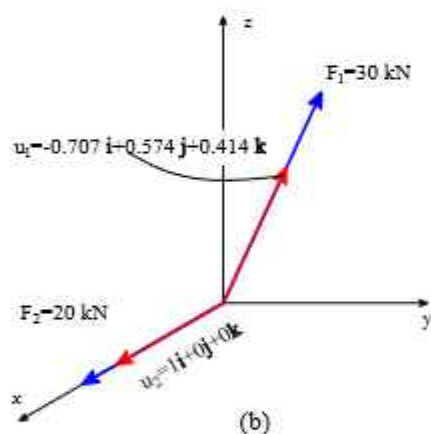
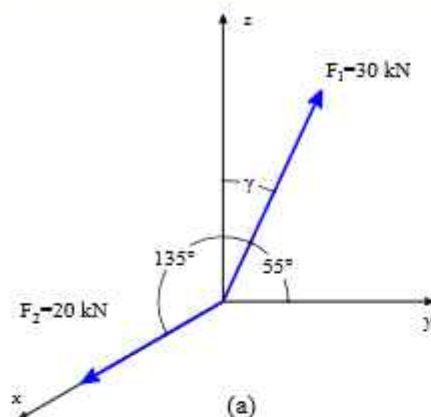


Figura 1.103

Determine la magnitud de la fuerza resultante y sus ángulos directores coordenados.

Paso ①: Expresamos cada fuerza en su forma de vector cartesiano, figura 1.104 (b).

$$F_1 := 35 \text{ Tn} \quad \alpha := 120^\circ \quad \beta := 60^\circ \quad \gamma := 45^\circ$$

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1 \quad \text{ok!}$$

- **Fuerza 1:** Determinamos el vector unitario y su vector cartesiano:

$$u_1 = \cos(\alpha) i + \cos(\beta) j + \cos(\gamma) k$$

$$u_1 = [\cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)] = [-0.5 \ 0.5 \ 0.707]$$

$$F_1 = F_1 \cdot u_1$$

$$F_1 = F_1 \cdot [\cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)] = [-17.5 \ 17.5 \ 24.749] \text{ Tn}$$

- **Fuerza F_2 :** Determinamos el vector unitario y su vector cartesiano:

$$F_2 = 19 \text{ Tn}$$

$$F_{2z} := -F_2 \sin(20^\circ) = -6.498 \text{ Tn} \quad F' := F_2 \cdot \cos(20^\circ) = 17.854 \text{ Tn}$$

$$F_{2x} := F' \cdot \cos(65^\circ) = 19 \text{ Tn} \cdot \cos(20^\circ) \cdot \cos(65^\circ)$$

$$F_{2x} = 7.545 \text{ Tn}$$

$$F_{2y} := F' \cdot \sin(65^\circ) = 19 \text{ Tn} \cdot \cos(20^\circ) \cdot \sin(65^\circ)$$

$$F_{2y} = 16.181 \text{ Tn}$$

$$F_2 = F_{2x}i + F_{2y}j + F_{2z}k$$

$$F_2 = [F_{2x} \ F_{2y} \ F_{2z}] = [7.545 \ 16.181 \ -6.498] \text{ Tn}$$

Paso ②: Determinamos la fuerza resultante de la siguiente manera:

$$F_R = F_1 + F_2 = [-9.955 \ 33.681 \ 18.25] \text{ Tn}$$

$$[F_{Rx} \ F_{Ry} \ F_{Rz}] = F_R = [-9.955 \ 33.681 \ 18.25] \text{ Tn}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} = 39.58 \text{ Tn}$$

$$u_R = \frac{F_R}{|F_R|} = \frac{F_{Rx}}{|F_R|} i + \frac{F_{Ry}}{|F_R|} j + \frac{F_{Rz}}{|F_R|} k$$

$$u_R = \frac{F_R}{|F_R|} = \left(\frac{-9.955 \text{ Tn}}{39.58 \text{ Tn}} \right) i + \left(\frac{33.681 \text{ Tn}}{39.58 \text{ Tn}} \right) j + \left(\frac{18.25 \text{ Tn}}{39.58 \text{ Tn}} \right) k$$

$$u_R = -0.252 i + 0.851 j + 0.461 k$$

Cosenos directores, figura 1.104 (c).

$$\alpha = \cos^{-1}(-0.252) = \text{acos}(-0.252) = 104.596^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}(0.851) = \text{acos}(0.851) = 31.679^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}(0.461) = \text{acos}(0.461) = 62.548^\circ$$

EJEMPLO RESUELTO 1.4.5.3

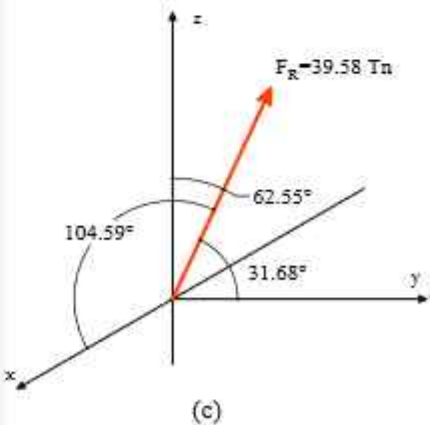
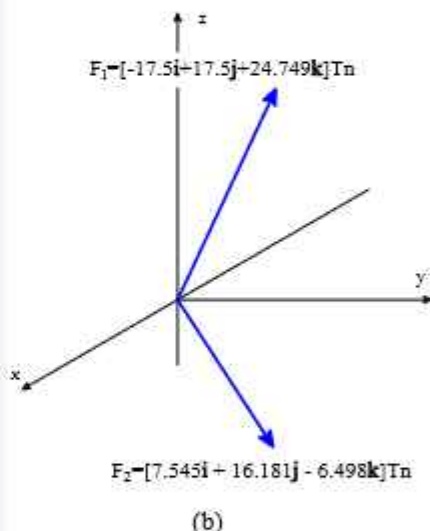
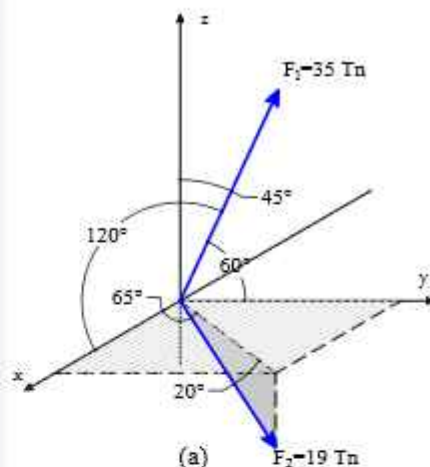
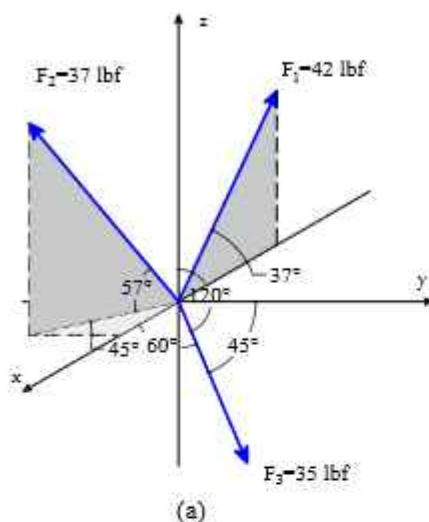


Figura 1.104

EJEMPLO RESUELTO 1.4.5.4

Determine la magnitud de la fuerza resultante y sus ángulos directores coordenados.

Paso ①: Expresamos cada fuerza en su forma de vector cartesiano.



- Fuerza 1:

$$F_1 := 42 \text{ lbf}$$

$$F_{1x} := F_1 \sin(37^\circ) = 25.276 \text{ lbf}$$

$$F_{1y} := -F_1 \cdot \cos(37^\circ) = -33.543 \text{ lbf}$$

$$F_{1z} := 0$$

$$F_1 = F_{1x}i + F_{1y}j + F_{1z}k$$

$$F_1 := [F_{1x} \ F_{1y} \ F_{1z}]$$

$$F_1 = [-33.543 \ 0 \ 25.276] \text{ lbf}$$

- Fuerza 2:

$$F_2 := 37 \text{ lbf}$$

$$F_{2x} := F_2 \sin(57^\circ) = 31.031 \text{ lbf}$$

$$F_{2y} := F_2 \cdot \cos(57^\circ) = 20.152 \text{ lbf}$$

$$F_{2z} := F_{2y} \cdot \cos(45^\circ) = 14.249 \text{ lbf}$$

$$F_{2y} := -F_{2y} \cdot \sin(45^\circ) = -14.249 \text{ lbf}$$

$$F_2 = F_{2x}i + F_{2y}j + F_{2z}k$$

$$F_2 := [F_{2x} \ F_{2y} \ F_{2z}]$$

$$F_2 = [14.249 \ -14.249 \ 31.031] \text{ lb}$$

- Fuerza 3:

$$F_3 := 35 \text{ lbf}$$

$$\alpha_3 := 60^\circ \quad \beta_3 := 45^\circ \quad \gamma_3 := 120^\circ$$

$$u_3 = \cos(\alpha) i + \cos(\beta) j + \cos(\gamma) k$$

$$u_3 := [\cos(\alpha_3) \ \cos(\beta_3) \ \cos(\gamma_3)] = [0.5 \ 0.707 \ -0.5]$$

$$F_3 := F_3 \cdot u_3 = [17.5 \ 24.749 \ -17.5] \text{ lbf}$$

Paso ②: Determinamos la fuerza resultante y sus cosenos directores figura 1.105 (b).

$$F_R := F_1 + F_2 + F_3 = [-1.793 \ 10.499 \ 38.807] \text{ lbf}$$

$$[F_{Rx} \ F_{Ry} \ F_{Rz}] := F_R = [-1.793 \ 10.499 \ 38.807] \text{ lbf}$$

$$F_R := \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} = 40.242 \text{ lbf}$$

$$u_R = \frac{F_R}{|F_R|} = \frac{F_{Rx}}{|F_R|} i + \frac{F_{Ry}}{|F_R|} j + \frac{F_{Rz}}{|F_R|} k$$

$$u_R = \frac{F_R}{|F_R|} = \left(\frac{-1.793 \text{ lbf}}{40.242 \text{ lbf}} \right) i + \left(\frac{10.499 \text{ lbf}}{40.242 \text{ lbf}} \right) j + \left(\frac{38.807 \text{ lbf}}{40.242 \text{ lbf}} \right) k$$

$$u_R = -0.045 i + 0.261 j + 0.964 k$$

$$\alpha := \arccos(-0.045) = 92.579^\circ$$

$$\beta := \arccos(0.261) = 74.871^\circ$$

$$\gamma := \arccos(0.964) = 15.421^\circ$$

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1 \quad \text{ok!}$$

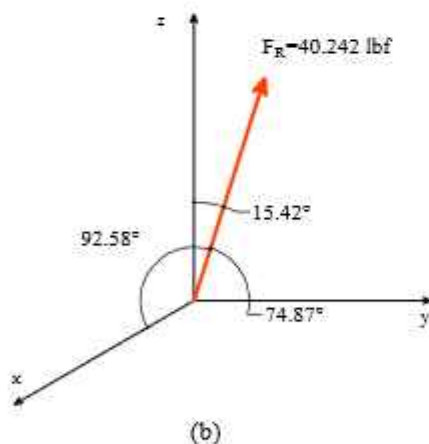


Figura 1.105

EJEMPLO RESUELTO 1.4.5.5

Determine la magnitud de la fuerza F_2 , y expréselo en su vector cartesiano, si la resultante actúa sobre el eje $y+$ con una magnitud de 100 kN.

Paso ①: Expresamos cada fuerza en su forma de vector cartesiano.

- Fuerza 1:

$$F_1 := 80 \text{ kN}$$

$$F_{1x} := F_1 \sin(30^\circ) = 40 \text{ kN}$$

$$F' := F_1 \cdot \cos(30^\circ) = 69.282 \text{ kN}$$

$$F_{1x} := -F_1 \cdot \cos(30^\circ) \cdot \sin(15^\circ) = -17.932 \text{ kN}$$

$$F_{1y} := F_1 \cdot \cos(30^\circ) \cdot \cos(15^\circ) = 66.921 \text{ kN}$$

- Fuerza 2:

$$F_2 = [F_{2x} \ F_{2y} \ F_{2z}]$$

Paso ②: Determinamos el vector cartesiano de F_2 , primero expresamos la fuerza resultante en su forma de vector cartesiano, figura 1.106 (b).

$$F_R = F_1 + F_2 \quad F_R := [0 \ 100 \ 0] \text{ kN}$$

$$F_R = [F_{1x} \ F_{1y} \ F_{1z}] + [F_{2x} \ F_{2y} \ F_{2z}]$$

$$F_{1x} + F_{2x} = 0 \quad -F_1 \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) \cdot \sin(15 \cdot \text{deg}) + F_{2x} = 0 \quad \dots (1)$$

$$F_{1y} + F_{2y} = 100 \quad F_1 \cdot \cos(15 \cdot \text{deg}) \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) + F_{2y} = 100 \text{ kN} \quad \dots (2)$$

$$F_{1z} + F_{2z} = 0 \quad F_1 \cdot \sin(30 \cdot \text{deg}) + F_{2z} = 0 \quad \dots (3)$$

Solver Relaciones de prueba

$$F_{2x} := 1 \text{ kN} \quad F_{2y} := 1 \text{ kN} \quad F_{2z} := 1 \text{ kN}$$

$$-F_1 \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) \cdot \sin(15 \cdot \text{deg}) + F_{2x} = 0$$

$$F_1 \cdot \cos(15 \cdot \text{deg}) \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}) + F_{2y} = 100 \text{ kN}$$

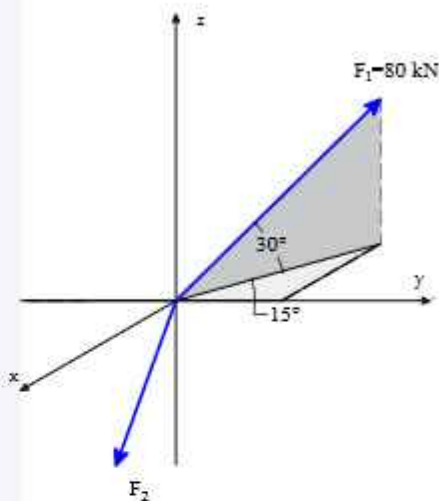
$$F_1 \cdot \sin(30 \cdot \text{deg}) + F_{2z} = 0$$

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{bmatrix} := \text{find}(F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}) = \begin{bmatrix} 17.932 \\ 33.079 \\ -40 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Determinamos la magnitud de la fuerza resultante:

$$F_2 = [F_{2x} \ F_{2y} \ F_{2z}] = [17.932 \ 33.079 \ -40] \text{ kN}$$

$$F_2 := \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2 + F_{2z}^2} = 54.916 \text{ kN}$$



(a)

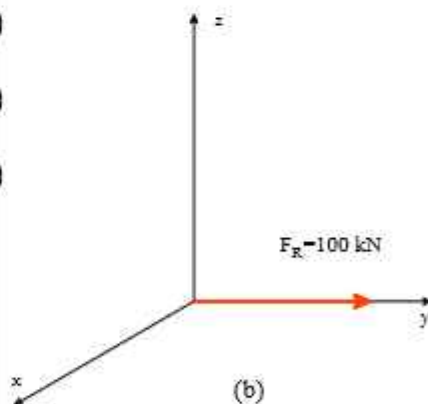
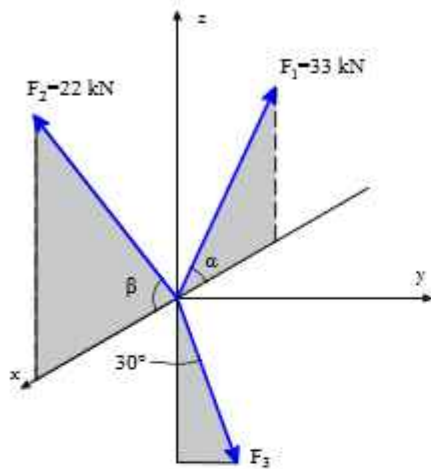


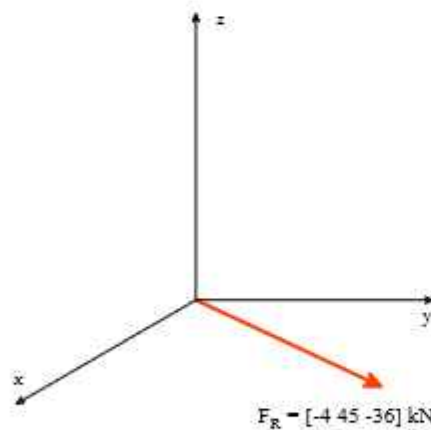
Figura 1.106

EJEMPLO RESUELTO 1.4.5.6

Determine los ángulos α y β , de tal manera que la fuerza resultante tenga un vector cartesiano de $F_R = [-4 \ 45 \ -36] \text{ kN}$.



(a)



(b)

Figura 1.107

Paso ①: Expresamos cada fuerza en su forma de vector cartesiano.

- **Fuerza 1:**

$$F_1 := 33 \text{ kN}$$

$$F_{1x} := F_1 \sin(\alpha) \rightarrow 33 \cdot \text{kN} \cdot \sin(\alpha)$$

$$F_{1y} := -F_1 \cdot \cos(\alpha) \rightarrow -(33 \cdot \text{kN} \cdot \cos(\alpha))$$

$$F_{1z} := 0$$

$$F_1 = [F_{1x} \ F_{1y} \ F_{1z}] = [-F_1 \cdot \cos(\alpha) \ 0 \ F_1 \sin(\alpha)]$$

- **Fuerza 2:**

$$F_2 := 22 \text{ kN}$$

$$F_{2x} := F_2 \sin(\beta) \rightarrow 22 \cdot \text{kN} \cdot \sin(\beta)$$

$$F_{2y} := -F_2 \cdot \cos(\beta) \rightarrow -22 \cdot \text{kN} \cdot \cos(\beta)$$

$$F_{2z} := 0$$

$$F_2 = [F_{2x} \ F_{2y} \ F_{2z}] = [F_2 \cdot \cos(\beta) \ 0 \ F_2 \sin(\beta)]$$

- **Fuerza 3:**

$$F_{3x} := -F_3 \cos(30^\circ) \rightarrow -(F_3 \cdot \cos(30 \cdot \text{deg}))$$

$$F_{3y} := 0$$

$$F_{3z} := F_3 \cdot \sin(30^\circ) \rightarrow F_3 \cdot \sin(30 \cdot \text{deg})$$

$$F_3 = [F_{3x} \ F_{3y} \ F_{3z}] = [0 \ F_3 \cdot \sin(30^\circ) \ -F_3 \cos(30^\circ)]$$

Paso ②: Determinación de los ángulos α y β :

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3$$

$$F_R := [-4 \ 45 \ -36] \text{ kN}$$

$$F_R = [F_{1x} \ F_{1y} \ F_{1z}] + [F_{2x} \ F_{2y} \ F_{2z}] + [F_{3x} \ F_{3y} \ F_{3z}]$$

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 \quad -F_1 \cdot \cos(\alpha) + F_2 \cdot \cos(\beta) + 0 = -4 \text{ kN} \quad \dots (1)$$

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \quad F_3 \cdot \sin(30^\circ) = 45 \text{ kN} \quad F_3 = 90 \text{ kN}$$

$$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = 0 \quad F_1 \sin(\alpha) + F_2 \sin(\beta) - F_3 \cos(30^\circ) = -36 \text{ kN} \quad \dots (2)$$

solución por prueba

$$\alpha := 1 \text{ deg} \quad \beta := 1 \text{ deg}$$

$$-F_1 \cdot \cos(\alpha) + F_2 \cdot \cos(\beta) = -4 \text{ kN}$$

$$F_1 \cdot \sin(\alpha) + F_2 \cdot \sin(\beta) - F_3 \cdot \cos(30^\circ) = -36 \text{ kN}$$

$$\text{find}(\alpha, \beta) = \left[\begin{array}{c} 53 \\ 45 \end{array} \right] \text{ deg}$$

1.4.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

3

Ejercicios

1.67 Determinar las componentes rectangulares de la fuerza de tensión.

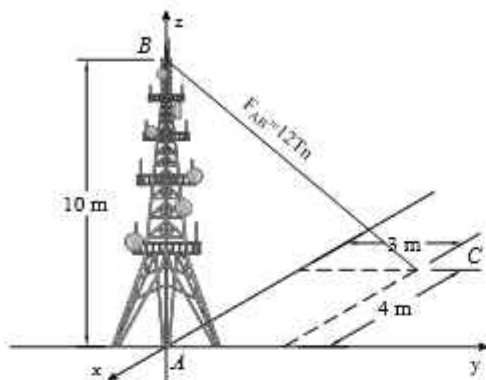


Figura 1.108

1.68 Expresar la fuerza $F = 222\text{kN}$, como un vector cartesiano

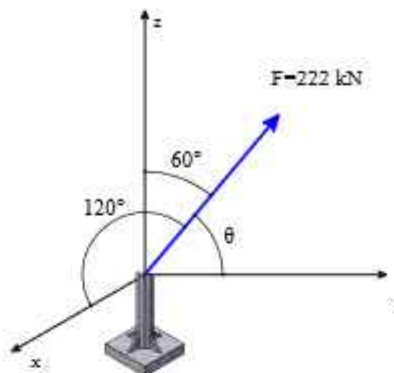


Figura 1.109

1.69 Determinar la magnitud de la fuerza resultante y sus ángulos directores coordenados.

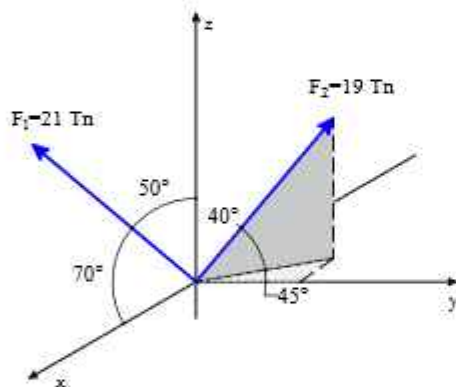


Figura 1.110

1.70 Determine la magnitud de la fuerza F, si las componentes de su vector cartesiano son:

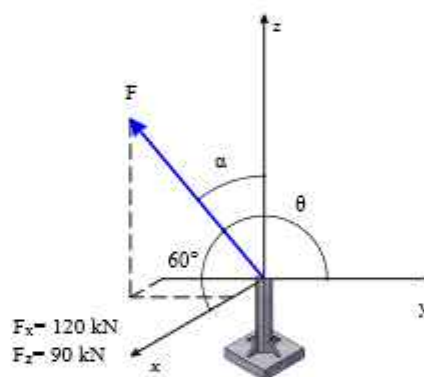


Figura 1.111

1.71 Determinar la magnitud de la fuerza resultante y sus ángulos directores coordenados.

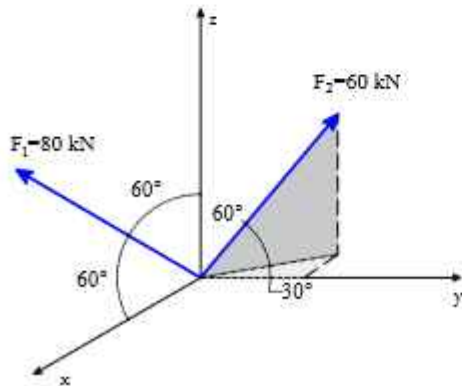


Figura 1.112

1.72 Determinar la magnitud de la fuerza F_2 , si la magnitud de la fuerza resultante se ubica sobre el eje z^+

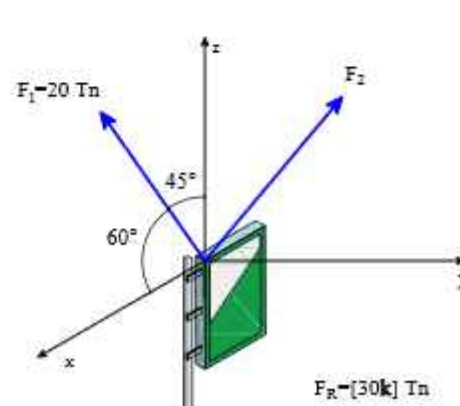


Figura 1.113

1.73 Determine la magnitud, ángulos directores coordenados de la fuerza F_2 , si la resultante actúa en el eje $z+$

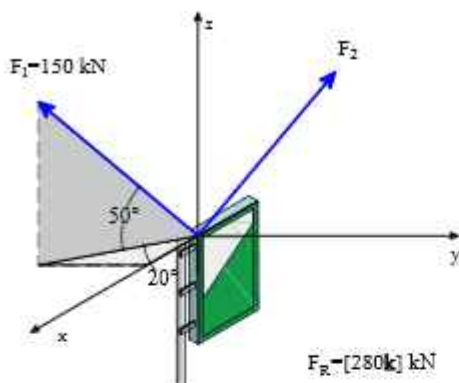


Figura 1.114

1.74 Determine la fuerza necesaria para mantener en equilibrio la figura 7.20

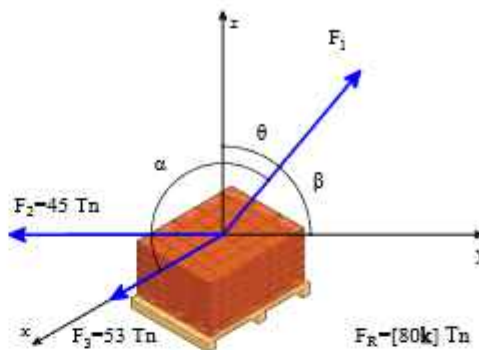


Figura 1.115

1.75 Determine la fuerza necesaria para mantener en equilibrio la figura 7.21

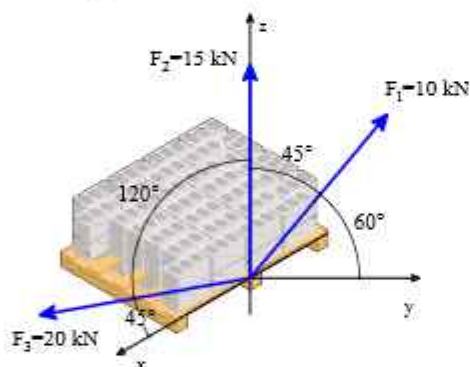


Figura 1.116

1.76 Determine la magnitud de la fuerza F_2 y sus ángulos directores coordenados.

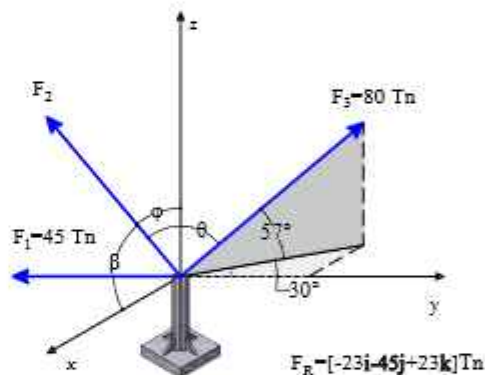


Figura 1.117

1.77 Determine la fuerza necesaria para mantener en equilibrio la figura 7.23

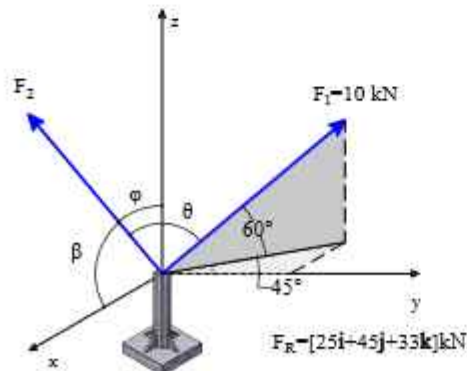


Figura 1.118

1.78 Determine la fuerza necesaria para mantener en equilibrio la figura 7.24

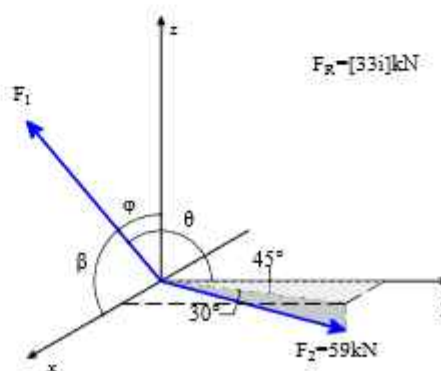


Figura 1.119

1.79 Determine la magnitud de la fuerza F_1 y sus ángulos directores coordenados.

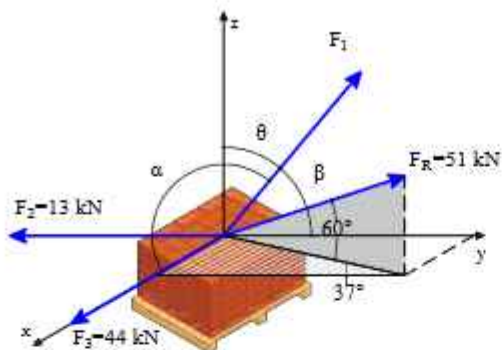


Figura 1.120

1.80 Del octaedro regular determine la magnitud de la fuerza resultante y sus ángulos directores coordenados.

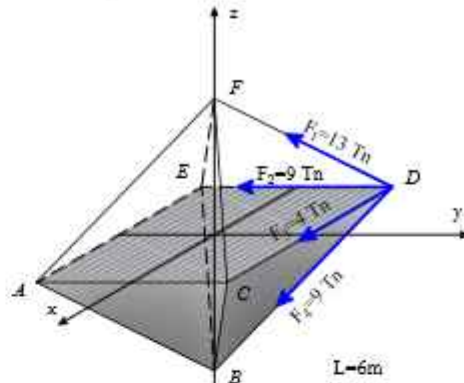


Figura 1.121

1.81 Determine la magnitud de la fuerza F_2 y sus ángulos directores coordenados.

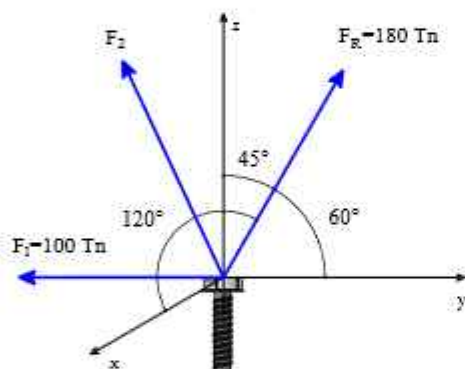


Figura 1.122

1.82 Expresar la fuerza de 13 kN en su vector cartesiano y ángulos directores coordenados.

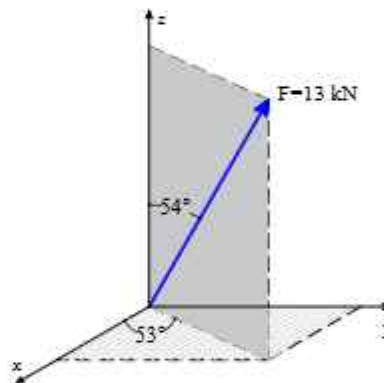


Figura 1.123

1.83 Expresar cada tensión en sus componentes rectangulares y ángulos directores coordenados.

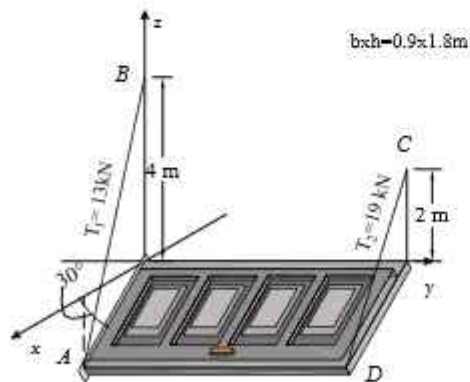


Figura 1.124

1.84 Expresar la fuerza en forma de su vector cartesiano y sus ángulos directores coordenados.

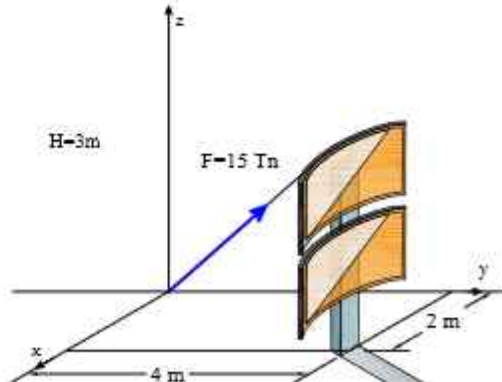


Figura 1.125

1.85 Determine la magnitud de la fuerza resultante y sus ángulos directores coordenados.

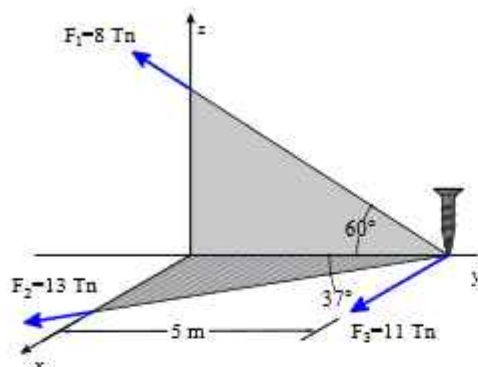


Figura 1.126

1.86 Expresé cada fuerza de tensión en su vector cartesiano y ángulos directores coordenados.

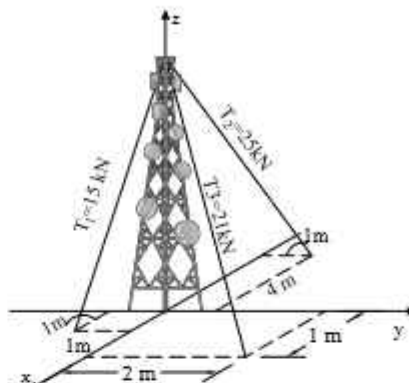


Figura 1.127

1.87 Determinar la magnitud de la fuerza resultante y sus ángulos directores coordenados.

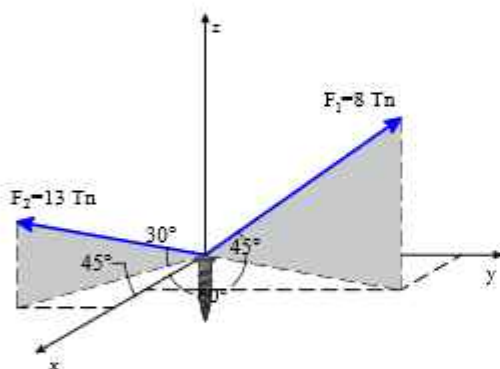


Figura 1.128

1.88 Determinar los ángulos α y β , a demás, la magnitud de F_1

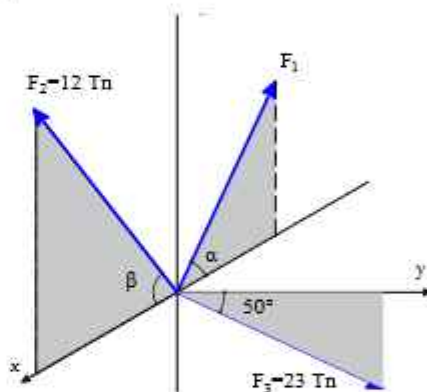


Figura 1.129

1.89 Determine la fuerza necesaria para mantener en equilibrio la figura 5.94

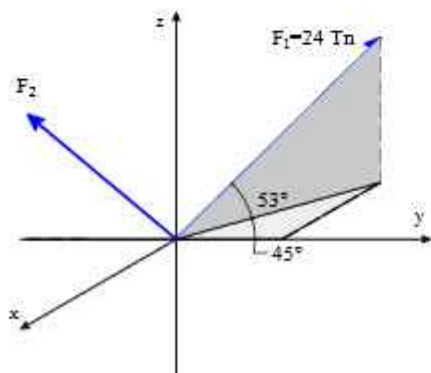


Figura 1.130

1.90 Determine la magnitud y sus ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.

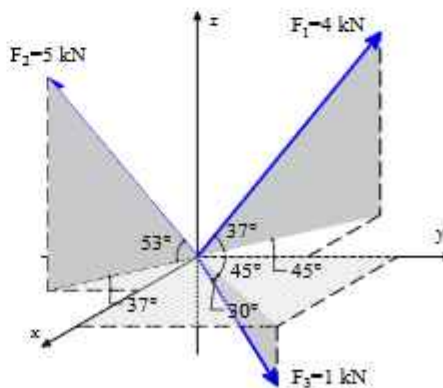


Figura 1.131

1.91 Exprese la fuerza $F=20\text{ Tn}$, en función de sus componentes rectangulares y sus cosenos directores

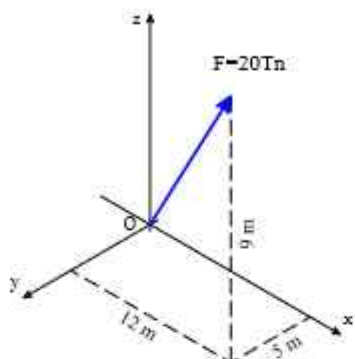


Figura 1.132

1.92 Exprese la fuerza $F=20\text{ Tn}$, en función de sus componentes rectangulares y sus cosenos directores

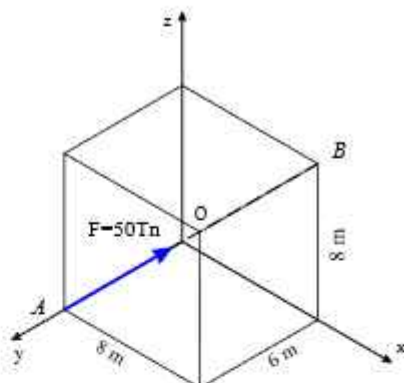


Figura 1.133

1.93 Determine la magnitud y los ángulos directores de la fuerza resultante.

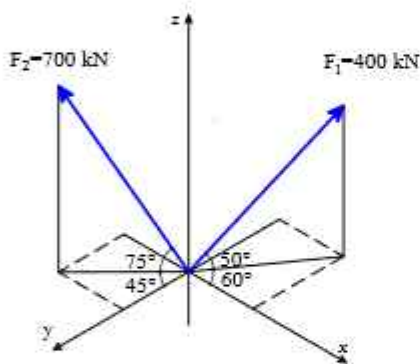


Figura 1.134

1.94 Determine la magnitud del cable BA, si la fuerza y dirección de la fuerza resultante es 235.97 kN , $\theta_x=92.5^\circ$, $\theta_y=64.3^\circ$, $\theta_z=154^\circ$

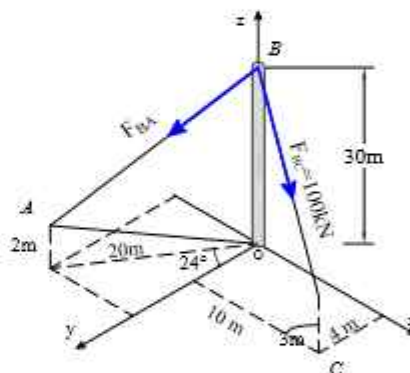


Figura 1.135

1.95 Determine la resultante y los cosenos directores, también, el punto de intersección B y C

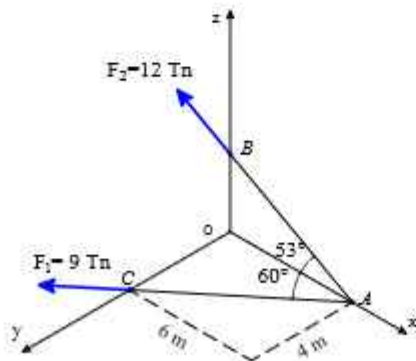


Figura 1.136

1.96 Determine las componentes rectangulares y sus cosenos directores de cada fuerza, del siguiente sistema de fuerzas

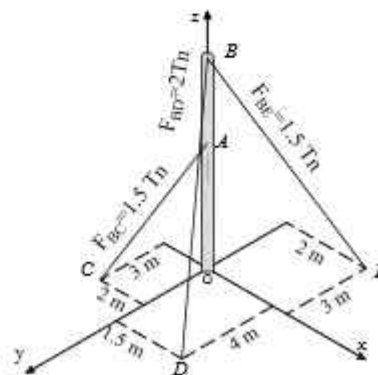


Figura 1.137

1.5. ANÁLISIS DE CUERPO RÍGIDO

Un cuerpo rígido describe un objeto o sistema físico cuyas dimensiones y formas no cambian con el tiempo, es decir, mantienen su estructura espacial constante. En otras palabras, un cuerpo rígido no se deforma ni se estira cuando se somete a fuerzas (internas o externas). Este concepto es útil para simplificar el análisis de sistemas físicos en situaciones en las que las deformaciones no son relevantes.

A. Fuerzas Externas → Las fuerzas externas son aquellas que actúan sobre un cuerpo rígido debido a su interacción con su entorno. Estas fuerzas pueden ser aplicadas desde el exterior del cuerpo y pueden incluir, por ejemplo, fuerzas ejercidas por otros objetos que están en contacto con el cuerpo rígido, o fuerzas generadas por agentes externos como motores o fuerzas aplicadas manualmente. Las fuerzas externas pueden causar que un cuerpo rígido se mueva o cambie su estado de movimiento.

B. Fuerzas Internas → Las fuerzas internas son fuerzas que se desarrollan dentro de un cuerpo rígido como resultado de las interacciones entre las partes internas del cuerpo. Estas fuerzas son responsables de mantener la estructura del cuerpo rígido y aseguran que sus diversas partes permanezcan unidas y no se separen. Las fuerzas internas no afectan el movimiento del cuerpo rígido en su conjunto, ya que se cancelan entre sí, pero son fundamentales para mantener la integridad del cuerpo rígido.

Además se debe entender el principio de transmisibilidad, que establece las condiciones de equilibrio o movimiento de un cuerpo rígido, que permanecen inalteradas si una fuerza F que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza que tiene la misma magnitud y dirección.

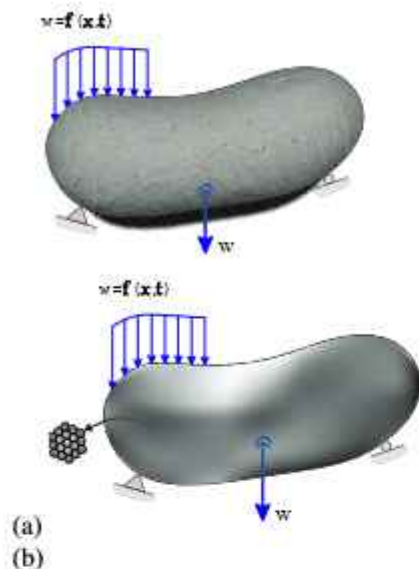
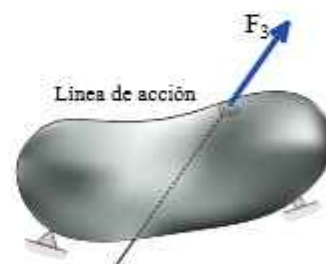
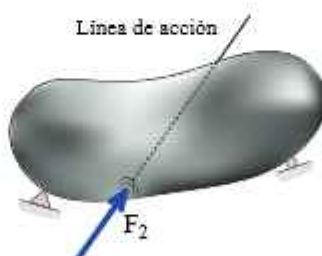
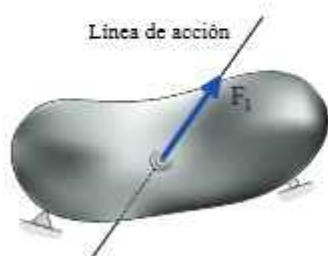


Figura 1.138: Figura.



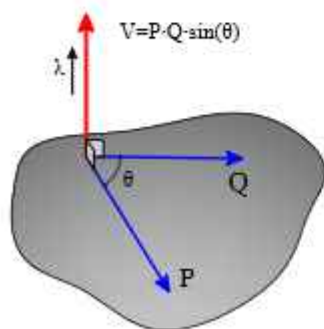
Misma línea de acción, F_1 , F_2 , F_3 son equivalentes y transmiten la misma fuerza en su línea de acción.

1.6. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

El producto vectorial de dos fuerzas se llama "momento de torsión" o "momento de fuerza". Este producto vectorial se usa para determinar el efecto de dos fuerzas que actúan sobre un objeto en términos de su capacidad para rotar o generar un movimiento de giro, aplicando la herramienta matemática producto vectorial o producto cruz.

$$V = \vec{P} \times \vec{Q} \quad \rightarrow V = P \cdot Q \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \lambda$$

- Línea de acción de v es perpendicular al plano de los vectores P, Q .



- La magnitud u es el producto de las magnitudes de P y Q por el *seno* del $(\angle\theta) < 180$
- La dirección de “U” se obtiene a partir de la regla de la mano derecha.

Donde:

$P \cdot Q \cdot \text{sen}\theta = \text{Escalar}$, define la magnitud de “V”.

$\hat{\lambda} = \text{Vector unitario}$, define la dirección de “V”.

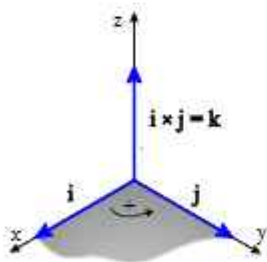
Leyes de operación:

- Conmutativa $\rightarrow P \times Q \neq Q \times P$
- Multiplicado por un escalar $\rightarrow a(P \times Q) = aP \times Q = P \times aQ$
- Ley distributiva $\rightarrow P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$

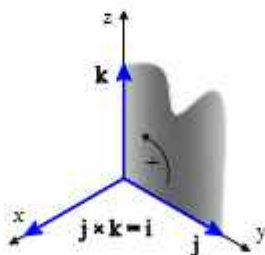
El resultado del momento de torsión es un vector que indica la dirección del giro y su magnitud está relacionada con la magnitud de las fuerzas y la distancia entre los puntos de aplicación de las fuerzas alrededor del punto de referencia.

1.6.1. PRODUCTO VECTORIAL EN COMPONENTES RECTANGULARES

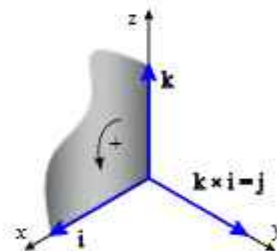
El producto vectorial en componentes rectangulares, también conocido como “producto cruz” o “producto vectorial” de dos vectores, se utiliza para calcular un tercer vector que es perpendicular al plano definido por los dos vectores originales. Se determina el producto vectorial de la forma siguiente (apoyándonos en la regla de la mano derecha).



$$\begin{aligned} i \times i &= 0 \\ i \times j &= k \\ i \times k &= -j \end{aligned}$$

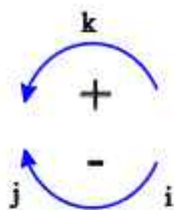


$$\begin{aligned} j \times i &= -k \\ j \times j &= 0 \\ j \times k &= i \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} k \times i &= j \\ k \times j &= -i \\ k \times k &= 0 \end{aligned}$$

El resultado es un nuevo vector cuyas componentes son la diferencia cruzada de los productos de las componentes de los vectores originales. Este nuevo vector es perpendicular al plano definido por P y Q y su dirección está determinada por la “regla de la mano derecha” en la cual los dedos de la mano derecha se curvan desde P hacia Q , y el pulgar apunta en la dirección del producto cruz.



Descomponemos dos vectores P y Q :

$$V = P \times Q = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

$$V = P_x \cdot Q_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + P_x \cdot Q_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + P_x \cdot Q_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\ P_y \cdot Q_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + P_y \cdot Q_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + P_y \cdot Q_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\ P_z \cdot Q_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + P_z \cdot Q_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + P_z \cdot Q_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k})$$

Donde

$$V = P_x \cdot Q_x (0) + P_x \cdot Q_y (\mathbf{k}) + P_x \cdot Q_z (-\mathbf{j}) + P_y \cdot Q_x (-\mathbf{k}) + \\ P_y \cdot Q_y (0) + P_y \cdot Q_z (\mathbf{i}) + P_z \cdot Q_x (\mathbf{j}) + P_z \cdot Q_y (-\mathbf{i}) + \\ P_z \cdot Q_z (0)$$

$$V_x = (P_y \cdot Q_z - P_z \cdot Q_y) \mathbf{i}$$

$$V_y = -(P_x \cdot Q_z - P_z \cdot Q_x) \mathbf{j}$$

$$V_z = (P_x \cdot Q_y - P_y \cdot Q_x) \mathbf{k}$$

El resultado se puede expresar en forma de determinante, de la forma siguiente:

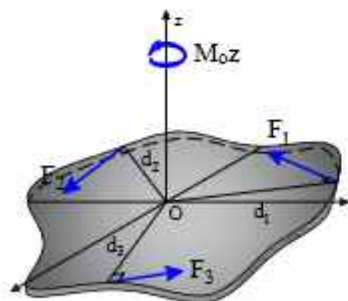
$$V = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

1.6.2. MOMENTO DE UNA FUERZA

El "momento de una fuerza" se refiere a la medida de la tendencia de una fuerza para girar o producir una rotación alrededor de un punto o un eje. El momento de una fuerza puede ser tanto un escalar como un vector, dependiendo de cómo se defina y cómo se aplique la fuerza en una situación particular.

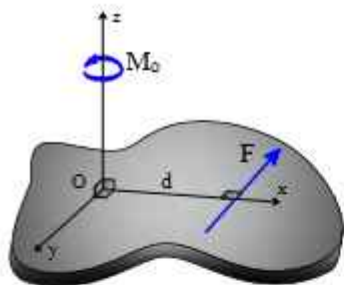
1. Formulación Escalar

El momento escalar de una fuerza se refiere a su capacidad para producir una rotación en un punto o eje, pero no tiene en cuenta la dirección del giro. Se calcula como el producto del valor de la fuerza (F) y la distancia perpendicular (r) desde el punto de aplicación de la fuerza a un punto de referencia o al eje de giro. La fórmula para el momento escalar (M) es:



$$M_{RO} = \Sigma(F \cdot d)$$

$$M_o = F \cdot d$$



$$M_o = F \cdot d$$

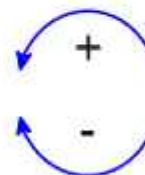
Donde:

- M_o = es el momento escalar.
- F = es el valor de la fuerza.
- d = es la distancia perpendicular desde el punto de aplicación de la fuerza al punto de referencia o al eje de giro.

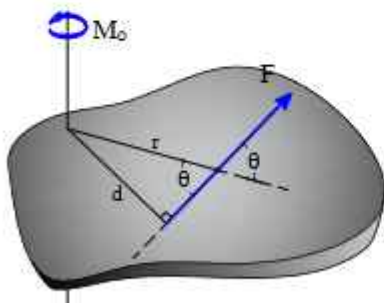
El momento escalar se mide en unidades como el newton-metro (Nm) en el sistema internacional de unidades (SI) o el pie-libra ($ft - lb$) en el sistema imperial.

2. Formulación Vectorial

El momento de una fuerza puede ser tratado como un vector cuando se necesita considerar su dirección y sentido. El momento vectorial se calcula usando el producto vectorial, como se describió en la respuesta anterior. El momento de una fuerza vectorial es un vector que tiene una magnitud, dirección y sentido específicos y se utiliza para representar la influencia de la fuerza en un sistema rotativo.



Convención de signos para los momentos



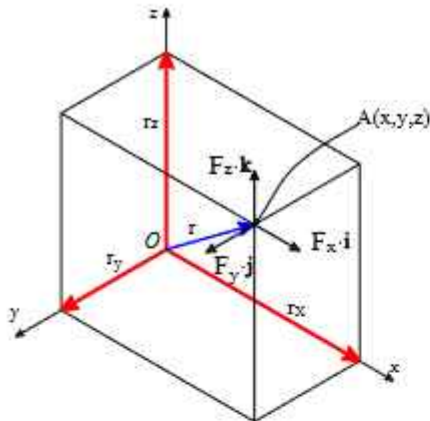
$$\begin{aligned} M_o &= r \cdot F \cdot \text{sen}(\theta) \\ &= F \cdot (r \cdot \text{sen}\theta) \\ &= F \cdot r \cdot \left(\frac{d}{r}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_o &= F \cdot d \\ M_o &= r \times F \end{aligned}$$

Donde:

- M_o = es el momento de la fuerza (un vector).
- r = es el vector de posición desde el punto de referencia al punto de aplicación de la fuerza.
- d = es el vector de fuerza.

3. Componentes rectangulares del momento de una fuerza



Tenemos:

$$r = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k}$$

$$F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

El producto vectorial:

$$M_o = r \times F$$

También podemos escribir como:

$$M_o = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

De la ecuación 3

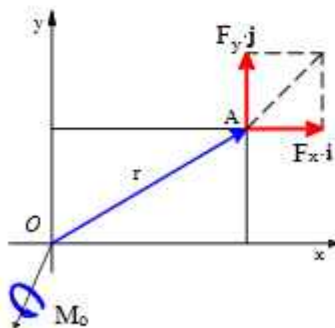
$$M_x = r_y \cdot F_z - r_z \cdot F_y$$

$$M_y = r_z \cdot F_x - r_x \cdot F_z$$

$$M_z = r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x$$

Donde las componentes escalares M_x , M_y y M_z del momento mide la tendencia de la fuerza F a impartir a un cuerpo rígido un movimiento de rotación:

$$M_o = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



Para el caso de problemas en dos dimensiones se puede suponer que la fuerza F esta contenida en el plano xy (invertimos los ejes coordenados propuestos.)

$$M_o = (r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x) \cdot \mathbf{k}$$

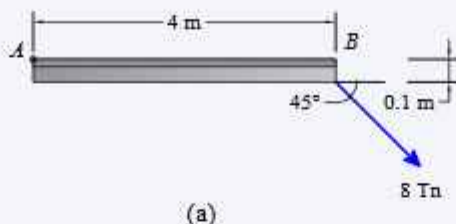
$$M_o = M_z = r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x$$

El momento de una fuerza, ya sea escalar o vectorial, es esencial en la mecánica y la dinámica para analizar y comprender cómo las fuerzas actúan sobre objetos y cómo pueden causar rotación o giro en torno a un punto o eje específico. El momento vectorial es especialmente importante cuando se requiere un análisis detallado de la dirección y el sentido del giro inducido por la fuerza.

1.6.3. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 1.6.3.1

Determine el momento con respecto al punto A, de forma escalar y vectorial.



(a)

Paso ①: Determinamos el momento respecto al punto de forma escalar y Vectorial.

a. Formulación Escalar:

- Primera Forma, figura 1.139 (b).

$$+ \curvearrowright M_A = F \cdot d$$

$$M_A = 8 \text{ Tn} \cdot 3.9 \text{ m} \cdot \sin(45^\circ)$$

$$M_A = 22.062 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- Segunda Forma, figura 1.139 (c).

$$+ \curvearrowright \sum M_A = \sum F \cdot d$$

$$M_A = 8 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) \cdot (0.1 \text{ m}) - 8 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) \cdot (4 \text{ m})$$

$$M_A = -22.062 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

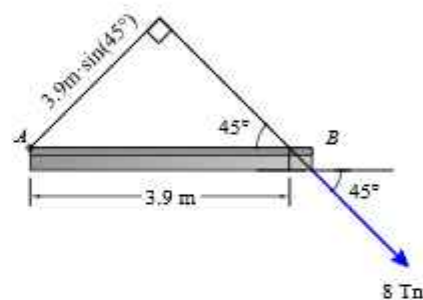
b. Formulación Vectorial:

$$r = (4 \text{ m}) i + (-0.1 \text{ m}) j$$

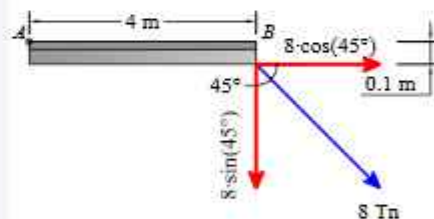
$$F = 8 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) i - 8 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) j$$

$$M_A = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 \text{ m} & -0.1 \text{ m} & 0 \\ 8 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) & -8 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -22.062 \end{bmatrix} \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



(b)

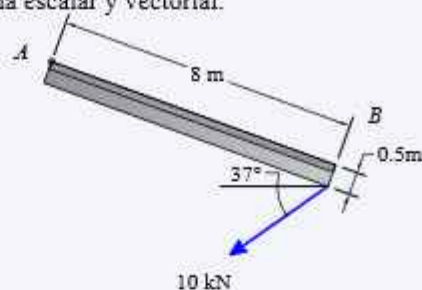


(c)

Figura 1.139

EJEMPLO RESUELTO 1.6.3.2

Determine el momento que produce la fuerza de 10kN con respecto al punto A, de forma escalar y vectorial.



(a)

Paso ①: Determinamos el momento respecto al punto de forma escalar y Vectorial

a. Formulación Escalar:

- Primera Forma, 1.140 (b).

$$+ \curvearrowright M_A = F \cdot d$$

$$M_A := -10 \text{ kN} \cdot (8 \text{ m} + 0.5 \text{ m} \cdot \tan(33^\circ)) \cdot \cos(33^\circ)$$

$$M_A = -69.817 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- Segunda Forma, 1.140 (c).

$$+ \curvearrowright \sum M_A = \sum F \cdot d$$

$$d_x := 8 \text{ m} \cdot \cos(20^\circ) - 0.5 \text{ m} \cdot \sin(20^\circ) = 7.347 \text{ m}$$

$$d_y := 8 \text{ m} \cdot \sin(20^\circ) + 0.5 \text{ m} \cdot \cos(20^\circ) = 3.206 \text{ m}$$

$$M_A := -10 \text{ kN} \cdot \cos(37^\circ) \cdot (d_y) - 10 \text{ kN} \cdot \sin(37^\circ) \cdot (d_x)$$

$$M_A = -69.817 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \curvearrowright$$

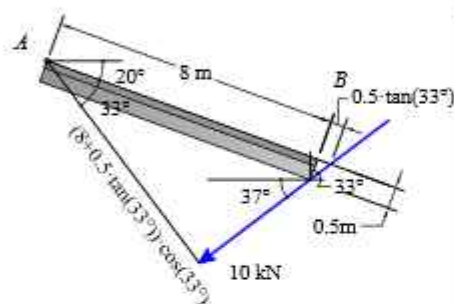
b. Formulación Vectorial:

$$r_{AB} = (7.347 \text{ m}) i + (-3.206 \text{ m}) j$$

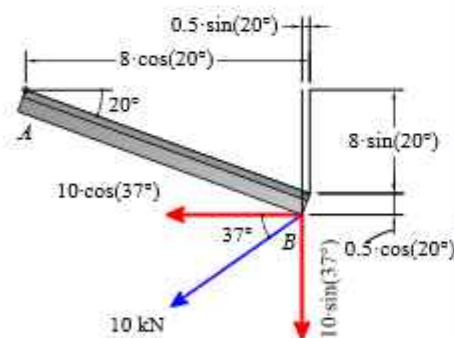
$$F = -10 \text{ kN} \cdot \cos(37^\circ) i - 10 \text{ kN} \cdot \sin(37^\circ) j$$

$$M_A = r \times F = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 7.347 \text{ m} & -3.206 \text{ m} & 0 \\ 8 \text{ kN} \cdot \cos(45^\circ) & -8 \text{ kN} \cdot \sin(45^\circ) & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -69.817 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(b)

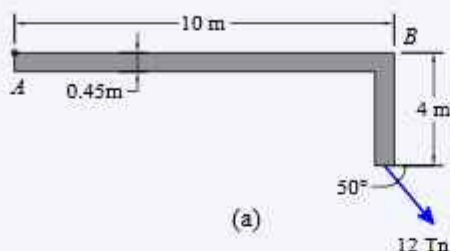


(c)

Figura 1.140

Determine el momento que ocasiona la fuerza 12Tn con respecto al punto A, de forma escalar y vectorial.

EJEMPLO RESUELTO 1.6.3.3



Paso ①: Determinamos el momento respecto al punto de forma escalar y Vectorial.

a. Formulación Escalar:

- Primera Forma, 1.141 (b).

$$M_A = F \cdot d \quad d := (9.775 \text{ m} - 4 \text{ m} \cot(50^\circ)) \cos(40^\circ) = 4.917 \text{ m}$$

$$M_A = -12 \text{ Tn} \cdot d$$

$$M_A = -59.003 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad \curvearrowleft$$

- Segunda Forma, 1.141 (c).

$$+\circlearrowleft \sum M_O = \sum F \cdot d$$

$$d_x := 9.775 \text{ m} = 9.775 \text{ m}$$

$$d_y := 4 \text{ m} = 4 \text{ m}$$

$$M_A = 12 \text{ Tn} \cdot \cos(50^\circ) \cdot (d_y) - 12 \text{ Tn} \cdot \sin(50^\circ) \cdot (d_x)$$

$$M_A = -59.003 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad \curvearrowleft$$

b. Formulación Vectorial:

$$r_{AB} = (9.775 \text{ m}) i + (-4 \text{ m}) j$$

$$F = 12 \text{ Tn} \cdot \cos(50^\circ) i - 12 \text{ Tn} \cdot \sin(50^\circ) j$$

$$M_A = r \times F = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 9.775 \text{ m} & -4 \text{ m} & 0 \\ 12 \text{ Tn} \cdot \cos(50^\circ) & -12 \text{ Tn} \cdot \sin(50^\circ) & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -59.003 \end{bmatrix} \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

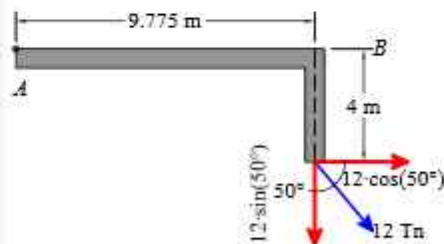
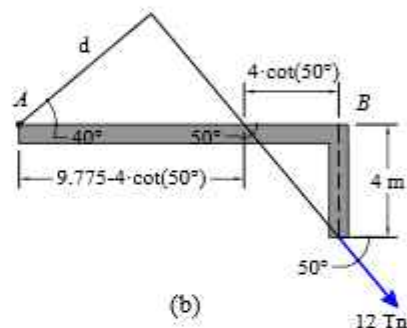
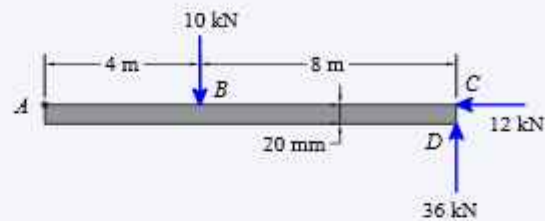


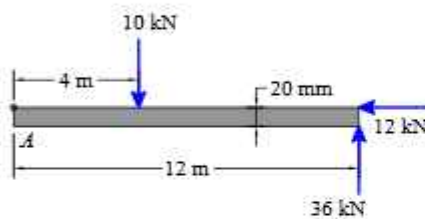
Figura 1.141

EJEMPLO RESUELTO 1.6.3.4

Determine el momento con respecto al punto A, que producen el sistema de fuerzas de forma escalar y vectorial.



(a)



(b)

Paso ①: Determinamos el momento respecto al punto de forma escalar y Vectorial:

a. Formulación Escalar, 1.142 (b).

$$+\circlearrowleft \sum M_A = \sum F \cdot d$$

$$M_A := -10 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} + 36 \text{ kN} \cdot 12 \text{ m} + 12 \text{ kN} \cdot (0 \text{ m})$$

$$M_A = 392 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

b. Formulación Vectorial, 1.142 (c).

$$r_{AB} = (4 \text{ m}) i$$

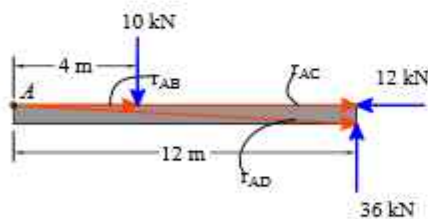
$$F_B = -10 \text{ kN } j$$

$$r_{AC} = (12 \text{ m}) i$$

$$F_C = -12 \text{ kN } i$$

$$r_{AD} = (12 \text{ m}) i - (20 \text{ mm}) j$$

$$F_D = 36 \text{ kN } j$$



(c)

Figura 1.142

Calculo de momento, de forma vectorial:

$$M_A = r_{AB} \times F_B + r_{AC} \times F_C + r_{AD} \times F_D$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 4 \text{ m} & 0 & 0 \\ 0 & -10 \text{ kN} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 12 \text{ m} & 0 & 0 \\ -12 \text{ kN} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 12 \text{ m} & -20 \text{ mm} & 0 \\ 0 & 36 \text{ kN} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 392 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Determine el momento con respecto al punto A, que producen las 3 fuerzas de forma vectorial.

Paso ①: Determinamos los vectores cartesianos de las fuerzas y vectores de posición., figura 1.143 (b).

$$F_1 := [-6 \ 2 \ 4] \text{ Tn}$$

$$F_2 := [10 \ 2 \ 3] \text{ Tn}$$

$$F_3 := [4 \ 3 \ 2] \text{ Tn}$$

$$r_1 := [8 \ 0 \ 9] \text{ m}$$

$$r_2 := [4 \ 5 \ 3] \text{ m}$$

$$r_3 := [-3 \ 3 \ 5] \text{ m}$$

Paso ②: Determinamos el momento respecto al punto A, de forma vectorial

$$M_A = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 8 & 0 & 9 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & 3 \\ 10 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ -3 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} -18 \\ -42 \\ -47 \end{bmatrix} \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Paso ③: Determinamos los componentes sobre los ejes, del momento producido por las fuerzas, figura 1.143 (c).

$$i := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad j := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_x := M_A \cdot i = \begin{bmatrix} -18 \\ -42 \\ -47 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_x = -18 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_y := M_A \cdot j = \begin{bmatrix} -18 \\ -42 \\ -47 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_y = -42 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_z := M_A \cdot k = \begin{bmatrix} -18 \\ -42 \\ -47 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M_z = -47 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.6.3.5

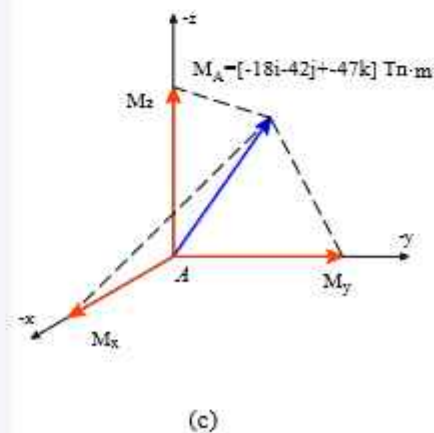
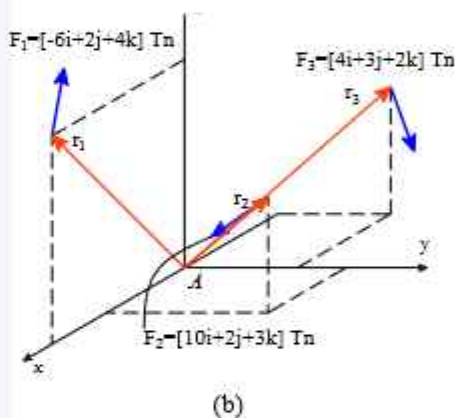
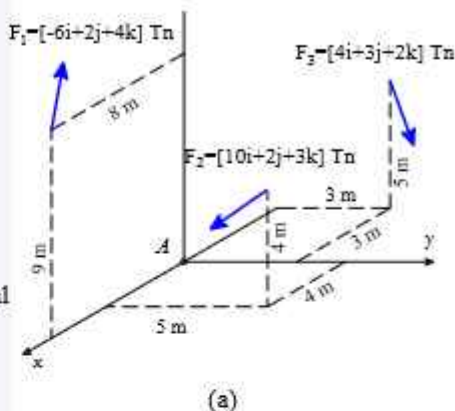
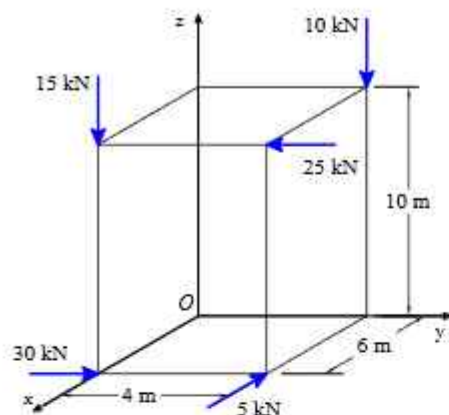


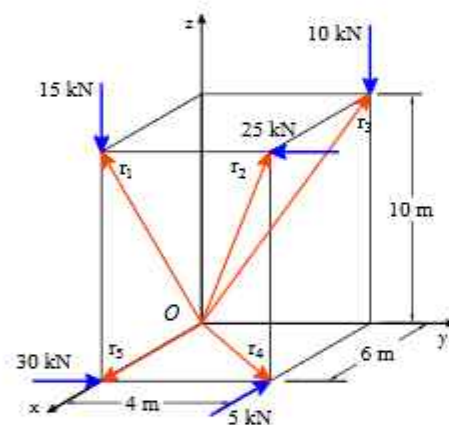
Figura 1.143

EJEMPLO RESUELTO 1.6.3.6

Determine el momento con respecto al punto A, que producen las 5 fuerzas de forma vectorial.



(a)



(b)

Paso ①: Determinamos los vectores cartesianos de las fuerzas y vectores de posición, figura 1.144 (b).

$$F_1 := [0 \ 0 \ -15] \text{ kN}$$

$$F_2 := [0 \ -25 \ 0] \text{ kN}$$

$$F_3 := [0 \ 0 \ -10] \text{ kN}$$

$$F_4 := [-5 \ 0 \ 0] \text{ kN}$$

$$F_5 := [0 \ 30 \ 0] \text{ kN}$$

$$r_1 := [6 \ 0 \ 10] \text{ m}$$

$$r_2 := [6 \ 4 \ 10] \text{ m}$$

$$r_3 := [0 \ 4 \ 10] \text{ m}$$

$$r_4 := [6 \ 4 \ 0] \text{ m}$$

$$r_5 := [6 \ 0 \ 0] \text{ m}$$

Paso ②: Determinamos el momento respecto al punto A, de forma vectorial

$$M_O = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 + r_4 \times F_4 + r_5 \times F_5$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 6 & 4 & 10 \\ 0 & -25 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 6 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} 210 \\ 90 \\ 50 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Figura 1.144

1.6.4. EJERCICIOS PROPUESTOS

4

Ejercicios

1.97 Determine el momento que produce la fuerza de 84kN respecto al punto A.

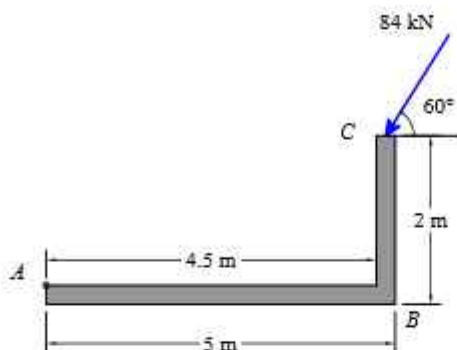


Figura 1.145

1.98 Determine el momento que producen el sistema de fuerzas con respecto al punto A.

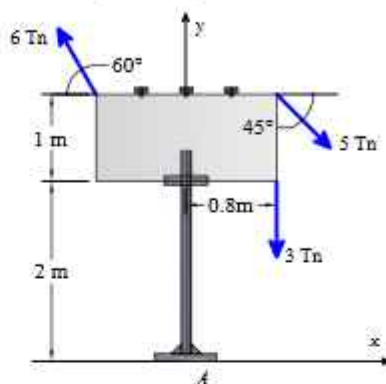


Figura 1.146

1.99 Determine el momento que produce la fuerza de 2Tn respecto al punto A.

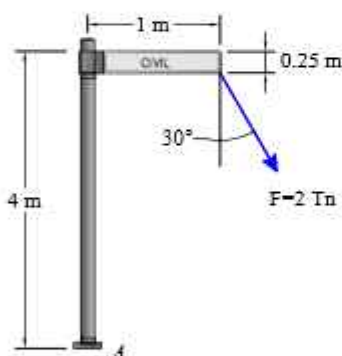


Figura 1.147

1.100 Determine el momento que producen las fuerzas con respecto al punto C.

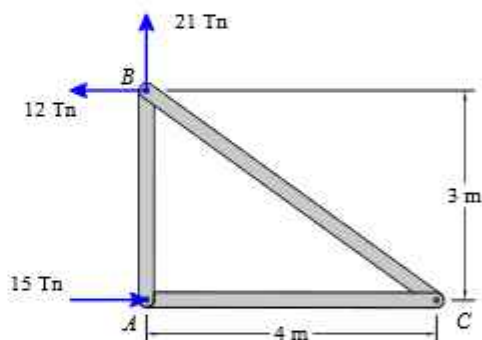


Figura 1.148

1.101 Determine el momento que producen las fuerzas con respecto al punto D.

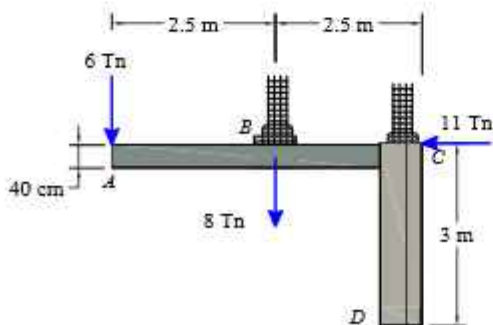


Figura 1.149

1.102 Determine el momento que producen el sistema de fuerzas con respecto al punto B.

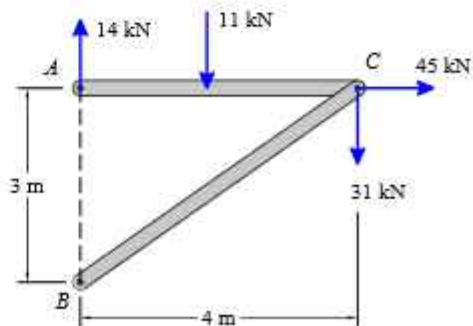


Figura 1.150

1.103 Determine el momento que producen las fuerzas con respecto al punto A, escalar y vectorialmente.

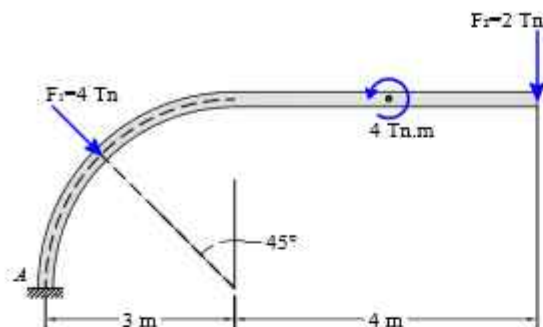


Figura 1.151

1.104 Determine el momento que producen las fuerzas con respecto al punto A, escalar y vectorialmente.

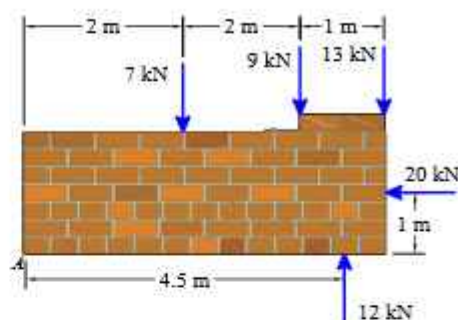


Figura 1.152

1.105 Determine el momento que produce la fuerza de 33 Tn con respecto al punto A, vectorialmente.

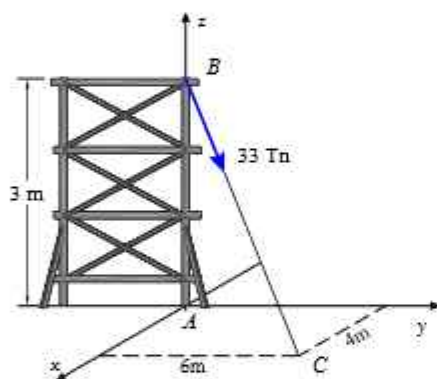


Figura 1.153

1.106 Determine el momento que produce la fuerza con respecto al punto B, vectorialmente.

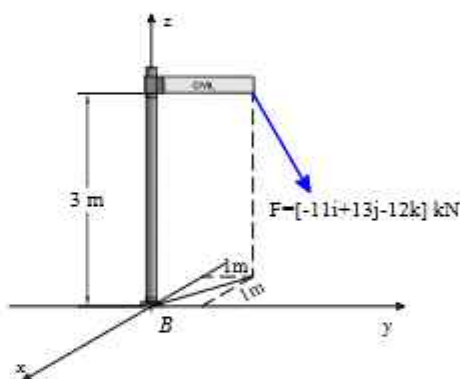


Figura 1.154

1.107 Determine el momento que produce la fuerza de 15 kN con respecto al punto A, vectorialmente.

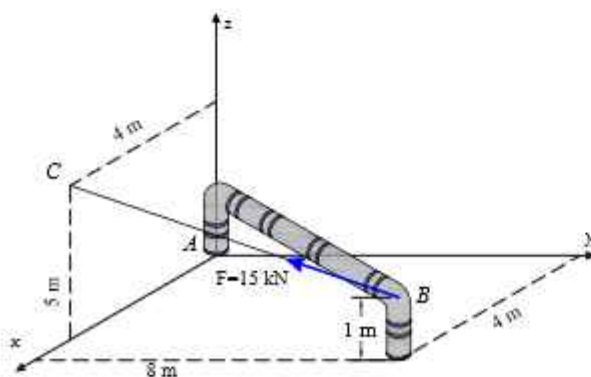


Figura 1.155

1.108 Determine el momento que producen las fuerzas con respecto al punto O, vectorialmente.

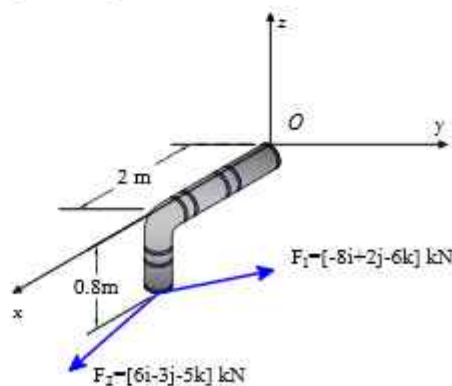


Figura 1.156

1.109 Determine el momento que producen las fuerzas con respecto al punto A, vectorialmente.

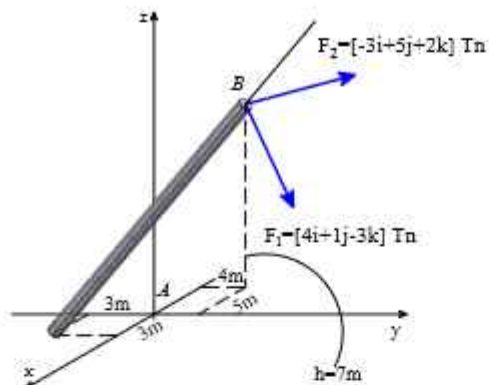


Figura 1.157

1.110 Determine el momento que producen las fuerzas con respecto al punto A, vectorialmente.

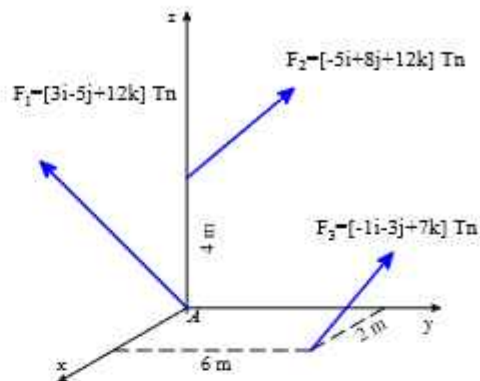


Figura 1.158

1.111 Determine el momento que producen las fuerzas con respecto al punto O, vectorialmente.

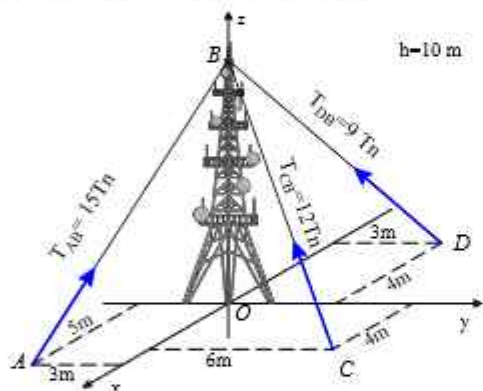


Figura 1.159

1.112 Determine el momento que producen las fuerzas con respecto al punto O, escalar y vectorialmente.

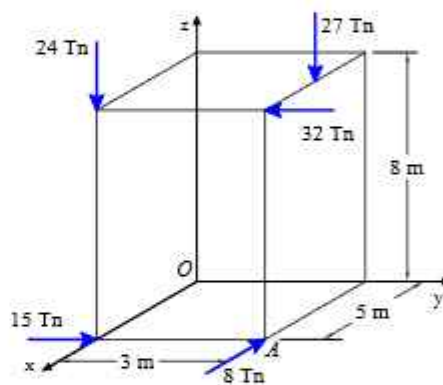


Figura 1.160

1.113 Determine el momento que produce la fuerza con respecto al punto O, vectorialmente.

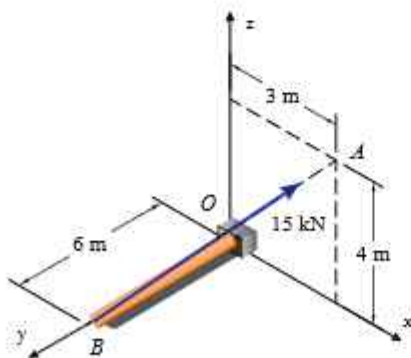


Figura 1.161

1.114 Determine el momento que producen las fuerzas con respecto al punto A, vectorialmente.

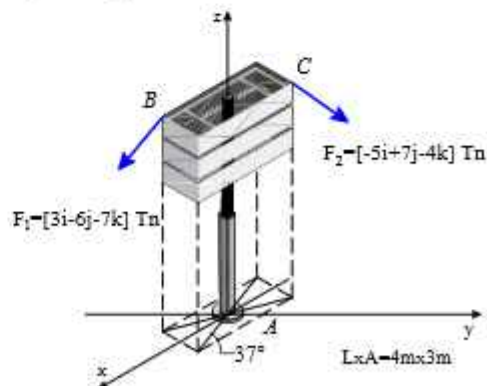
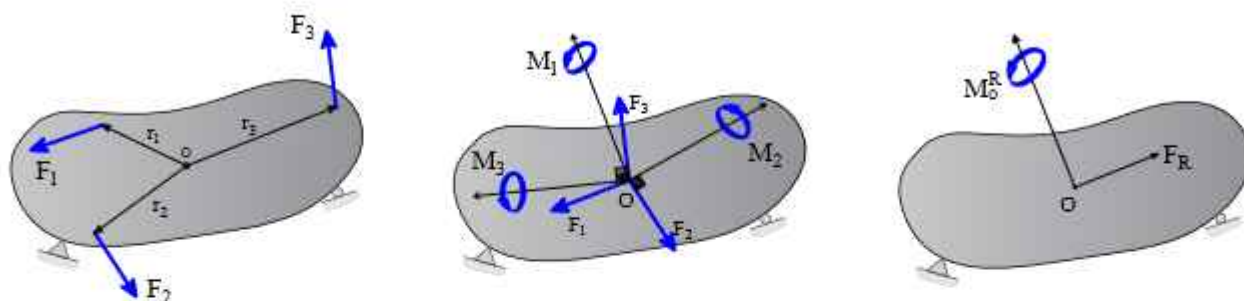


Figura 1.162

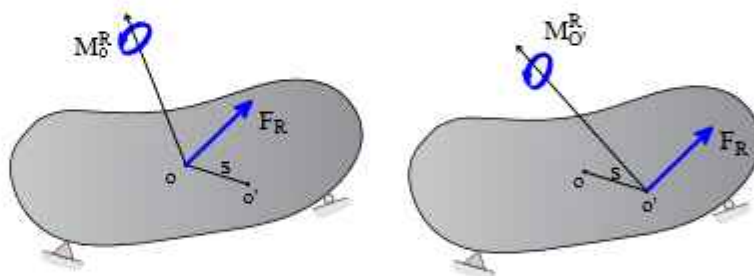
1.7. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y UNA PAR

Cualquier sistema de fuerzas, si importar que tan compleja sea, puede ser reducida a un sistema equivalente fuerza par que actúa en un punto dado. Sistema fuerza par:

$$R = \Sigma F \quad M_o^R = \Sigma M_o = \Sigma (R \times F)$$



MOMENTO Y FUERZA RESULTANTE: Mover el momento y fuerza a otro punto o punto:



componentes de la resultante F_R y M_o^R

$$F_R = F_{Rx} \mathbf{i} + F_{Ry} \mathbf{j} + F_{Rz} \mathbf{k}$$

$$M_o^R = M_x^R \mathbf{i} + M_y^R \mathbf{j} + M_z^R \mathbf{k}$$

SISTEMA EQUIVALENTE DE FUERZAS

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza par en un punto dado:

$$\Sigma F = \Sigma F' \quad \text{y} \quad \Sigma M_O = \Sigma M_{O'}$$

SISTEMA EQUIVALENTE DE VECTORES

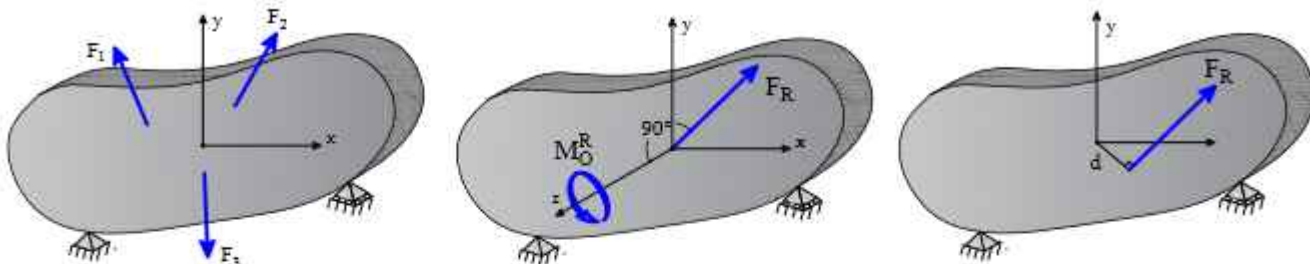
• Si dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son equivalente, entonces ambos también son equivalentes.

• Cuando dos sistemas de vectores son iguales cumple se dice que son equivalentes:

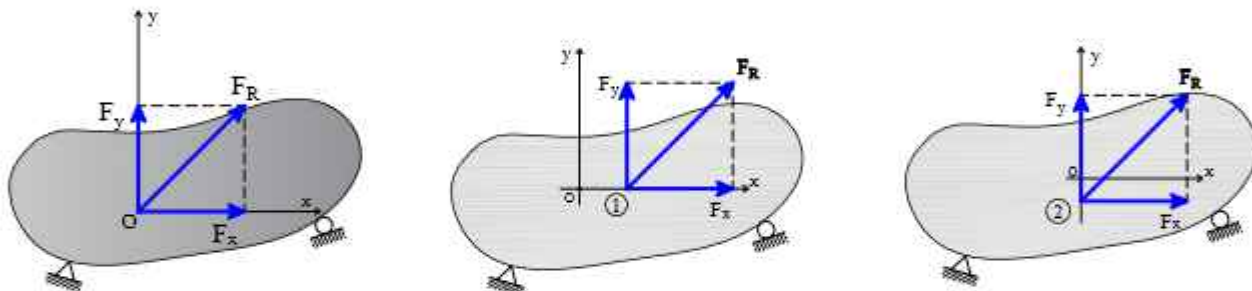
ADEMÁS

Otras formas de reducción de un sistema de fuerzas son: fuerzas coplanares y fuerzas paralelas.

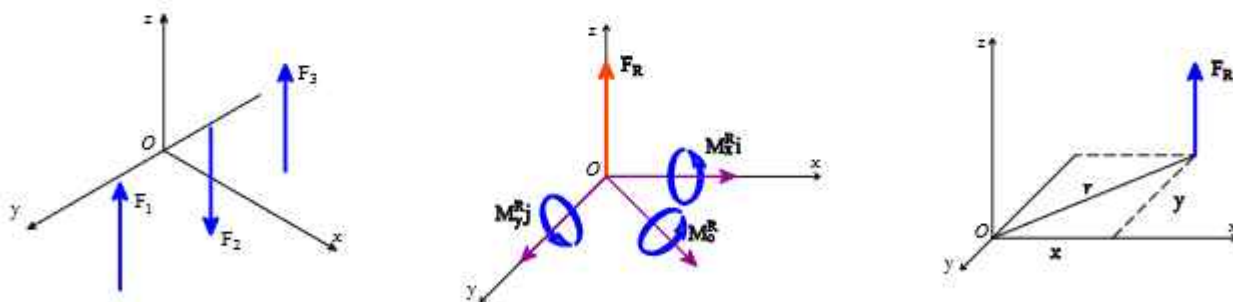
A. Fuerzas Coplanares



En sus componentes rectangulares:



B. Fuerzas paralelas



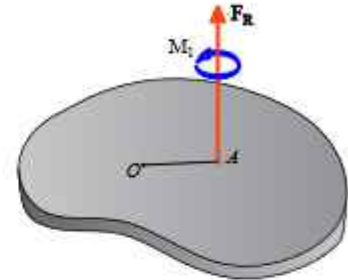
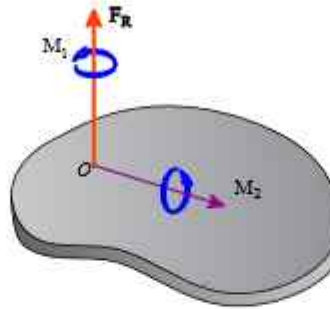
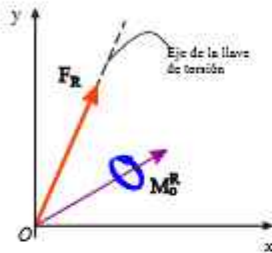
$$R_z = \sum F_z$$

$$r \times F_R = M_o^R = (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \times F_z \mathbf{k} = M_x^R \mathbf{i} + M_y^R \mathbf{j}$$

$$M_x^R = \sum M_x M_y^R = \sum M_y$$

REDUCCIÓN A UNA LLAVE DE TORSIÓN

El sistema fuerza-par, en particular se le conoce como llave de torsión debido a que la combinación resultante de empuje y torsión es la misma que la produciera una llave de torsión real.

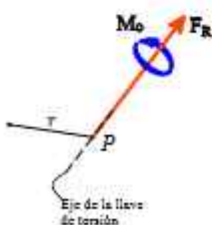
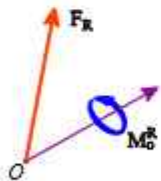


$$P = \frac{M_1}{F_R} \quad \text{paso de la llave de torsión.}$$

$$M_1 = P \cdot F_R$$

$$M_1 = \frac{F_R \cdot M_o^R}{F_R}$$

$$P = \frac{M_1}{F_R} = \frac{F_R M_o^R}{F_R^2}$$



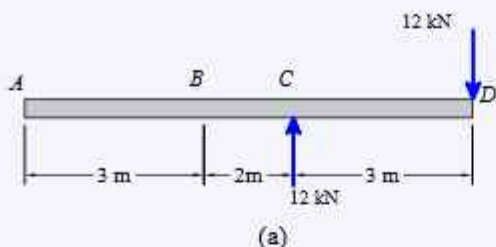
$$M_i + r \times F_R = M_o^R$$

$$p \cdot F_R + r \times F_R = M_o^R$$

1.7.1. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.1

Determine el momento con respecto al punto A, B, C y D, que producen las las dos fuerzas par, de forma escalar y vectorial.



Paso ①: Determinación de momentos en cada punto.

- Formulación Escalar, figura 1.163(b)

$$+\circlearrowleft \sum M_A = \sum F \cdot d$$

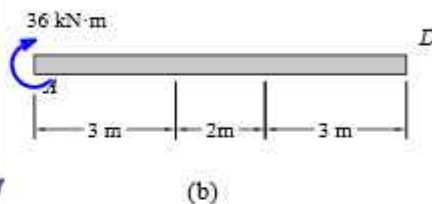
$$M_A := 12 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} - 12 \text{ kN} \cdot 8 \text{ m}$$

$$M_A = -36 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \circlearrowleft$$

- Formulación Vectorial

$$\begin{aligned} r_{AC} &= [5 \text{ i}] \text{ m} & r_{AD} &= [8 \text{ i}] \text{ m} \\ F_C &= [12 \text{ j}] \text{ kN} & F_D &= [-12 \text{ j}] \text{ kN} \end{aligned}$$

$$M_A = r_{AC} \times F_C + r_{AD} \times F_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -36 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$



- Formulación Escalar, figura 1.163(c)

$$+\circlearrowleft \sum M_B = \sum F \cdot d$$

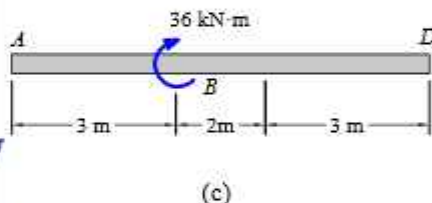
$$M_B := 12 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 12 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m}$$

$$M_B = -36 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \circlearrowleft$$

- Formulación Vectorial

$$\begin{aligned} r_{BC} &= [2 \text{ i}] \text{ m} & r_{BD} &= [5 \text{ i}] \text{ m} \\ F_C &= [12 \text{ j}] \text{ kN} & F_D &= [-12 \text{ j}] \text{ kN} \end{aligned}$$

$$M_B = r_{BC} \times F_C + r_{BD} \times F_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -36 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$



- Formulación Escalar, figura 1.163(d)

$$+\circlearrowleft \sum M_C = \sum F \cdot d$$

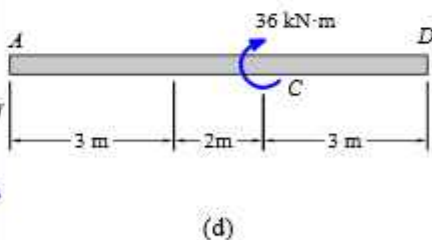
$$M_C := -12 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m}$$

$$M_C = -36 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \circlearrowleft$$

- Formulación Vectorial

$$\begin{aligned} r_{CC} &= [0 \text{ i}] \text{ m} & r_{CD} &= [3 \text{ i}] \text{ m} \\ F_C &= [12 \text{ j}] \text{ kN} & F_D &= [-12 \text{ j}] \text{ kN} \end{aligned}$$

$$M_C = r_{CC} \times F_C + r_{CD} \times F_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -36 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$



- Formulación Escalar, figura 1.163(e)

$$+\circlearrowleft \sum M_D = \sum F \cdot d$$

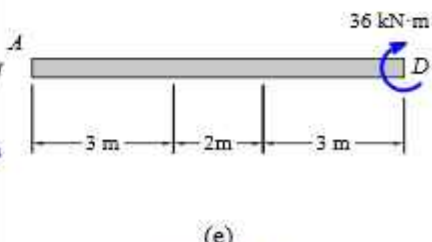
$$M_D := -12 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m}$$

$$M_D = -36 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \circlearrowleft$$

- Formulación Vectorial

$$\begin{aligned} r_{DC} &= [-3 \text{ i}] \text{ m} & r_{DD} &= [0 \text{ i}] \text{ m} \\ F_C &= [12 \text{ j}] \text{ kN} & F_D &= [-12 \text{ j}] \text{ kN} \end{aligned}$$

$$M_D = r_{DC} \times F_C + r_{DD} \times F_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -36 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

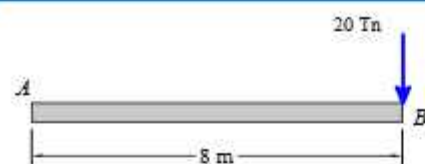


Podemos observar que el momento que producen las dos fuerzas par es

$$M := -12 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} = -36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(e) Figura 1.163

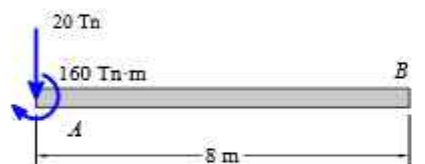
EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.2



(a)



(b)



(c)

Figura 1.164

Reemplace la fuerza de 20 Tn que actúa en el punto B, por una fuerza equivalente y un momento de par en A.

Paso ①: Cambiamos la fuerza desde el punto B hacia el punto A, como se muestra en la figura 1.164 (b), esto ocasiona un momento de par.

- Formulación Escalar

$$+\circlearrowleft \sum M_A = \sum F \cdot d$$

$$M_A := -20 \text{ Tn} \cdot 8 \text{ m}$$

$$M_A = -160 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad \circlearrowleft$$

- Formulación Vectorial

$$r_{AB} = (8 \text{ m}) i$$

$$F_B = -20 \text{ Tn } j$$

$$M_A = r_{AB} \times F_B$$

$$= \begin{bmatrix} i & j & k \\ 8 \text{ m} & 0 & 0 \\ 0 & -20 \text{ Tn} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -160 \end{bmatrix} \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Reemplace la fuerza de 10 Tn que actúa en el punto D, por una fuerza equivalente y un momento de par en C.

Paso ①: Cambiamos la fuerza desde el punto D hacia el punto C, como se muestra en la figura 1.165 (b), esto ocasiona un momento de par.

- Formulación Escalar

$$M_C := 10 \text{ Tn} \cdot 5 \text{ m} \quad M_C = 50 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad \circlearrowleft$$

- Formulación Vectorial

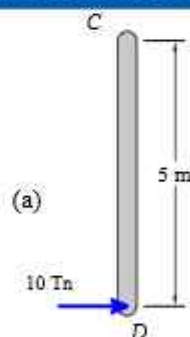
$$r_{CD} = (-5 \text{ m}) j \quad F_D = 10 \text{ Tn } j$$

$$M_A = r_{CD} \times F_D$$

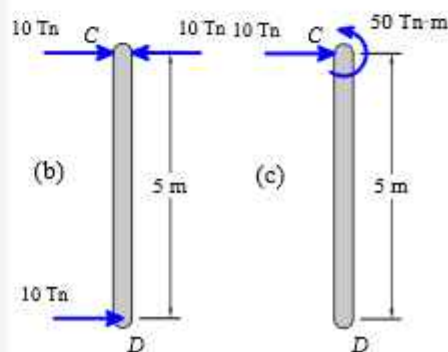
$$= \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & -5 \text{ m} & 0 \\ 10 \text{ Tn} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_C = 50 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.3



(a)



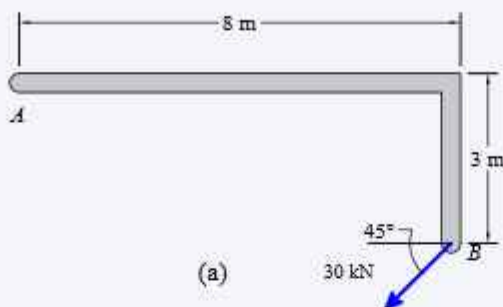
(b)

(c)

Figura 1.165

Reemplace la fuerza de 30 kN que actúa en el punto B, por una fuerza equivalente y un momento de par en A.

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.4



Paso ①: Cambiamos la fuerza desde el punto B hacia el punto A, esto ocasiona un momento de par.

- **Formulación Escalar**, figura 1.166 (b).

$$+\circlearrowleft \sum M_A = \sum F \cdot d$$

$$M_A := -30 \text{ kN} \cdot \cos(45^\circ) \cdot 3 \text{ m} - 30 \text{ kN} \cdot \sin(45^\circ) \cdot 8 \text{ m}$$

$$M_A = -233.345 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \curvearrowleft$$

- **Formulación Vectorial**, figura 1.166 (c).

$$r_{AB} = (8 \text{ m}) i - (3 \text{ m}) j$$

$$F_B = -30 \text{ kN} \cdot \cos(45^\circ) i - 30 \text{ kN} \cdot \sin(45^\circ) j$$

$$M_A = r_{AB} \times F_B = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 8 \text{ m} & 0 & 0 \\ 0 & -20 \text{ kN} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -233.345 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

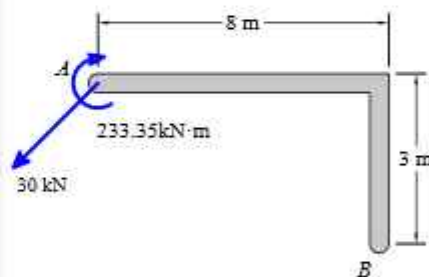
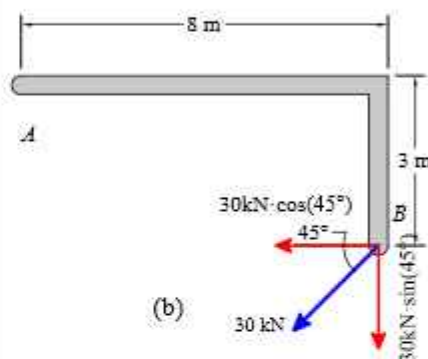
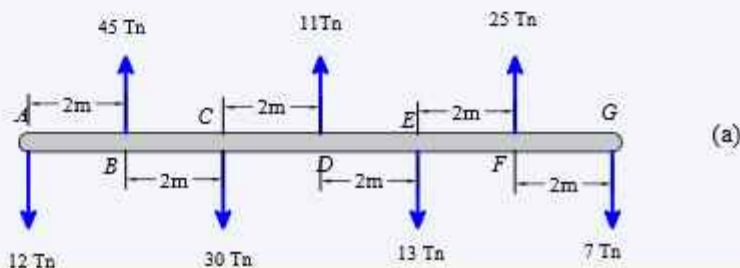


Figura 1.166

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.5

Determine la resultante del siguiente sistema de fuerzas, y luego reemplace la fuerza por una fuerza equivalente y un momento de par en F.



CONTINUACIÓN

Paso ①: Determinamos la resultante de las fuerzas, de la siguiente forma:

$$R = \sum F$$

$$R := 45 \text{ Tn} + 11 \text{ Tn} + 25 \text{ Tn} - 12 \text{ Tn} - 30 \text{ Tn} - 13 \text{ Tn} - 7 \text{ Tn}$$

$$R = 19 \text{ Tn}$$

Paso ②: Determinamos el momento que producen el sistema de fuerzas con respecto al punto A.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = \sum F \cdot d$$

$$M_A = 45 \text{ Tn} \cdot (2 \text{ m}) + 11 \text{ Tn} \cdot (6 \text{ m}) + 25 \text{ Tn} \cdot (10 \text{ m}) \dots$$

$$\dots - 30 \text{ Tn} \cdot (4 \text{ m}) - 13 \text{ Tn} \cdot (8 \text{ m}) - 7 \text{ Tn} \cdot (12 \text{ m})$$

$$M_A = 98 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Paso ③: Determinamos la distancia d , en la cual se ubica la fuerza resultante desde el punto A, figura 1.167 (b)

$$\sum M_A = R \cdot d$$

$$d := \frac{M_A}{R} \rightarrow \frac{98 \cdot \text{m}}{19} = 5.158 \text{ m}$$

Paso ④: Determinamos la fuerza equivalente y momento par, en el punto F, figura 1.167 (c).

$$R = \sum F \quad R := 45 \text{ Tn} + 11 \text{ Tn} + 25 \text{ Tn} - 12 \text{ Tn} - 30 \text{ Tn} - 13 \text{ Tn} - 7 \text{ Tn}$$

$$R = 19 \text{ Tn}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_F = \sum F \cdot d$$

$$M_F = -45 \text{ Tn} \cdot (8 \text{ m}) - 11 \text{ Tn} \cdot (4 \text{ m}) - 7 \text{ Tn} \cdot (2 \text{ m}) \dots$$

$$\dots + 12 \text{ Tn} \cdot (10 \text{ m}) + 30 \text{ Tn} \cdot (6 \text{ m}) + 13 \text{ Tn} \cdot (2 \text{ m})$$

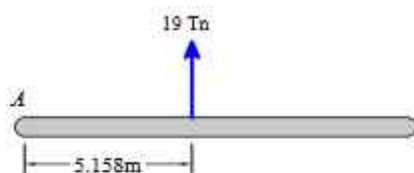
$$M_F = -92 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Alternativamente podemos determinar la fuerza equivalente y momento par en el punto F. Trasladando la fuerza resultante calculado en el paso 1 y usando la distancia d que determinamos en el paso 3. Como se muestra en la figura 1.167 (d) y (e).

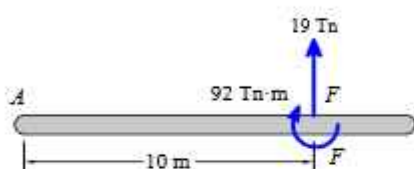
$$+\circlearrowleft \sum M_A = \sum F \cdot d_1$$

$$d_1 := 10 \text{ m} - d = 4.842 \text{ m}$$

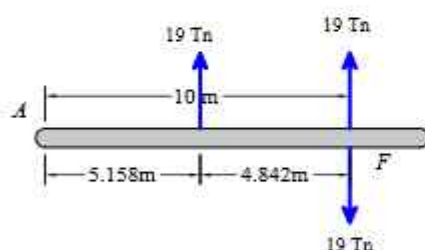
$$M_F := 19 \text{ Tn} \cdot d_1 = 92 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



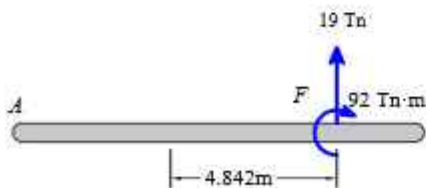
(b)



(c)



(d)

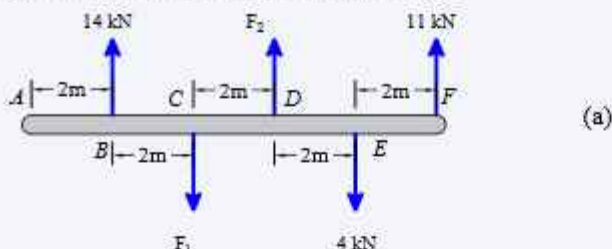


(e)

Figura 1.167

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.6

Determine las fuerzas F_1 y F_2 de la siguiente figura mostrada, si la resultante se ubica a 5m de A y con un valor de 18kN



Paso ①: Determinación de la fuerza F_2 , primero determinamos el momento que producen las fuerzas paralelas en el punto C.

$$+\circlearrowleft \sum M_C = \sum F \cdot d$$

$$M_C = -14 \text{ kN} \cdot (2 \text{ m}) + F_2 \cdot (2 \text{ m}) - 4 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m}) + 11 \text{ kN} \cdot (6 \text{ m}) \quad \dots (1)$$

También determinamos el momento que produce la fuerza resultante con respecto al punto C, figura 1.168 (b).

$$M_C = F_R \cdot 1 \text{ m} \quad M_C = 18 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = 18 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \dots (2)$$

El momento de las fuerzas paralelas es igual momento que ocasiona la fuerza resultante con respecto a C, igualando 1 y 2 tenemos:

$$18 \text{ kN} \cdot \text{m} = -14 \text{ kN} \cdot (2 \text{ m}) + F_2 \cdot (2 \text{ m}) - 4 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m}) + 11 \text{ kN} \cdot (6 \text{ m})$$

$$F_2 = \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m} + 14 \text{ kN} \cdot (2 \text{ m}) + 4 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m}) - 11 \text{ kN} \cdot (6 \text{ m})}{2 \text{ m}} = -2 \text{ kN}$$

Paso ②: Determinación de la fuerza F_1 , para la determinación de la fuerza seguimos los mismos pasos realizados en el paso 1.

$$+\circlearrowleft \sum M_D = \sum F \cdot d$$

$$M_D = -14 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m}) + F_1 \cdot (2 \text{ m}) - 4 \text{ kN} \cdot (2 \text{ m}) + 11 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m}) \quad \dots (3)$$

El momento de las fuerzas paralelas es igual momento que ocasiona la fuerza resultante con respecto a D, figura 1.168 (c).

$$M_D = -F_R \cdot 1 \text{ m} \quad M_D = -18 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = -18 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \dots (4)$$

Igualando 3 y 4 tenemos

$$-18 \text{ kN} \cdot \text{m} = -14 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m}) + F_1 \cdot (2 \text{ m}) - 4 \text{ kN} \cdot (2 \text{ m}) + 11 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m})$$

$$F_1 = \frac{-18 \text{ kN} \cdot \text{m} + 14 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m}) + 4 \text{ kN} \cdot (2 \text{ m}) - 11 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m})}{2 \text{ m}}$$

$$F_1 = 1 \text{ kN}$$

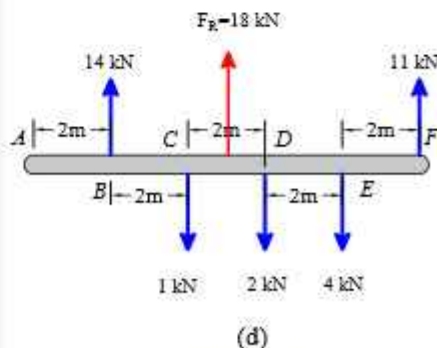
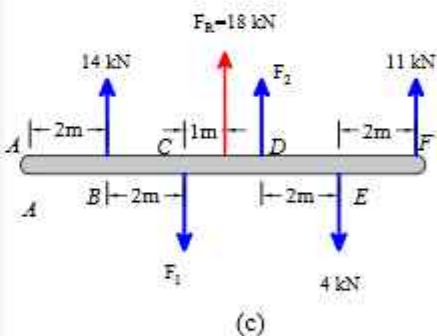
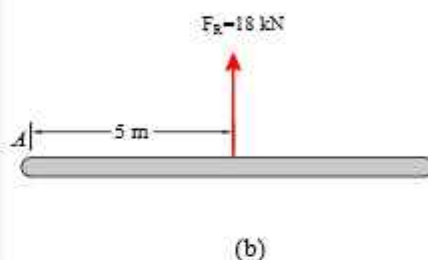


Figura 1.168

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.7

Determine la resultante del siguiente sistema de fuerzas.

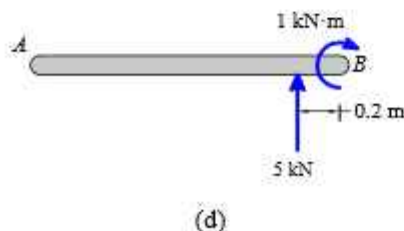
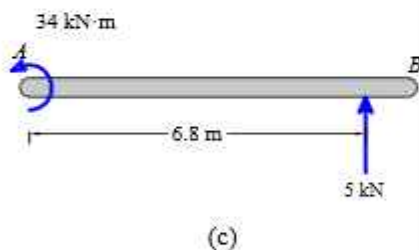
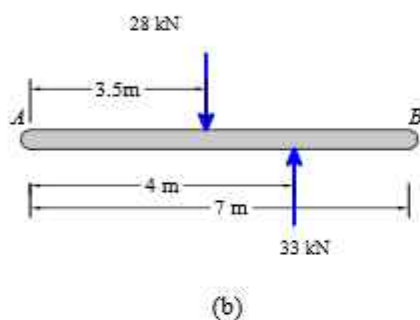
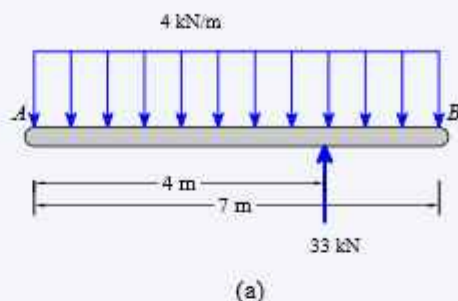


Figura 1.169

Paso ①: Determinamos la resultante de las fuerzas paralelas, figura 1.169 (b).

$$R = \sum F_y$$

$$R = -28 \text{ kN} + 33 \text{ kN}$$

$$R = 5 \text{ kN}$$

Paso ②: Determinamos el momento que producen el sistema de fuerzas con respecto al punto A., figura 1.169 (c).

$$+\circlearrowleft \sum M_A = \sum F \cdot d$$

$$M_A = -28 \text{ kN} \cdot (3.5 \text{ m}) + 33 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m})$$

$$M_A = 34 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

$$\sum M_A = R \cdot d$$

$$d = \frac{M_A}{R} = 6.8 \text{ m}$$

Alternativamente para determinar la resultante podemos hacerlo desde el punto B

$$R = \sum F$$

$$R = -28 \text{ kN} + 33 \text{ kN}$$

$$R = 5 \text{ kN}$$

Determinamos el momento que producen el sistema de fuerzas con respecto al punto B, figura 1.169 (d)

$$\circlearrowleft \sum M_B = \sum F \cdot d$$

$$M_B = 28 \text{ kN} \cdot (3.5 \text{ m}) - 33 \text{ kN} \cdot (3 \text{ m})$$

$$M_B = -1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sum M_B = R \cdot d_1$$

$$d_1 = \frac{M_B}{R} = -0.2 \text{ m}$$

De los resultados podemos concluir: podemos tomar los momentos desde cualquier punto pero la resultante se ubicará en un lugar fijo.

Determine el par resultante que actúa sobre la siguiente figura.

$$F_1 := 15 \text{ Tn} \quad F_2 := 8 \text{ Tn}$$

Paso ①: Determinación del momento resultante, figura 1.170 (b).

$$+ \circlearrowleft \sum M \quad M_R := -F_1 \cdot 8 \text{ m} + F_2 \cdot 4 \text{ m}$$

$$M_R := -88 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Cual es el valor de r , para un momento resultante de $-22 \text{ Tn} \cdot \text{m}$

$$M_R := -22 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_R := -F_1 \cdot 4 \cdot r + F_2 \cdot 2 \cdot r$$

$$-22 \text{ Tn} \cdot \text{m} = -F_1 \cdot 4 \cdot r + F_2 \cdot 2 \cdot r$$

$$x := -F_1 \cdot 4 \cdot x + F_2 \cdot 2 \cdot x + 22 \text{ Tn} \cdot \text{m} \xrightarrow{\text{solve, } x} \frac{\text{m}}{2}$$

Cual es el valor de F_1 , si el momento resultante $0 \text{ Tn} \cdot \text{m}$

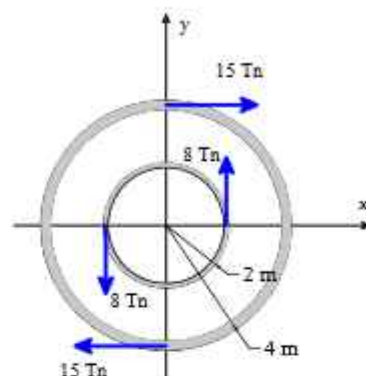
$$M_R := 0 \quad F_1 = ? \quad r := 2 \text{ m}$$

$$M_R := -F_1 \cdot 4 \cdot r + F_2 \cdot 2 \cdot r$$

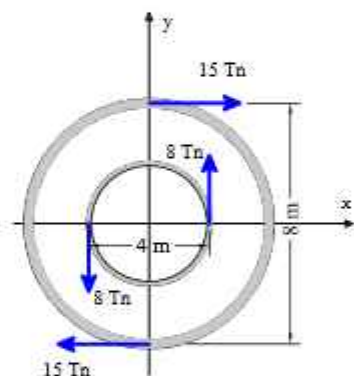
$$0 \text{ Tn} \cdot \text{m} = -F_1 \cdot 4 \cdot r + F_2 \cdot 2 \cdot r$$

$$F_1 := \frac{F_2 \cdot 2 \cdot r}{4 \cdot r} = 4 \text{ Tn}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.8



(a)

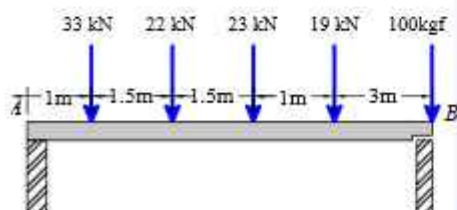


(b)

Figura 1.170

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.9

Determine la resultante del siguiente sistema de cargas puntuales que actúa sobre la viga.



(a)

$$F_1 := 33 \text{ kN}$$

$$F_2 := 22 \text{ kN}$$

$$F_3 := 23 \text{ kN}$$

$$F_4 := 19 \text{ kN}$$

$$F_5 := 100 \text{ kgf}$$

$$d_1 := 1 \text{ m}$$

$$d_2 := 2.5 \text{ m}$$

$$d_3 := 4 \text{ m}$$

$$d_4 := 5 \text{ m}$$

$$d_5 := 8 \text{ m}$$

Paso ①: Determinamos la resultante de las fuerzas paralelas.

$$R = \sum F_y$$

$$F_R := -F_1 - F_2 - F_3 - F_4 - F_5 = -97.981 \text{ kN}$$

CONTINUACIÓN

Paso ②: Determinamos el momento que producen el sistema de cargas puntuales con respecto al punto A. Figura 1.171 (b).

$$+\circlearrowleft \sum M_A = \sum F \cdot d$$

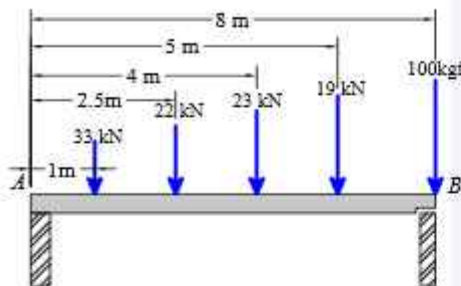
$$M_A = -F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 - F_3 \cdot d_3 - F_4 \cdot d_4 - F_5 \cdot d_5$$

$$M_A = -F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 - F_3 \cdot d_3 - F_4 \cdot d_4 - F_5 \cdot d_5$$

$$M_A = -282.845 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_A = d \cdot F_R$$

$$d := \frac{M_A}{F_R} = 2.887 \text{ m}$$



(b)
Figura 1.171

Determine la resultante del siguiente sistema de fuerzas.

$$F_1 := 30 \text{ Tn} \quad F_2 := 12 \text{ Tn} \quad F_3 := 30 \text{ Tn} \quad F_4 := 10 \text{ Tn}$$

Paso ①: Determinamos la resultante del sistema de fuerzas

$$F_{Rx} = \sum F_x \quad F_{Rx} = F_1 \cdot \sin(60^\circ) + F_2 - F_3 \cdot \cos(30^\circ) - F_4 \cdot \cos(30^\circ)$$

$$F_{Rx} = 3.34 \text{ Tn}$$

$$F_{Ry} = \sum F_y \quad F_{Ry} = F_1 \cdot \cos(60^\circ) - F_3 \cdot \sin(30^\circ) + F_4 \cdot \sin(30^\circ)$$

$$F_{Ry} = 5 \text{ Tn}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 6.013 \text{ Tn}$$

$$\theta := \text{atan}\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right) = 56.259 \text{ deg}$$

Paso ②: Determinamos el momento que producen el sistema de fuerzas con respecto al punto O. Figura 1.172 (b).

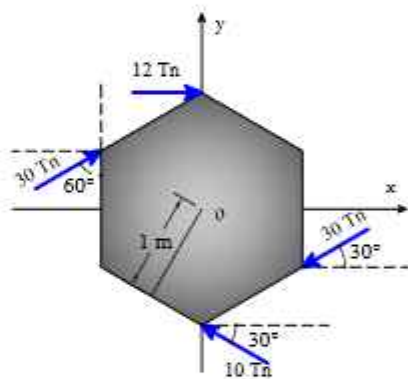
$$L := \frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{\sqrt{3}} = 1.155 \text{ m}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = \sum F \cdot d$$

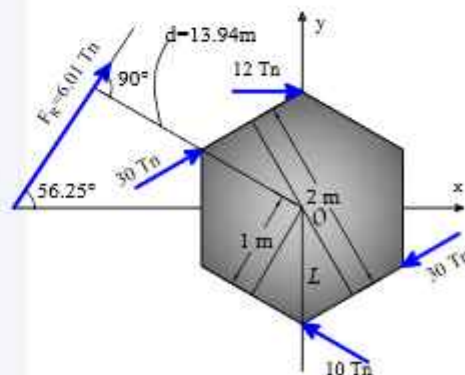
$$M_O = -F_1 \cdot 2 \text{ m} - F_2 \cdot L - F_4 \cdot 1 \text{ m} = -83.856 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_A = d \cdot F_R \quad d := \frac{M_O}{F_R} = -13.946 \text{ m}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.9



(a)



(b)

Figura 1.172

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.10

Determine la resultante del sistema de fuerzas aplicado sobre la viga rígida ABC, y su posición respecto al punto C

$$F_1 := 15 \text{ Tn} \quad F_2 := 9 \text{ Tn} \quad F_3 := 12 \text{ Tn}$$

Paso ①: Determinamos la fuerza resultante y su dirección

$$F_{Rx} = \sum F_x \quad F_{Rx} := -F_2 \cdot \sin(37^\circ) + F_3 \cdot \sin(45^\circ)$$

$$F_{Rx} = 3.069 \text{ Tn}$$

$$F_{Ry} = \sum F_y \quad F_{Ry} := F_1 + F_2 \cdot \cos(37^\circ) - F_3 \cdot \cos(45^\circ)$$

$$F_{Ry} = 13.702 \text{ Tn}$$

$$F_R := \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 14.042 \text{ Tn}$$

$$\theta := \text{atan}\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right) = 77.376 \text{ deg}$$

Paso ②: Tomamos momentos respecto al punto C, según la figura 1.173 (b):

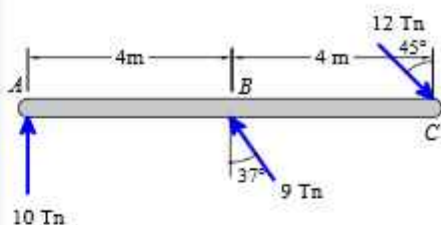
$$+\circlearrowleft \sum M_C = \sum F \cdot d \quad M_C := -F_1 \cdot 8 \text{ m} - F_2 \cdot \cos(37^\circ) \cdot 4 \text{ m}$$

$$M_C = -148.751 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

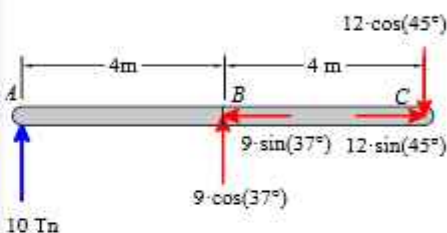
Paso ③: Determinamos la posición de la fuerza resultante respecto al punto C

$$M_C = d_1 \cdot F_{Ry} \quad d_1 := \frac{M_C}{F_{Ry}} = -10.856 \text{ m}$$

$$M_C = d_2 \cdot F_R \quad d_2 := \frac{M_C}{F_R} = -10.593 \text{ m}$$



(a)



(b)

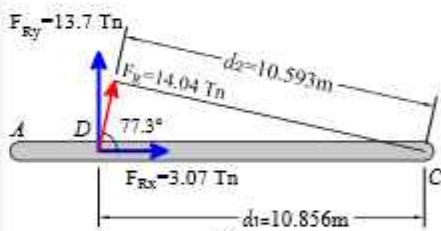


Figura 1.173

EJEMPLO RESUELTO 1.7.1.11

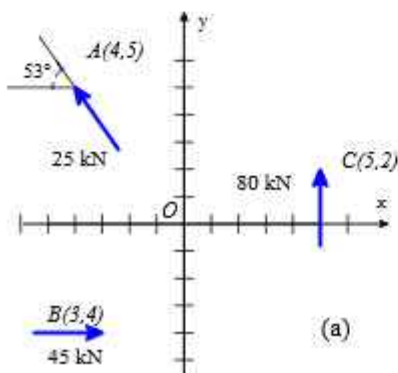
Determine la resultante de las fuerzas aplicado sobre el sistema de coordenadas mostrada en la siguiente figura.

$$F_1 := 25 \text{ kN} \quad F_2 := 45 \text{ kN} \quad F_3 := 80 \text{ kN}$$

Paso ①: Determinamos la fuerza resultante y su dirección.

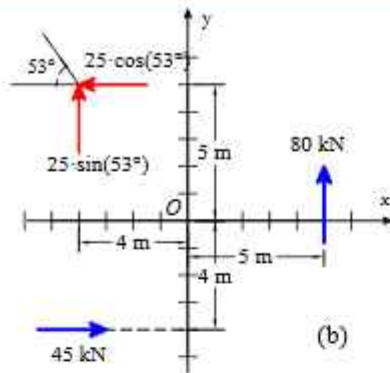
$$F_{Rx} = \sum F_x \quad F_{Rx} := -F_1 \cdot \cos(53^\circ) + F_2$$

$$F_{Rx} = 29.955 \text{ kN}$$



(a)

CONTINUACIÓN



$$F_{Ry} = \sum Fy$$

$$F_{Ry} = F_1 \cdot \sin(53^\circ) + F_3$$

$$F_{Ry} = 99.966 \text{ kN}$$

$$F_R := \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 104.357 \text{ kN}$$

$$\theta := \text{atan}\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right) = 73.319 \text{ deg}$$

Paso ②: Tomamos momentos respecto al punto O, figura 1.174 (b).

$$+\circlearrowleft \sum M_O = \sum F \cdot d$$

$$M_O := -F_1 \cdot \sin(53^\circ) \cdot 4 \text{ m} + F_1 \cdot \cos(53^\circ) \cdot 5 \text{ m} + F_3 \cdot 5 \text{ m} + F_2 \cdot 4 \text{ m}$$

$$M_O = 575.363 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Paso ③: Determinamos la posición de la fuerza resultante respecto al punto O, figura 1.174 (c).

$$M_O = d_1 \cdot F_{Ry} \quad d_1 := \frac{M_O}{F_{Ry}} = 5.756 \text{ m}$$

$$M_O = d_2 \cdot F_R \quad d_2 := \frac{M_O}{F_R} = 5.513 \text{ m}$$

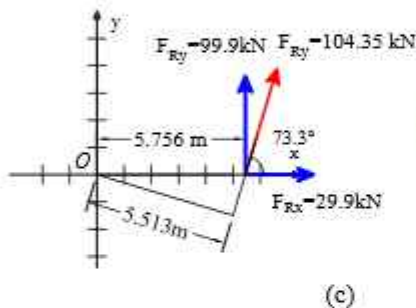


Figura 1.174

1.7.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

5

Ejercicios

1.115 Reemplace la fuerza de 15 kN, a una fuerza equivalente y un momento par en B.

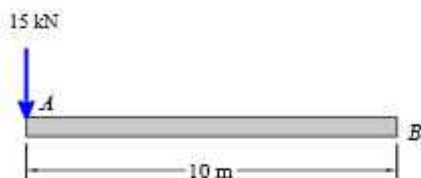


Figura 1.175

1.116 Reemplace la fuerza de 8 Tn, a una fuerza equivalente y un momento par en A.

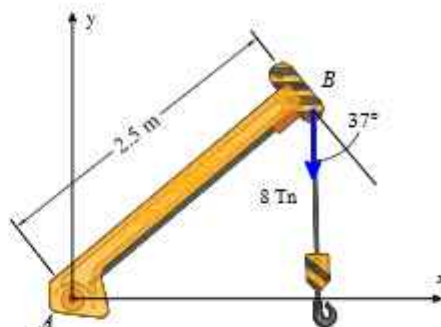


Figura 1.176

1.117 Reemplace la fuerza de 100N, a una fuerza equivalente y un momento par en A.

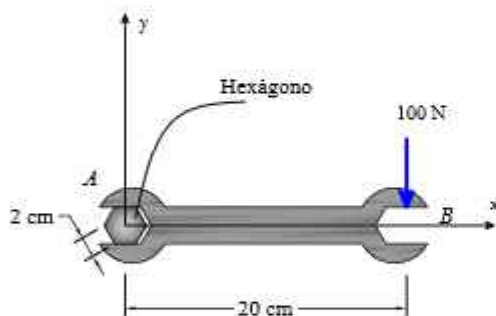


Figura 1.177

1.118 Reemplace la fuerza de 55kN, a una fuerza equivalente y un momento par en A.

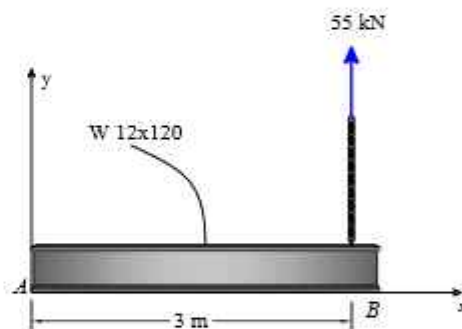


Figura 1.178

1.119 Reemplace la fuerza de 55kN, a una fuerza equivalente y un momento par en A.

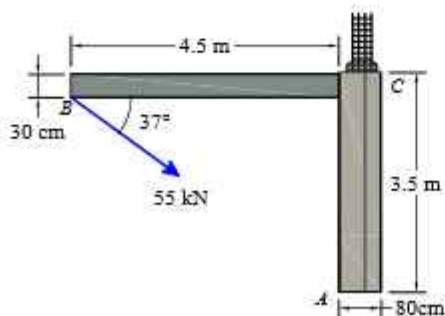


Figura 1.179

1.120 Reemplace la fuerza de 35kN, a una fuerza equivalente y un momento par en A.

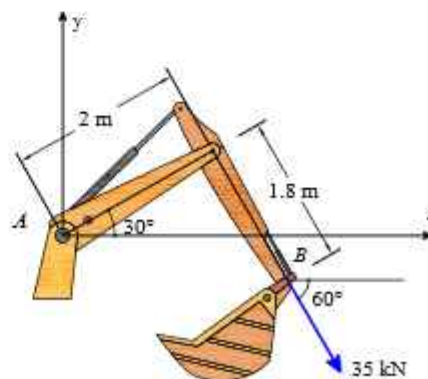


Figura 1.180

1.121 Determine el momento resultante de la fuerza par: 11Tn y 9Tn respecto a su eje de rotación.

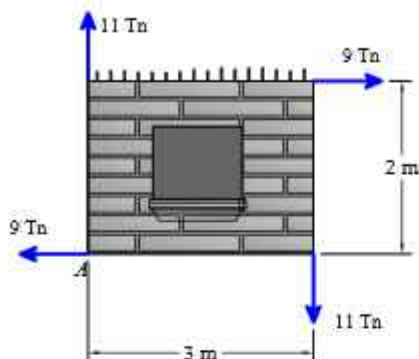


Figura 1.181

1.122 Determine el momento resultante de la fuerza par de 33Tn respecto a su eje de rotación.

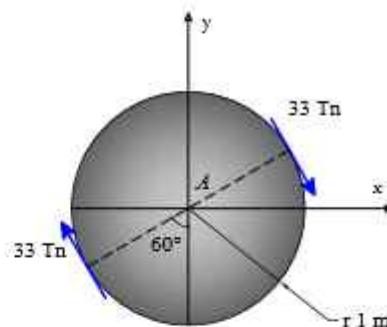


Figura 1.182

1.123 Determine el momento resultante de la fuerza par: 15kN y 8kN respecto a su eje de rotación.

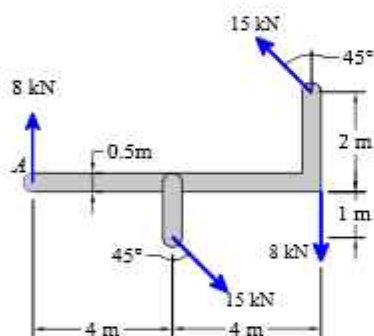


Figura 1.183

1.124 Determine el momento resultante de la fuerza par: 23kN, 15kN y 64kN respecto a su eje de rotación.

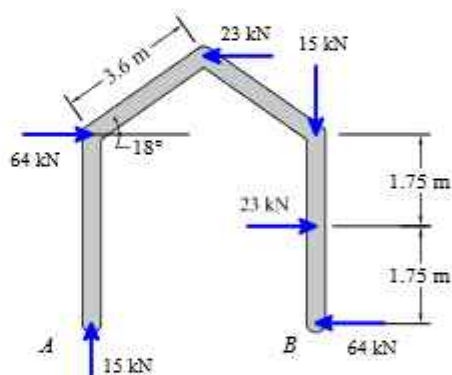


Figura 1.184

1.125 Determine el momento resultante de la fuerza par: 6Tn y 3Tn respecto a su eje de rotación.

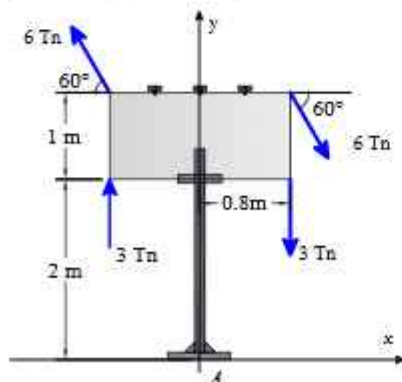


Figura 1.185

1.126 Determine el momento resultante de la fuerza par: 10kN y 20kN respecto a su eje de rotación.

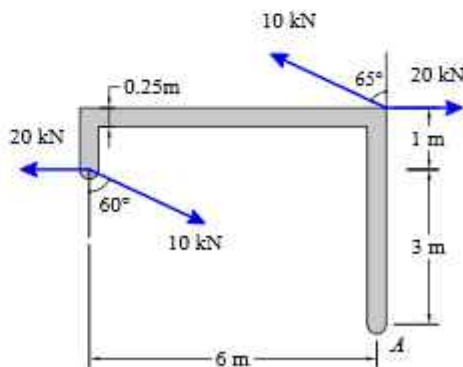


Figura 1.186

Determinar la fuerza resultante de los siguientes sistemas de fuerzas, luego reemplace la fuerza resultante por una fuerza equivalente y un momento para en A.

1.127

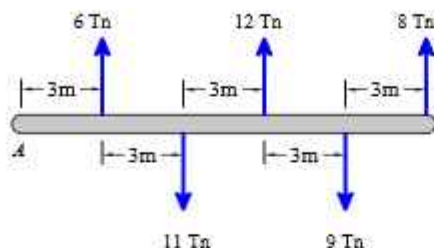


Figura 1.187

1.128

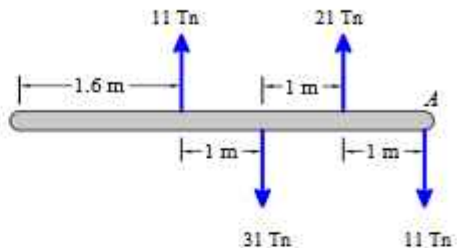


Figura 1.188

1.129

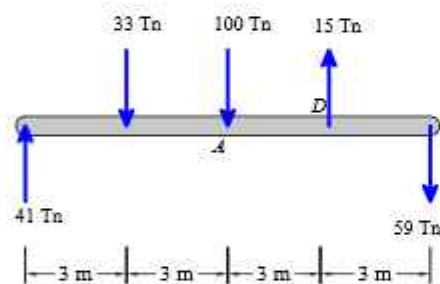


Figura 1.189

1.130

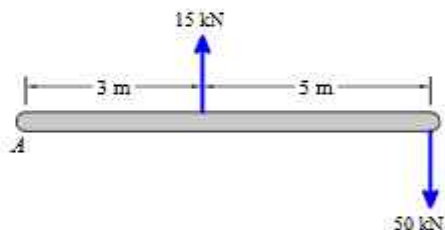


Figura 1.190

1.131

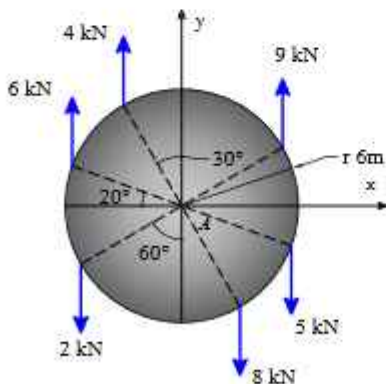


Figura 1.191

1.132

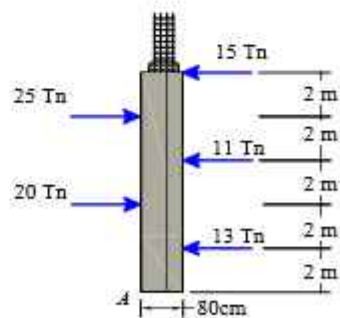


Figura 1.192

1.133 Determine las fuerzas F_1 y F_2 , si la fuerza resultante se ubica a 13m de A.

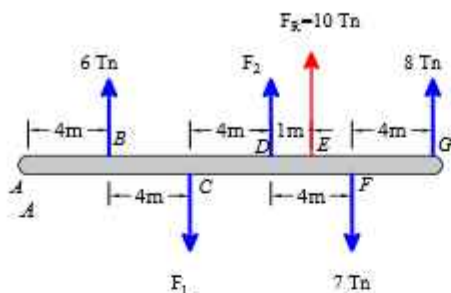


Figura 1.193

1.134 Determine la fuerza resultante y su posición respecto al punto A.

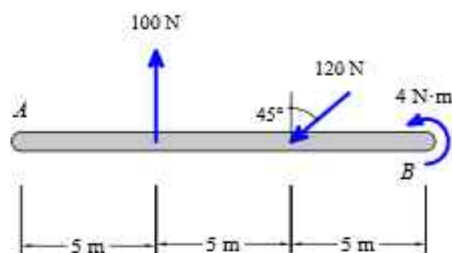


Figura 1.194

1.135 Del sistema siguiente determine la fuerza resultante y su posición respecto al punto B.

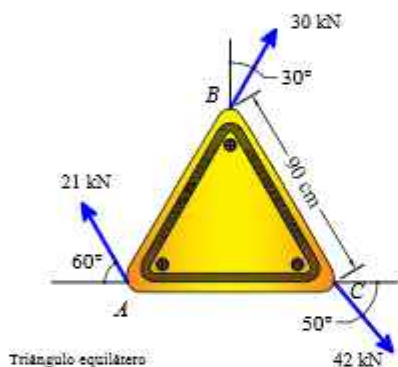


Figura 1.195

1.136 Determine la fuerza resultante y su posición respecto al punto D.

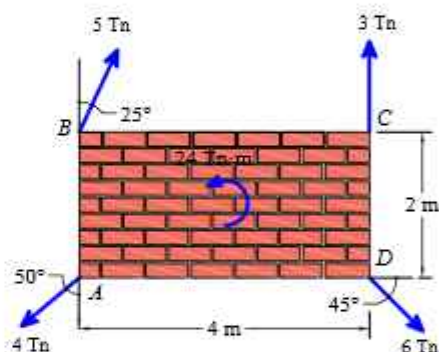


Figura 1.196

1.137 Determine la fuerza resultante y su posición respecto al punto A. Del siguiente sistema de fuerzas:

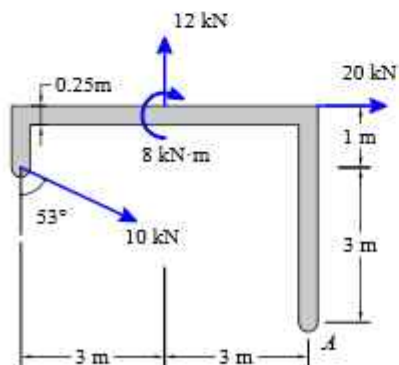


Figura 1.197

1.138 Del siguiente sistemas de fuerzas no concurrentes, determine la fuerza resultante

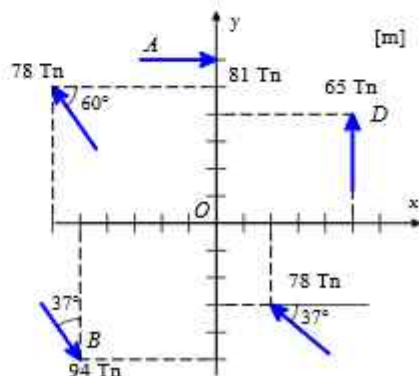


Figura 1.198

1.139 Determine la magnitud y la posición de la fuerza resultante de la siguiente figura 5.96

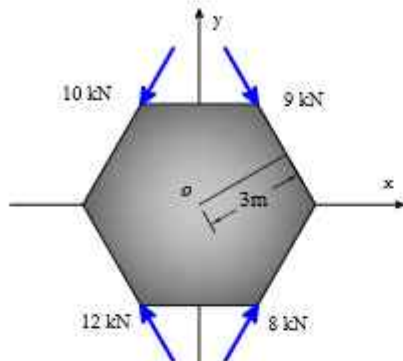


Figura 1.199

1.140 Determine la fuerza necesaria para mantener en equilibrio la figura 5.97

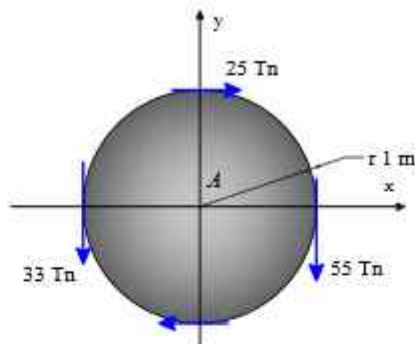


Figura 1.200

1.141 Del siguiente sistema de fuerzas no concurrentes, determine la fuerza resultante y su posición respecto al punto D

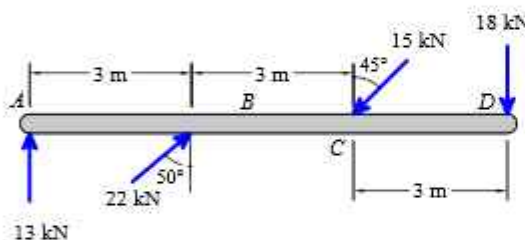


Figura 1.201

1.142 Del siguiente sistema de fuerzas no concurrentes, determine la fuerza resultante y su posición respecto al punto A

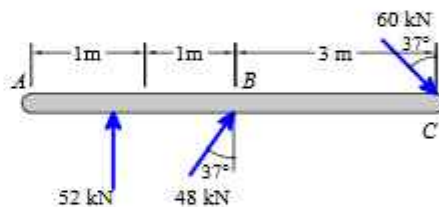


Figura 1.202

1.143 Del siguiente sistemas de fuerzas no concurrentes, determine la fuerza resultante

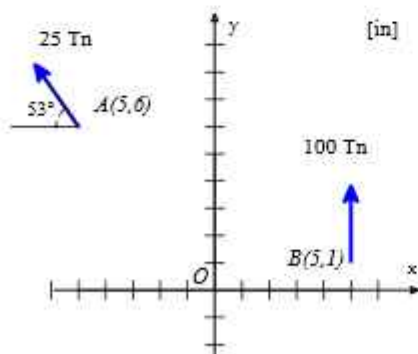


Figura 1.203

1.144 Del siguiente sistemas de fuerzas no concurrentes, determine la fuerza resultante

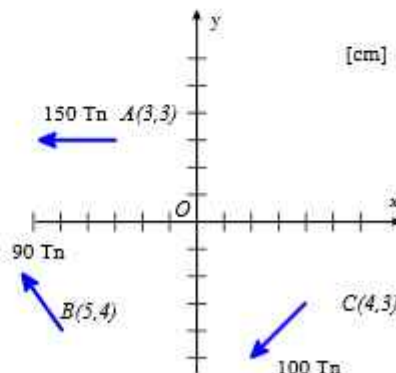


Figura 1.204

1.8. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DADO

Esta expresado de la forma siguiente:

$$M_{OL} = \lambda \cdot M_O = \lambda \cdot (r \times F)$$

Expresado en su forma de determinante:

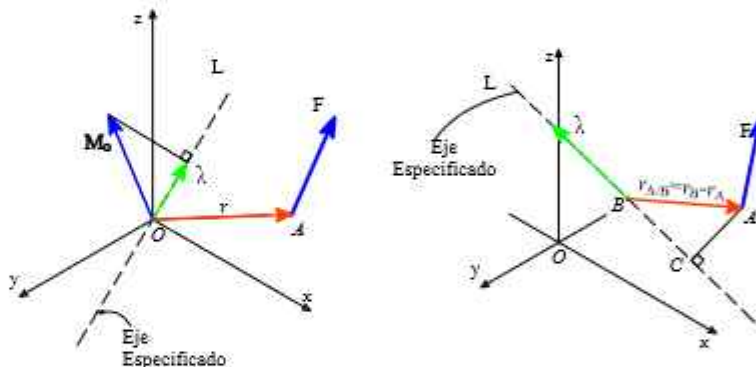
$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde:

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = Cosenos directores del eje OL.

r_x, r_y, r_z = Coordenadas del punto de aplicación F.

F_x, F_y, F_z = Componentes de la fuerza F.



$$M_{BL} = \lambda \cdot M_B = \lambda \cdot (r_{A/B} \times F)$$

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_{x(A/B)} & r_{y(A/B)} & r_{z(A/B)} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

1.8.1. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 1.8.1.1

Determinar el momento que produce la fuerza 50 kN, con respecto al eje AB.

Para poder determinar el momento con respecto al eje AB, primero determinamos un vector de posición desde cualquier punto del eje AB hasta cualquier punto de la línea de acción de la fuerza de 50 kN

$$A := [0 \ 0 \ 2 \text{ m}] \quad C := [0 \ 4 \text{ m} \ 2 \text{ m}] \quad F := 50 \text{ kN}$$

$$B := [4 \text{ m} \ 4 \text{ m} \ 0] \quad D := [0 \ 10 \text{ m} \ 5 \text{ m}]$$

Paso ①: Determinamos el vector unitario u_{AB} , que indica el la dirección del eje.

$$r_{AB} := B - A = [4 \ 4 \ -2] \text{ m} \quad u_{AB} := \frac{r_{AB}}{\|r_{AB}\|} = [0.667 \ 0.667 \ -0.333]$$

Paso ②: Determinamos los vectores posición, desde el punto A

$$r_{AC} := C - A = [0 \ 4 \ 0] \text{ m} \quad r_{AD} := D - A = [0 \ 10 \ 3] \text{ m}$$

Paso ③: Expresamos la fuerza 50 kN, en su forma de vector cartesiano.

$$r_{CD} := D - C = [0 \ 6 \ 3] \text{ m} \quad \mathbf{F} := F \cdot \left(\frac{r_{CD}}{\|r_{CD}\|} \right) = [0 \ 44.721 \ 22.361] \text{ kN}$$

Paso ④: Determinamos el momento con respecto al eje AB, considerando cualquier vector de posición, figura 1.205 (b).

- Vector de posición r_{AC}

$$M_{AB} := u_{AB} \cdot (r_{AC} \times F) = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.667 & -0.333 \\ 0 & 4 \text{ m} & 0 \\ 0 & 44.721 \text{ kN} & 22.361 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

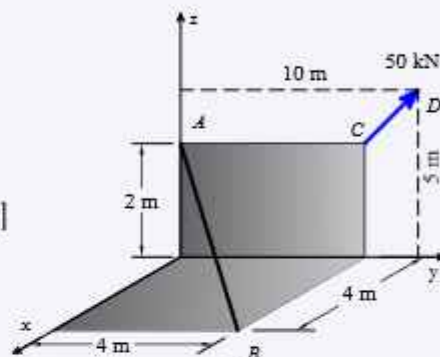
$$M_{AB} = 0.667 (4 \text{ m} \cdot 22.361 \text{ kN} - 0) - 0.667 (0 \text{ kN} \cdot \text{m}) \dots$$

$$\dots + (-0.333 (0 \text{ kN} \cdot \text{m}))$$

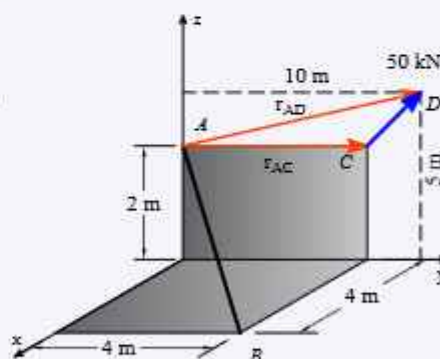
$$M_{AB} = 59.628 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- Vector de posición r_{AD}

$$M_{AB} := u_{AB} \cdot (r_{AD} \times F) = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.667 & -0.333 \\ 0 & 10 \text{ m} & 3 \text{ m} \\ 0 & 44.721 \text{ kN} & 22.361 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

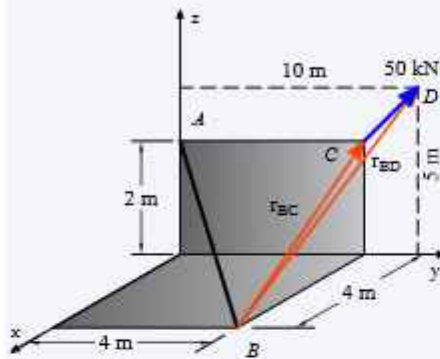


(a)



(b)

CONTINUACIÓN



(c)

Figura 1.205

$$M_{AB} = 0.667 (10 \text{ m} \cdot 22.361 \text{ kN} - 3 \text{ m} \cdot 44.721 \text{ kN}) - 0.667 (0 \text{ kN} \cdot \text{m}) \dots \\ \dots + (-0.333 (0 \text{ kN} \cdot \text{m}))$$

$$M_{AB} = 59.628 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\mathbf{M}_{AB} := M_{AB} \cdot \mathbf{u}_{AB} = [39.752 \quad 39.752 \quad -19.876] \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para comprobación ahora realizaremos desde el punto B del eje AB, hacia el punto C y D de la dirección de la fuerza.

Paso ①: Determinamos el vector unitario \mathbf{u}_{AB} , que indica la dirección del eje.

$$\mathbf{r}_{AB} := \mathbf{B} - \mathbf{A} = [4 \quad 4 \quad -2] \text{ m} \quad \mathbf{u}_{AB} := \frac{\mathbf{r}_{AB}}{\|\mathbf{r}_{AB}\|} = [0.667 \quad 0.667 \quad -0.333]$$

Paso ②: Determinamos los vectores posición, desde el punto B

$$\mathbf{r}_{BC} := \mathbf{C} - \mathbf{B} = [-4 \quad 0 \quad 2] \text{ m} \quad \mathbf{r}_{BD} := \mathbf{D} - \mathbf{B} = [-4 \quad 6 \quad 5] \text{ m}$$

Paso ③: Determinamos el momento con respecto al eje AB, considerando cualquier vector de posición, figura 1.205 (b).

- Vector de posición \mathbf{r}_{BC}

$$M_{AB} := \mathbf{u}_{AB} \cdot (\mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.667 & -0.333 \\ -4 \text{ m} & 0 & 2 \text{ m} \\ 0 & 44.721 \text{ kN} & 22.361 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

$$M_{AB} = 0.667 (0 \text{ kN} \cdot \text{m} - 2 \text{ m} \cdot 44.721 \text{ kN}) - 0.667 (-4 \text{ m} \cdot 22.361 \text{ kN} - 0 \text{ kN} \cdot \text{m}) \dots \\ \dots + (-0.333 (-4 \text{ m} \cdot 44.721 \text{ kN} - 0 \text{ kN} \cdot \text{m}))$$

$$M_{AB} = 59.628 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- Vector de posición \mathbf{r}_{BD}

$$M_{AB} := \mathbf{u}_{AB} \cdot (\mathbf{r}_{BD} \times \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.667 & -0.333 \\ -4 \text{ m} & 6 \text{ m} & 5 \text{ m} \\ 0 & 44.721 \text{ kN} & 22.361 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

$$M_{AB} = 0.667 (6 \text{ m} \cdot 22.361 \text{ kN} - 5 \text{ m} \cdot 44.721 \text{ kN}) - 0.667 (-4 \text{ m} \cdot 22.361 \text{ kN} - 0 \text{ kN} \cdot \text{m}) \dots \\ \dots + (-0.333 (-4 \text{ m} \cdot 44.721 \text{ kN} - 0 \text{ kN} \cdot \text{m}))$$

$$M_{AB} = 59.628 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\mathbf{M}_{AB} := M_{AB} \cdot \mathbf{u}_{AB} = [39.752 \quad 39.752 \quad -19.876] \text{ kN} \cdot \text{m}$$

EJEMPLO RESUELTO 1.8.1.2

Determinar el momento que produce la fuerza, con respecto al eje x , y e z .

$$\mathbf{F} = (-30 \text{ Tn}) \mathbf{i} + (15 \text{ Tn}) \mathbf{j} + (40 \text{ Tn}) \mathbf{k}$$

-Forma Vectorial:

Paso ①: Determinamos el momento con respecto al eje x

$$A := [0 \ 0 \ 0] \text{ m}$$

$$B := [0 \ 4 \text{ m} \ 3 \text{ m}]$$

$$r_{AB} := B - A = [0 \ 4 \ 3] \text{ m}$$

$$u_x := [1 \ 0 \ 0]$$

$$M_x := u_x \cdot (r_{AB} \times F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \text{ m} & 3 \text{ m} \\ -30 \text{ Tn} & 15 \text{ Tn} & 40 \text{ Tn} \end{bmatrix}$$

$$M_x = 115 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Paso ②: Determinamos el momento con respecto al eje y

$$u_y := [0 \ 1 \ 0]$$

$$M_y := u_y \cdot (r_{AB} \times F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 \text{ m} & 3 \text{ m} \\ -30 \text{ Tn} & 15 \text{ Tn} & 40 \text{ Tn} \end{bmatrix}$$

$$M_y = -90 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Paso ③: Determinamos el momento con respecto al eje z

$$u_z := [0 \ 0 \ 1]$$

$$M_z := u_z \cdot (r_{AB} \times F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 \text{ m} & 3 \text{ m} \\ -30 \text{ Tn} & 15 \text{ Tn} & 40 \text{ Tn} \end{bmatrix}$$

$$M_z = 120 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

-Forma Escalar, figura 1.206 (c), (d) y (e), respectivamente:

$$M_x = \sum M_x$$

$$M_x := 40 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} - 15 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} = 115 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_y = \sum M_y$$

$$M_y := -30 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} = -90 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_z = \sum M_z$$

$$M_z := 30 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} = 120 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

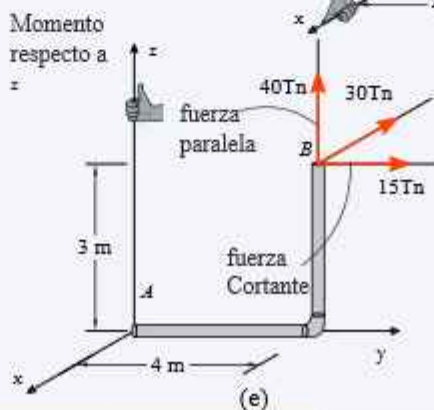
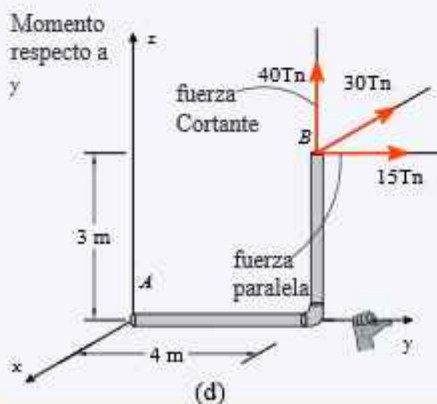
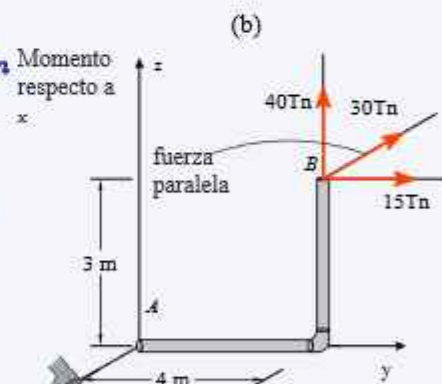
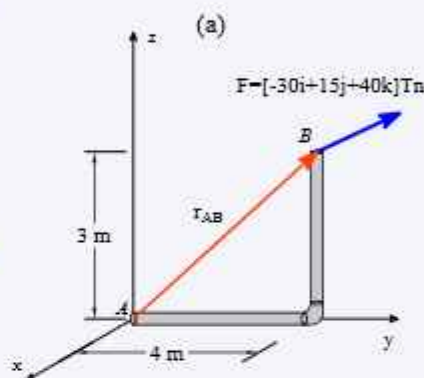
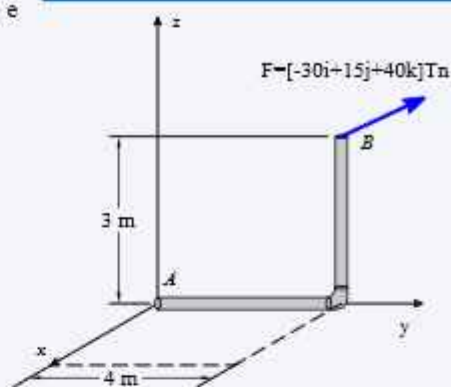


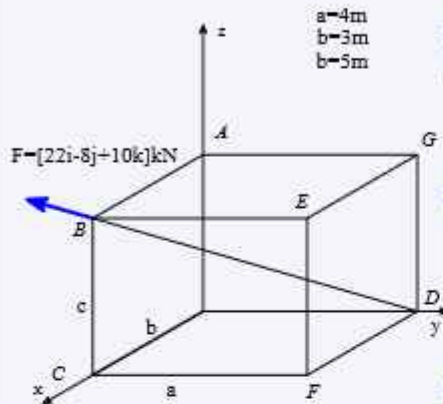
Figura 1.206

EJEMPLO RESUELTO 1.8.1.3

Determinar el momento que produce la fuerza F , sobre el eje EG

$$\mathbf{F} = (22 \text{ kN}) \mathbf{i} - (8 \text{ kN}) \mathbf{j} + (10 \text{ kN}) \mathbf{k} \quad \mathbf{B} = [3 \ 0 \ 5] \text{ m}$$

$$\mathbf{D} = [0 \ 4 \ 0] \text{ m} \quad \mathbf{E} = [3 \ 4 \ 5] \text{ m} \quad \mathbf{G} = [0 \ 4 \ 5] \text{ m}$$



(a)

Paso ①: Determinamos el vector unitario \mathbf{u}_{EG} , que indica la dirección del eje.

$$\mathbf{r}_{EG} := \mathbf{G} - \mathbf{E} = [-3 \ 0 \ 0] \text{ m} \quad \mathbf{u}_{EG} := \frac{\mathbf{r}_{EG}}{\|\mathbf{r}_{EG}\|} = [-1 \ 0 \ 0]$$

Paso ②: Determinamos los vectores posición, desde el punto E y G.

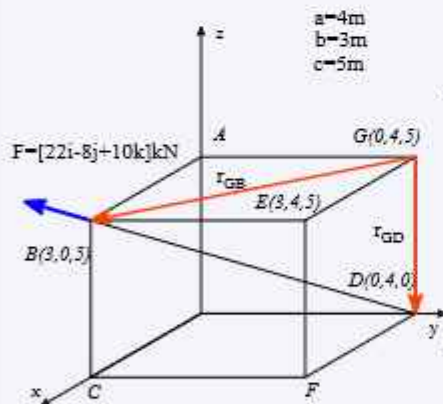
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{EB} &:= \mathbf{B} - \mathbf{E} = [0 \ -4 \ 0] \text{ m} & \mathbf{r}_{GB} &:= \mathbf{B} - \mathbf{G} = [3 \ -4 \ 0] \text{ m} \\ \mathbf{r}_{ED} &:= \mathbf{D} - \mathbf{E} = [-3 \ 0 \ -5] \text{ m} & \mathbf{r}_{GD} &:= \mathbf{D} - \mathbf{G} = [0 \ 0 \ -5] \text{ m} \end{aligned}$$

Paso ③: Determinamos el momento con respecto al eje EG , considerando cualquier vector de posición, según la figura 1.207 (b).

- **Vector de posición** \mathbf{r}_{EB}

$$\mathbf{M}_{EG} := \mathbf{u}_{EG} \cdot (\mathbf{r}_{EB} \times \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 \text{ m} & 0 \\ 22 \text{ kN} & -8 \text{ kN} & 10 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

$$M_{EG} = -1 (-4 \text{ m} \cdot 10 \text{ kN} - 0 \cdot -8 \text{ kN}) - 0 + 0 \quad M_{EG} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(b)

- **Vector de posición** \mathbf{r}_{ED}

$$\mathbf{M}_{EG} := \mathbf{u}_{EG} \cdot (\mathbf{r}_{ED} \times \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 \text{ m} & 0 & -5 \text{ m} \\ 22 \text{ kN} & -8 \text{ kN} & 10 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

$$M_{EG} = -1 (0 - 5 \text{ m} \cdot 8 \text{ kN}) - 0 + 0 \quad M_{EG} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- **Vector de posición** \mathbf{r}_{GB}

$$\mathbf{M}_{EG} := \mathbf{u}_{EG} \cdot (\mathbf{r}_{GB} \times \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 \text{ m} & -4 \text{ m} & 0 \\ 22 \text{ kN} & -8 \text{ kN} & 10 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

$$M_{EG} = -1 (-4 \text{ m} \cdot 10 \text{ kN} - 0 \cdot -8 \text{ kN}) - 0 + 0 \quad M_{EG} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- **Vector de posición** \mathbf{r}_{GD}

$$\mathbf{M}_{EG} := \mathbf{u}_{EG} \cdot (\mathbf{r}_{GD} \times \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \text{ m} \\ 22 \text{ kN} & -8 \text{ kN} & 10 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

$$M_{EG} = -1 (0 - 5 \text{ m} \cdot 8 \text{ kN}) - 0 + 0 \quad M_{EG} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{EG} := M_{EG} \cdot \mathbf{u}_{EG} \rightarrow |-(40 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}) \ 0 \ 0|$$

Figura 1.207

EJEMPLO RESUELTO 1.8.1.4

Del siguiente sistema de fuerzas, actúan las fuerzas F_1 , F_2 , F_3 y F_4 . Determine los momentos respecto a x, y e z

Datos

$$F_1 := 21 \text{ kN} \quad F_2 := 12 \text{ kN}$$

$$F_3 := 16 \text{ kN} \quad F_4 := 13 \text{ kN}$$

Determinamos los momentos respecto a los ejes x, y e z; según las figuras 1.208 (a), (b) y (c), respectivamente:

-Forma Escalar:

$$M_x := -F_2 \cdot 8 \text{ m} \rightarrow -(96 \cdot \text{kN} \cdot \text{m})$$

$$M_y := F_1 \cdot 6 \text{ m} + F_2 \cdot 10 \text{ m} - F_4 \cdot 6 \text{ m} \rightarrow 168 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z := F_3 \cdot 10 \text{ m} + F_4 \cdot 8 \text{ m} \rightarrow 264 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

-Forma Vectorial:

Expresamos cada fuerza en su vector cartesiano:

$$F_1 := [21 \ 0 \ 0] \text{ Tn} \quad F_2 := [0 \ 0 \ -12] \text{ Tn}$$

$$F_3 := [0 \ 16 \ 0] \text{ Tn} \quad F_4 := [-13 \ 0 \ 0] \text{ Tn}$$

Vector Unitario de cada vector:

$$u_i := [1 \ 0 \ 0] \quad u_j := [0 \ 1 \ 0] \quad u_k := [0 \ 0 \ 1]$$

Vector Posición:

$$B := [10 \ 0 \ 6] \text{ m} \quad D := [10 \ 8 \ 0] \text{ m}$$

$$O := [0 \ 0 \ 0] \text{ m} \quad C := [0 \ 8 \ 6] \text{ m}$$

$$r_{OB} := B - O = [10 \ 0 \ 6] \text{ m} \quad r_{OD} := D - O = [10 \ 8 \ 0] \text{ m}$$

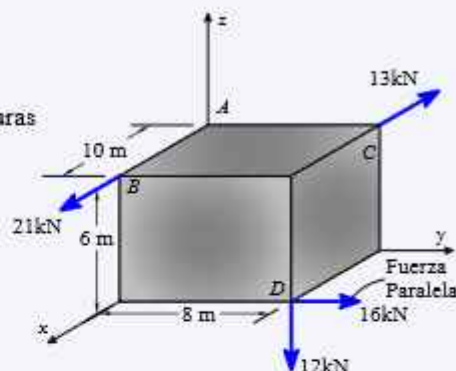
$$r_{OC} := C - O = [0 \ 8 \ 6] \text{ m}$$

Determinación de momentos:

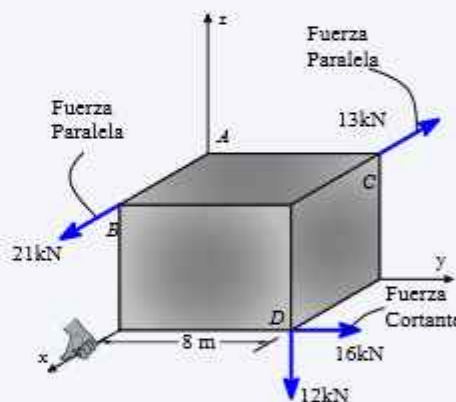
$$M_x := u_i \cdot (r_{OB} \times F_1 + r_{OD} \times F_3 + r_{OD} \times F_4 + r_{OC} \times F_2) = -96 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_y := u_j \cdot (r_{OB} \times F_1 + r_{OD} \times F_2 + r_{OD} \times F_3 + r_{OC} \times F_4) = 168 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

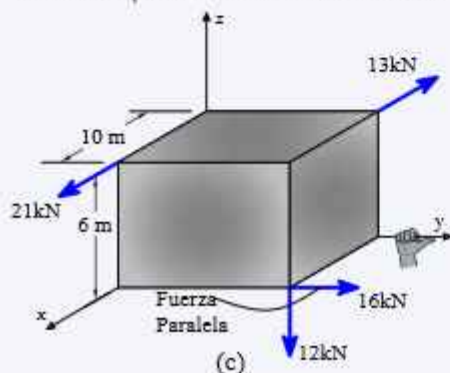
$$M_z := u_k \cdot (r_{OB} \times F_1 + r_{OD} \times F_2 + r_{OD} \times F_3 + r_{OC} \times F_4) = 264 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



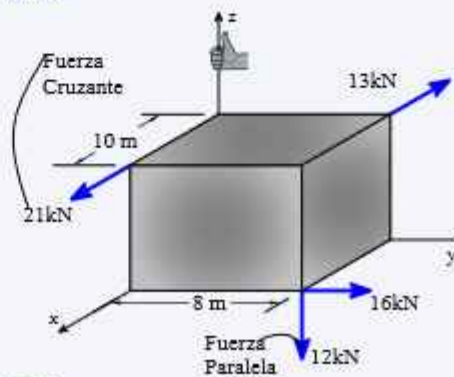
(a)



(b)



(c)



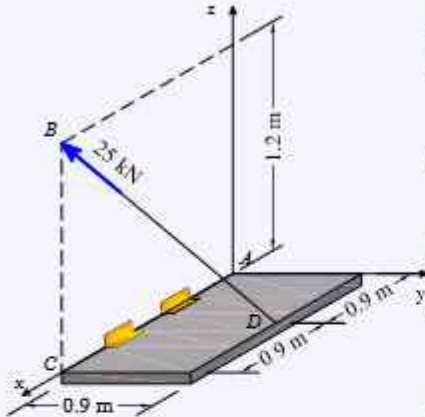
(d)

Figura 1.208

EJEMPLO RESUELTO 1.8.1.3

Determinar el momento que produce la fuerza 25 kN , con respecto al eje AB.

$$\begin{aligned} A &:= [0 \ 0 \ 0] \text{ m} & C &:= [1.8 \ 0 \ 0] \text{ m} & F &:= 25 \text{ kN} \\ B &:= [1.8 \ 0 \ 1.2] \text{ m} & D &:= [0.9 \ 0.9 \ 0] \text{ m} \end{aligned}$$



(a)

Paso ①: Determinamos el vector unitario u_{AB} , que indica la dirección del eje.

$$r_{AC} := C - A = [1.8 \ 0 \ 0] \text{ m} \quad u_{AC} := \frac{r_{AC}}{\|r_{AC}\|} = [1 \ 0 \ 0]$$

Paso ②: Determinamos los vectores posición, desde el punto A

$$r_{AB} := B - A = [1.8 \ 0 \ 1.2] \text{ m} \quad r_{AD} := D - A = [0.9 \ 0.9 \ 0] \text{ m}$$

Paso ③: Expresamos la fuerza 25 kN , en su forma de vector cartesiano.

$$r_{DB} := B - D = [0.9 \ -0.9 \ 1.2] \text{ m}$$

$$F := F \cdot \left(\frac{r_{DB}}{\|r_{DB}\|} \right) = [12.862 \ -12.862 \ 17.15] \text{ kN}$$

Paso ④: Determinamos el momento con respecto al eje AB, considerando cualquier vector de posición, figura 1.205 (b).

- Vector de posición r_{AB}

$$M_{AC} := u_{AC} \cdot (r_{AB} \times F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.8 \text{ m} & 0 \text{ m} & 1.2 \text{ m} \\ 12.862 \text{ kN} & -12.862 \text{ kN} & 17.15 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

$$M_{AC} = 1 (0 \text{ kN} \cdot \text{m} + 1.2 \text{ m} \cdot 12.862 \text{ kN}) - 0 (\dots) + 0 (\dots)$$

$$M_{AC} = 15.435 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

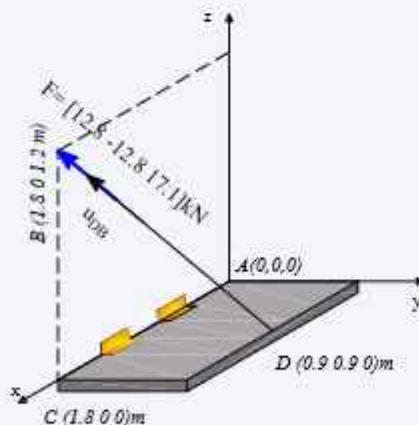
- Vector de posición r_{AD}

$$M_{AC} := u_{AC} \cdot (r_{AD} \times F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.9 \text{ m} & 0.9 \text{ m} & 0 \text{ m} \\ 12.862 \text{ kN} & -12.862 \text{ kN} & 17.15 \text{ kN} \end{bmatrix}$$

$$M_{AC} = 1 (0.9 \text{ m} \cdot 17.15 \text{ kN}) - 0 (\dots) + 0 (\dots)$$

$$M_{AC} = 15.435 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AC} := M_{AC} \cdot u_{AC} = [15.435 \ 0 \ 0] \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(b)

Figura 1.209

1.8.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

6

Ejercicios

1.145 Determinar el momento que produce la fuerza F sobre el eje AB

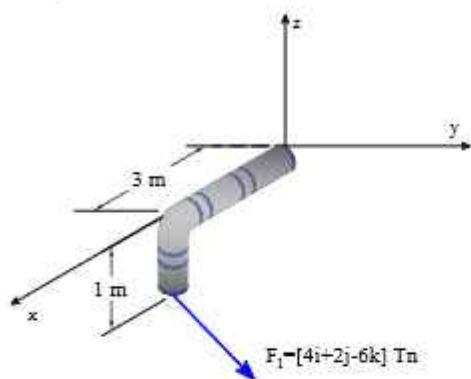


Figura 1.210

1.147 Determinar el momento sobre el eje AB, que produce la fuerza F

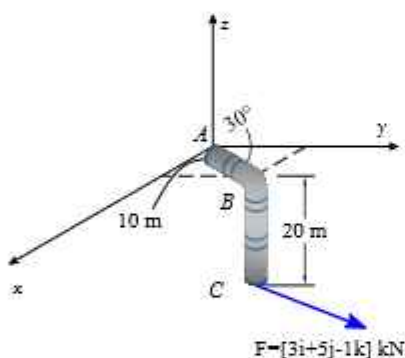


Figura 1.212

1.149 Determinar el momento con respecto a eje z, que produce la fuerza F

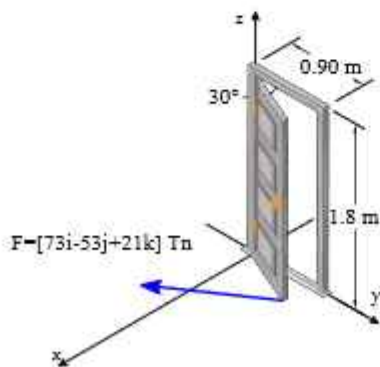


Figura 1.214

1.146 Determinar el momento con respecto al eje AB, que produce la fuerza F

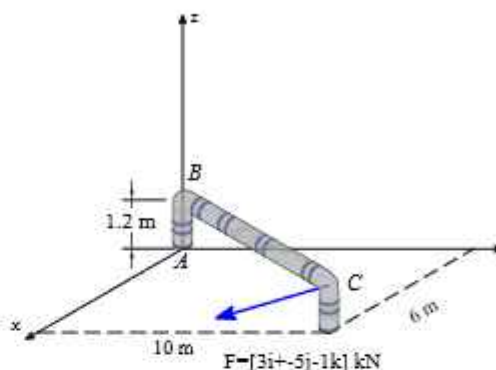


Figura 1.211

1.148 Determinar los momentos con respecto a los ejes x, y, z que produce la fuerza F

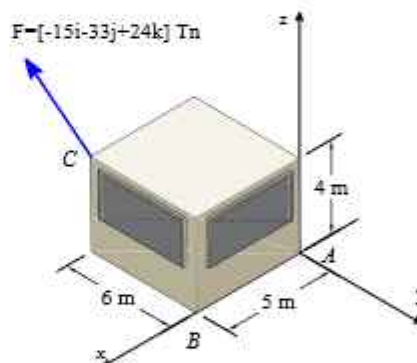


Figura 1.213

1.150 Determinar el momento con respecto al eje y que produce la fuerza F

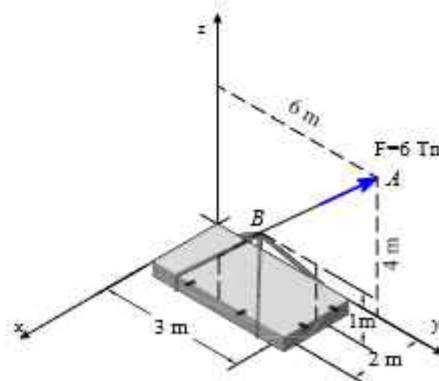


Figura 1.215

1.151 Determinar el momento, que produce la fuerza con respecto a los ejes x y y

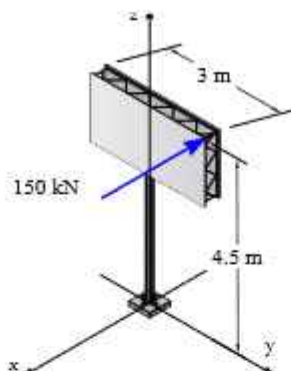


Figura 1.216

1.152 Determinar el momento que produce la fuerza de tensión sobre el eje CD

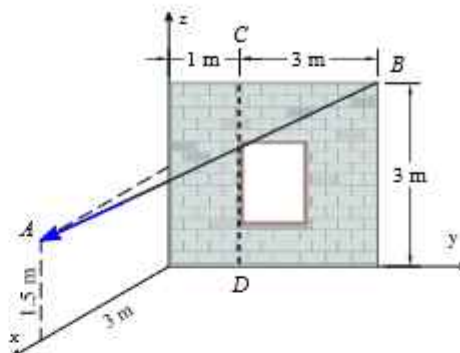


Figura 1.217

1.153 Determinar el momento de la fuerza sobre los ejes x y z

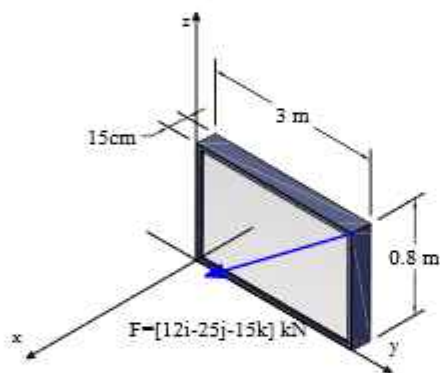


Figura 1.218

1.154 Determinar el momento sobre el eje OB, que produce la fuerza de tensión

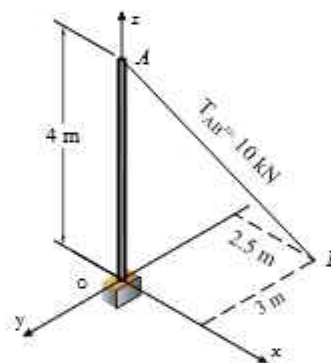


Figura 1.219

1.155 Determinar el momento sobre el eje BC, que produce la fuerza de tensión AD

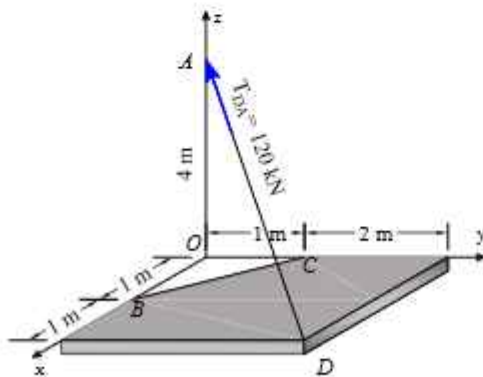


Figura 1.220

1.156 Determinar el momento que produce la fuerza de tensión BD, sobre el eje BA

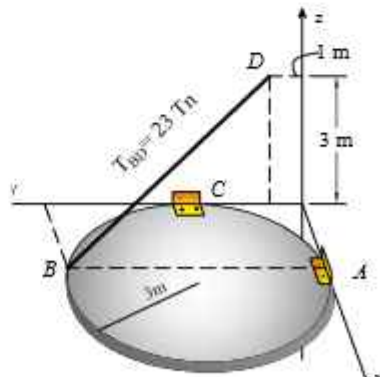


Figura 1.221

1.157 Determinar el momento que produce la fuerza con respecto al eje AB

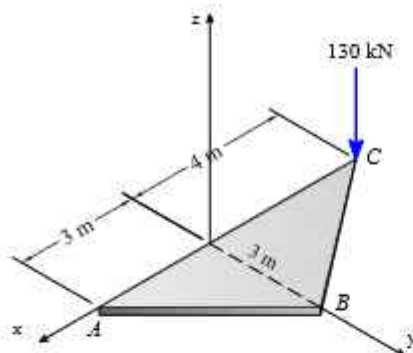


Figura 1.222

1.158 Determinar los momentos respecto a los ejes x , y , z .

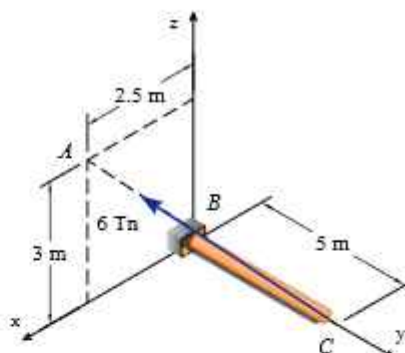


Figura 1.223

1.159 Determinar los momentos respecto a los ejes x e y , que produce la tensión sobre el cable

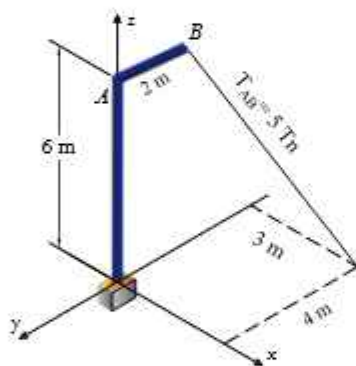


Figura 1.224

1.160 Determinar el momento que produce la fuerza con respecto al eje AC

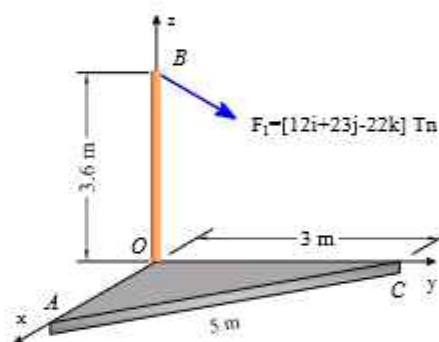


Figura 1.225

1.161 Determinar los momentos respecto a los ejes x , y , z .

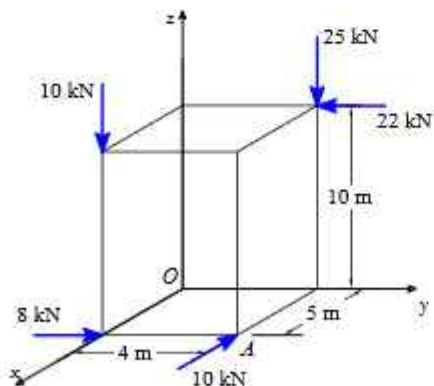


Figura 1.226

1.162 Determinar el momento que produce la fuerza con respecto al eje OB

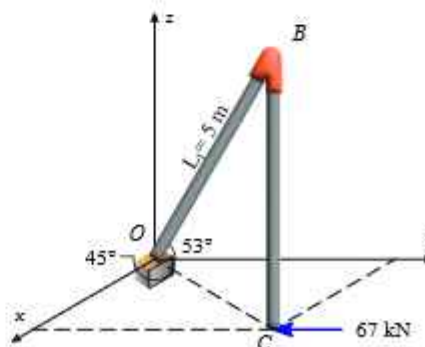
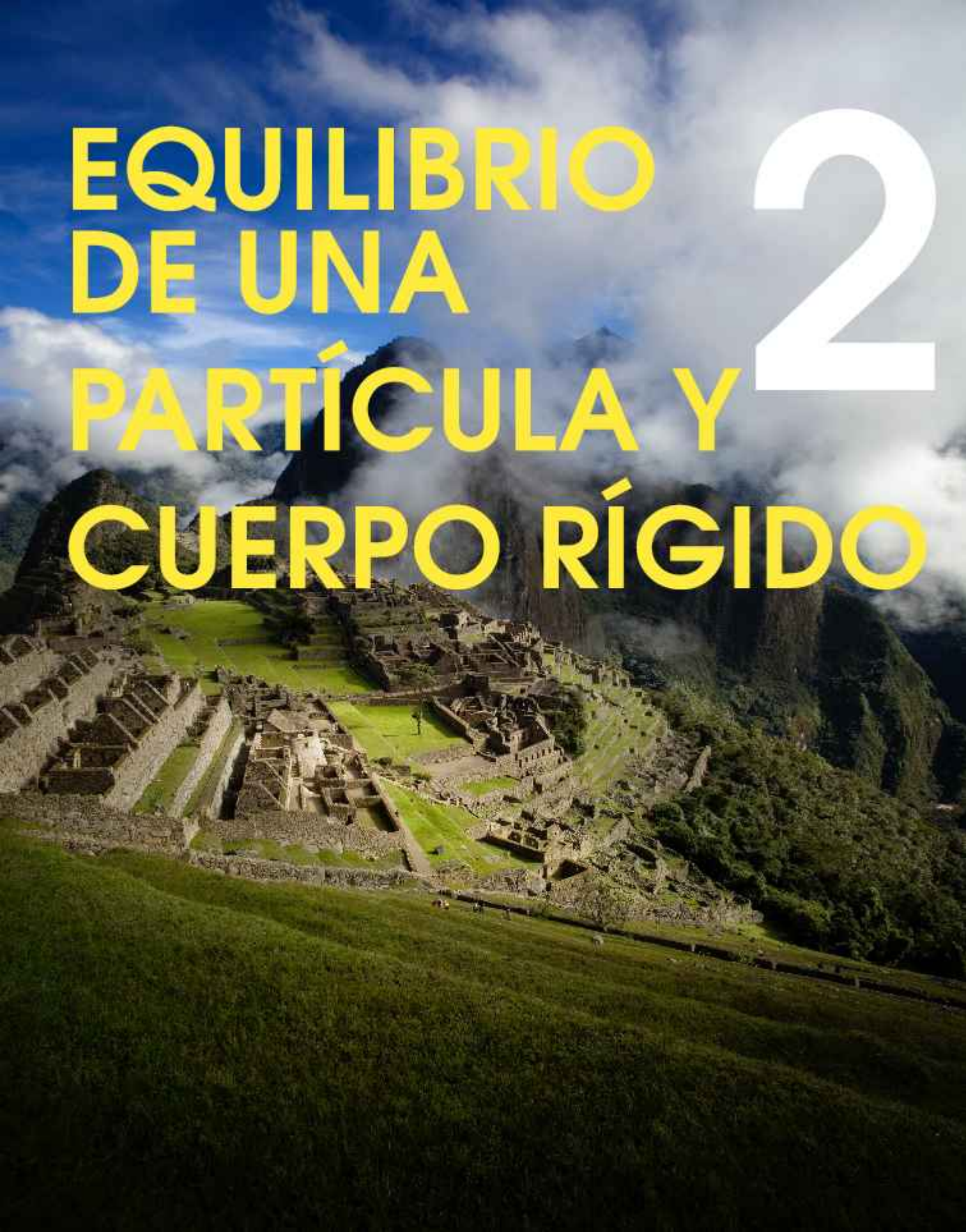


Figura 1.227

EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA Y CUERPO RÍGIDO

2



2

EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA Y CUERPO RÍGIDO

2.1. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL PLANO

El **equilibrio de una partícula** se refiere a la condición en la cual una partícula, un objeto puntual con masa pero dimensiones despreciables, no experimenta aceleración, es decir, está en reposo o se mueve a una velocidad constante. El equilibrio de una partícula se basa en las leyes del movimiento de Newton y se rige por las siguientes leyes fundamentales:

- **Primera Ley de Newton (Ley de la Inercia):** "Un cuerpo en reposo permanecerá en reposo y un cuerpo en movimiento continuará moviéndose a una velocidad constante en línea recta a menos que una fuerza neta actúe sobre él". Esta ley se puede aplicar al equilibrio de una partícula para asegurar que no haya aceleración en ninguna dirección.
- **Segunda Ley de Newton:** "La fuerza neta que actúa sobre un objeto es igual a la masa del objeto multiplicada por su aceleración" ($F = m \cdot a$). En el equilibrio, la aceleración es cero, por lo que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula debe ser igual a cero ($\sum F_R = 0$).

Entonces: si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio.

$$F_R = \sum F = 0$$

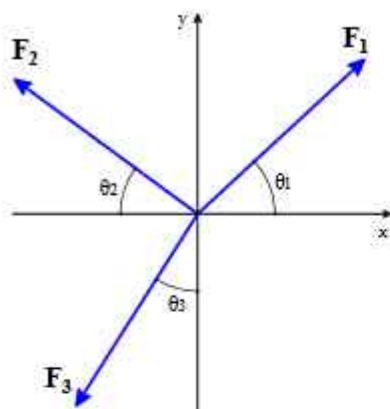


Figura 2.1

Equilibrio en el Plano: (i) La partícula se encuentra en un plano bidimensional (generalmente el plano xy). (ii) Las fuerzas se resuelven en dos direcciones: horizontal (x) y vertical (y). (iii) La suma de fuerzas en el plano debe ser igual a cero, y sus componentes rectangulares también deben de cumplir la condición vectorialmente

$$\Sigma (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}) = 0$$

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

Diagrama de cuerpo libre:

El diagrama de cuerpo libre es una herramienta esencial en el campo de la mecánica y la estática, utilizada para analizar fuerzas y momentos que actúan sobre un objeto o cuerpo aislado. Su propósito principal es visualizar todas las fuerzas externas que afectan a ese objeto y comprender cómo se relacionan entre sí. Aspectos clave del diagrama de cuerpo libre se presentan a continuación:

- **Aislamiento del Objeto:** Para crear un diagrama de cuerpo libre, primero se aísla el objeto o cuerpo que se está analizando. Esto significa que se considera únicamente ese objeto y se ignoran todos los elementos circundantes.
- **Representación Simplificada:** En el diagrama de cuerpo libre, el objeto se representa como un punto o una figura simple que simplifica su forma y estructura, lo que facilita el análisis. La idea es enfocarse en las fuerzas y momentos, no en los detalles del objeto.
- **Fuerzas Externas:** Todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto se representan como vectores con magnitud y dirección. Estas fuerzas pueden incluir la gravedad, fuerzas aplicadas, fuerzas de fricción, fuerzas de tensión, etc.
- **Dirección y Sentido:** Cada vector de fuerza se dibuja en la dirección correcta y con el sentido adecuado. Es importante indicar claramente la dirección de cada fuerza y si es una fuerza de tracción o compresión.
- **Etiquetas y Notación:** Se suelen etiquetar las fuerzas con letras ($F_1, F_2, etc.$) y se pueden proporcionar detalles adicionales, como magnitudes y ángulos. También es común utilizar una notación que indique la dirección y el sentido de las fuerzas.
- **Puntos de Aplicación:** Se marca el punto de aplicación de cada fuerza, es decir, el punto en el objeto donde la fuerza actúa. Esto es importante para calcular momentos.
- **Suma de Fuerzas y Momentos:** El diagrama de cuerpo libre permite aplicar las leyes de la estática, como las ecuaciones de equilibrio. Se pueden sumar todas las fuerzas en las direcciones x, y y z , y también se pueden calcular los momentos alrededor de un punto.

En resumen, el diagrama de cuerpo libre es una herramienta fundamental para analizar el equilibrio de un objeto o cuerpo. Proporciona una representación simplificada de las fuerzas externas que actúan sobre el objeto y facilita el cálculo de las fuerzas resultantes y los momentos, lo que es esencial para resolver problemas de estática y mecánica.

2.1.1. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 2.1.1.1

Determine la tensión en los cables ACy BC, si el sistema esta en equilibrio.

SOLUCIÓN

Paso ①: D.C.L. del sistema de fuerzas para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio como se muestra en la figura 2.2 (b).

Paso ②: Aplicamos condiciones de equilibrio:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad -T_{AC} \cdot \cos(25^\circ) + T_{CB} \cdot \cos(75^\circ) + 5 \sin(15^\circ) = 0 \quad \dots (1)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 ; \quad T_{AC} \cdot \sin(25^\circ) + T_{CB} \cdot \sin(75^\circ) - 5 \cos(15^\circ) = 0 \quad \dots (2)$$

Paso ③: Determinación de fuerzas de las ecuaciones (1) y (2):

$$A = \begin{bmatrix} -\cos(25^\circ) & \cos(75^\circ) \\ \sin(25^\circ) & \sin(75^\circ) \end{bmatrix} \quad X := \begin{bmatrix} T_{AC} \\ T_{CB} \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} -5 \sin(15^\circ) \\ 5 \cos(15^\circ) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = v \quad \begin{bmatrix} T_{AC} \\ T_{CB} \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} 2.539 \\ 3.889 \end{bmatrix}$$

Segunda solución:

Restricciones de prueba
Solver

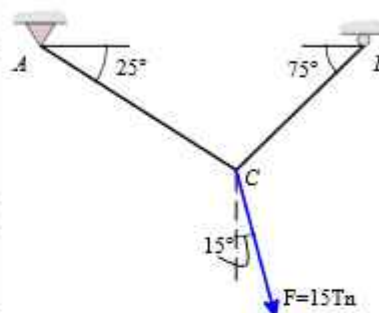
$$T_{AC} = 1 \text{ Tn} \quad T_{CB} = 1 \text{ Tn}$$

$$-T_{AC} \cdot \cos(25^\circ) + T_{CB} \cdot \cos(75^\circ) + 5 \text{ Tn} \cdot \sin(15^\circ) = 0$$

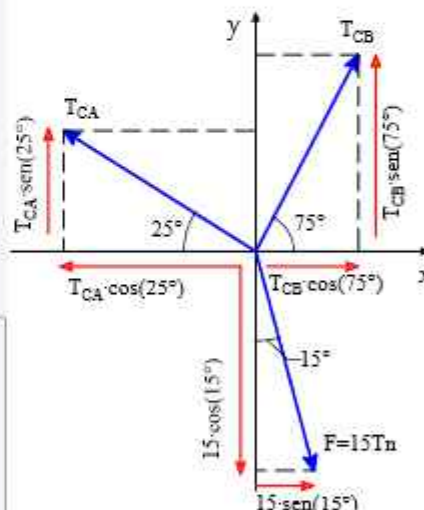
$$T_{AC} \cdot \sin(25^\circ) + T_{CB} \cdot \sin(75^\circ) - 5 \text{ Tn} \cdot \cos(15^\circ) = 0$$

$$\mathbf{find}(T_{AC}, T_{CB}) = \begin{bmatrix} 2.539 \\ 3.889 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$\mathbf{Respuesta} := \begin{bmatrix} T_{AC} \\ T_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.539 \\ 3.889 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$



(a)

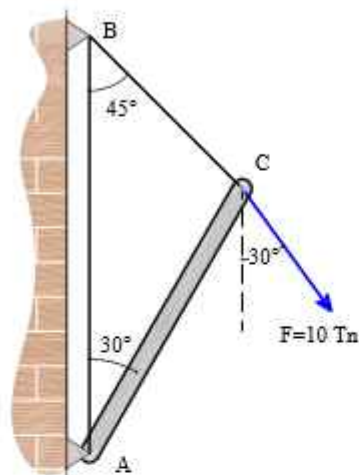


(b)

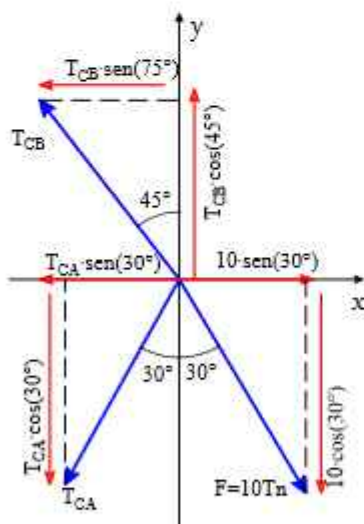
Figura 2.2

EJEMPLO RESUELTO 2.1.1.2

Determine la tensión en los cables BC y la fuerza en AC , si el sistema está en equilibrio.



(a)



(b)

Figura 2.3

SOLUCIÓN

Paso ①: D.C.L. del sistema de fuerzas para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio como se muestra en la figura 2.3 (b).

Paso ②: Aplicamos condiciones de equilibrio:

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad -T_{BC} \cdot \cos(45^\circ) + F_{AC} \cdot \sin(30^\circ) + 10 \sin(30^\circ) = 0 \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad T_{BC} \cdot \sin(45^\circ) + F_{AC} \cdot \cos(30^\circ) - 10 \cos(30^\circ) = 0 \quad \dots (2)$$

Paso ③: Determinación de fuerzas de las ecuaciones (1) y (2):

$$A := \begin{bmatrix} -\cos(45^\circ) & \sin(30^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix} \quad X := \begin{bmatrix} T_{BC} \\ F_{AC} \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} -10 \sin(30^\circ) \\ 10 \cos(30^\circ) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = v \quad \begin{bmatrix} T_{BC} \\ F_{AC} \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} 8.966 \\ 2.679 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

Segunda solución:

$$T_{BC} = 1 \text{ Tn} \quad F_{AC} = 1 \text{ Tn}$$

$$-T_{BC} \cdot \cos(45^\circ) + F_{AC} \cdot \sin(30^\circ) + 10 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) = 0$$

$$T_{BC} \cdot \sin(45^\circ) + F_{AC} \cdot \cos(30^\circ) - 10 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) = 0$$

$$\mathbf{find}(T_{BC}, F_{AC}) = \begin{bmatrix} 8.966 \\ 2.679 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$\mathbf{Respuesta} := \begin{bmatrix} T_{BC} \\ F_{AC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.966 \\ 2.679 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

EJEMPLO RESUELTO 2.1.1.3

Determine la magnitud de la fuerza F y el ángulo θ , si el cuerpo se encuentra en equilibrio.

Paso ①: D.C.L. del sistema de fuerzas para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio como se muestra en la figura 2.4 (b)

Paso ②: Aplicamos condiciones de equilibrio:

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad -F \cdot \cos(\theta) - 3 Tn + 5 Tn \cos(28^\circ) + 2 Tn \sin(19^\circ) = 0$$

$$F \cdot \cos(\theta) = -3 Tn + 5 Tn \cos(28^\circ) + 2 Tn \sin(19^\circ) \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad -F \cdot \sin(\theta) + 5 Tn \sin(28^\circ) - 2 Tn \cos(19^\circ) = 0$$

$$F \cdot \sin(\theta) = -2 Tn \cos(19^\circ) + 5 Tn \sin(28^\circ) \dots (2)$$

Paso ③: Determinación de fuerza F y el ángulo θ de las ecuaciones (1) y (2):

$$\frac{F \cdot \sin(\theta)}{F \cdot \cos(\theta)} = \frac{-2 Tn \cos(19^\circ) + 5 Tn \sin(28^\circ)}{-3 Tn + 5 Tn \cos(28^\circ) + 2 Tn \sin(19^\circ)}$$

$$\tan(\theta) := 0.221 \quad \theta := \text{atan}(a) = 12.456^\circ$$

Reemplazamos en la ecuación (2) para hallar el valor de F :

$$F = \frac{-2 Tn \cos(19^\circ) + 5 Tn \sin(28^\circ)}{\sin(\theta)} = 2.116 Tn$$

Segunda solución:

Solver Relaciones prueba

$$F := 1 Tn \quad \theta := 1 \text{ deg}$$

$$-F \cdot \cos(\theta) - 3 Tn + 5 Tn \cdot \cos(28^\circ) + 2 Tn \cdot \sin(19^\circ) = 0$$

$$-F \cdot \sin(\theta) + 5 Tn \cdot \sin(28^\circ) - 2 Tn \cdot \cos(19^\circ) = 0$$

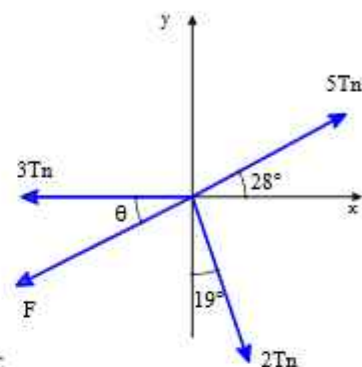
$$\begin{bmatrix} F \\ \theta \end{bmatrix} = \text{find}(F, \theta) = \begin{bmatrix} 2.116 \text{ kg} \\ 2.174 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} 1000$$

Comprobación:

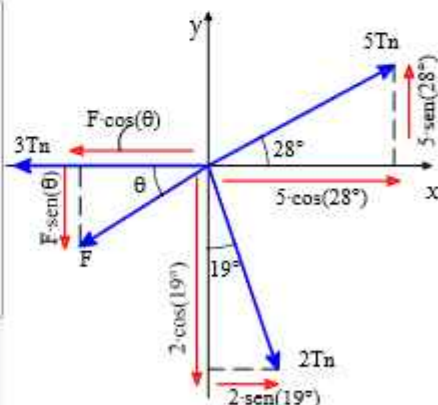
$$-F \cdot \cos(\theta) - 3 Tn + 5 Tn \cdot \cos(28 \text{ deg}) + 2 Tn \cdot \sin(19 \text{ deg}) = 0 Tn \quad \text{ok!}$$

$$-F \cdot \sin(\theta) - 2 Tn \cos(19^\circ) + 5 Tn \sin(28^\circ) = 0 Tn \quad \text{ok!}$$

$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} F \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.116 Tn \\ 12.456^\circ \end{bmatrix}$$



(a)

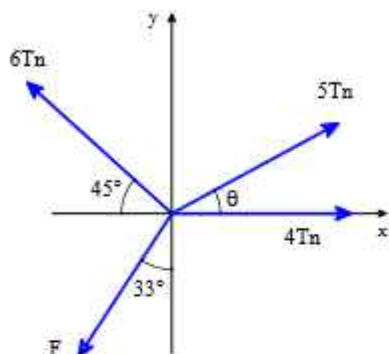


(b)

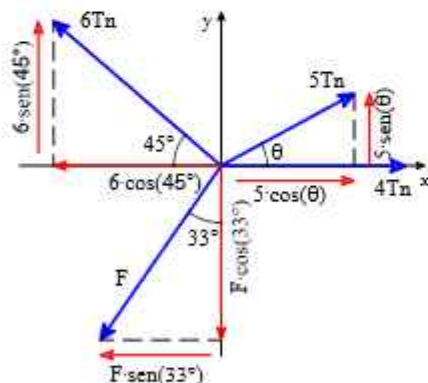
Figura 2.4

EJEMPLO RESUELTO 2.1.1.4

Determine la magnitud de la fuerza F y el ángulo θ , si el cuerpo se encuentra en equilibrio.



(a)



(b)

Figura 2.5

Paso ①: D.C.L. del sistema de fuerzas para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio como se muestra en la figura 2.5 (b).

Paso ②: Aplicamos condiciones de equilibrio:

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad -F \sin(33^\circ) - 6 \cos(45^\circ) + 5 \cos(\theta) + 4 Tn = 0 \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -F \cos(33^\circ) + 6 \sin(45^\circ) + 5 \sin(\theta) = 0 \quad \dots (2)$$

Paso ③: Determinación de fuerza F y el ángulo θ de las ecuaciones (1) y (2)

Restricciones de prueba

$$F := 1 Tn \quad \theta := 1 deg$$

$$-F \cdot \sin(33 deg) + 5 Tn \cdot \cos(\theta) - 6 Tn \cdot \cos(45 deg) + 4 Tn = 0$$

$$-F \cdot \cos(33 deg) + 5 Tn \cdot \sin(\theta) + 6 Tn \cdot \sin(45 deg) = 0$$

Solve

$$\mathbf{find}(F, \theta) = \begin{bmatrix} (7.748 \cdot 10^3) kg \\ 0.468 \end{bmatrix}$$

$$F := (7.748 \cdot 10^3) kg = 7.748 Tn \quad \theta := 0.468 = 26.814^\circ$$

Comprobación:

$$-F \cdot \sin(33 deg) + 5 Tn \cdot \cos(\theta) - 6 Tn \cdot \cos(45 deg) + 4 Tn = 0 Tn$$

$$-F \cdot \cos(33 deg) + 5 Tn \cdot \sin(\theta) + 6 Tn \cdot \sin(45 deg) = 0 Tn$$

$$\mathbf{Respuesta} = \begin{bmatrix} F \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.748 Tn \\ 26.814^\circ \end{bmatrix}$$

EJEMPLO RESUELTO 2.1.1.5

Determine la magnitud de las tensiones T_{AB} y T_{BC} , a demás, sus respectivas deformaciones en los resortes.

Paso ①: D.C.L. del sistema de fuerzas para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio como se muestra en la figura 2.6 (b).

Paso ②: Aplicamos condiciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0; & \quad T_{BC} \cdot \cos(57^\circ) - T_{AB} \cdot \cos(37^\circ) + 16 \sin(15^\circ) = 0 \\ & \quad T_{BC} \cdot \cos(57^\circ) - T_{AB} \cdot \sin(37^\circ) = -16 \sin(15^\circ) \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad T_{AB} \cdot \sin(37^\circ) + T_{BC} \cdot \sin(57^\circ) - 16 \cos(15^\circ) = 0 \\ & \quad T_{BC} \cdot \sin(57^\circ) + T_{AB} \cdot \sin(37^\circ) = 16 \cos(15^\circ) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

Paso ③: Determinación de las tensiones, de las ecuaciones (1) y (2):

$$A = \begin{bmatrix} \cos(57^\circ) & -\cos(37^\circ) \\ \sin(57^\circ) & \sin(37^\circ) \end{bmatrix} \quad X := \begin{bmatrix} T_{BC} \\ T_{AB} \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} -16 \sin(15^\circ) \\ 16 \cos(15^\circ) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = v \quad \begin{bmatrix} T_{BC} \\ T_{AB} \end{bmatrix} := A^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} 9.875 \\ 11.919 \end{bmatrix}$$

Segunda solución:

$$T_{BC} := 1 \text{ kN} \quad T_{AB} := 1 \text{ kN}$$

$$T_{BC} \cdot \cos(57^\circ) - T_{AB} \cdot \cos(37^\circ) + 16 \text{ kN} \cdot \sin(15^\circ) = 0$$

$$T_{AB} \cdot \sin(37^\circ) + T_{BC} \cdot \sin(57^\circ) - 16 \text{ kN} \cdot \cos(15^\circ) = 0$$

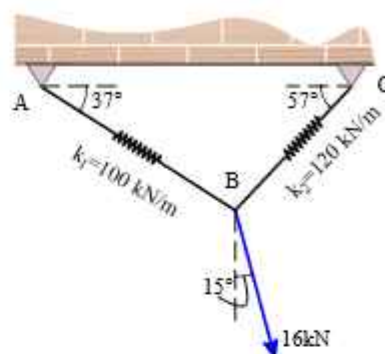
$$\mathbf{find}(T_{BC}, T_{AB}) = \begin{bmatrix} 9.875 \\ 11.919 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Determinación de las deformaciones:

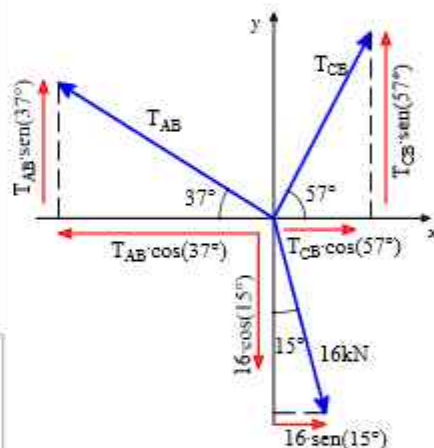
$$F_1 = K_1 \cdot x_1 \quad F_1 := T_{AB} = 11.919 \text{ kN} \quad K_1 := 100 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \Delta x_1 = \frac{F_1}{K_1} = 11.919 \text{ cm}$$

$$F_2 = K_2 \cdot x_2 \quad F_2 := T_{BC} = 9.875 \text{ kN} \quad K_2 := 120 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \Delta x_2 = \frac{F_2}{K_2} = 8.229 \text{ cm}$$

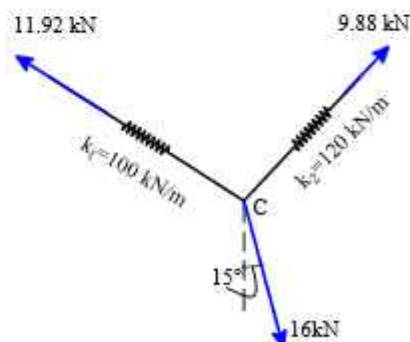
$$\mathbf{Respuesta} = \begin{bmatrix} T_{BC} \\ T_{AB} \\ \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.875 \text{ kN} \\ 11.919 \text{ kN} \\ 11.919 \text{ cm} \\ 8.229 \text{ cm} \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

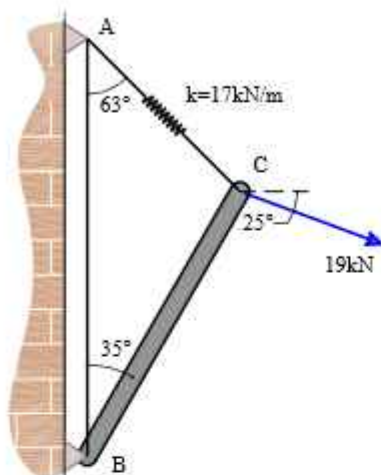


(c)

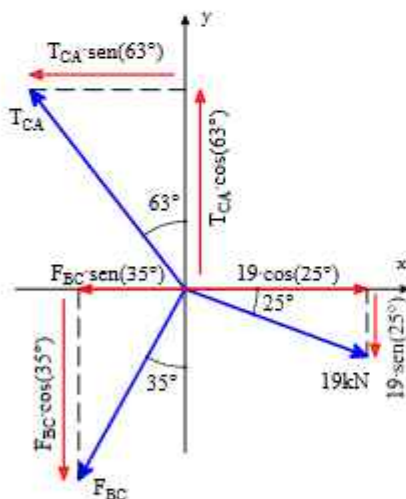
Figura 2.6

EJEMPLO RESUELTO 2.1.1.6

Determine la magnitud de la tensión y la fuerza F_{BC} , a demás, su respectiva deformación en el resorte.



(a)



(b)

Figura 2.7

Paso ①: D.C.L. del sistema de fuerzas para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio como se muestra en la figura 2.7 (b).

Paso ②: Aplicamos condiciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0; & \quad -T_{AC} \cdot \cos(27^\circ) + F_{BC} \cdot \sin(35^\circ) + 19 \cos(25^\circ) = 0 \\ & \quad -T_{AC} \cdot \cos(27^\circ) + F_{BC} \cdot \sin(35^\circ) = -19 \cos(25^\circ) \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad T_{AC} \cdot \sin(27^\circ) + F_{BC} \cdot \cos(35^\circ) - 19 \sin(25^\circ) = 0 \\ & \quad T_{AC} \cdot \sin(27^\circ) + F_{BC} \cdot \cos(35^\circ) = 19 \sin(25^\circ) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

Paso ③: Determinación de las tensiones, de las ecuaciones (1) y (2):

$$A := \begin{bmatrix} -\cos(27^\circ) & \sin(35^\circ) \\ \sin(27^\circ) & \cos(35^\circ) \end{bmatrix} \quad X := \begin{bmatrix} T_{AC} \\ F_{BC} \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} -19 \cos(25^\circ) \\ 19 \sin(25^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17.22 \\ 8.03 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = v \quad \begin{bmatrix} T_{AC} \\ F_{BC} \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} 18.895 \\ -0.67 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Segunda solución:

$$F_{BC} := 1 \text{ kN} \quad T_{AC} := 1 \text{ kN}$$

$$-T_{AC} \cdot \cos(27^\circ) + F_{BC} \cdot \sin(35^\circ) + 19 \text{ kN} \cdot \cos(25^\circ) = 0$$

$$T_{AC} \cdot \sin(27^\circ) + F_{BC} \cdot \cos(35^\circ) - 19 \text{ kN} \cdot \sin(25^\circ) = 0$$

$$\text{find}(F_{BC}, T_{AC}) = \begin{bmatrix} -0.67 \\ 18.895 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Determinación de las deformaciones:

$$F = K \cdot x \quad F := T_{AC} = 18.895 \text{ kN} \quad K := 170 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \Delta x := \frac{F}{K} = 11.115 \text{ cm}$$

$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} T_{AC} \\ F_{BC} \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.895 \text{ kN} \\ -0.67 \text{ kN} \\ 11.115 \text{ cm} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO RESUELTO 2.1.1.7

Determine la magnitud de la tensión y la fuerza F_{CB} debe ser mínimo, además, su respectiva deformación en el resorte.

Paso ①: D.C.L. del sistema de fuerzas para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio como se muestra en la figura 2.8 (b).

Paso ②: Aplicamos condiciones de equilibrio.

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; -F_{CB} \cdot \cos(28^\circ) - T_{AC} \cdot \cos(\theta) + 19 \cos(33^\circ) = 0 \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; F_{CB} \cdot \sin(28^\circ) - T_{AC} \cdot \sin(\theta) + 19 \sin(33^\circ) = 0 \quad \dots (2)$$

Para que el elemento CB sea mínimo el ángulo en el punto C debe ser 90° :

$$\theta + 28^\circ = 90^\circ \quad \theta := 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$$

Reemplazamos en (1) y (2):

$$\begin{aligned} -F_{CB} \cdot \cos(28^\circ) - T_{AC} \cdot \cos(62^\circ) + 19 \cos(33^\circ) &= 0 \\ F_{CB} \cdot \cos(28^\circ) + T_{AC} \cdot \cos(62^\circ) &= 19 \cos(33^\circ) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{CB} \cdot \sin(28^\circ) - T_{AC} \cdot \sin(62^\circ) + 19 \sin(33^\circ) &= 0 \\ F_{CB} \cdot \sin(28^\circ) - T_{AC} \cdot \sin(62^\circ) &= -19 \sin(33^\circ) \quad \dots (4) \end{aligned}$$

Paso ③: Determinación de las tensiones, de las ecuaciones (1) y (2):

$$A := \begin{bmatrix} \cos(28^\circ) & \cos(62^\circ) \\ \sin(28^\circ) & -\sin(62^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.883 & 0.469 \\ 0.469 & -0.883 \end{bmatrix} \quad X := \begin{bmatrix} F_{CB} \\ T_{AC} \end{bmatrix}$$

$$v := \begin{bmatrix} 19 \cos(33^\circ) \\ -19 \sin(33^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.935 \\ -10.348 \end{bmatrix} \quad A \cdot X = v \quad \begin{bmatrix} F_{CB} \\ T_{AC} \end{bmatrix} := A^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} 9.211 \\ 16.618 \end{bmatrix}$$

Segunda solución:

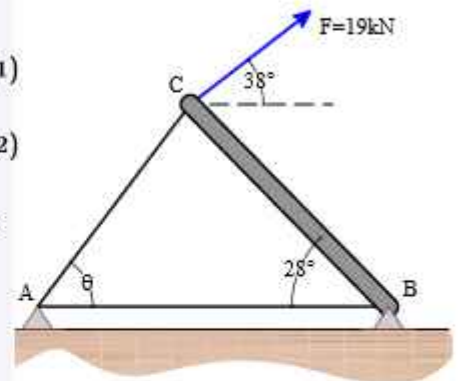
$$F_{CB} := 1 \text{ Tn} \quad T_{AC} := 1 \text{ Tn}$$

$$-F_{CB} \cdot \cos(28^\circ) - T_{AC} \cdot \cos(62^\circ) + 19 \text{ Tn} \cdot \cos(33^\circ) = 0$$

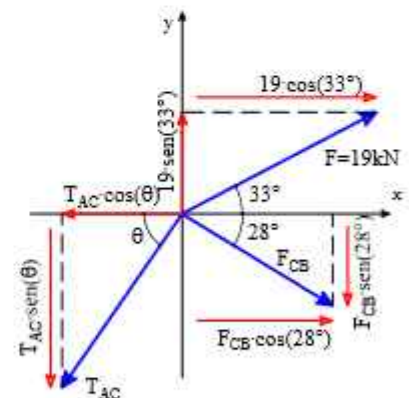
$$F_{CB} \cdot \sin(28^\circ) - T_{AC} \cdot \sin(62^\circ) + 19 \text{ Tn} \cdot \sin(33^\circ) = 0$$

$$\text{find}(F_{CB}, T_{AC}) = \begin{bmatrix} 9.211 \\ 16.618 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} F_{CB} \\ T_{AC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.211 \\ 16.618 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$



(a)



(b)

Figura 2.8

EJEMPLO RESUELTO 2.1.1.8

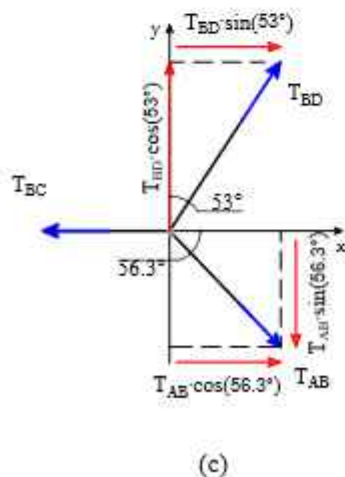
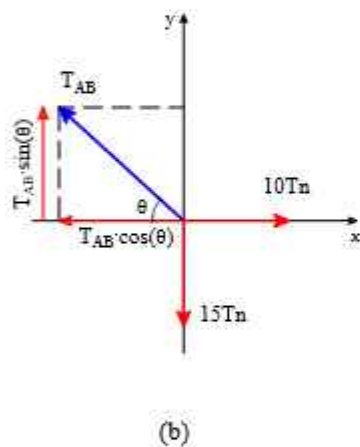
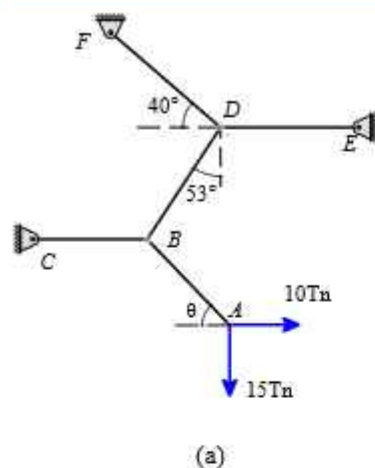


Figura 2.9

Determine la tensión en los cables AB, BD y BC y el ángulo θ , si el sistema está en equilibrio.

Paso ①: D.C.L. del sistema de fuerzas para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio como se muestran en las figuras 2.9 (b) y (c).

Paso ②: Aplicamos condiciones de equilibrio en el nodo A, figura 2.9 (b).

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0; \quad -T_{AB} \cdot \cos(\theta) + 10 \text{ Tn} &= 0 \\ T_{AB} \cdot \cos(\theta) &= 10 \text{ Tn} \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0; \quad T_{AB} \cdot \sin(\theta) - 15 \text{ Tn} &= 0 \\ T_{AB} \cdot \sin(\theta) &= 15 \text{ Tn} \end{aligned} \quad \dots (2)$$

Paso ③: Determinación de las tensiones, de las ecuaciones (1) y (2):

$$\frac{T_{AB} \cdot \sin(\theta)}{T_{AB} \cdot \cos(\theta)} = \frac{15}{10} \quad \tan(\theta) = 1.5 \quad \theta = \text{atan}(1.5) = 56.31^\circ$$

Reemplazamos en la ecuación (1):

$$T_{AB} \cdot \sin(\theta) = 15 \text{ Tn} \quad T_{AB} = \frac{15 \text{ Tn}}{\sin(\theta)} = 18.028 \text{ Tn}$$

Determinamos las tensiones en los cables BD y BC, usando las ecuaciones de equilibrio en el nodo B, figura 2.9 (c).

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0; \quad T_{AB} \cdot \cos(\theta) + T_{BD} \cdot \sin(53^\circ) - F_{BC} &= 0 \\ T_{BD} \cdot \sin(53^\circ) - F_{BC} &= -T_{AB} \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0; \quad T_{BD} \cdot \cos(53^\circ) - T_{AB} \cdot \sin(\theta) &= 0 \\ T_{BD} \cdot \cos(53^\circ) &= 15 \text{ Tn} \end{aligned}$$

$$T_{BD} = \frac{15 \text{ Tn}}{\cos(53^\circ)} = 24.925 \text{ Tn}$$

Reemplazamos en la ecuación (3):

$$\begin{aligned} T_{BD} \cdot \sin(53^\circ) - F_{BC} &= -T_{AB} \cdot \cos(\theta) \\ F_{BC} &= T_{BD} \cdot \sin(53^\circ) + T_{AB} \cdot \cos(\theta) = 29.906 \text{ Tn} \end{aligned}$$

$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} T_{AB} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.028 \text{ Tn} \\ 56.31^\circ \end{bmatrix}$$

EJEMPLO RESUELTO 2.1.1.9

Determine el ángulo θ , si el sistema de fuerzas esta en equilibrio.

Paso ①: D.C.L. del sistema de fuerzas para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio como se muestra en la figura 2.10 (b).

Paso ②: Aplicamos condiciones de equilibrio:

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ;$$

$$-5.95 \cdot \sin(\theta) - 3 \cdot \cos(10^\circ) - 9 \sin(60^\circ) + 10 \cos(\theta) + 12 \sin(45^\circ) = 0$$

$$-5.95 \cdot \sin(\theta) + 10 \cos(\theta) = 3 \cdot \cos(10^\circ) + 9 \sin(60^\circ) - 12 \sin(45^\circ) \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ;$$

$$-5.95 \cdot \cos(\theta) + 3 \cdot \sin(10^\circ) + 9 \cos(60^\circ) + 10 \sin(\theta) - 12 \cos(45^\circ) = 0$$

$$10 \sin(\theta) - 5.95 \cdot \cos(\theta) = 12 \cos(45^\circ) - 3 \cdot \sin(10^\circ) - 9 \cos(60^\circ) \quad \dots (2)$$

Paso ③: Determinación del ángulo, de las ecuaciones (1) y (2):

$$A := \begin{bmatrix} -5.95 & 10 \\ 10 & -5.95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.95 & 10 \\ 10 & -5.95 \end{bmatrix} \quad X := \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$v := \begin{bmatrix} 3 \cdot \cos(10^\circ) + 9 \sin(60^\circ) - 12 \sin(45^\circ) \\ 12 \cos(45^\circ) - 3 \cdot \sin(10^\circ) - 9 \cos(60^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.263 \\ 3.464 \end{bmatrix} \quad A \cdot X = v$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := A^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} 0.745 \\ 0.669 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \sin(\theta) &:= a = 0.745 \\ \cos(\theta) &:= b = 0.669 \end{aligned}$$

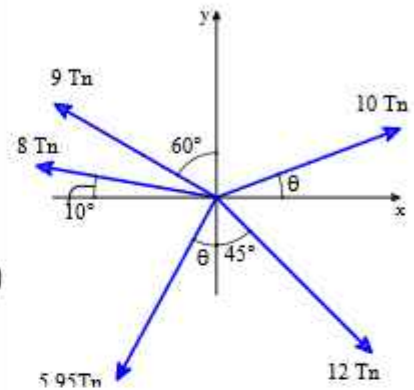
$$\tan(\theta) := \frac{a}{b} = 1.1125 \quad \theta := \text{atan}(1.1125) = 48.048^\circ$$

Comprobación:

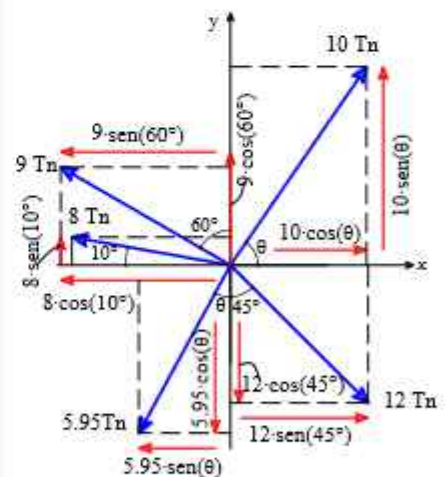
$$10 \sin(\theta) - 5.95 \cdot \cos(\theta) = 12 \cos(45^\circ) - 3 \cdot \sin(10^\circ) - 9 \cos(60^\circ)$$

$$3.46 \text{ Tn} = 3.46 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$

Respuesta = $|\theta| = |48.048^\circ|$



(a)



(b)

Figura 2.10

EJEMPLO RESUELTO 2.1.1.10

Determine la tensión en los cables CE y DE, si el sistema esta en equilibrio.

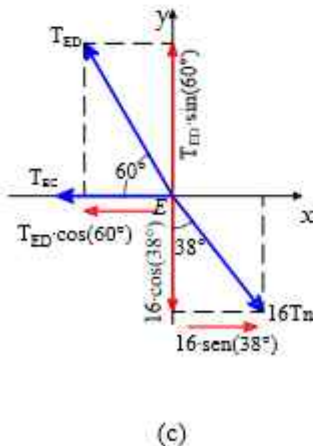
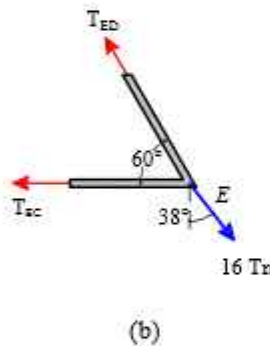
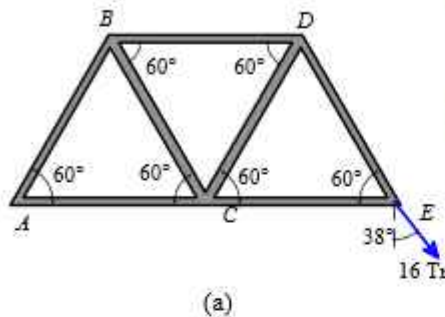


Figura 2.11

Paso ①: D.C.L. del sistema de fuerzas para la aplicación de las ecuaciones de equilibrio como se muestra en la figura 2.11 (c).

Paso ②: Aplicamos condiciones de equilibrio:

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad -T_{DE} \cdot \cos(60^\circ) - T_{CE} + 16 \sin(38^\circ) = 0$$

$$T_{DE} \cdot \cos(60^\circ) + T_{CE} = 16 \sin(38^\circ) \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad T_{DE} \cdot \sin(60^\circ) - 16 \cos(38^\circ) = 0$$

$$T_{DE} \cdot \sin(60^\circ) + 0 T_{CE} = 16 \cos(38^\circ) \quad \dots (2)$$

Paso 3: Determinación de fuerzas de las ecuaciones (1) y (2):

$$A := \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & 1 \\ \sin(60^\circ) & 0 \end{bmatrix} \quad X := \begin{bmatrix} T_{DE} \\ T_{CE} \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} 16 \sin(38^\circ) \\ 16 \cos(38^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.851 \\ 12.608 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = v \quad \begin{bmatrix} T_{DE} \\ T_{CE} \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} 14.559 \\ 2.571 \end{bmatrix}$$

Segunda solución:

$$T_{DE} := 1 \text{ Tn} \quad T_{CE} := 1 \text{ Tn}$$

$$-T_{DE} \cdot \cos(60^\circ) - T_{CE} + 16 \text{ Tn} \cdot \sin(38^\circ) = 0$$

$$T_{DE} \cdot \sin(60^\circ) - 16 \text{ Tn} \cdot \cos(38^\circ) = 0$$

$$\text{find}(T_{DE}, T_{CE}) = \begin{bmatrix} 14.559 \\ 2.571 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} T_{DE} \\ T_{CE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.559 \\ 2.571 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

2.1.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicios 7

2.1 Determine la fuerza F y el ángulo θ , si el sistema se encuentra en equilibrio

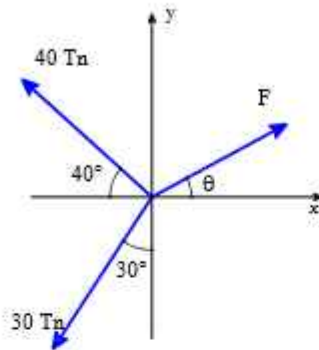


Figura 2.12

2.2 Determine las tensiones en los cables AB, BC y sus deformaciones en los resortes, si $P_1 = 20kN$.

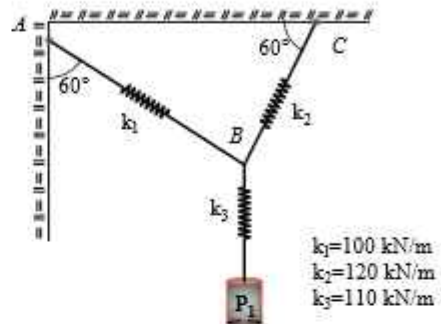


Figura 2.13

2.3 Determine la fuerza F_1 y el ángulo α , si el sistema se encuentra en equilibrio.

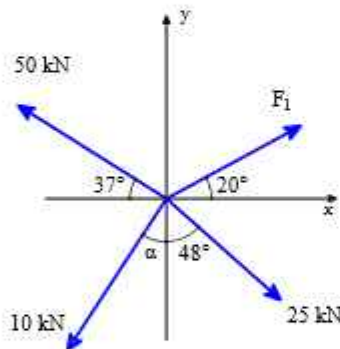


Figura 2.14

2.4 Determine los valores de F y α , si el sistema está en equilibrio.

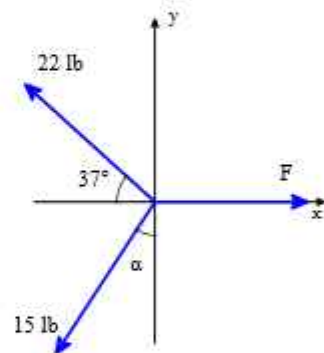


Figura 2.15

2.5 Determine las tensiones en los cables ED, DC, AC y BC, si el sistema está en equilibrio.

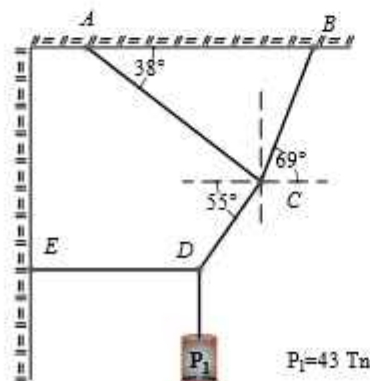


Figura 2.16

2.6 Determine las fuerzas F_1 y F_2 , si el sistema se encuentra en equilibrio.

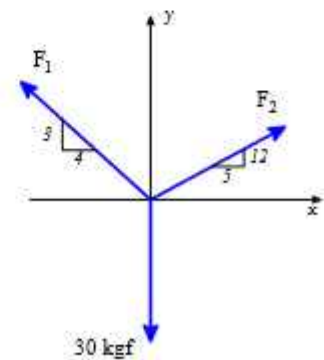


Figura 2.17

2.7 Determine α y θ , si el sistema se encuentra en equilibrio.

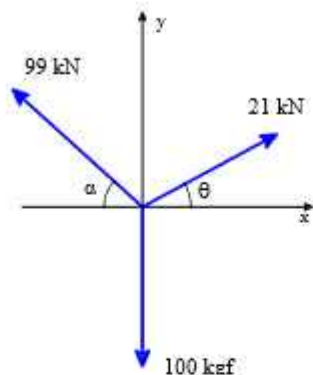


Figura 2.18

2.9 Determine la fuerza F y el ángulo α , si el sistema se encuentra en equilibrio.

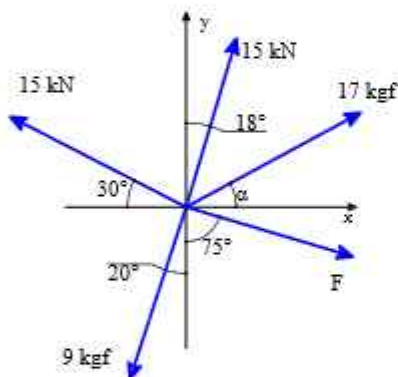


Figura 2.20

2.11 Determine la magnitud de las fuerzas F_1 y F_2 , si el sistema se encuentra en equilibrio.

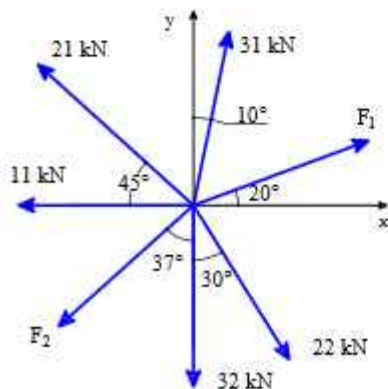


Figura 2.22

2.8 Determine el peso del barril y la tensión AB si la tensión BC tiene una magnitud de 24 kN.

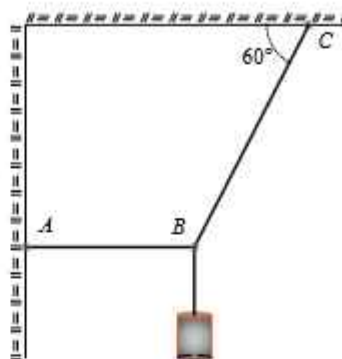


Figura 2.19

2.10 Determine las tensiones AB y BC, considere el peso del barril de 45 kgf, si el sistema está en equilibrio.

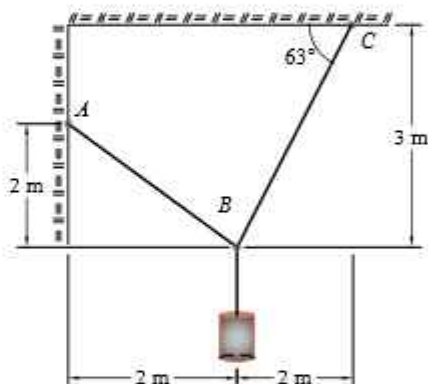


Figura 2.21

2.12 Determine las tensiones en cada uno de los cables, si el sistema se encuentra en equilibrio.

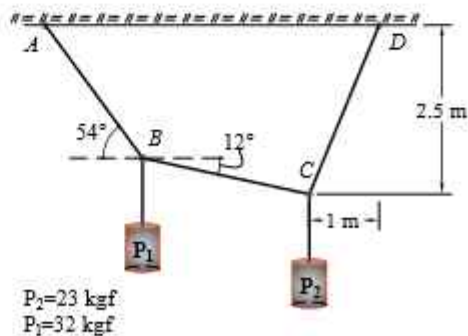


Figura 2.23

2.13 Determine P_1 y P_2 , si $P_3 = 23\text{kgf}$, de tal manera que el sistema se encuentra en equilibrio.

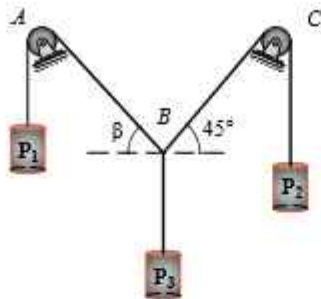


Figura 2.24

2.14 Determine la tensión en BC y la fuerza en AC, si el sistema se encuentra en equilibrio

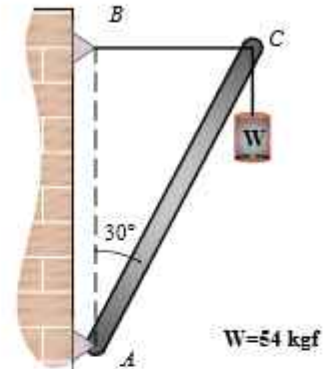


Figura 2.25

2.15 Determine las tensiones en los cables AB y BC, si el peso del barril es de 10 Tn, si el sistema está en equilibrio.

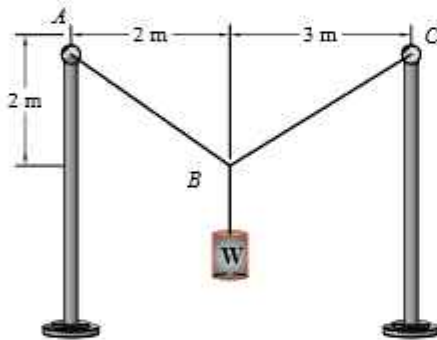


Figura 2.26

2.16 Determine la tensión AB y la fuerza necesaria para mantener en equilibrio el siguiente sistema.

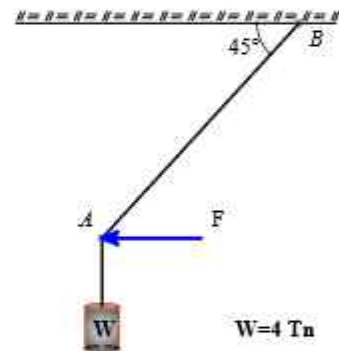


Figura 2.27

2.17 Determine la tensión en BC y la fuerza en AC, si el sistema se encuentra en equilibrio.

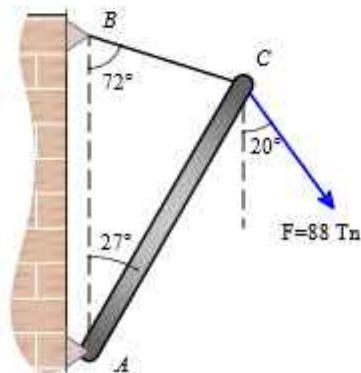


Figura 2.28

2.18 Determine el ángulo θ y el peso del barril para que el sistema se encuentre en equilibrio. si $T_{BA} = 23\text{kN}$.

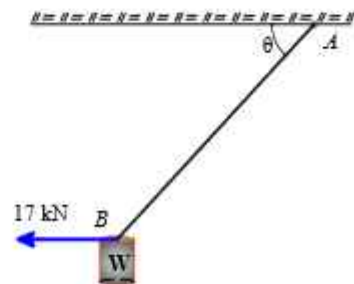


Figura 2.29

2.19 Determine la fuerza necesaria para mantener en equilibrio el siguiente sistema.

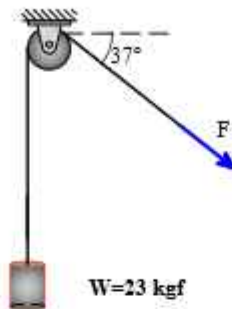


Figura 2.30

2.21 Determine las tensiones sobre los cables AB y BC, si el sistema está en equilibrio.

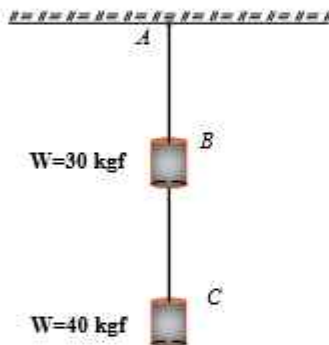


Figura 2.32

2.23 Determine las tensiones sobre todos los cables de la siguiente figura, si el sistema se encuentra en equilibrio.

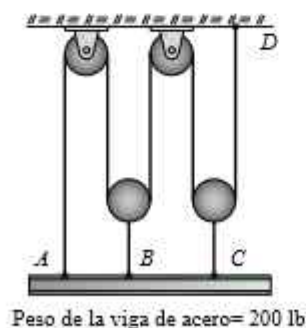


Figura 2.34

2.20 Determine las tensiones en cada uno de los cables de la siguiente figura, si está se encuentra en equilibrio.

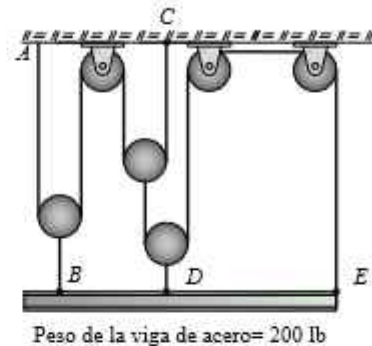


Figura 2.31

2.22 Determine la fuerza F necesaria para mantener en equilibrio el siguiente sistema.

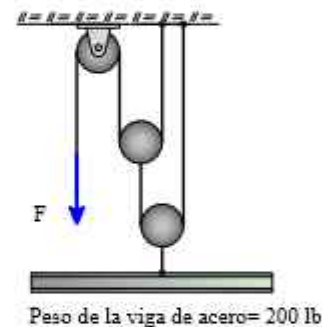


Figura 2.33

2.24 Determine las tensiones sobre los cables si el sistema se encuentra en equilibrio.

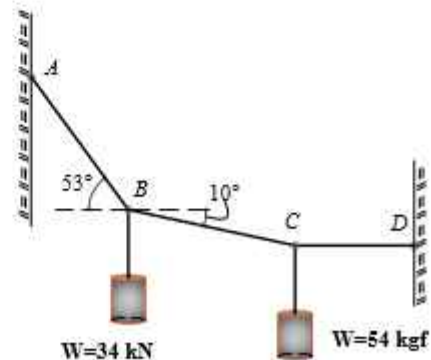


Figura 2.35

2.25 Determine las tensiones AB y BC, además, la elongación del resorte.

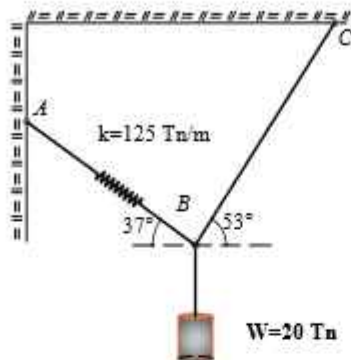


Figura 2.36

2.26 Determinar las tensiones en los cables, si los pesos de los barriles son 6 Tn y 4Tn.

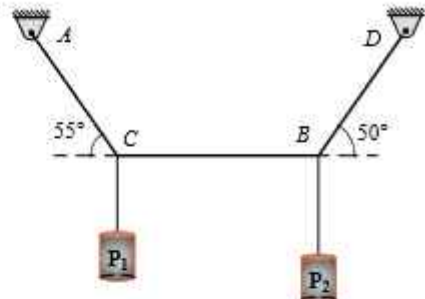


Figura 2.37

2.27 Determine la tensión en el cable AB, su respectiva elongación del resorte y el peso del barril.

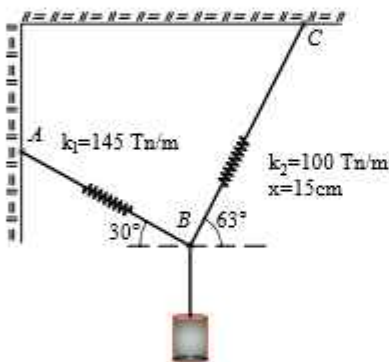


Figura 2.38

2.28 Determine la fuerza normal y la fuerza P , si el peso del cuerpo es de 23kgf.

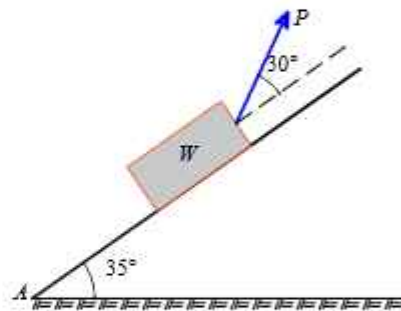


Figura 2.39

2.29 Determine los pesos de los dos barriles, si la tensión en el cable AB es 45 kN.

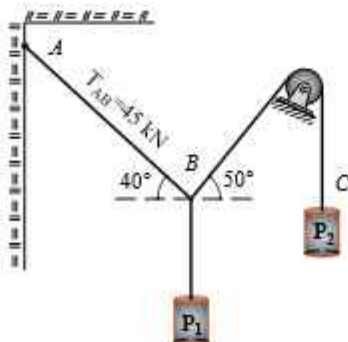
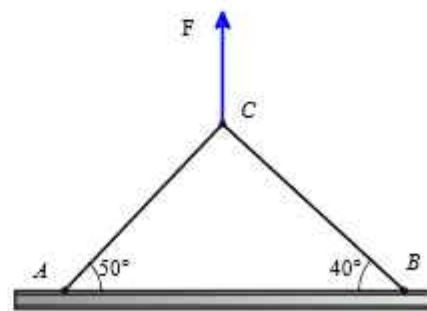


Figura 2.40

2.30 Determine la fuerza F , para mantener en equilibrio el siguiente sistema, si la tensión sobre el cable AC es 89lb



Peso de la viga de acero = 200 lb

Figura 2.41

2.2. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO

De la primera y segunda ley de Newton ya definida anteriormente, el equilibrio es aplicable a todos los sistemas coordinados en el plano $2D$ y el espacio $3D$.

Equilibrio en el Espacio: (i) La partícula se encuentra en un espacio tridimensional (XYZ). (ii) Las fuerzas y momentos se resuelven en tres direcciones: horizontal (x), vertical (y) y perpendicular al plano $xy(z)$. (iii) La suma de fuerzas y momentos en el espacio debe ser igual a cero:

$$F_R = 0$$

En sus componentes rectangulares: $\sum F_x i + \sum F_y j + \sum F_z k = 0$, entonces:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

Diagrama de cuerpo libre: El diagrama de cuerpo libre es una herramienta esencial en el campo de la mecánica y la estática, utilizada para analizar fuerzas y momentos que actúan sobre un objeto o cuerpo aislado. Su propósito principal es visualizar todas las fuerzas externas que afectan a ese objeto y comprender cómo se relacionan entre:

- **Aislamiento del Objeto:** Para crear un diagrama de cuerpo libre, primero se aísla el objeto o cuerpo que se está analizando. Esto significa que se considera únicamente ese objeto y se ignoran todos los elementos circundantes.
- **Representación Simplificada:** En el diagrama de cuerpo libre, el objeto se representa como un punto o una figura simple que simplifica su forma y estructura, lo que facilita el análisis. La idea es enfocarse en las fuerzas y momentos, no en los detalles del objeto.
- **Fuerzas Externas:** Todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto se representan como vectores con magnitud y dirección. Estas fuerzas pueden incluir la gravedad, fuerzas aplicadas, fuerzas de fricción, fuerzas de tensión, etc.
- **Dirección y Sentido:** Cada vector de fuerza se dibuja en la dirección correcta y con el sentido adecuado. Es importante indicar claramente la dirección de cada fuerza y si es una fuerza de tracción o compresión.
- **Etiquetas y Notación:** Se suelen etiquetar las fuerzas con letras ($F_1, F_2, etc.$) y se pueden proporcionar detalles adicionales, como magnitudes y ángulos.
- **Puntos de Aplicación:** Se marca el punto de aplicación de cada fuerza, es decir, el punto en el objeto donde la fuerza actúa.
- **Suma de Fuerzas y Momentos:** El diagrama de cuerpo libre permite aplicar las leyes de la estática, como las ecuaciones de equilibrio. Se pueden sumar todas las fuerzas en las direcciones x , y y z .

En resumen, el diagrama de cuerpo libre es una herramienta fundamental para analizar el equilibrio de un objeto o cuerpo. Proporciona una representación simplificada de las fuerzas externas que actúan sobre el objeto y facilita el cálculo de las fuerzas resultantes y los momentos.

2.2.1. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 2.2.1.1

Determinar las tensiones en los cables AD , BD y la fuerza F , sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio. Además, se sabe que la tensión sobre el cable CD es de 10 kN .

Paso ①: Determinamos las coordenadas de los puntos A , B , C y D , y los vectores unitarios correspondientes, figura 2.42 (b)

$$A = [2 \ -2 \ 0] \text{ m} \quad F_{CD} := 10 \text{ kN}$$

$$B = [5 \ 6 \ 0] \text{ m}$$

$$C = [-3 \ 1 \ 0] \text{ m}$$

$$D = [0 \ 0 \ 6] \text{ m}$$

$$AD := D - A = [-2 \ 2 \ 6] \text{ m} \quad \|AD\| = 6.633 \text{ m}$$

$$BD := D - B = [-5 \ -6 \ 6] \text{ m} \quad \|BD\| = 9.849 \text{ m}$$

$$CD := D - C = [3 \ -1 \ 6] \text{ m} \quad \|CD\| = 6.782 \text{ m}$$

Vectores unitarios

$$\vec{u}_{AD} := \frac{AD}{\|AD\|} = [-0.302 \ 0.302 \ 0.905]$$

$$\vec{u}_{BD} := \frac{BD}{\|BD\|} = [-0.508 \ -0.609 \ 0.609]$$

$$\vec{u}_{CD} := \frac{CD}{\|CD\|} = [0.442 \ -0.147 \ 0.885]$$

Vectores cartesianos de las tensiones, figura 2.42 (c).

$$T_{AD} = T_{AD} \cdot \vec{u}_{AD} = T_{AD} [-0.302 \ 0.302 \ 0.905]$$

$$T_{BD} = T_{BD} \cdot \vec{u}_{BD} = T_{BD} [-0.508 \ -0.609 \ 0.609]$$

$$T_{CD} = T_{CD} \cdot \vec{u}_{CD} = 10 \text{ kN} [0.442 \ -0.147 \ 0.885]$$

$$F = F \cdot \vec{u}_z = F \cdot [0 \ 0 \ 1]$$

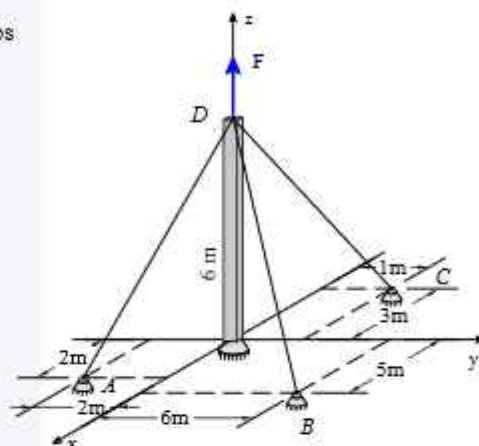
Paso ②: Aplicación de las condiciones de equilibrio para determinar las tensiones en los cables.

$$\sum F_x = 0 ;$$

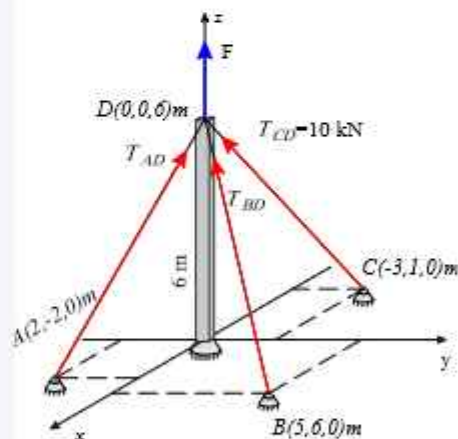
$$(-0.302) T_{AD} + (-0.508) T_{BD} + (0.442) 10 \text{ kN} = 0$$

$$\sum F_y = 0 ;$$

$$(0.302) T_{AD} + (-0.609) T_{BD} + (-0.147) 10 \text{ kN} = 0$$

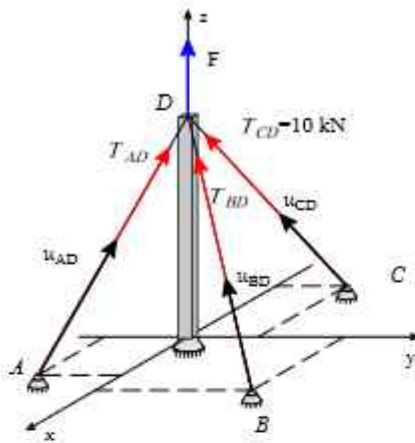


(a)



(b)

CONTINUACIÓN



(c)

Figura 2.42

$$\sum F_z = 0 ;$$

$$(0.905) T_{AD} + (0.609) T_{BD} + (0.885) 10 \text{ kN} + F = 0$$

$$T_{AD} := 1 \text{ kN} \quad T_{BD} := 1 \text{ kN} \quad F := 1 \text{ kN}$$

$$(-0.302) T_{AD} + (-0.508) T_{BD} + (0.442) 10 \text{ kN} = 0$$

$$(0.302) T_{AD} + (-0.609) T_{BD} + (-0.147) 10 \text{ kN} = 0$$

$$(0.905) T_{AD} + (0.609) T_{BD} + (0.885) 10 \text{ kN} + F = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{AD} \\ T_{BD} \\ F \end{bmatrix} := \text{find}(T_{AD}, T_{BD}, F)$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} T_{AD} \\ T_{BD} \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.193 \\ 2.641 \\ -19.683 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Determinar las tensiones en los cables BA , BD y BC , sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio.

EJEMPLO RESUELTO 2.2.1.2

Paso ①: Determinamos las coordenadas de los puntos A , B , C y D , y los vectores unitarios correspondientes.

$$A := [0 \ 5 \ -2] \text{ m}$$

$$C := [0 \ -4 \ 0] \text{ m}$$

$$B := [5 \ 0 \ 0] \text{ m}$$

$$D := [0 \ 6 \ 3] \text{ m}$$

$$F = 36 \text{ Tn}$$

Vector cartesiano de la fuerza F

$$u_x := [1 \ 0 \ 0]$$

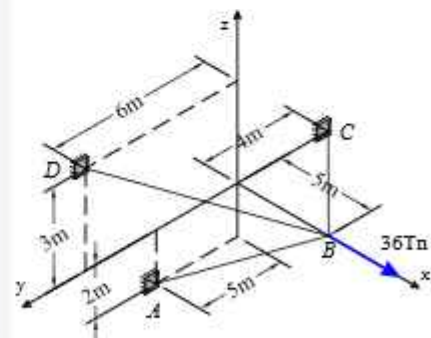
$$F := F \cdot u_x = [36 \ 0 \ 0] \text{ Tn}$$

Vectores Unitarios de las tensiones

$$BA := A - B = [-5 \ 5 \ -2] \text{ m} \quad \vec{u}_{BA} := \frac{BA}{\|BA\|} = [-0.68 \ 0.68 \ -0.272]$$

$$BD := D - B = [-5 \ 6 \ 3] \text{ m} \quad \vec{u}_{BD} := \frac{BD}{\|BD\|} = [-0.598 \ 0.717 \ 0.359]$$

$$BC := C - B = [-5 \ -4 \ 0] \text{ m} \quad \vec{u}_{BC} := \frac{BC}{\|BC\|} = [-0.781 \ -0.625 \ 0]$$



(a)

CONTINUACIÓN

Vectores cartesianos de las tensiones, figura 2.45 (b).

$$T_{BA} = T_{BA} \cdot u_{BA} = T_{BA} \cdot [-0.68 \ 0.68 \ -0.272]$$

$$T_{BD} = T_{BD} \cdot u_{BD} = T_{BD} \cdot [-0.598 \ 0.717 \ 0.359]$$

$$T_{BC} = T_{BC} \cdot u_{BC} = T_{BC} \cdot [-0.781 \ -0.625 \ 0]$$

$$F = [36 \ 0 \ 0] \text{ Tn}$$

Paso ②: Aplicación de las condiciones de equilibrio para determinar las tensiones en los cables.

$$\sum F_x = 0 ;$$

$$(-0.68) T_{BA} + (-0.598) T_{BD} + (-0.781) T_{BC} + 36 \text{ Tn} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0 ;$$

$$(0.68) T_{BA} + (0.717) T_{BD} + (-0.625) T_{BC} = 0 \quad \dots (2)$$

$$\sum F_z = 0 ;$$

$$(-0.272) T_{BA} + (0.359) T_{BD} = 0 \quad \dots (3)$$

Solución de la ecuación (1), (2) y (3)

$$T_{BA} = 1 \text{ Tn} \quad T_{BD} = 1 \text{ Tn} \quad T_{BC} = 1 \text{ Tn}$$

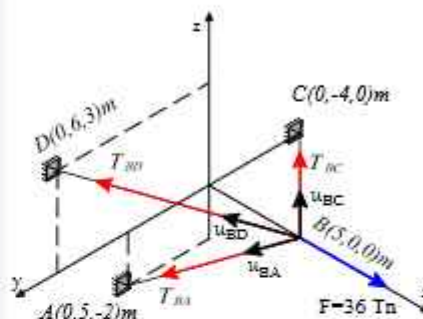
$$(-0.68) T_{BA} + (-0.598) T_{BD} + (-0.781) T_{BC} + 36 \text{ Tn} = 0$$

$$(0.68) T_{BA} + (0.717) T_{BD} + (-0.625) T_{BC} = 0$$

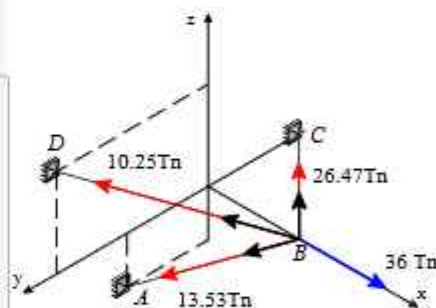
$$(-0.272) T_{BA} + (0.359) T_{BD} = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{BA} \\ T_{BD} \\ T_{BC} \end{bmatrix} := \text{find}(T_{BA}, T_{BD}, T_{BC}) = \begin{bmatrix} 13.525 \\ 10.248 \\ 26.472 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$\begin{bmatrix} T_{BA} \\ T_{BD} \\ T_{BC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.525 \\ 10.248 \\ 26.472 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$



(b)

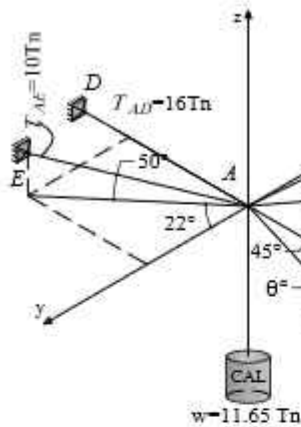


(c)

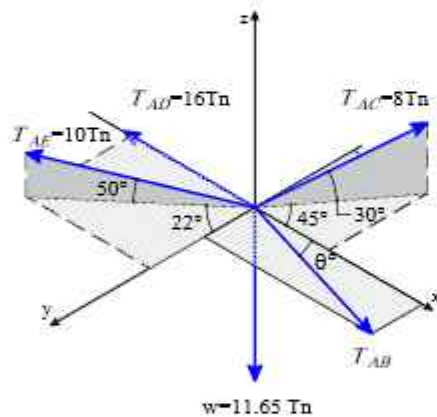
Figura 2.43

EJEMPLO RESUELTO 2.2.1.3

Determine la magnitud de la tensión T_{AB} y el ángulo θ , si el cuerpo se encuentra en equilibrio.



(a)



(b)

Figura 2.44

Paso ①: Determinamos los vectores cartesianos de cada una de las tensiones, figura 2.46 (c).

$$T_{AD} := -16 i$$

$$T_{AF} := -10 \cos(50^\circ) \cdot \sin(22^\circ) i - 10 \cos(50^\circ) \cos(22^\circ) j + 10 \sin(50^\circ) k$$

$$w := -11.65 k$$

$$T_{AC} := 8 \cos(30^\circ) \cdot \cos(45^\circ) i - 8 \cos(30^\circ) \sin(45^\circ) j + 8 \sin(30^\circ) k$$

$$T_{AB} := T_{AB} \cdot \cos(\theta) i + T_{AB} \cdot \sin(\theta) j - 0 k$$

Paso ②: Aplicación de las condiciones de equilibrio para determinar la magnitud de la tensión y el ángulo θ .

$$\sum F_x = 0 ;$$

$$-16 - 10 \cos(50^\circ) \cdot \sin(22^\circ) + 0 + 8 \cos(30^\circ) \cdot \cos(45^\circ) + T_{AB} \cdot \cos(\theta) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0 ;$$

$$0 - 10 \cos(50^\circ) \cos(22^\circ) + 0 - 8 \cos(30^\circ) \sin(45^\circ) + T_{AB} \cdot \sin(\theta) = 0 \quad \dots (2)$$

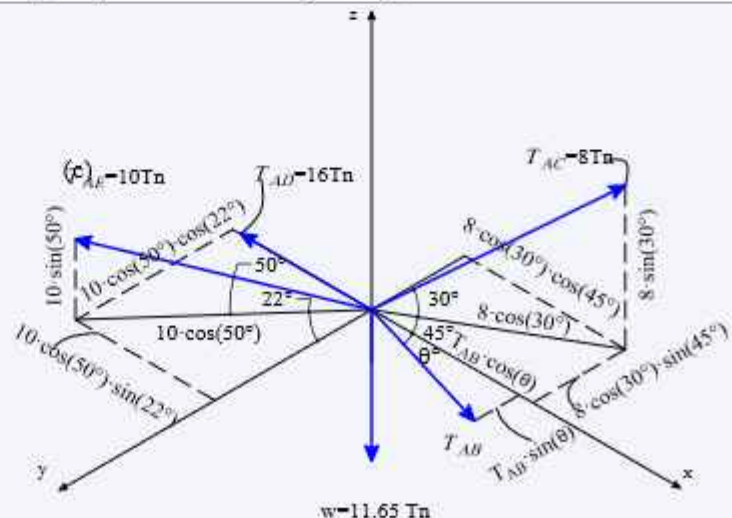
$$T_{AB} := 1$$

$$\theta := 1^\circ$$

$$-16 - 10 \cdot \cos(50^\circ) \cdot \sin(22^\circ) + 0 + 8 \cos(30^\circ) \cdot \cos(45^\circ) + T_{AB} \cdot \cos(\theta) = 0$$

$$0 - 10 \cos(50^\circ) \cos(22^\circ) + 0 - 8 \cos(30^\circ) \sin(45^\circ) + T_{AB} \cdot \sin(\theta) = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{AB} \\ \theta \end{bmatrix} := \text{find}(T_{AB}, \theta) = \begin{bmatrix} 17.332 \\ 0.677 \end{bmatrix}$$



EJEMPLO RESUELTO 2.2.1.4

Determinar las tensiones en los cables BA , BD y BC , sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio.

Paso ①: Determinamos los vectores cartesianos de cada fuerza.

-Determinamos las coordenadas de los puntos A, B, C y D; y los vectores unitarios correspondientes, figura 2.47 (b).

$$\begin{aligned} A &= (0, 4, 0) & \overline{BA} &= (-4, 0, 0) \\ B &= (4, 4, 0) & \overline{BC} &= (-1, -4, 3) \\ C &= (3, 0, 3) & \overline{BD} &= (-4, -2, 5) \\ D &= (0, 2, 5) \\ O &= (0, 0, 0) \\ F_1 &= (0, 0, -7) \text{ Tn} \\ F_2 &= (8 \cdot \cos(30^\circ), 0, 8 \cdot \sin(30^\circ)) \text{ Tn} \end{aligned}$$

$$\vec{u}_{BA} := \frac{1}{\|\overline{BA}\|} [-4 \ 0 \ 0] \rightarrow [-1 \ 0 \ 0]$$

$$\vec{u}_{BC} := \frac{1}{\|\overline{BC}\|} [-1 \ -4 \ 3] \rightarrow \left[\frac{-\sqrt{26}}{26} \quad \frac{-(2 \cdot \sqrt{26})}{13} \quad \frac{3 \cdot \sqrt{26}}{26} \right]$$

$$\vec{u}_{BD} := \frac{1}{\|\overline{BD}\|} [-4 \ -2 \ 5] \rightarrow \left[\frac{-(4 \cdot \sqrt{5})}{15} \quad \frac{-(2 \cdot \sqrt{5})}{15} \quad \frac{\sqrt{5}}{3} \right]$$

$$\begin{aligned} [T_{BAx} \ T_{BAy} \ T_{BAz}] &= T_{BA} \cdot \vec{u}_{BA} = [-1 \ 0 \ 0] T_{BA} \\ [T_{BDx} \ T_{BDy} \ T_{BDz}] &= T_{BD} \cdot \vec{u}_{BD} = [-0.596 \ -0.298 \ 0.745] T_{BD} \\ [T_{BCx} \ T_{BCy} \ T_{BCz}] &= T_{BC} \cdot \vec{u}_{BC} = [-0.196 \ -0.784 \ 0.588] T_{BC} \\ F_1 &= (0, 0, -7) \text{ Tn} \\ F_2 &= (8 \cdot \cos(30^\circ), 0, 8 \cdot \sin(30^\circ)) \text{ Tn} \end{aligned}$$

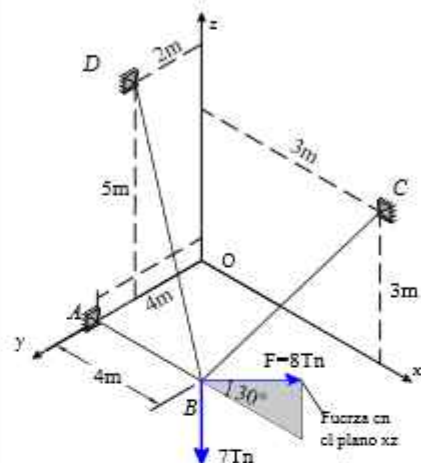
Paso ②: Aplicación de las condiciones de equilibrio para determinar las tensiones en los cables.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \\ -1 T_{BA} - 0.596 T_{BD} - 0.196 T_{BC} + 0 + 8 \cos(30^\circ) T_n = 0 \\ 1 T_{BA} + 0.596 T_{BD} + 0.196 T_{BC} = 8 \cos(30^\circ) T_n \dots (1) \end{aligned}$$

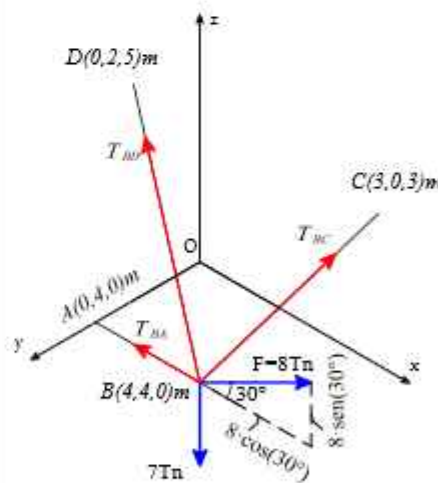
$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; \\ 0 T_{BA} - 0.298 T_{BD} - 0.784 T_{BC} + 0 + 0 = 0 \\ 0 T_{BA} - 0.298 T_{BD} - 0.784 T_{BC} = 0 \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0; \\ 0 T_{BA} + 0.745 T_{BD} + 0.588 T_{BC} - 7 T_n + 8 \cos(30^\circ) T_n = 0 \\ 0 T_{BA} + 0.745 T_{BD} + 0.588 T_{BC} = 7 T_n - 8 \sin(30^\circ) T_n \dots (3) \end{aligned}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} T_{BA} \\ T_{BD} \\ T_{BC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.928 \\ 5.753 \\ -2.187 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$



(a)



(b)

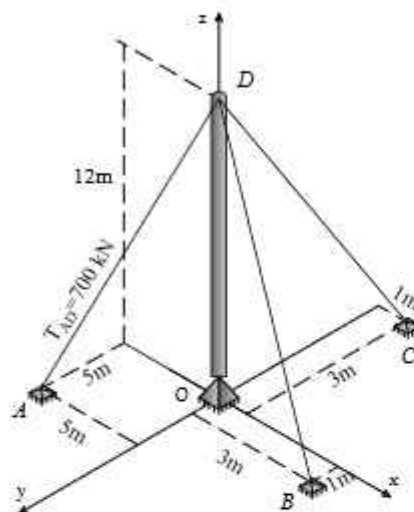
Figura 2.45

EJEMPLO RESUELTO 2.2.1.5

Determinar las tensiones en los cables DB , DC y la fuerza DO , sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio.

Paso ①: Determinamos los vectores cartesianos de cada fuerza.

-Determinamos las coordenadas de los puntos A , B , C y D ; y los vectores unitarios correspondientes, figura 2.48 (b).



(a)

$$A = (-5, 5, 0)$$

$$B = (3, 1, 0)$$

$$C = (1, -3, 0)$$

$$D = (0, 0, 12)$$

$$O = (0, 0, 0)$$

$$T_{AD} = 700 \text{ kN}$$

$$\overline{DA} = (-5, 5, -12)$$

$$\overline{DB} = (3, 1, -12)$$

$$\overline{DC} = (1, -3, -12)$$

$$\overline{DO} = (0, 0, -12)$$

$$\vec{u}_{DA} = \frac{1}{\|DA\|} [-5 \ 5 \ -12] \rightarrow \left[\frac{-(5 \cdot \sqrt{194})}{194} \quad \frac{5 \cdot \sqrt{194}}{194} \quad \frac{-(6 \cdot \sqrt{194})}{97} \right]$$

$$\vec{u}_{DB} = \frac{1}{\|DB\|} [3 \ 1 \ -12] \rightarrow \left[\frac{3 \cdot \sqrt{154}}{154} \quad \frac{\sqrt{154}}{154} \quad \frac{-(6 \cdot \sqrt{154})}{77} \right]$$

$$\vec{u}_{DC} = \frac{1}{\|DC\|} [1 \ -3 \ -12] = [0.081 \ -0.242 \ -0.967]$$

$$\vec{u}_{DO} = \frac{1}{\|DO\|} [0 \ 0 \ -12] \rightarrow [0 \ 0 \ -1] \quad T_{DA} = 700 \text{ kN}$$

$$[T_{DAx} \ T_{DAy} \ T_{DAz}] = T_{DA} \cdot \vec{u}_{DA} = [-251.285 \ 251.285 \ -603.085] \text{ kN}$$

$$[T_{DBx} \ T_{DBy} \ T_{DBz}] = T_{DB} \cdot \vec{u}_{DB} = [0.242 \ 0.081 \ -0.967] T_{DB}$$

$$[T_{DCx} \ T_{DCy} \ T_{DCz}] = T_{DC} \cdot \vec{u}_{DC} = [0.081 \ -0.242 \ -0.967] T_{DC}$$

$$[F_{DOx} \ F_{DOy} \ F_{DOz}] = F_{DO} \cdot \vec{u}_{DO} = [0 \ 0 \ -1] F_{DO}$$

Paso ②: Aplicación de las condiciones de equilibrio para determinar las tensiones en los cables.

$$\sum F_x = 0;$$

$$-251.285 \text{ kN} + 0.242 T_{DB} + 0.081 T_{DC} + 0 = 0$$

$$0.242 T_{DB} + 0.081 T_{DC} = 251.285 \text{ kN} \quad \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0;$$

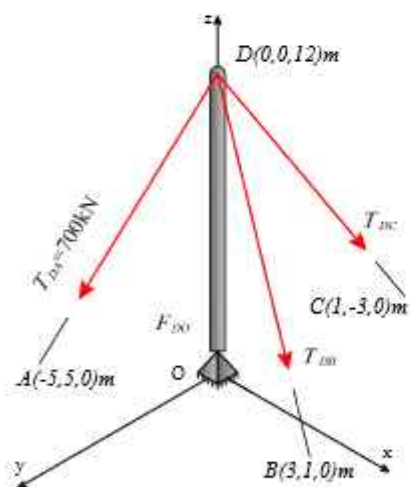
$$251.285 \text{ kN} + 0.081 T_{DB} - 0.242 T_{DC} + 0 = 0$$

$$0.081 T_{DB} - 0.242 T_{DC} = -251.285 \text{ kN} \quad \dots (2)$$

$$\sum F_z = 0;$$

$$-603.085 \text{ kN} - 0.967 T_{DB} - 0.967 T_{DC} - 1 F_{DO} = 0$$

$$-0.967 T_{DB} - 0.967 T_{DC} - 1 F_{DO} = 603.085 \text{ kN} \quad \dots (3)$$



(b)

Figura 2.46

$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} T_{DB} \\ T_{DC} \\ F_{DO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 621.219 \\ 1246.296 \\ -2408.972 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Determinar las tensiones en los cables BC , BA y BD , sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio.

Paso ①: Determinamos los vectores cartesianos de cada fuerza.

-Determinamos las coordenadas de los puntos A , B , C y D ; y los vectores unitarios correspondientes, figura 2.49 (b).

$$\begin{aligned} A &= (0, 9, 0) & \overline{BA} &= (0, 3, 0) & k_1 &= 10 \frac{Tn}{m} \\ B &= (0, 6, 0) & \overline{BC} &= (-2, -6, 4) & k_2 &= 15 \frac{Tn}{m} \\ C &= (-2, 0, 4) & \overline{BD} &= (4, -6, 6) & & \\ D &= (4, 0, 6) & & & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_{BA} &= \frac{1}{\|BA\|} [0 \ 3 \ 0] \rightarrow [0 \ 1 \ 0] \\ \vec{u}_{BC} &= \frac{1}{\|BC\|} [-2 \ -6 \ 4] \rightarrow \left[\frac{-\sqrt{14}}{14} \quad \frac{-(3 \cdot \sqrt{14})}{14} \quad \frac{\sqrt{14}}{7} \right] \\ \vec{u}_{BD} &= \frac{1}{\|BD\|} [4 \ -6 \ 6] \rightarrow \left[\frac{\sqrt{22}}{11} \quad \frac{-(3 \cdot \sqrt{22})}{22} \quad \frac{3 \cdot \sqrt{22}}{22} \right] \end{aligned}$$

$$[T_{BCx} \ T_{BCy} \ T_{BCz}] = T_{BC} \cdot \vec{u}_{BC} = [-0.267 \ -0.802 \ 0.535] T_{BC}$$

$$[T_{BDx} \ T_{BDy} \ T_{BDz}] = T_{BD} \cdot \vec{u}_{BD} = [0.426 \ -0.64 \ 0.64] T_{BD}$$

$$[T_{BAx} \ T_{BAy} \ T_{BAz}] = T_{BA} \cdot \vec{u}_{BA} = [0 \ 1 \ 0] T_{BA}$$

$$F_1 = (0, 0, -8) Tn$$

Paso ②: Aplicación de las condiciones de equilibrio para determinar las tensiones en los cables.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \\ -0.267 T_{BC} + 0.426 T_{BD} + 0 T_{BA} + 0 + 0 &= 0 \\ -0.267 T_{BC} + 0.426 T_{BD} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; & \\ -0.802 T_{BC} - 0.64 T_{BD} + 1 T_{BA} + 0 &= 0 \\ -0.802 T_{BC} - 0.64 T_{BD} + 1 T_{BA} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (2)$$

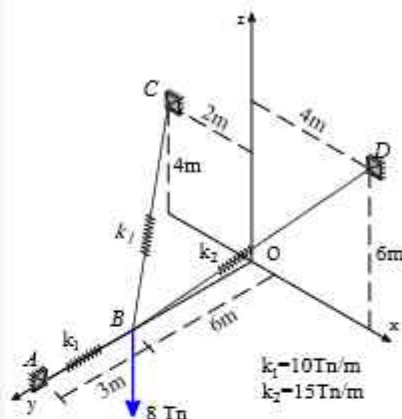
$$\begin{aligned} \sum F_z = 0; & \\ 0.535 T_{BC} + 0.64 T_{BD} + 0 T_{BA} - 8 Tn &= 0 \\ 0.535 T_{BC} + 0.64 T_{BD} &= 8 Tn \end{aligned} \quad \dots (3)$$

$$\begin{bmatrix} T_{BC} \\ T_{BD} \\ T_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.546 \\ 5.356 \\ 10.282 \end{bmatrix} Tn$$

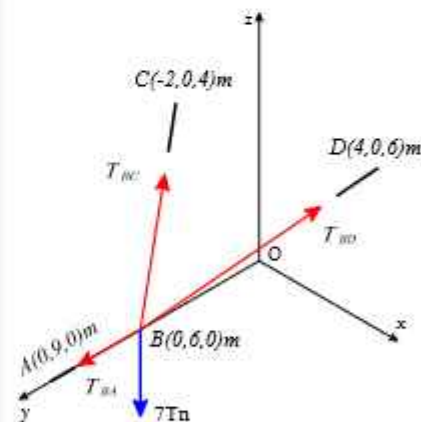
Determinamos las deformaciones en los resortes

$$\begin{bmatrix} x_{BC} \\ x_{BD} \\ x_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{BC} \div k_1 \\ T_{BD} \div k_2 \\ T_{BA} \div k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.855 \\ 0.357 \\ 1.028 \end{bmatrix} m$$

EJEMPLO RESUELTO 2.2.1.6



(a)



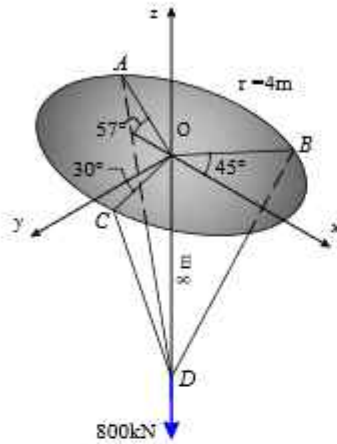
(b)

Figura 2.47

EJEMPLO RESUELTO 2.2.1.7

Determinar las fuerzas DC , DB y DA , sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio.

Paso ①: Determinamos los vectores cartesianos de cada fuerza.
-Determinamos las coordenadas de los puntos A, B, C y D; y los vectores unitarios correspondientes, 2.50 (b).



(a)

$$r = 4 \text{ m}$$

$$A = (-r \cdot \cos(57^\circ), -r \cdot \sin(57^\circ), 0)$$

$$\overline{DA} = (-2.179, -3.355, 8)$$

$$B = (r \cdot \cos(45^\circ), -r \cdot \sin(45^\circ), 0)$$

$$\overline{DC} = (2, 3.464, 8)$$

$$C = (r \cdot \sin(30^\circ), r \cdot \cos(30^\circ), 0)$$

$$\overline{DB} = (2.828, -2.828, 8)$$

$$D = (0, 0, -8)$$

$$\vec{u}_{DA} = \frac{1}{\|\overline{DA}\|} [-2.179 \quad -3.355 \quad 8] \xrightarrow{\text{float}, 4} [-0.2436 \quad -0.3751 \quad 0.8944]$$

$$\vec{u}_{DC} = \frac{1}{\|\overline{DC}\|} [2 \quad 3.464 \quad 8] \xrightarrow{\text{float}, 4} [0.2236 \quad 0.3873 \quad 0.8944]$$

$$\vec{u}_{DB} = \frac{1}{\|\overline{DB}\|} [2.828 \quad -2.828 \quad 8] \xrightarrow{\text{float}, 4} [0.3162 \quad -0.3162 \quad 0.8944]$$

$$[T_{DCx} \quad T_{DCy} \quad T_{DCz}] := T_{DC} \cdot \vec{u}_{DC} = [0.224 \quad 0.387 \quad 0.894] T_{DC}$$

$$[T_{DBx} \quad T_{DBy} \quad T_{DBz}] := T_{DB} \cdot \vec{u}_{DB} = [0.316 \quad -0.316 \quad 0.894] T_{DB}$$

$$[T_{Dax} \quad T_{Day} \quad T_{Daz}] := T_{DA} \cdot \vec{u}_{DA} = [-0.244 \quad -0.375 \quad 0.894] T_{DA}$$

$$F = (0, 0, -800) \text{ kN}$$

Paso ②: Aplicación de las condiciones de equilibrio para determinar las fuerzas en los cables.

$$\sum F_x = 0;$$

$$0.224 T_{DC} + 0.316 T_{DB} - 0.244 T_{DA} + 0 = 0$$

$$0.224 T_{DC} + 0.316 T_{DB} - 0.244 T_{DA} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0;$$

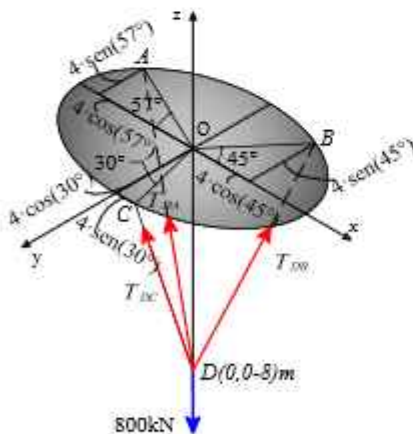
$$0.387 T_{DC} - 0.316 T_{DB} - 0.375 T_{DA} + 0 = 0$$

$$0.387 T_{DC} - 0.316 T_{DB} - 0.375 T_{DA} = 0 \quad \dots (2)$$

$$\sum F_z = 0;$$

$$0.894 T_{DC} + 0.894 T_{DB} + 0.894 T_{DA} - 800 \text{ kN} = 0$$

$$0.894 T_{DC} + 0.894 T_{DB} + 0.894 T_{DA} = 800 \text{ kN} \quad \dots (3)$$



(b)

Figura 2.48

$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} T_{DC} \\ T_{DB} \\ T_{DA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 438.571 \\ 23.381 \\ 432.903 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

EJEMPLO RESUELTO 2.2.1.8

Determinar las fuerzas DC , DB y DA ; sabiendo que el sistema se encuentra en equilibrio, a demás, las elongaciones en los resortes.

Paso ①: Determinamos los vectores cartesianos de cada fuerza.

-Determinamos las coordenadas de los puntos A, B, C y D; y los vectores unitarios correspondientes, 2.51 (b).

$r := 2 \text{ m}$

$$A = (r \cdot \cos(35^\circ), r \cdot \sin(35^\circ), 0) \quad \overline{DA} = (1.638, 1.147, 10)$$

$$B = (r \cdot \sin(30^\circ), -r \cdot \cos(30^\circ), 0) \quad \overline{DC} = (-1.597, 1.204, 10)$$

$$C = (-r \cdot \sin(53^\circ), r \cdot \cos(53^\circ), 0) \quad \overline{DB} = (1, -1.732, 10)$$

$$D = (0, 0, -10)$$

$$\vec{u}_{DA} := \frac{1}{\|\overline{DA}\|} [1.638 \ 1.147 \ 10] \xrightarrow{\text{float}, 4} [0.1606 \ 0.1125 \ 0.9806]$$

$$\vec{u}_{DC} := \frac{1}{\|\overline{DC}\|} [-1.597 \ 1.204 \ 10] \xrightarrow{\text{float}, 4} [-0.1566 \ 0.1181 \ 0.9806]$$

$$\vec{u}_{DB} := \frac{1}{\|\overline{DB}\|} [1 \ -1.732 \ 10] \xrightarrow{\text{float}, 4} [0.09806 \ -0.1698 \ 0.9806]$$

$$[T_{DCx} \ T_{DCy} \ T_{DCz}] := T_{DC} \cdot \vec{u}_{DC} = [-0.157 \ 0.118 \ 0.981] \quad T_{DC}$$

$$[T_{DBx} \ T_{DBy} \ T_{DBz}] := T_{DB} \cdot \vec{u}_{DB} = [0.098 \ -0.17 \ 0.981] \quad T_{DB}$$

$$[T_{DAx} \ T_{DAy} \ T_{DAz}] := T_{DA} \cdot \vec{u}_{DA} = [0.161 \ 0.113 \ 0.981] \quad T_{DA}$$

$$F = (0, 0, -16) \text{ Tn}$$

Paso ②: Aplicación de las condiciones de equilibrio para determinar las fuerzas en los cables.

$$\sum F_x = 0;$$

$$\begin{aligned} -0.157 T_{DC} + 0.098 T_{DB} + 0.161 T_{DA} + 0 &= 0 \\ -0.157 T_{DC} + 0.098 T_{DB} + 0.161 T_{DA} &= 0 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0;$$

$$\begin{aligned} 0.118 T_{DC} - 0.17 T_{DB} + 0.113 T_{DA} + 0 &= 0 \\ 0.118 T_{DC} - 0.17 T_{DB} + 0.113 T_{DA} &= 0 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$\sum F_z = 0;$$

$$\begin{aligned} 0.981 T_{DC} + 0.981 T_{DB} + 0.981 T_{DA} - 16 \text{ Tn} &= 0 \\ 0.981 T_{DC} + 0.981 T_{DB} + 0.981 T_{DA} &= 16 \text{ Tn} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} T_{DC} \\ T_{DB} \\ T_{DA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.943 \\ 6.635 \\ 2.732 \end{bmatrix} \text{ Tn} \quad \begin{aligned} k_1 &= 10 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \\ k_2 &= 12 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \\ k_3 &= 8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

Determinación de la elongación en los resortes:

$$\begin{bmatrix} x_{DC} \\ x_{DB} \\ x_{DA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{DC} \div k_3 \\ T_{DB} \div k_1 \\ T_{DA} \div k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86.788 \\ 66.351 \\ 22.765 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

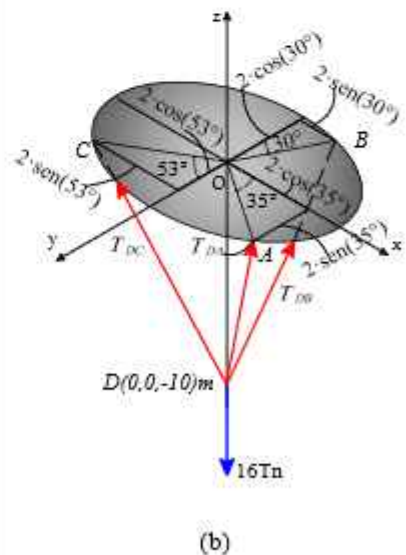
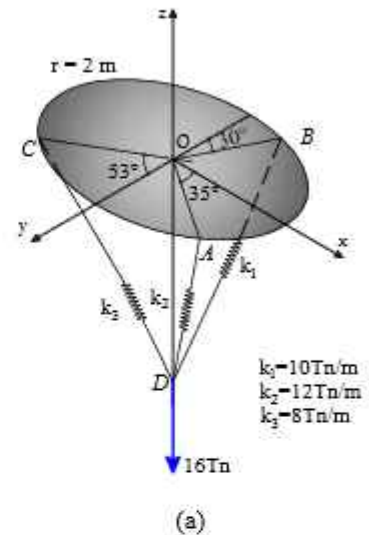


Figura 2.49

2.2.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

8

Ejercicios

2.31 Determine las tensiones en los cables AD, CD y BD, si el sistema se encuentra en equilibrio.

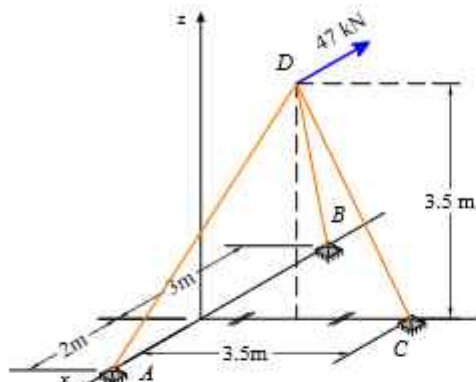


Figura 2.50

2.32 Determine las tensiones sobre los cables AB, AD y AC, si el sistema se encuentra en equilibrio.

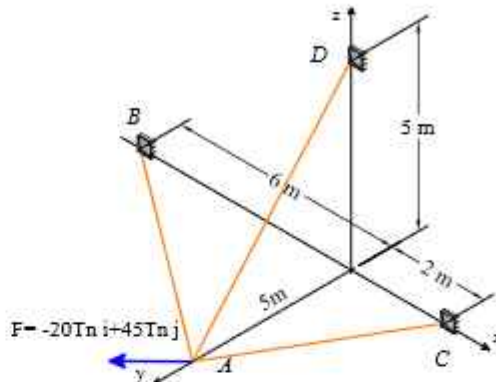


Figura 2.51

2.33 Determine las fuerzas DA, DB y DC, si el sistema está en equilibrio.

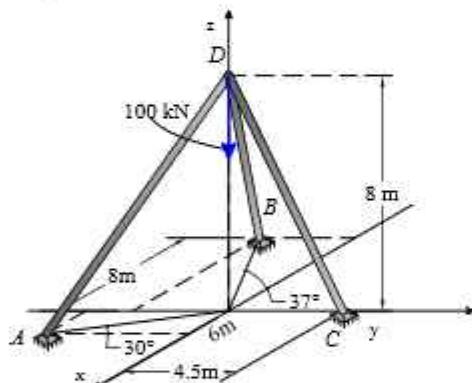


Figura 2.52

2.34 Determine las tensiones en los cables DA, DC y DB, si el sistema está en equilibrio.

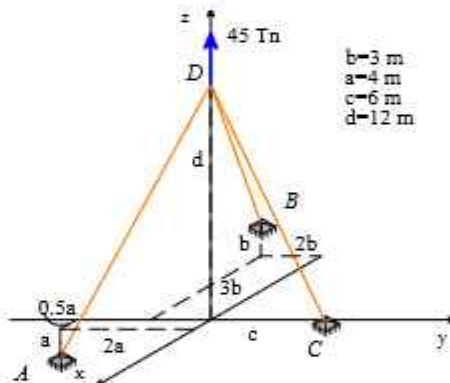


Figura 2.53

2.35 Determine las tensiones en los cables DB, DA y DC, si el sistema está en equilibrio.

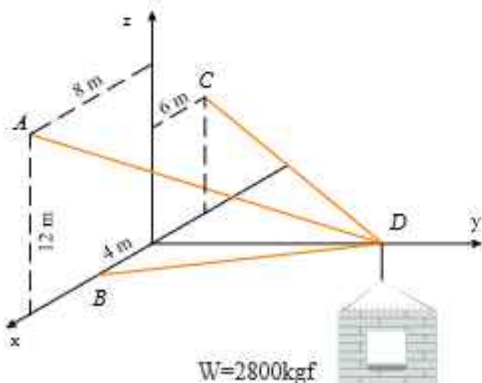


Figura 2.54

2.36 Determine las fuerzas F_1 , F_2 y F_3 , si el sistema está en equilibrio.

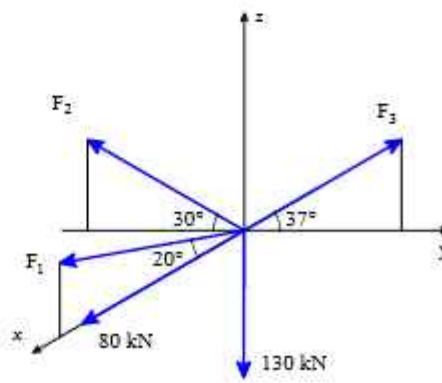


Figura 2.55

2.37 Determine las tensiones en los cables AD, BD y CD, si el globo ejerce una fuerza de 200kN.

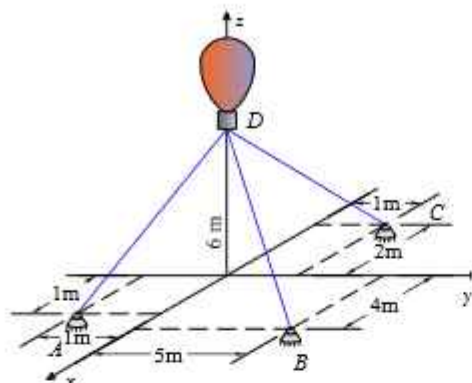


Figura 2.56

2.38 Determine las tensiones en los cables CA, CD y CB, si el sistema se encuentra en equilibrio.

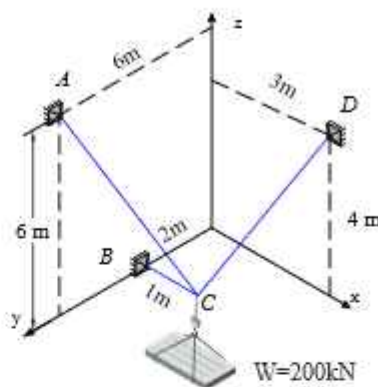


Figura 2.57

2.39 Determine las tensiones en los cables DA, DB y DC, si el sistema se encuentra en equilibrio.

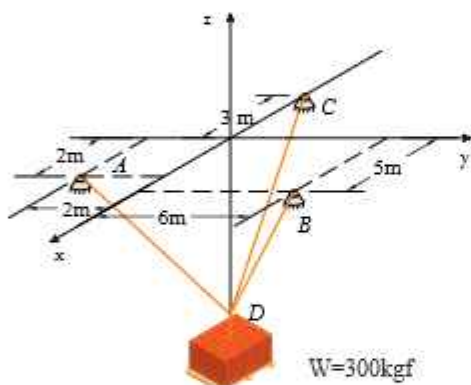


Figura 2.58

2.40 Determine la tensión en AB, las fuerzas en DB y BC, si el sistema se encuentra en equilibrio.

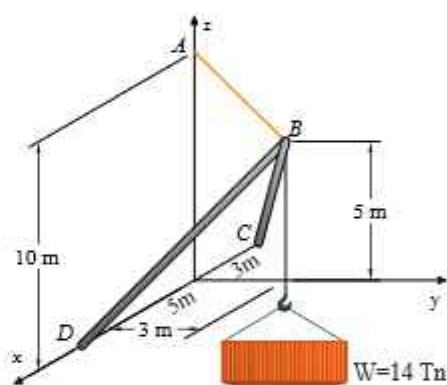


Figura 2.59

2.41 Determine las tensiones en los cables DA, DB y DC, si el sistema se encuentra en equilibrio.

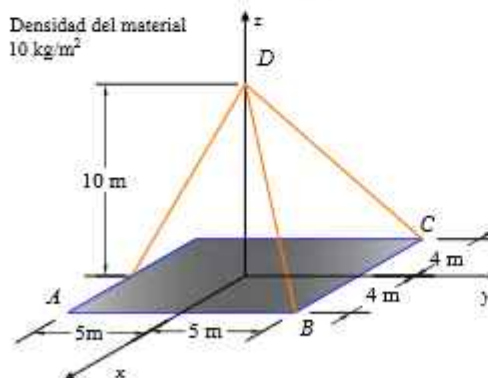


Figura 2.60

2.42 Determin las tensiones en los cables AD, DB y CD, si el sistema se encuentra en equilibrio.

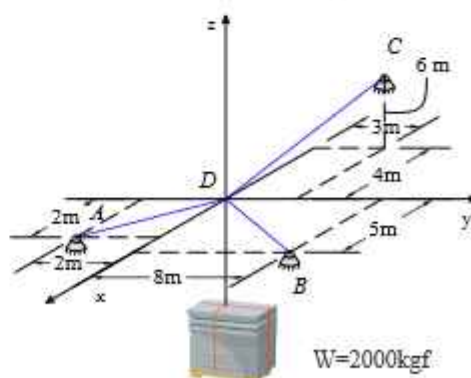


Figura 2.61

2.43 Determine la fuerza F_1 , F_2 y F_3 , si el sistema está en equilibrio.

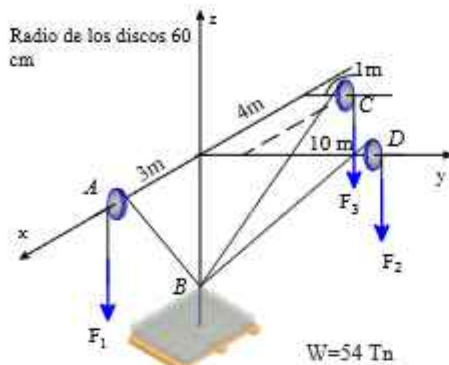


Figura 2.62

2.45 Determine la tensión en cada uno de los cables, si el sistema está en equilibrio.

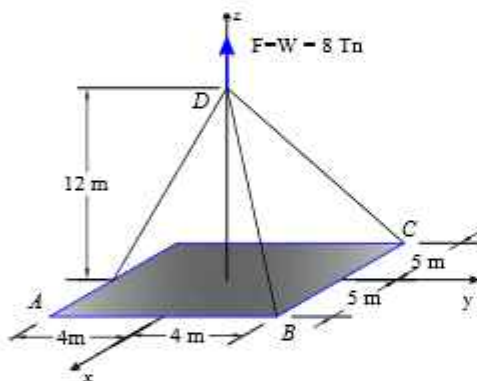


Figura 2.64

2.47 Determinar la tensión en los cables CA, CB y CD, si el sistema está en equilibrio.

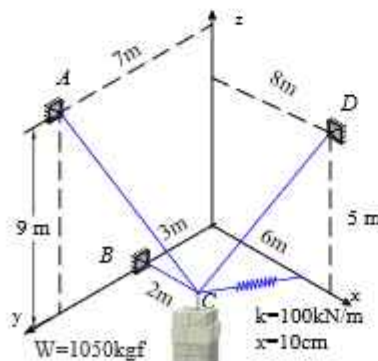


Figura 2.66

2.44 Determine la fuerza F , las tensiones BD y DC, si el sistema se encuentra en equilibrio.

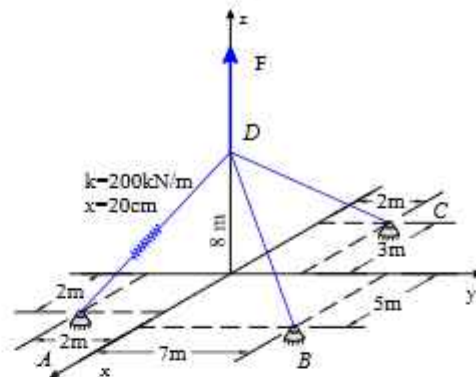


Figura 2.63

2.46 Determine la tensión en los cables DA, DB y DC, y sus respectivas elongaciones.

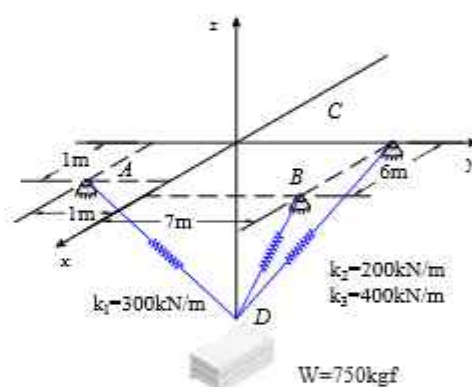


Figura 2.65

2.48 Determinar las tensiones en los cables y sus elongaciones en los resortes, si el sistema está en equilibrio.

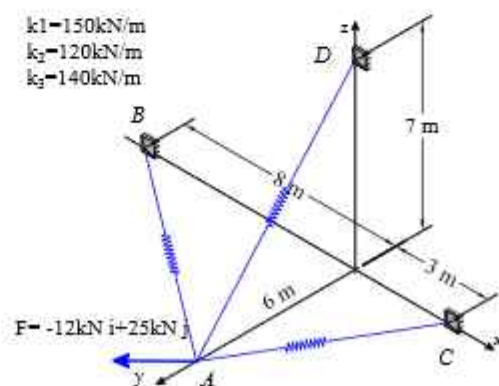


Figura 2.67

2.49 Determine las tensiones en los cables AC y BC, a demás, la fuerza F, para mantener el equilibrio.

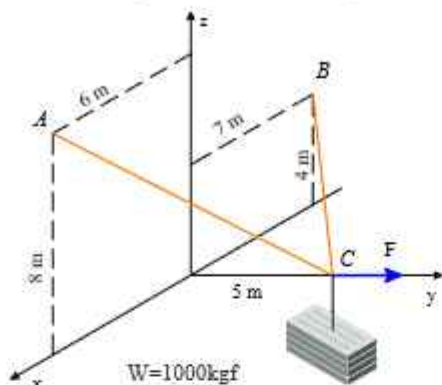


Figura 2.68

2.50 Determine la magnitud de las fuerzas F_1 y F_2 , a demás, la tensión T.

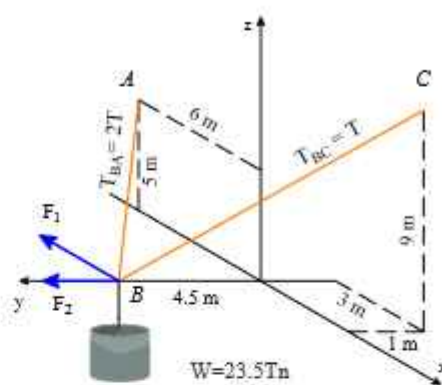


Figura 2.69

2.51 Determine las fuerzas AB, AC y AD, si el sistema siguiente está en equilibrio.

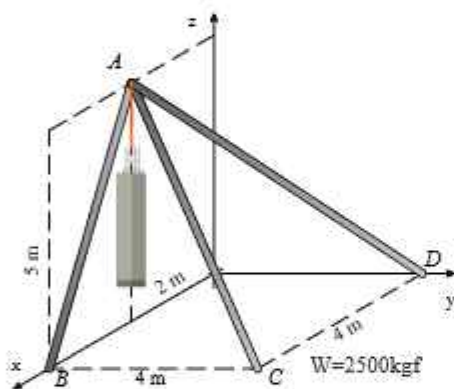


Figura 2.70

2.52 Determine las tensiones DA y DB, a demás, el peso de la placa, si el sistema está en equilibrio.

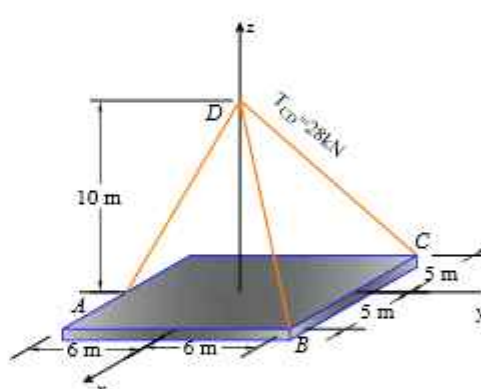


Figura 2.71

2.53 Determine las tensiones CB, CD y CF, si el sistema está en equilibrio.

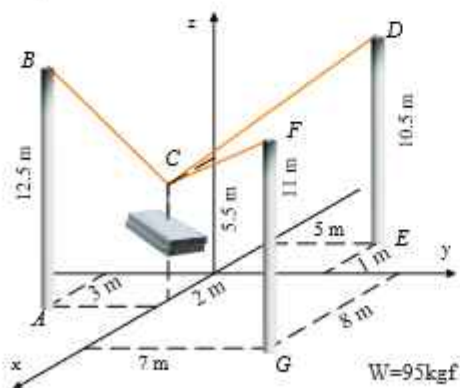


Figura 2.72

2.54 Determine las fuerzas sobre las barras que produce el peso de 200 lb, que esta conectada a la pared a través de una polea en D.

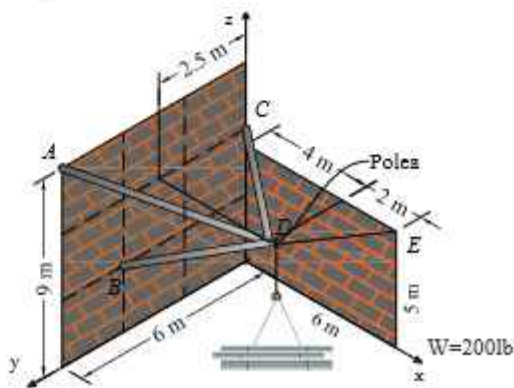


Figura 2.73

2.3. EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN EL PLANO

En el capítulo anterior, se estudió las fuerzas externas que actúan en un cuerpo rígido, como pueden reducirse a un sistema fuerza par en un punto arbitrario o cuando la fuerza y el par son iguales a cero, las fuerzas externas forman un sistema equivalente a cero y se dice que el cuerpo rígido se encuentra en equilibrio, por lo tanto, lo descrito concuerda con la primera ley de Newton, entonces:

$$\begin{array}{ll} \Sigma F_R = 0 & \Sigma M_R^O = 0 \\ \Sigma F_x = 0 & \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \Sigma M_y = 0 \end{array}$$

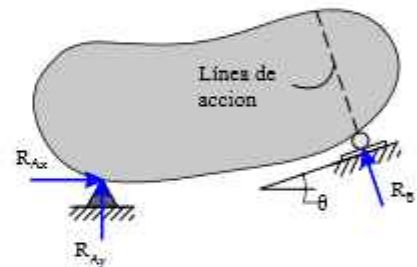
Para el análisis de equilibrio de un cuerpo rígido, las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo rígido, se consideran también las reacciones ejercidas sobre este último por sus puntos de apoyo. Se apoya un tipo específico de apoyo - reacción.

REACCIONES EN LOS PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES

Reacciones de tres tipos







- Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción.
- Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocida
- Reacciones equivalentes a una fuerza y un par

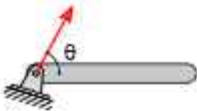







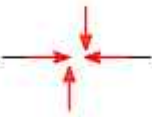
{ Bisagras
 { Articulaciones
 → apoyos fijos



REACCIONES EN LOS SOPORTES:

Son las que previenen las traslaciones de un cuerpo en una dirección dada, entonces una fuerza es desarrollada sobre el cuerpo en esa dirección. Igualmente, si una rotación es prevenida, sobre el cuerpo se ejerce un momento de par.

Tipo de Apoyo	Idealización	Reacción	Nº Incógnitas
			2
			1

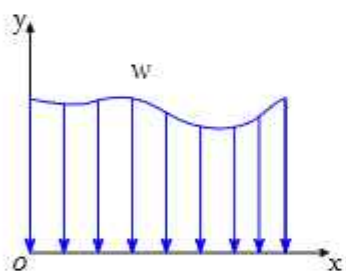
Tipo de Apoyo	Idealización	Reacción	Nº Incógnitas
			2
			3
			2

IDEALIZACIÓN - DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE:

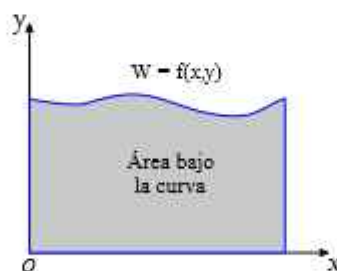
Es la simplificación, especificación completa de todas las fuerzas externas conocidas y desconocidas (reacciones) que actúan sobre un cuerpo.

PESOS Y CENTROS DE GRAVEDAD:

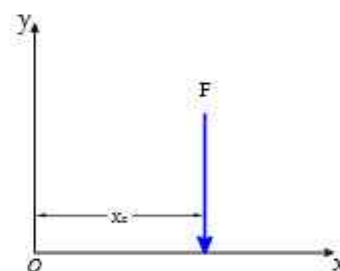
Previo al estudio profundo del tema, se provee una introducción básica a la aplicación de cargas distribuidas en los elementos estructurales.



Carga Distribuida



La magnitud de la fuerza resultante se determina el área bajo la curva



La posición de la fuerza resultante es el centro de gravedad x_c

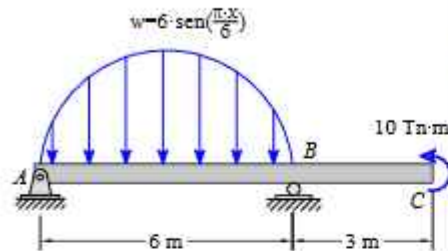
2.3.1. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.1

Determine las reacciones en los apoyos (A y B), del siguiente cuerpo rígido

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.), del cuerpo rígido como se muestra en la figura 2.74 (b).

Paso ②: Hallamos la fuerza resultante y su ubicación de la carga distribuida:



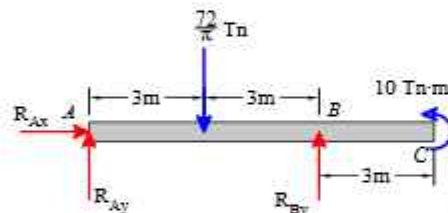
(a)

a) Determinación de la fuerza resultante:

$$w = 6 \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \quad w(x) = 6 \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right)$$

$$dF = w \cdot dx \quad \int_0^F dF = \int_0^6 w \, dx$$

$$F = \int_0^6 6 \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) dx \rightarrow \frac{72}{\pi} \quad F = \frac{72}{\pi} \text{ Tn} = 22.918 \text{ Tn}$$



(b)

b) La fuerza resultante actúa a 3 m de A, respecto al eje "x" (Por simetría)

Paso ③: Determinamos las reacciones haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio, según la figura 2.74 (b).

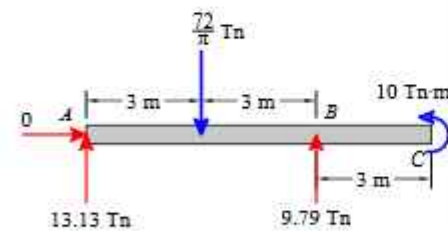
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad F(3 \text{ m}) - R_{By}(6 \text{ m}) - 10 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 0$$

$$R_{By} = \frac{F \cdot 3 \text{ m} - 10 \text{ Tn} \cdot \text{m}}{6 \text{ m}} = 9.792 \text{ Tn}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} + 0 = 0 \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} - F = 0$$

$$R_{Ay} = F - R_{By} = 13.126 \text{ Tn}$$



(c)

Figura 2.74

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} F \\ R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.918 \\ 0 \\ 13.126 \\ 9.792 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

Determine las reacciones en los apoyos del siguiente cuerpo rígido.

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.2

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.), del cuerpo rígido como se muestra en la figura 2.75 (b).

Paso ②: Hallamos la fuerza resultante y su ubicación:

$$w := 15 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \quad F := w \cdot 6 \text{ m} = 90 \text{ Tn} \quad x := 3 \text{ m}$$

Paso ③: Determinamos las reacciones haciendo uso de la ecuaciones de equilibrio, según la figura 2.75 (b).

$$+ \circlearrowleft \sum M_A = 0 ; \quad 80 \text{ Tn} \cos(30^\circ) 2 \text{ m} - R_{Cy} (6 \text{ m}) + 90 \text{ Tn} (9 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Cy} := \frac{80 \text{ Tn} \cos(30^\circ) 2 \text{ m} + 90 \text{ Tn} \cdot 9 \text{ m}}{6 \text{ m}}$$

$$R_{Cy} = 158.094 \text{ Tn}$$

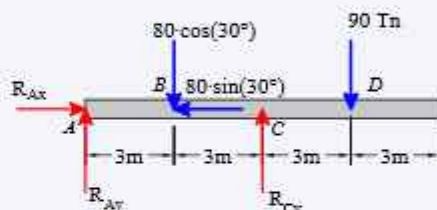
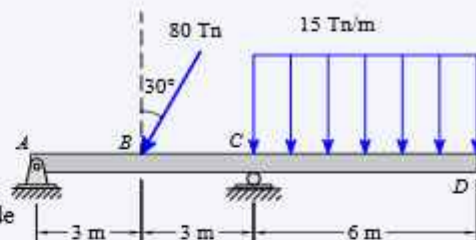
$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad R_{Ax} - 80 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) = 0$$

$$R_{Ax} := 80 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) = 40 \text{ Tn}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Ay} + R_{Cy} - 80 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) - 180 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} := 80 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) + 180 \text{ Tn} - R_{Cy} = 91.188 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 91.188 \\ 158.094 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$



(a)

(b)

Figura 2.75

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.3

Determine las reacciones en los apoyos del siguiente cuerpo rígido.

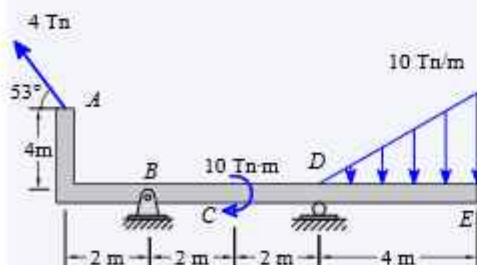
Paso ①: Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.), del cuerpo rígido como se muestra en la figura 2.76 (b).

Paso ②: Hallamos la fuerza resultante y su ubicación:

$$w := 10 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \quad F := \frac{w \cdot 4 \text{ m}}{2} = 20 \text{ Tn}$$

$$x := 4 \text{ m} + \frac{2}{3} \cdot 4 \text{ m} = 6.667 \text{ m} \quad (\text{Respecto a B.})$$

Paso ③: Determinamos las reacciones haciendo uso de la ecuaciones de equilibrio, según la figura 2.76 (b).



(a)

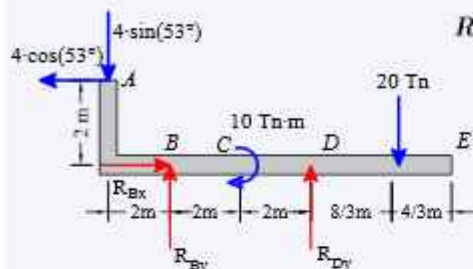
CONTINUACIÓN

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0 ;$$

$$4 \text{ Tn} \cos(53^\circ) \cdot 2 \text{ m} - 4 \text{ Tn} \cdot \sin(53^\circ) \cdot (2 \text{ m}) - 10 \text{ Tn} \cdot \text{m} + R_{Dy} (4 \text{ m}) - 20 \text{ Tn} (x) = 0$$

$$R_{Dy} := \frac{-4 \text{ Tn} \cos(53^\circ) \cdot 2 \text{ m} + 4 \text{ Tn} \cdot \sin(53^\circ) \cdot 2 \text{ m} + 10 \text{ Tn} \cdot \text{m} + 20 \text{ Tn} \cdot x}{4 \text{ m}}$$

$$R_{Dy} = 36.227 \text{ Tn}$$



(b)

Figura 2.76

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad R_{Ax} - 4 \text{ Tn} \cos(53^\circ) = 0$$

$$R_{Ax} := 4 \text{ Tn} \cos(53^\circ) = 2.407 \text{ Tn}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Ay} + R_{Dy} + 4 \text{ Tn} \cdot \sin(53^\circ) - 20 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} := -R_{Dy} - 4 \text{ Tn} \cdot \sin(53^\circ) + 20 \text{ Tn} = -19.422 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.407 \\ -19.422 \\ 36.227 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

Determine las reacciones en los apoyos del siguiente cuerpo rígido.

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.), del cuerpo rígido como se muestra en la figura 2.77 (b).

Paso ②: Magnitud de la fuerza y su ubicación:

$$F := 2 \text{ Tn} \quad x := 3 \text{ m}$$

Paso ③: Determinamos las reacciones haciendo uso de la ecuaciones de equilibrio, según la figura 2.77 (b).

$$+ \circlearrowleft \sum M_A = 0 ; \quad -M_A + 2 \text{ Tn} (3 \text{ m}) - 8 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 0$$

$$M_A := 2 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} - 8 \text{ Tn} \cdot \text{m} = -2 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad R_{Ax} = 0 \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Ay} - 2 \text{ Tn} = 0 \quad R_{Ay} = 2 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.4

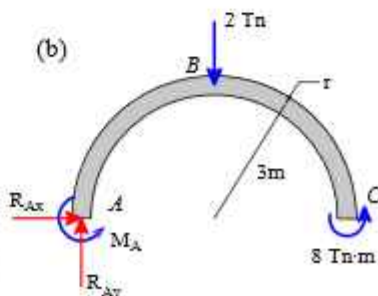
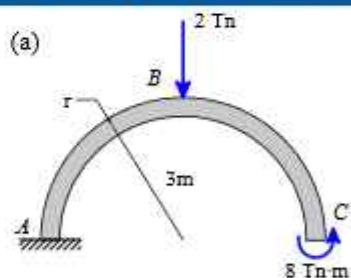


Figura 2.77

Determine las reacciones en los apoyos del siguiente cuerpo rígido.

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.), del cuerpo rígido como se muestra en la figura 2.78 (b).

Paso ②: Hallamos la fuerza resultante y su ubicación:

$$F_1 := 5 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m} \cdot 0.5 = 15 \text{ Tn} \quad F_2 := 24 \text{ Tn}$$

$$x_1 := 4 \text{ m} \quad (\text{Punto A}) \quad x_2 := 3 \text{ m} \quad (\text{Punto D})$$

Paso ③: Determinamos las reacciones haciendo uso de la ecuaciones de equilibrio.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad R_{Dx}(4 \text{ m}) - 24 \text{ Tn}(3 \text{ m}) - 15 \text{ Tn}(4 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Dx} := \frac{24 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} + 15 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m}}{4 \text{ m}} = 33 \text{ Tn}$$

$$R_{Dx} = 33 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} + R_{Dx} = 0$$

$$R_{Ax} := -R_{Dx} = -33 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - 15 \text{ Tn} - 24 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} := 15 \text{ Tn} + 24 \text{ Tn} = 39 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 39 \\ 33 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.5

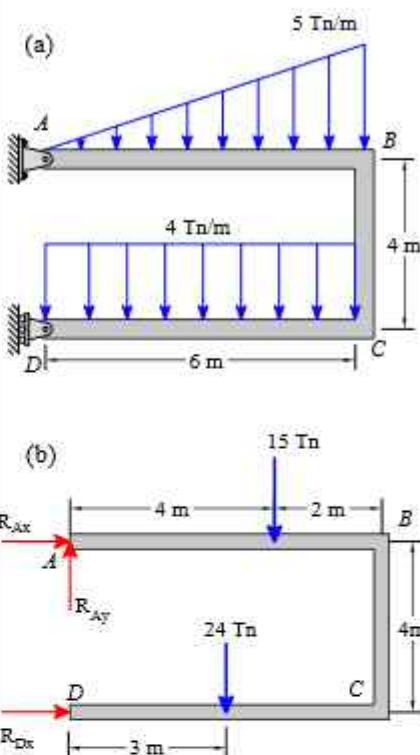


Figura 2.78

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.6

Determine las reacciones en los apoyos del siguiente cuerpo rígido.

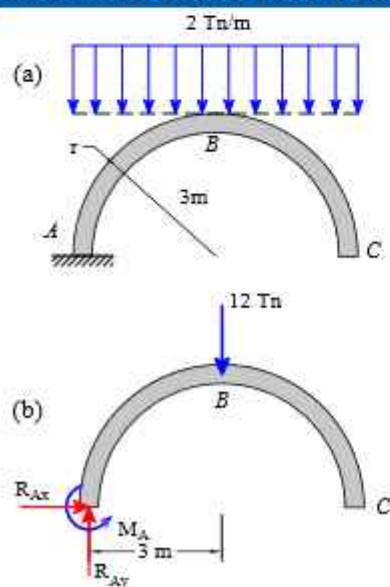


Figura 2.79

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.), del cuerpo rígido como se muestra en la figura 2.79 (b).

Paso ②: Hallamos la fuerza resultante y su ubicación:

$$F := 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m} = 12 \text{ Tn} \quad x := 3 \text{ m} \quad (\text{Punto A})$$

Paso ③: Determinamos las reacciones haciendo uso de la ecuaciones de equilibrio.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad M_A - 12 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} = 0 \quad M_A := 12 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} = 36 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 \quad R_{Ax} := 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - 12 \text{ Tn} = 0 \quad R_{Ay} := 12 \text{ Tn} = 12 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 36 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.7

Determine las reacciones en los apoyos, del siguiente cuerpo rígido.

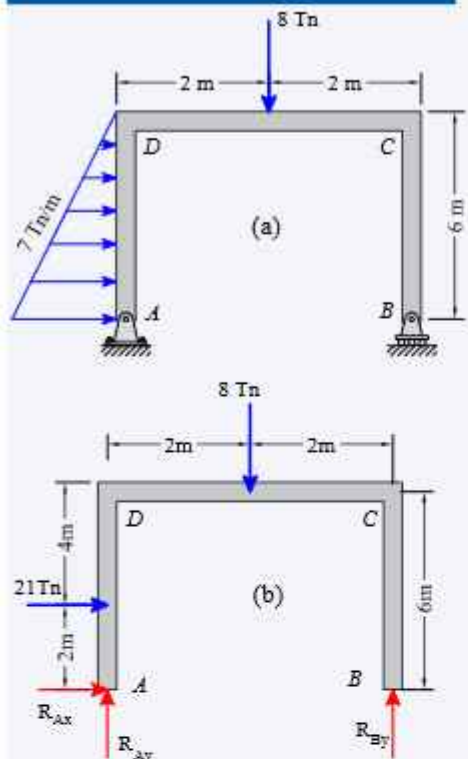


Figura 2.80

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.), del cuerpo rígido como se muestra en la figura 2.80 (b).

Paso ②: Hallamos la fuerza resultante y su ubicación de la carga distribuida:

$$F = 7 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m} \cdot 0.5 = 21 \text{ Tn} \quad y = 2 \text{ m} \quad (\text{Punto A})$$

Paso ③: Determinamos las reacciones haciendo uso de la ecuaciones de equilibrio.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad 21 \text{ Tn} (2 \text{ m}) + 8 \text{ Tn} (2 \text{ m}) - R_{By} (4 \text{ m}) = 0$$

$$R_{By} = \frac{21 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} + 8 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m}}{4 \text{ m}} = 14.5 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} + 21 \text{ Tn} = 0 \quad R_{Ax} = -21 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} - 8 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{By} + 8 \text{ Tn} = -6.5 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ -6.5 \\ 14.5 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

Determine las reacciones en los apoyos del siguiente cuerpo rígido.

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.8

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.), del cuerpo rígido como se muestra en la figura 2.81 (b) y (c).

Paso ②: Hallamos la fuerza resultante y su ubicación de la carga distribuida:

$$F = 6 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 9 \text{ m} \cdot 0.5 = 27 \text{ Tn} \quad x = 3 \text{ m} \quad (\text{Punto A})$$

Paso ③: Determinamos las reacciones haciendo uso de la ecuaciones de equilibrio.

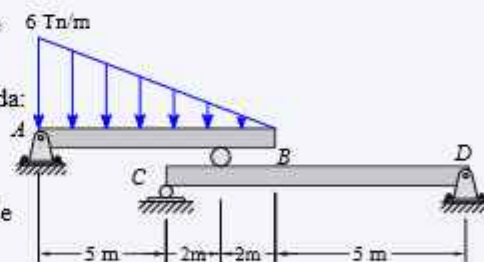
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad 27 \text{ Tn} (3 \text{ m}) - R_{By} (7 \text{ m}) = 0$$

$$R_{By} = \frac{27 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m}}{7 \text{ m}} = 11.571 \text{ Tn}$$

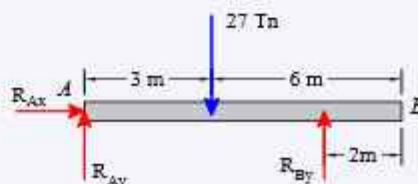
$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} - 27 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{By} + 27 \text{ Tn} = 15.429 \text{ Tn}$$



(a)



(b)

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0; \quad R_{By}(6 \text{ m}) - R_{Cy}(8 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Cy} = \frac{R_{By} \cdot 6 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 8.679 \text{ Tn}$$

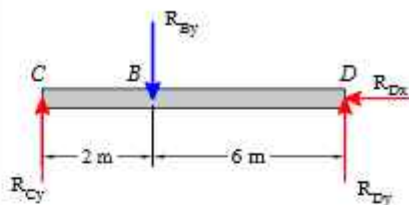
$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Dx} = 0 \quad R_{Dx} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Cy} + R_{Dy} - R_{By} = 0$$

$$R_{Dy} = R_{By} - R_{Cy} = 2.893 \text{ Tn}$$

$$\begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15.429 \\ 11.571 \end{bmatrix} \text{ Tn} \quad \begin{bmatrix} R_{Cy} \\ R_{Dx} \\ R_{Dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.679 \\ 0 \\ 2.893 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

CONTINUACIÓN

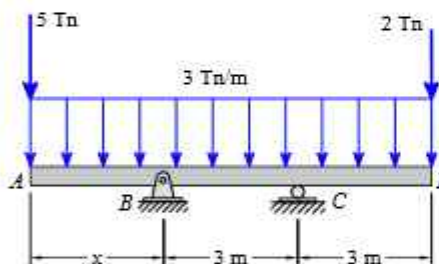


(c)

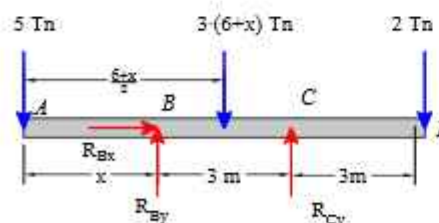
Figura 2.81

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.9

Determine las reacciones en los apoyos. Si la $R_{By} = 2 R_{Cy}$



(a)



(b)

Figura 2.82

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.), del cuerpo rígido como se muestra en la figura 2.82 (b).

Paso ②: Hallamos la fuerza resultante y su ubicación de la carga distribuida

$$F = 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot (6 \text{ m} + x) \quad x = \left(\frac{6 \text{ m} + x}{2} \right)$$

Paso ③: Uso de la ecuaciones de equilibrio.

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Bx} = 0 \quad R_{Bx} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad R_{By} \cdot x - 3 \cdot (6 + x) \cdot \left(\frac{6 + x}{2} \right) + R_{Cy} \cdot (3 + x) - 2 \cdot (6 + x) = 0$$

$$R_{By} = 2 R_{Cy} \quad \text{Condición}$$

$$2 \cdot R_{Cy} \cdot x - 3 \cdot (6 + x) \cdot \left(\frac{6 + x}{2} \right) + R_{Cy} \cdot (3 + x) - 2 \cdot (6 + x) = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{By} + R_{Cy} - 5 - 2 - 3 \cdot (6 + x) = 0 \quad 3 \cdot R_{Cy} - 5 - 2 - 3 \cdot (6 + x) = 0$$

Solventes de prueba

$$R_{Cy} = 1 \quad x = 1$$

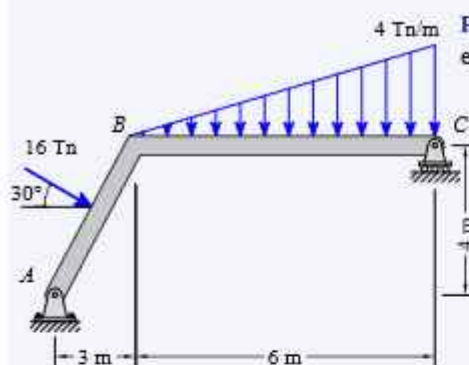
$$2 \cdot R_{Cy} \cdot x - 3 \cdot (6 + x) \cdot \left(\frac{6 + x}{2} \right) + R_{Cy} \cdot (3 + x) - 2 \cdot (6 + x) = 0$$

$$3 \cdot R_{Cy} - 5 - 2 - 3 \cdot (6 + x) = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_{Cy} \\ x \end{bmatrix} := \text{Find} (R_{Cy}, x) = \begin{bmatrix} 11.536 \\ 3.202 \end{bmatrix} \quad R_{By} = 2 R_{Cy} = 23.071 \text{ Tn}$$

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.10

Determine las reacciones en los apoyos del siguiente cuerpo rígido.



(a)

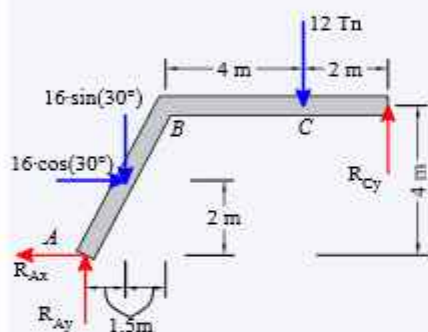
Paso ①: Determinamos las reacciones haciendo uso de la ecuaciones de equilibrio, según la figura 2.83 (b).

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0;$$

$$-16 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) \cdot 2 \text{ m} - 16 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) \cdot 1.5 \text{ m} - 12 \text{ Tn} (7 \text{ m}) + R_{Cy} (9 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Cy} = \frac{16 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) \cdot 2 \text{ m} + 16 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) \cdot 1.5 \text{ m} + 12 \text{ Tn} \cdot 7 \text{ m}}{9 \text{ m}}$$

$$R_{Cy} = 13.746 \text{ Tn}$$



(b)

$$\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$-R_{Ax} + 16 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) = 0$$

$$R_{Ax} = 16 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ)$$

$$R_{Ax} = 13.856 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$R_{Ay} + R_{Cy} - 12 \text{ Tn} - 16 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{Cy} + 12 \text{ Tn} + 16 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ)$$

$$R_{Ay} = 6.254 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.856 \\ 6.254 \\ 13.746 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

Figura 2.83

De la siguiente figura mostrada determine las reacciones en B, D y además la tensión en el cable T_{CA} . Si el peso de la barra es de 8 Tn.

Paso ①: Determinamos las reacciones haciendo uso de la ecuaciones de equilibrio, según la figura 2.84 (b).

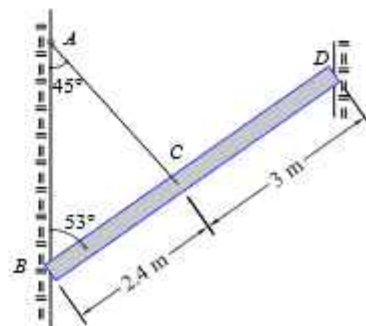
$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Bx} - R_{Dx} - T_{CA} \cdot \sin(45^\circ) = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad T_{CA} \cdot \sin(45^\circ) - 8 \text{ Tn} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0;$$

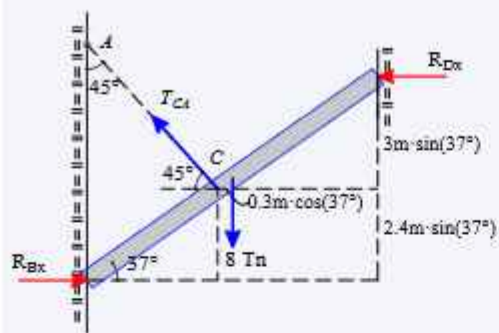
$$-8 \text{ Tn} \cdot 0.3 \text{ m} \cdot \cos(37^\circ) + R_{Bx} \cdot 2.4 \text{ m} \cdot \sin(37^\circ) + R_{Dx} \cdot 3 \text{ m} \cdot \sin(37^\circ) = 0$$

EJEMPLO RESUELTO 2.3.1.11



(a)

CONTINUACIÓN



(b)

Figura 2.84

 Restricciones de prueba
 Solver

$$R_{Bx} = 1 \text{ Tn} \quad T_{CA} = 1 \text{ Tn} \quad R_{Dx} = 1 \text{ Tn}$$

$$R_{Bx} - R_{Dx} - T_{CA} \cdot \sin(45^\circ) = 0$$

$$T_{CA} \cdot \sin(45^\circ) - 8 \text{ Tn} = 0$$

$$-8 \text{ Tn} \cdot 0.3 \text{ m} \cdot \cos(37^\circ) + R_{Bx} \cdot 2.4 \text{ m} \cdot \sin(37^\circ) + R_{Dx} \cdot 3 \text{ m} \cdot \sin(37^\circ) = 0$$

$$\text{find } (R_{Bx}, R_{Dx}, T_{CA}) = \begin{bmatrix} 5.034 \\ -2.966 \\ 11.314 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

2.3.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

9

Ejercicios

2.55 Determine las reacciones en los apoyos de la siguiente viga.

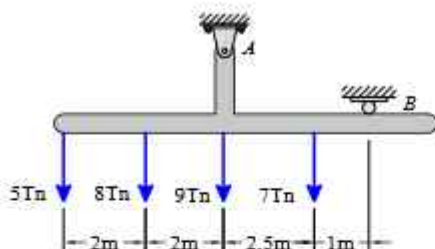


Figura 2.85

2.57 Determine las reacciones que produce la fuerza 5 Tn sobre los apoyos.

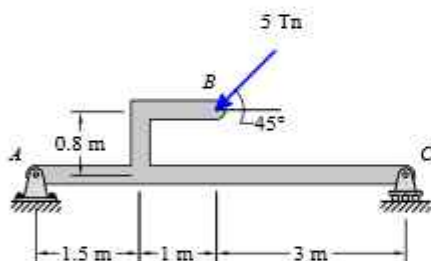


Figura 2.87

2.59 Determinar las reacciones en los apoyos A y B, producido por la fuerza 5 Tn.

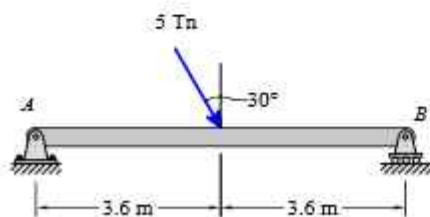


Figura 2.89

2.56 Determine las reacciones en los apoyos A y C, también, las fuerzas en la rótula B.

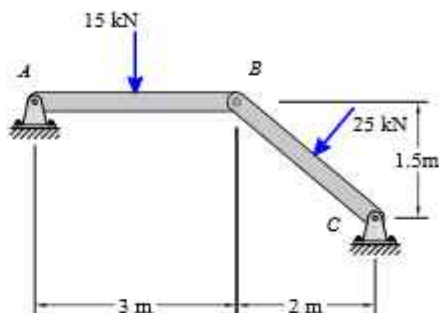


Figura 2.86

2.58 Determine las reacciones en los apoyos A y C, además, las fuerzas en la rótula B.

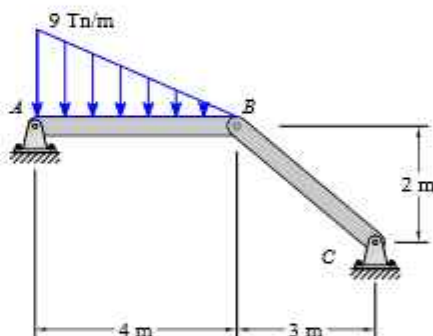


Figura 2.88

2.60 Determine las reacciones sobre los apoyos A y C de la viga, además, las fuerzas en la rótula B.

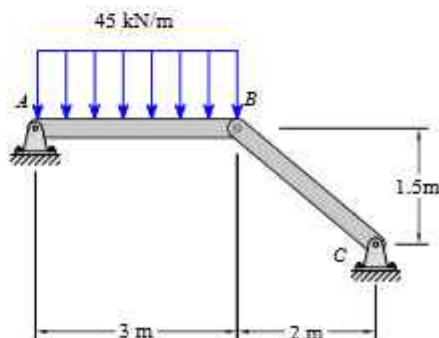


Figura 2.90

2.61 Determine las reacciones en los apoyos A y B que producen las fuerzas.

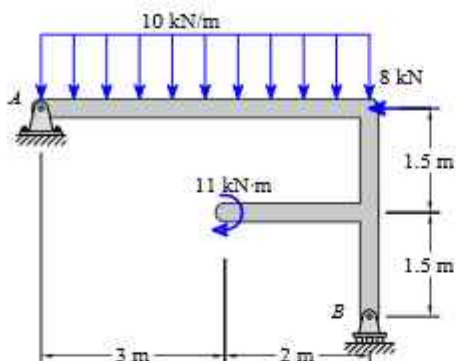


Figura 2.91

2.62 Determinar la reacción en D y las tensiones en los cables AB y EC.

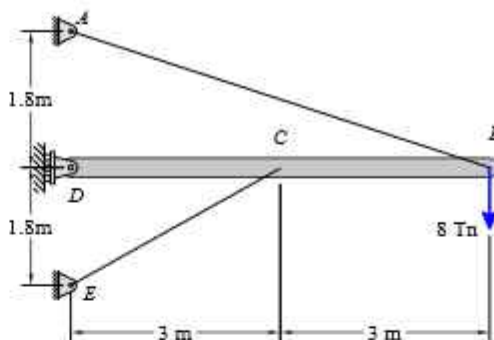


Figura 2.92

2.63 Determine las reacciones en A y C, además, las fuerzas en la rótula B.

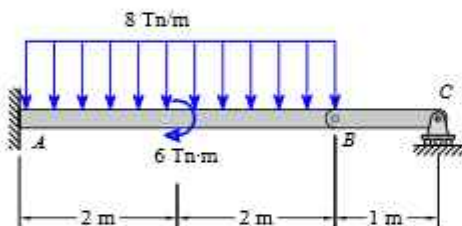


Figura 2.93

2.64 Determinar las reacciones en A, las fuerzas en B y la fuerza sobre el resorte.

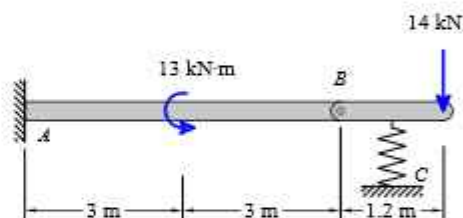


Figura 2.94

2.65 Determina las reacciones en A y D, también, las fuerzas en las rótulas B y C.

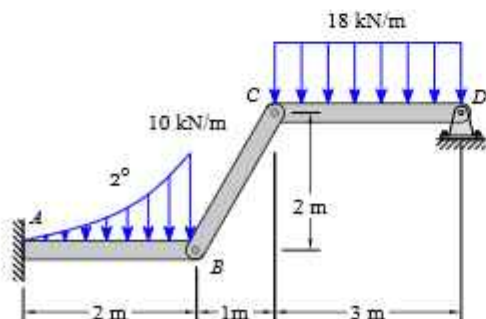


Figura 2.95

2.66 Determinar las reacciones en los apoyos, las fuerzas sobre la rótula C y la fuerza sobre el resorte.

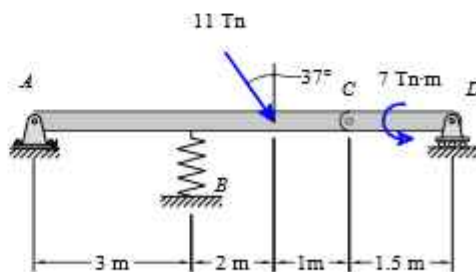


Figura 2.96

2.67 Determinar las reacciones en los apoyos sobre la siguiente viga.

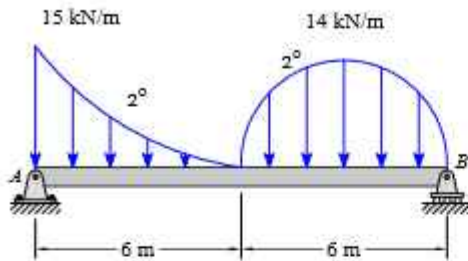


Figura 2.97

2.68 Determinar las reacciones en los apoyos A y B, además, las fuerzas en la rótula.

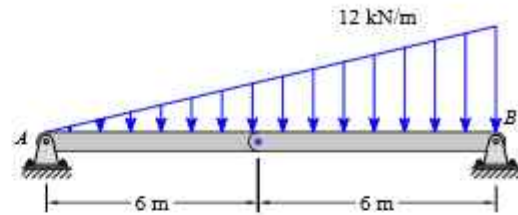


Figura 2.98

2.69 Determinar las reacciones en los soportes A y C, que produce la fuerza de 18 Tn.

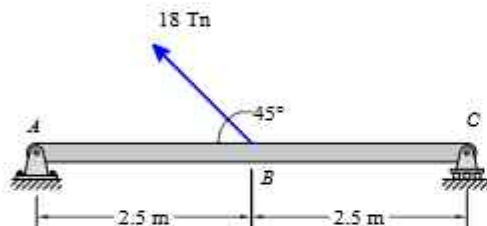


Figura 2.99

2.70 Determinar las reacciones en los apoyos, también las fuerzas sobre la rótula.

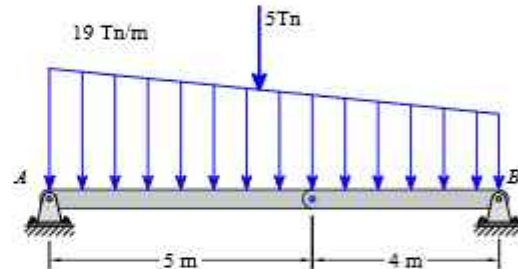


Figura 2.100

2.71 Determinar las reacciones en los apoyos fijos, además, las fuerzas en la rótula.

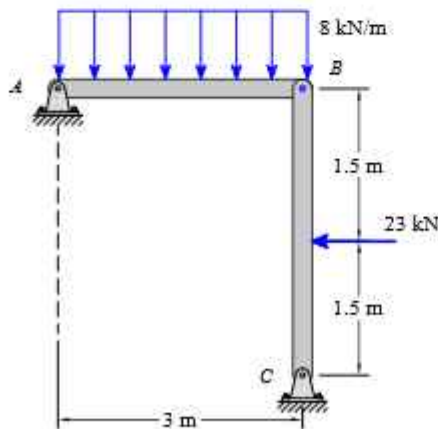


Figura 2.101

2.72 Determinar las fuerzas en los apoyos sobre la siguiente figura.

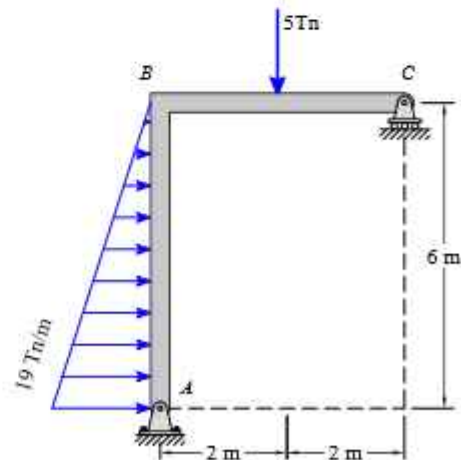


Figura 2.102

2.73 Determine las reacciones en los apoyos de la siguiente viga.

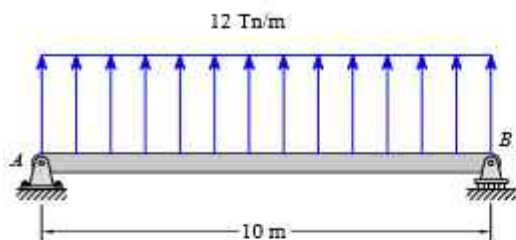


Figura 2.103

2.75 Determine las reacciones en el apoyo fijo y móvil, de la siguiente viga.

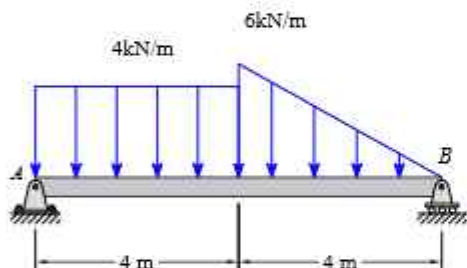


Figura 2.105

2.77 Determine las reacciones en el empotramiento de la siguiente viga.

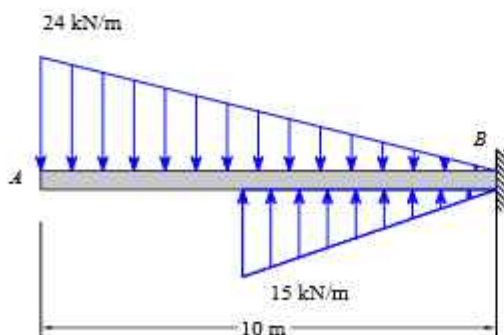


Figura 2.107

2.74 Determine las reacciones sobre los puntos A, B. Si todas las superficies son lisas

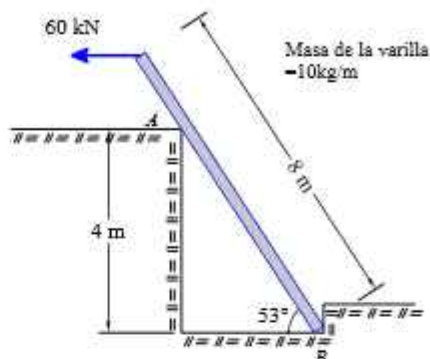


Figura 2.104

2.76 Determine las reacciones sobre: A, B, C, D, E, F, que producen los 3 cilindros homogéneos sobre una superficie lisa.

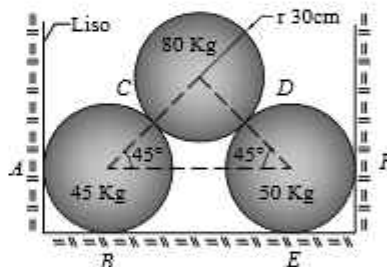


Figura 2.106

2.78 Un rodillo de peso 120kgf, se carga a través de una palanca AD sin peso. Determine las reacciones en los puntos B, C, D, E, F

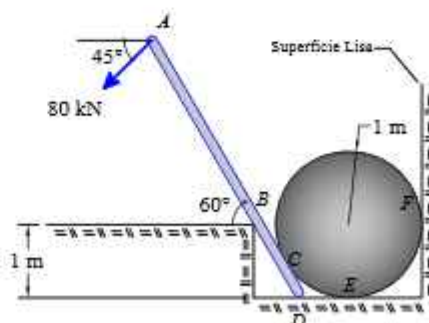


Figura 2.108

2.79 Determine la distancia x , para que el sistema se encuentre en equilibrio. Si la barra no tiene peso, además, determine las reacciones en A y C.

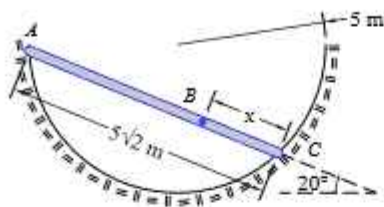


Figura 2.109

2.80 Determine las reacciones en los 2 apoyos y la fuerza F , si la tensión en el cable es 65 kN. (10 kg/m)

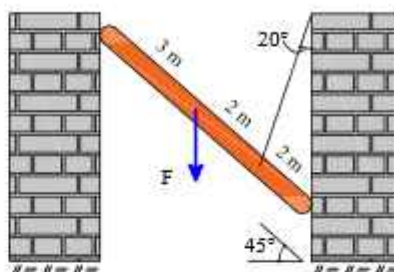


Figura 2.110

2.81 Determine el peso de la varilla para que el sistema este en equilibrio.

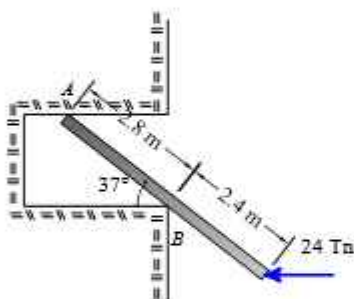


Figura 2.111

2.82 Una viga cuyo $\gamma = 100 \text{ kg/m}$, se apoya en A y sujetado en B. Determine las reacciones y la tensión

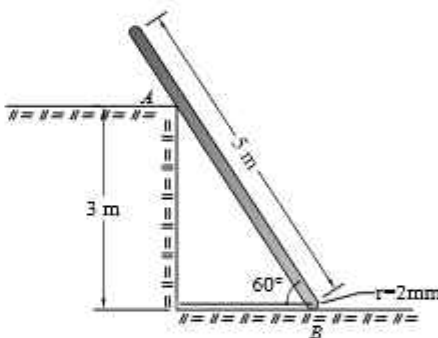


Figura 2.112

2.83 Determinar la fuerza F necesaria para que el disco (100 N) empiece su movimiento y suba el bloque.

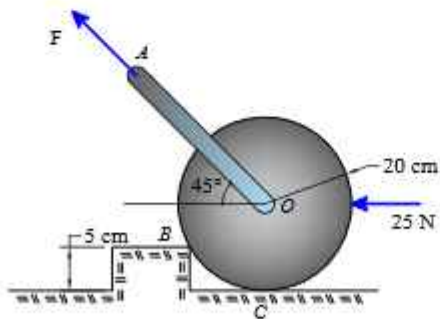


Figura 2.113

2.84 Una viga uniforme de 50 kgf, determinar las reacciones en A y D, y la tensión BC

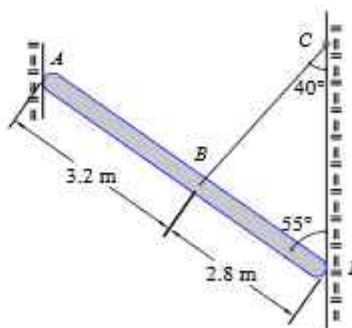


Figura 2.114

2.85 Determine las reacciones en los apoyos A y D, de la armadura mostrada

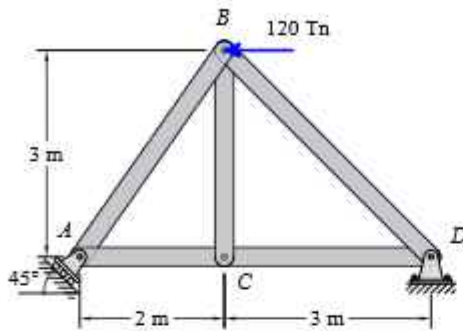


Figura 2.115

2.86 Determine las reacciones en los apoyos de la siguiente armadura.

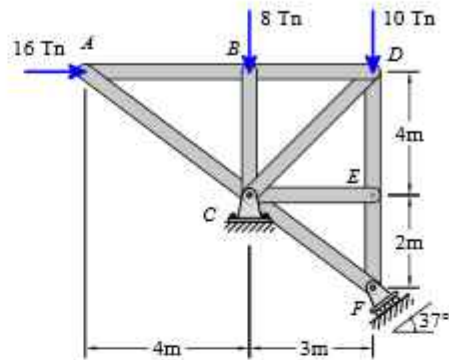


Figura 2.116

2.87 Determine la tensión en el cable BC y la reacción en el apoyo D.

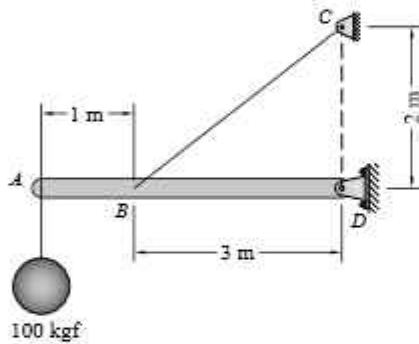


Figura 2.117

2.88 Determine las reacciones en los puntos A, B, C y D, de la siguiente figura

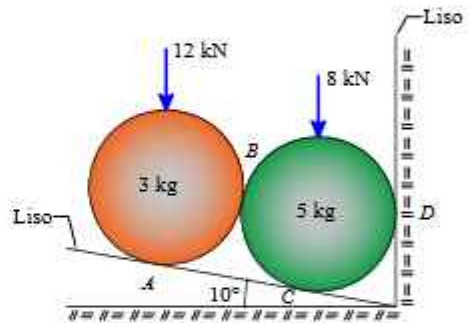


Figura 2.118

2.89 Determine la tensión en el cable BA y la reacción en el apoyo C, de la siguiente figura.

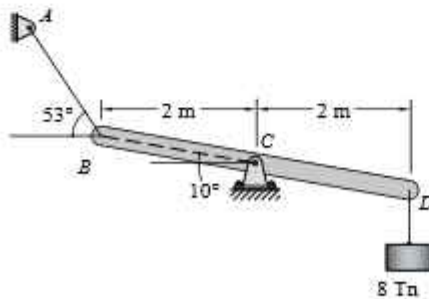


Figura 2.119

2.90 Determina la reacción en el punto A y el valor de la fuerza F, si la tensión en el cable es 45 kN.

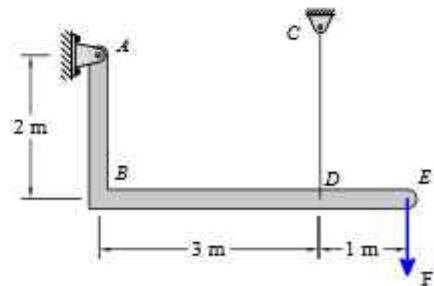
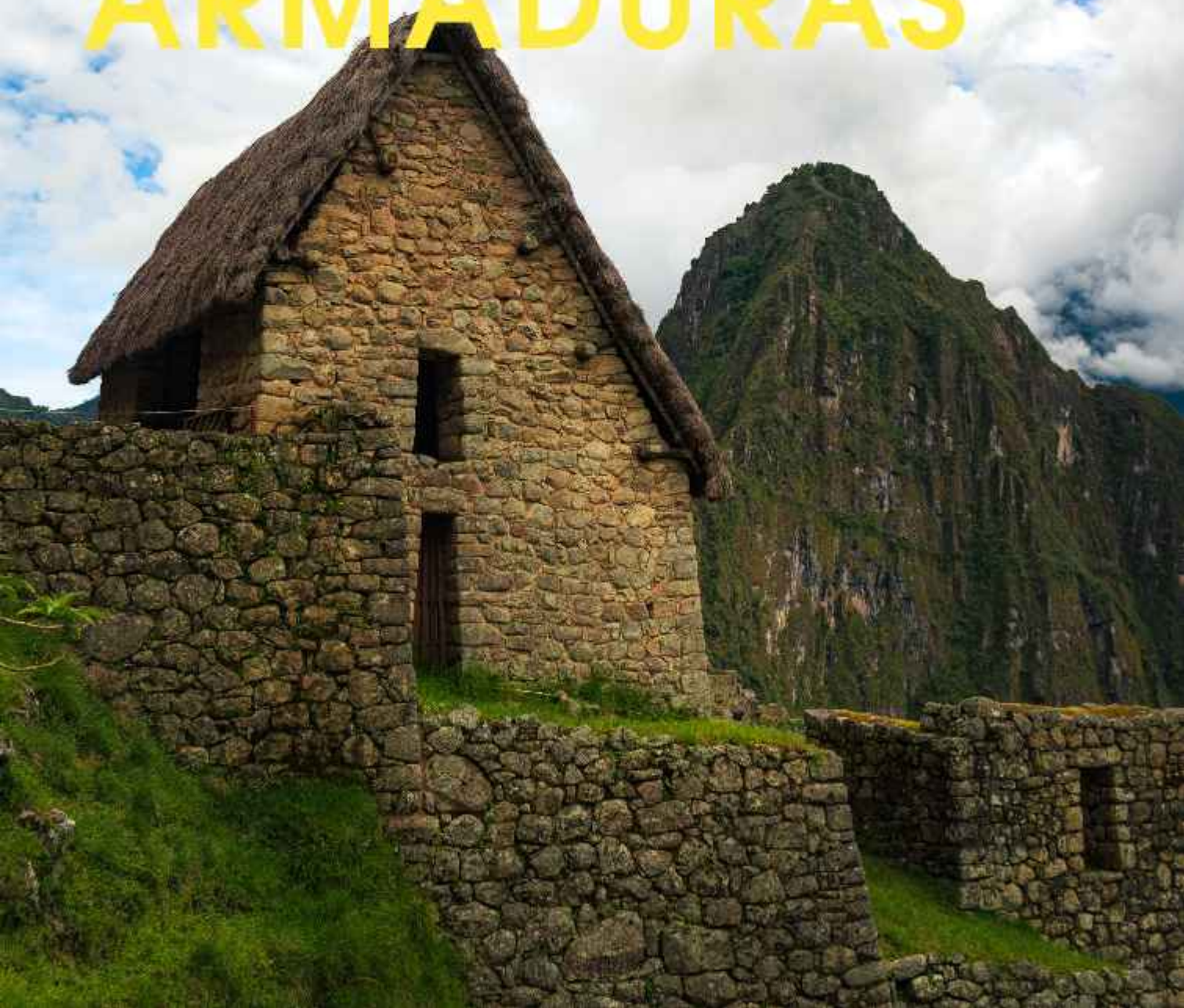


Figura 2.120

ANÁLISIS DE ARMADURAS

3



3

ANÁLISIS DE ARMADURAS

3.1. INTRODUCCIÓN

Las armaduras son estructuras de ingeniería que se encuentran en diversos ámbitos, desde puentes y grúas hasta edificios y torres de comunicación. Estas estructuras, compuestas por elementos rectos llamados miembros que se conectan en nodos, juegan un papel esencial en la infraestructura moderna. El análisis de armaduras es una disciplina crucial en la ingeniería civil y mecánica, y su comprensión es fundamental para el diseño y la evaluación de la integridad estructural.

El análisis de armaduras se basa en las leyes fundamentales de la física, en particular, las Leyes de Newton. Estas leyes establecen los principios de equilibrio y permiten comprender cómo las fuerzas se distribuyen dentro de una estructura. El método de los nodos es una técnica poderosa para analizar armaduras, ya que nos permite determinar las fuerzas internas en los miembros de la estructura y garantizar su estabilidad. En la ingeniería estructural a menudo se presentan problemas donde se deben determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura, implica calcular las fuerzas que mantienen unidas a las diversas partes del sistema estructural.

En este análisis, aplicamos tres leyes clave de Newton:

- **Primera Ley de Newton (Ley de la Inercia):** Un objeto en reposo permanecerá en reposo, y un objeto en movimiento continuará moviéndose a una velocidad constante en línea recta, a menos que una fuerza externa actúe sobre él. En el contexto de las armaduras, esto se traduce en que los nodos en equilibrio permanecerán en equilibrio a menos que se apliquen fuerzas externas.

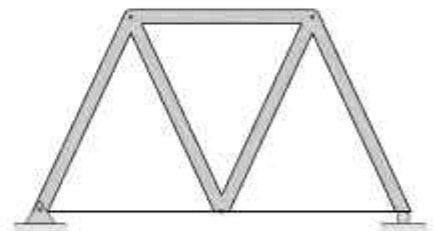


Figura 3.1: armadura básica para puentes

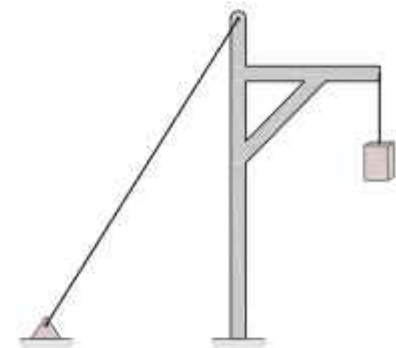


Figura 3.2: Armazón usado para levantar cargas

- **Segunda Ley de Newton (Ley de Fuerza y Aceleración):** La fuerza aplicada a un objeto es igual a la masa del objeto multiplicada por su aceleración. En el análisis de armaduras, esta ley se utiliza para relacionar las fuerzas en los miembros con las cargas aplicadas y las fuerzas en los nodos.
- **Tercera Ley de Newton (Ley de Acción y Reacción):** Por cada acción, hay una reacción igual y opuesta. En las armaduras, esta ley nos ayuda a comprender cómo las fuerzas se transmiten de un miembro a otro a través de los nodos.

El método de los nodos es un enfoque sistemático para resolver armaduras y determinar las fuerzas internas en sus miembros. Implica la aplicación de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada nodo, teniendo en cuenta que los miembros solo experimentan fuerzas axiales. Esta técnica proporciona una comprensión profunda de cómo se distribuyen las fuerzas dentro de la estructura y es esencial para garantizar la seguridad y eficiencia en el diseño de las armaduras.

A lo largo de este libro, exploraremos en detalle el proceso de análisis de armaduras, desde la identificación de nodos y la aplicación de las ecuaciones de equilibrio hasta la resolución de fuerzas internas en los miembros. También discutiremos métodos de solución, como el método de los nodos y el método de los desplazamientos, para abordar armaduras más complejas y comprender mejor su comportamiento. El análisis de armaduras es una disciplina fundamental en la ingeniería, y este libro te guiará a través de los conceptos esenciales para enfrentar con confianza los desafíos estructurales del mundo real.

Se considera tres categorías amplias de estructuras:

1. Estructuras de Marco (o Armazones): → Los marcos o armazones son estructuras compuestas por vigas, columnas y conexiones rígidas. Son comunes en edificios y otras estructuras, y pueden soportar tanto cargas verticales como horizontales. Los armazones se utilizan en construcciones de todo tipo y proporcionan estabilidad y resistencia a la estructura.

2. Estructuras de Armadura: → Las armaduras son estructuras compuestas por miembros (generalmente barras rectas) conectados en nodos. Estos miembros están dispuestos de manera que formen una red de triángulos u otras formas geométricas que proporcionan resistencia contra fuerzas de tracción y compresión. Las armaduras se utilizan comúnmente en puentes, grúas y torres de transmisión, donde la ligereza y la resistencia son esenciales.

3. Estructuras de Cáscara: → Las estructuras de cáscara se caracterizan por su forma curva o de cáscaras son efectivas para distribuir cargas a lo largo de su superficie. Ejemplos de estructuras de cáscara incluyen cascarones de conchas, domos geodésicos y estructuras de tipo paraboloide hiperbólico. Estas estructuras son conocidas por su eficiencia en la resistencia a fuerzas de compresión y su uso en arquitectura icónica.

Cada una de estas categorías de estructuras tiene aplicaciones específicas en la ingeniería y la arquitectura, y la elección entre ellas depende de las necesidades del proyecto, las cargas a las que estarán expuestas y otros factores de diseño. Las armaduras y armazones son dos subtipos importantes dentro de estas categorías, y se utilizan para abordar diferentes desafíos estructurales.

3.2. ARMADURAS EN EL PLANO

Una armadura, es un sistema estructural compuesto de miembros esbeltos unidos entre sí, en sus puntos extremos. Conformados así un sistema de cuerpo rígido. En el contexto de la ingeniería y la construcción, una “armadura en el plano” se refiere a una estructura plana que está compuesta por una red de miembros rectos (generalmente barras o vigas) conectados en nodos. Estos miembros y nodos están dispuestos de manera que forman una red de triángulos u otras formas geométricas en un único plano, como una superficie bidimensional.

Las armaduras en el plano se utilizan comúnmente en estructuras que deben soportar cargas en un solo plano, como puentes colgantes, techos, grúas y estructuras de soporte. La disposición de los miembros en forma de red ayuda a distribuir las cargas y resistir las fuerzas de tensión y compresión en una dirección particular, proporcionando estabilidad y eficiencia estructural.

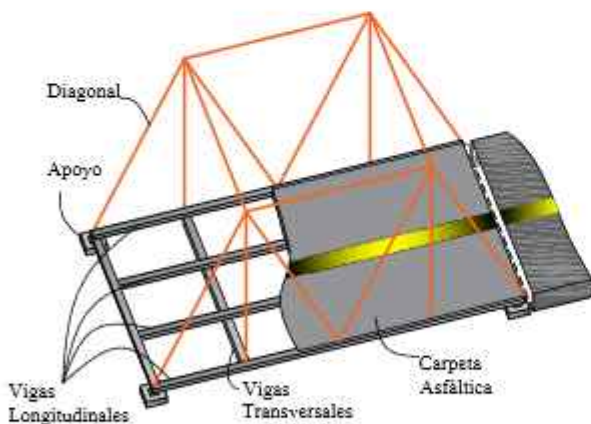


Figura 3.3: Uso de armaduras en estructuras metálicas - puentes

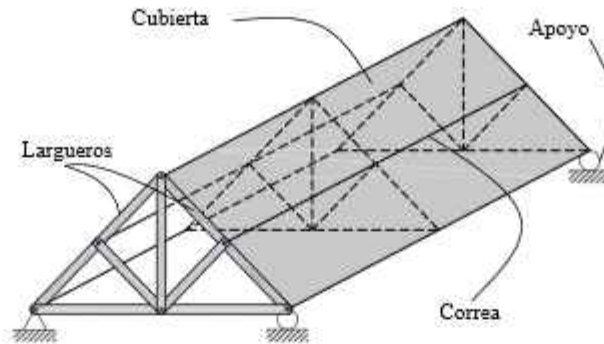


Figura 3.4: Uso de armaduras en estructuras metálicas - cubiertas

⇒ CONDICIONES DE ANÁLISIS

- Todas las cargas están aplicadas en los nodos.
- Los miembros están unidos entre si mediante pasadores lisos.



Figura 3.5: Proceso para el D.C.L

⇒ ESTABILIDAD EN ARMADURAS.

La estabilidad en el contexto de las armaduras se refiere a la capacidad de una armadura o estructura compuesta por miembros conectados en nodos para mantener su equilibrio y resistir las fuerzas que actúan sobre ella sin colapsar o volverse inestable. La estabilidad es un concepto fundamental en el diseño y análisis de armaduras, y se logra garantizando que las fuerzas internas en los miembros estén dentro de los límites de resistencia de los materiales.

La estabilidad en armaduras implica lo siguiente:

- Equilibrio:** La armadura debe estar en equilibrio, lo que significa que la suma de las fuerzas y momentos en todos los nodos debe ser igual a cero. Esto asegura que la estructura no se mueva ni gire bajo la influencia de las cargas aplicadas.

1. **Integridad estructural:** Los miembros de la armadura deben estar diseñados y construidos de manera que puedan soportar las cargas que actúan sobre ellos sin deformarse excesivamente o fallar. Esto implica tener en cuenta tanto la fuerza axial (tensión o compresión) como la resistencia a la flexión de los miembros.
2. **Distribución adecuada de fuerzas:** Las fuerzas internas en los miembros de la armadura deben distribuirse de manera uniforme y eficiente. Esto significa que los miembros deben estar diseñados y conectados de tal manera que las cargas se distribuyan a lo largo de la estructura de manera equilibrada.
3. **No deformación excesiva:** La deformación excesiva de los miembros o nodos de la armadura puede ser indicativa de inestabilidad. La estabilidad implica que la estructura puede resistir las cargas sin deformaciones inaceptables.

La estabilidad en armaduras es esencial para garantizar que la estructura pueda soportar de manera segura y eficaz las cargas a las que está expuesta. El análisis y diseño adecuados son cruciales para lograr esta estabilidad y prevenir posibles fallos estructurales.

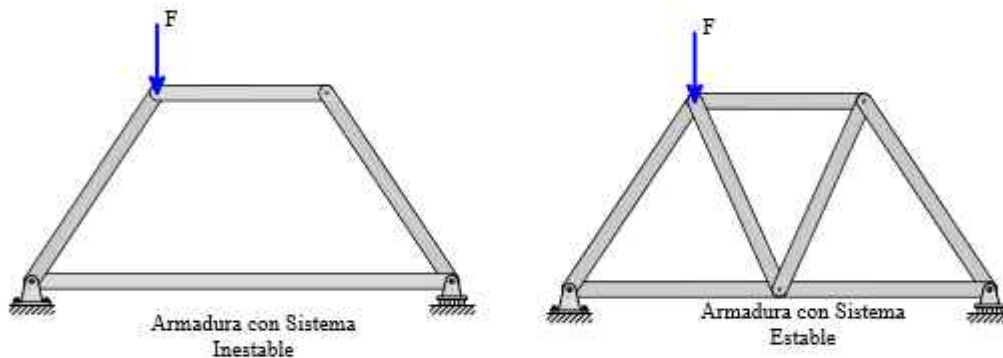


Figura 3.6: Forma básica para estabilizar una armadura

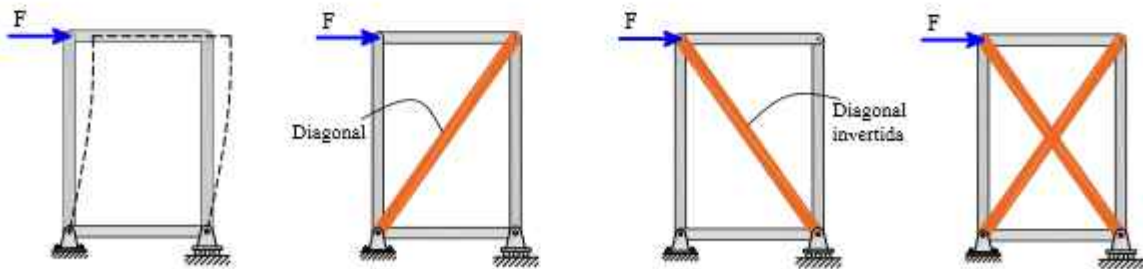


Figura 3.7: Formas de Estabilidad en un marco

Estas armaduras se analizan utilizando métodos como el método de los nodos y método de las secciones, que involucra el equilibrio de fuerzas en los nodos y permite determinar las fuerzas internas en los miembros. El diseño de armaduras en el plano es fundamental en la ingeniería civil y mecánica, y es especialmente útil cuando se requiere una estructura liviana pero resistente en un solo plano.

3.3. MÉTODO DE LOS NODOS

El método de los nodos es una técnica utilizada en el análisis estructural para determinar las fuerzas internas en los miembros de una armadura. Se basa en el equilibrio de fuerzas en los nodos de la armadura, considerando que las fuerzas en los miembros están sujetas a fuerzas axiales solamente. El método implica el uso de ecuaciones de equilibrio en los nodos para resolver las fuerzas desconocidas en cada miembro de la armadura, teniendo en cuenta las cargas externas aplicadas. Es especialmente útil para estructuras con forma de armadura, como puentes y estructuras de soporte, y se utiliza en ingeniería civil y mecánica.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS NODOS

El método de los nodos es un procedimiento para analizar estructuras tipo armadura, que son sistemas de barras conectadas en nodos. Aquí te muestro el procedimiento paso a paso junto con las ecuaciones clave:

- a) **Identificar los nodos:** Comienza por identificar todos los nodos de la armadura. Un nodo es un punto de conexión donde dos o más miembros se unen.
- b) **Etiquetar los nodos:** Etiqueta cada nodo con un número o una letra para facilitar la identificación.
- c) **Dibujar diagramas de cuerpo libre: (D.C.L)** Para una mejor comprensión de las fuerzas internas, puedes dibujar diagramas de cuerpo libre de los nodos y los miembros.
- d) **Aplicar cargas externas:** En cada nodo donde se apliquen cargas o momentos externos, anota estos valores y direcciones. Esto es crucial para el análisis.
- e) **Realizar el análisis de equilibrio:** En cada nodo, aplique las ecuaciones de equilibrio para encontrar las fuerzas internas en los miembros. Las ecuaciones de equilibrio son:
 - Sumatoria de fuerzas en dirección X: $\sum F_x = 0$
 - Sumatoria de fuerzas en dirección Y: $\sum F_y = 0$
 - Sumatoria de momentos en un punto (generalmente elegir uno de los nodos como punto de referencia, lo que simplifica las ecuaciones): $\sum M_o = 0$
- f) **Resolver las ecuaciones:** Con las ecuaciones de equilibrio, puedes resolver para las fuerzas en los miembros de la armadura. Dependiendo de la dirección de las fuerzas, los miembros pueden estar en tensión o compresión.

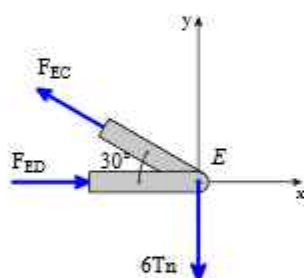
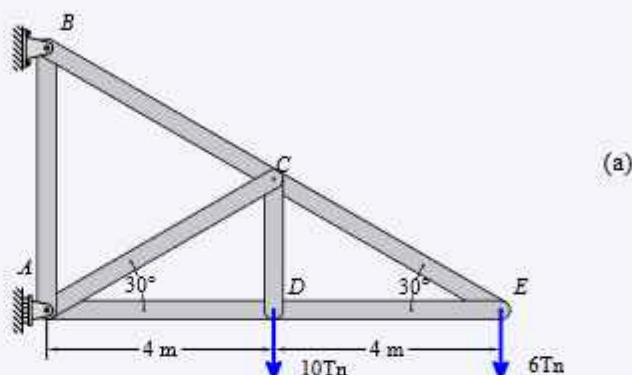
1. **Verificar condiciones de estabilidad:** Asegúrate de que la estructura sea estable verificando que todas las fuerzas estén dentro de los límites de resistencia de los materiales.
2. **Repita para todos los nodos:** Repite el proceso de análisis de equilibrio en cada nodo hasta que hayas encontrado todas las fuerzas internas en los miembros.

El método de los nodos se basa en la suposición de que los miembros solo experimentan fuerzas axiales (tensión o compresión), sin momentos. Esto es una simplificación válida para muchas estructuras de tipo armadura. Cabe mencionar que este método puede ser más complejo en estructuras tridimensionales o cuando se aplican cargas distribuidas. En esos casos, se deben considerar ecuaciones adicionales y métodos más avanzados.

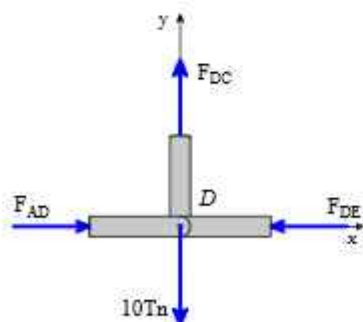
3.3.1. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.1

Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si los elementos de la armadura están en tensión o compresión.



(b)



(c)

Paso ①: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio (El sistema no requiere el cálculo de reacciones ya que podemos iniciar por el nodo "E" porque existe dos fuerzas desconocidas.)

Paso ②: Determinamos las fuerzas en los elementos.

Nodo E: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.8 (b), supongamos F_{EC} en tensión y F_{DE} en compresión.

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad F_{EC} \cdot \sin(30^\circ) - 6 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{EC} = \frac{6 \text{ Tn}}{\sin(30^\circ)} = 12.00 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad F_{DE} - F_{EC} \cdot \cos(30^\circ) = 0$$

$$F_{DE} = F_{EC} \cdot \cos(30^\circ) = 10.39 \text{ Tn} \quad (C)$$

Nodo D: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.8 (c), supongamos F_{DC} en tensión y F_{AD} en compresión.

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad F_{AD} - F_{DE} = 0$$

$$F_{AD} = F_{DE} = 10.39 \text{ Tn} \quad (C)$$

CONTINUACIÓN

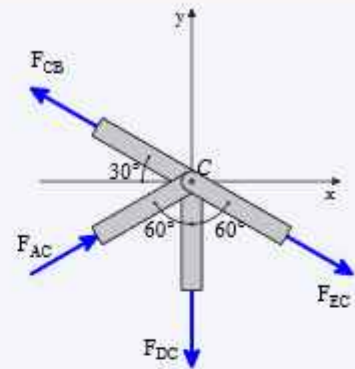
$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad F_{DC} - 10 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{DC} = 10 \text{ Tn} \quad (T)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.8 (d), supongamos F_{CB} en tensión y F_{AC} en compresión.

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad -F_{CB} \cdot \cos(30^\circ) + F_{AC} \cdot \sin(60^\circ) + F_{EC} \cdot \sin(60^\circ) = 0$$

$$F_{AC} \cdot \sin(60^\circ) - F_{CB} \cdot \cos(30^\circ) = -F_{EC} \cdot \sin(60^\circ)$$



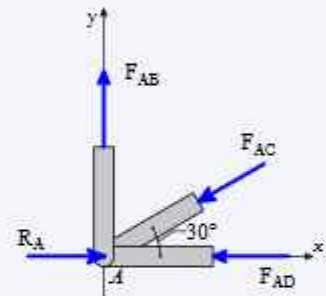
(d)

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad F_{CB} \cdot \sin(30^\circ) + F_{AC} \cdot \cos(60^\circ) - F_{DC} - F_{EC} \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$F_{CB} \cdot \sin(30^\circ) + F_{AC} \cdot \cos(60^\circ) = F_{DC} + F_{EC} \cdot \cos(60^\circ)$$

$$A := \begin{bmatrix} \sin(60^\circ) & -\cos(30^\circ) \\ \cos(60^\circ) & \sin(30^\circ) \end{bmatrix} \quad u := \begin{bmatrix} -F_{EC} \cdot \sin(60^\circ) \\ F_{DC} + F_{EC} \cdot \cos(60^\circ) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{AC} \\ F_{CB} \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot u = \begin{bmatrix} 10 \\ 22 \end{bmatrix} \text{ Tn} \quad (C)$$



(e)

Nodo A: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.8 (e), supongamos F_{AB} en tensión.

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad F_{AB} - F_{AC} \cdot \sin(30^\circ) = 0$$

$$F_{AB} = F_{AC} \cdot \sin(30^\circ) = 5.00 \text{ Tn}$$

$$F_{EC} = 12 \text{ Tn}$$

$$F_{DE} = 10.39 \text{ Tn}$$

$$F_{AD} = 10.39 \text{ Tn}$$

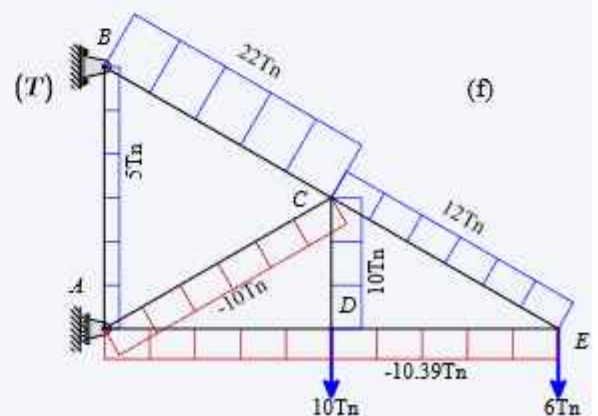
$$F_{DC} = 10 \text{ Tn}$$

$$F_{AC} = 10 \text{ Tn}$$

$$F_{CB} = 22 \text{ Tn}$$

$$F_{AB} = 5 \text{ Tn}$$

Respuesta

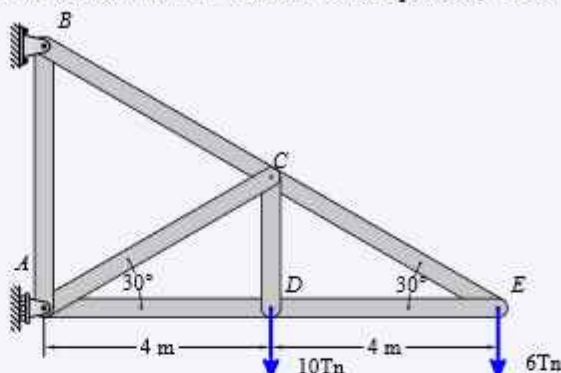
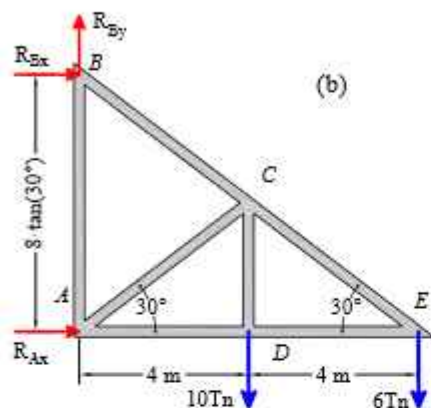


(f)

Figura 3.8

EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.2

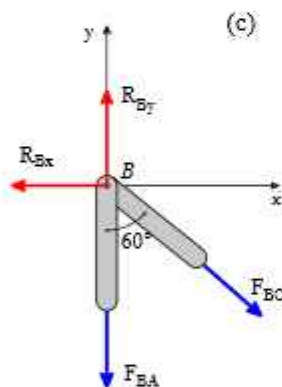
Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si se encuentran en tensión o compresión, de la siguiente armadura.



(a)

Paso ①: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) figura 3.9 (b).

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio.



(c)

$$\sum F_y = 0; \quad R_{By} - 10 \text{ Tn} - 6 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{By} = 10 \text{ Tn} + 6 \text{ Tn} = 16 \text{ Tn}$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_{Ax} (8 \text{ m} \cdot \tan(30^\circ)) - 10 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} - 6 \text{ Tn} \cdot 8 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ax} = \frac{10 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} + 6 \text{ Tn} \cdot 8 \text{ m}}{8 \text{ m} \cdot \tan(30^\circ)} = 19.053 \text{ Tn}$$

$$\sum F_x = 0; \quad R_{Bx} + R_{Ax} = 0 \quad R_{Bx} = -R_{Ax} = -19.053 \text{ Tn}$$

Paso ③: Determinamos las fuerzas en los elementos

Nodo B: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.9 (c).

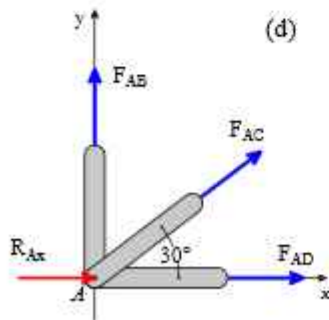
$$\sum F_x = 0; \quad -R_{Bx} + F_{BC} \cdot \sin(60^\circ) = 0$$

$$F_{BC} = \frac{R_{Bx}}{\sin(60^\circ)} = 22.000 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$\sum F_y = 0; \quad R_{By} - F_{BC} \cdot \cos(60^\circ) - F_{BA} = 0$$

$$F_{BA} = R_{By} - F_{BC} \cdot \cos(60^\circ) = 5.000 \text{ Tn} \quad (T)$$

Nodo A: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.9 (d).



(d)

CONTINUACIÓN

$$\sum Fy = 0 ; F_{AB} + F_{AC} \cdot \sin(30^\circ) = 0$$

$$F_{AC} = \frac{-F_{BA}}{\sin(30^\circ)} = -10.000 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum Fx = 0 ; R_{Ax} + F_{AD} + F_{AC} \cdot \cos(30^\circ) = 0$$

$$F_{AD} = -R_{Ax} - F_{AC} \cdot \cos(30^\circ) = -10.392 \text{ Tn} \quad (C)$$

Nodo D: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.9 (e).

$$\sum Fx = 0 ; F_{DE} + F_{DA} = 0 \quad F_{DE} = -F_{AD} = 10.392 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum Fy = 0 ; F_{DC} - 10 \text{ Tn} = 0 \quad F_{DC} = 10 \text{ Tn} \quad (T)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.9 (f).

$$\sum Fx = 0 ; -F_{BC} \cdot \cos(30^\circ) + F_{AC} \sin(60^\circ) + F_{CE} \cdot \sin(60^\circ) = 0$$

$$F_{CE} = \frac{F_{BC} \cdot \cos(30^\circ) - F_{AC} \sin(60^\circ)}{\sin(60^\circ)}$$

$$F_{CE} = 12.000 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$\sum Fy = 0 ; F_{BC} \cdot \sin(30^\circ) + F_{DC} \cdot \cos(60^\circ) - 10 \text{ Tn} - F_{CE} \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$F_{CE} = \frac{F_{BC} \cdot \sin(30^\circ) + F_{DC} \cdot \cos(60^\circ) - 10 \text{ Tn}}{\cos(60^\circ)}$$

$$F_{CE} = 12.000 \text{ Tn}$$

Comprobamos resultados con el nodo "E", figura 3.9 (g).

$$\sum Fx = 0 ; F_{CE} \cdot \sin(30^\circ) - 6 \text{ Tn} = 0 \text{ Tn} \quad \text{OK!}$$

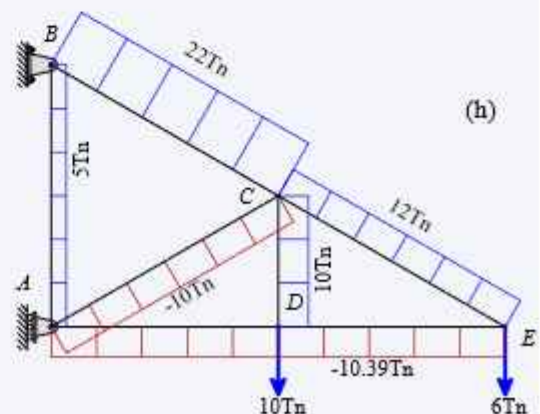
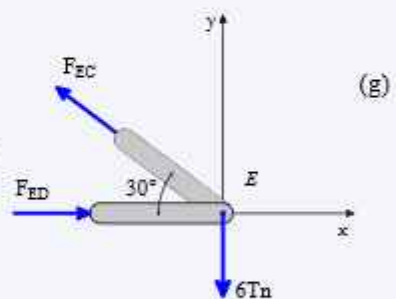
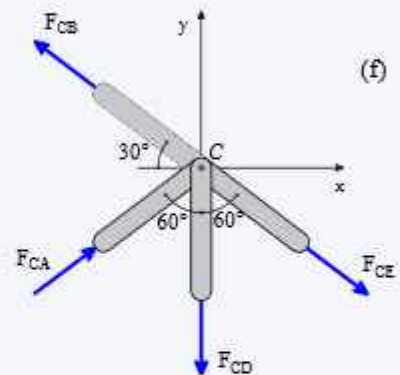
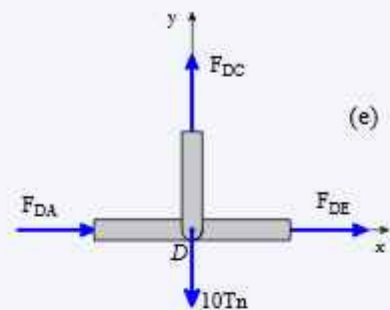
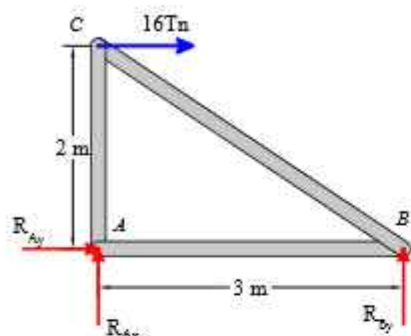


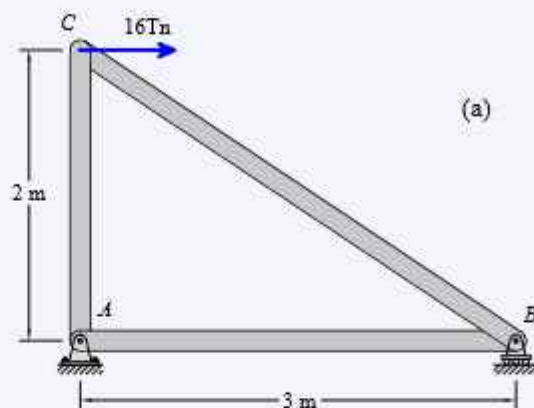
Figura 3.9

EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.3

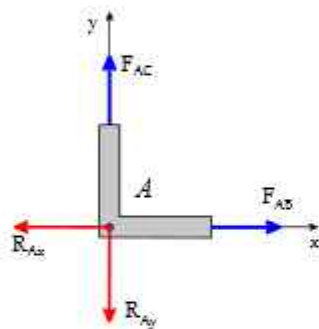
Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si están en tensión o compresión de la siguiente armadura.



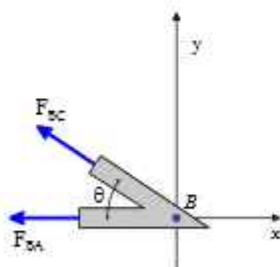
(b)



(a)



(c)



(d)

Paso ①: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) figura 3.10 (b).

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio.

$$\sum M_A = 0 ; R_{By}(3 \text{ m}) - 16 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$R_{By} := \frac{16 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 10.667 \text{ Tn}$$

$$\sum F_x = 0 ; -R_{Ax} + 16 \text{ Tn} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 16 \text{ Tn}$$

$$\sum F_y = 0 ; -R_{Ay} + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = R_{By} = 10.667 \text{ Tn}$$

Paso ③: Determinamos las fuerzas en los elementos:

- Nota: El sistema se puede resolver sin haber calculado las reacciones en los apoyos, empezando por el nodo "C".
- Empezaremos a resolver por el nodo "A"

Nodo A: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.10 (c).

$$\sum F_x = 0 ; F_{AB} - R_{Ax} = 0 \Rightarrow F_{AB} := R_{Ax} = 16 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$\sum F_y = 0 ; F_{AC} - R_{Ay} = 0 \Rightarrow F_{AC} := R_{Ay} = 10.667 \text{ Tn} \quad (T)$$

Nodo B: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.10 (d).

$$\tan(\theta) := \frac{2 \text{ m}}{3 \text{ m}} \quad \theta := \text{atan}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69^\circ$$

CONTINUACIÓN

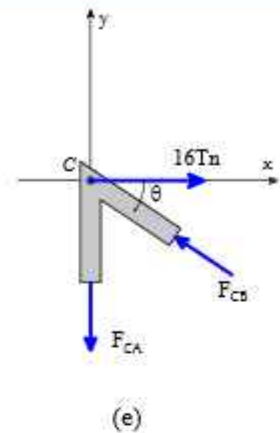
$$\sum F_x = 0 ; -F_{BA} - F_{BC} \cdot \cos(\theta) = 0$$

$$F_{BC} = \frac{-F_{BA}}{\cos(\theta)} = -19.23 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum F_y = 0 ; R_{By} + F_{BC} \cdot \sin(\theta) = 0$$

$$F_{BC} = \frac{-R_{By}}{\sin(\theta)} = -19.23 \text{ Tn} \quad (C)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.10 (e), para comprobar resultados.



$$\sum F_x = 0 ; 16 \text{ Tn} - F_{BC} \cdot \cos(\theta) = 0 = 0 \quad \text{ok!}$$

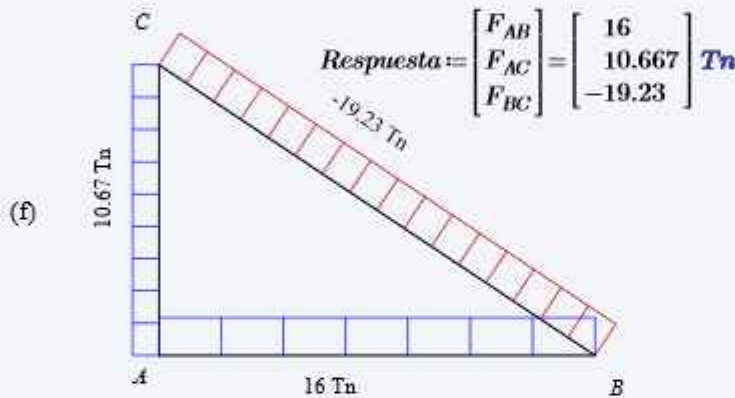
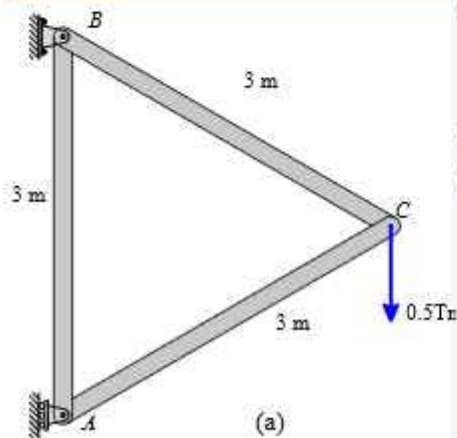


Figura 3.10

EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.4



Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si están en tensión o compresión de la siguiente armadura

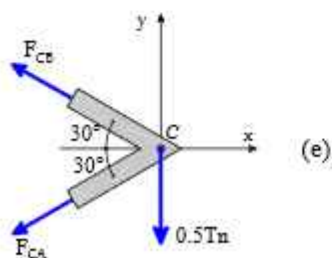
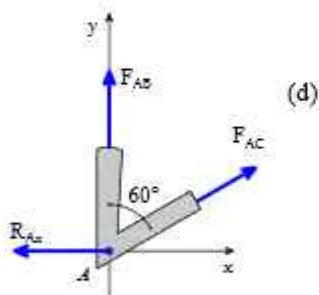
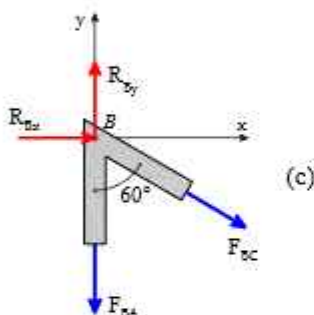
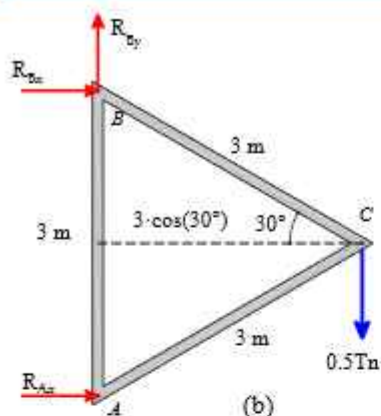
Paso ①: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) figura 3.11 (b).

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio:

$$\sum M_B = 0 ; R_{Ax} \cdot 3 \text{ m} - 0.5 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} \cdot \cos(30^\circ) = 0$$

$$R_{Ax} = \frac{0.5 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} \cdot \cos(30^\circ)}{3 \text{ m}} = 0.433 \text{ Tn}$$

CONTINUACIÓN



$$\begin{aligned}\sum F_x = 0; R_{Ax} - R_{Bx} = 0 &\Rightarrow R_{Bx} = R_{Ax} = 0.433 \text{ Tn} \\ \sum F_y = 0; R_{By} - 0.5 \text{ Tn} = 0 &\Rightarrow R_{By} = 0.5 \text{ Tn}\end{aligned}$$

Paso ③: Determinamos las fuerzas en los elementos

- Nota: El sistema se puede resolver sin haber calculado las reacciones en los apoyos, empezando por el nodo "C".
- Empezaremos a resolver por el nodo "B"

Nodo B: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.11 (c).

$$\sum F_x = 0; F_{BC} \cdot \sin(60^\circ) - R_{Bx} = 0$$

$$F_{BC} := \frac{R_{Bx}}{\sin(60^\circ)} = 0.5 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$\sum F_y = 0; R_{By} - F_{BA} - F_{BC} \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$F_{BA} := R_{By} - F_{BC} \cdot \cos(60^\circ) = 0.25 \text{ Tn} \quad (T)$$

Nodo A: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.11 (d).

$$\sum F_x = 0; R_{Ax} + F_{AC} \cdot \sin(60^\circ) = 0$$

$$F_{AC} := \frac{-R_{Ax}}{\sin(60^\circ)} = -0.5 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum F_y = 0; F_{AB} + F_{AC} \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$F_{AC} := \frac{-F_{BA}}{\cos(60^\circ)} = -0.5 \text{ Tn} \quad (C)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.11 (e), para comprobación.

$$\sum F_y = 0; -F_{AC} \sin(30^\circ) + F_{BC} \sin(30^\circ) = 0.5 \text{ Tn}$$

$$0.5 \text{ Tn} = 0.5 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$

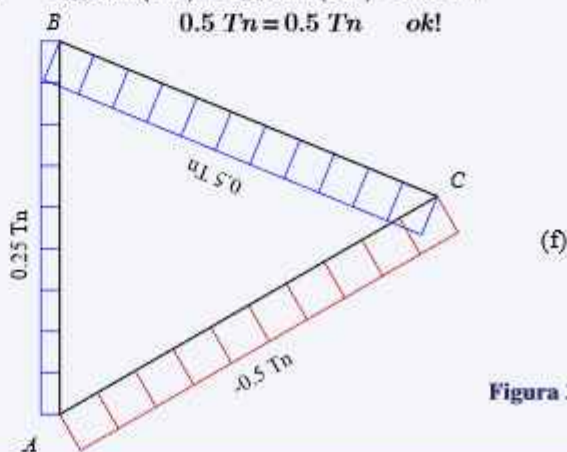
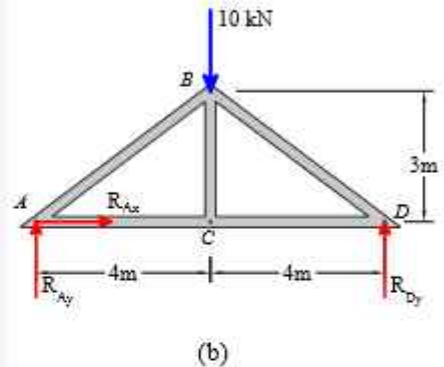
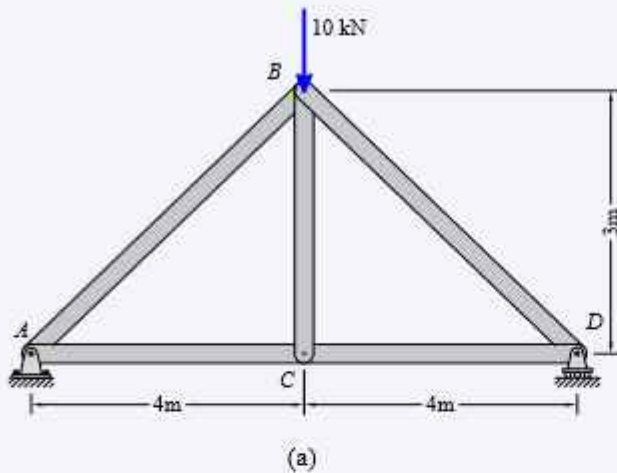


Figura 3.11

Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si están en tensión o compresión de la siguiente armadura.

EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.5



Paso ①: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) figura 3.12 (b).

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio.

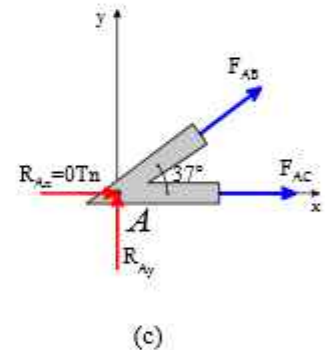
$$\sum M_A = 0 ; R_{Dy} (8 \text{ m}) - 10 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{10 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 ; R_{Ax} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 ; R_{Ay} + R_{Dy} - 10 \text{ kN} = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{Dy} + 10 \text{ kN} = 5 \text{ kN}$$



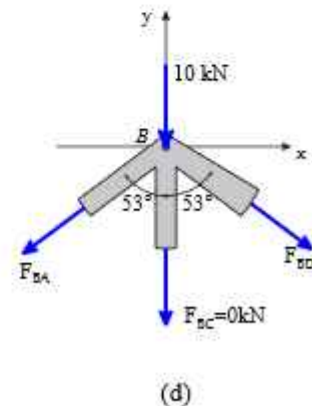
Paso ③: Determinamos las fuerzas en los elementos

- Nota: El sistema se puede resolver sin haber calculado las reacciones en los apoyos, empezando por el nodo "B", ya que la fuerza BC es cero.
- Empezaremos a resolver por el nodo "A"

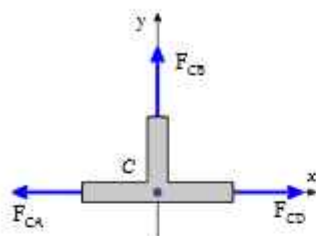
Nodo A: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.12 (c).

$$\sum F_y = 0 ; R_{Ay} + F_{AB} \cdot \sin(37^\circ) = 0$$

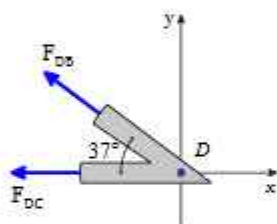
$$F_{AB} = \frac{-R_{Ay}}{\sin(37^\circ)} = -8.308 \text{ kN} \quad (C)$$



CONTINUACIÓN



(e)



(f)

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0; \quad F_{AC} + F_{AB} \cdot \cos(37^\circ) &= 0 \\ F_{AC} &= -F_{AB} \cdot \cos(37^\circ) = 6.635 \text{ kN} \quad (T)\end{aligned}$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.12 (d).

$$\sum F_x = 0; \quad F_{CD} - F_{CA} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD} = F_{AC} = 6.635 \text{ kN} \quad (T)$$

$$\sum F_y = 0; \quad F_{CB} = 0$$

Nodo D: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.12 (e).

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0; \quad -F_{DB} \cdot \cos(37^\circ) - F_{DC} &= 0 \\ F_{DB} &= -\frac{F_{CD}}{\cos(37^\circ)} = -8.308 \text{ kN} \quad (C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0; \quad F_{DB} \cdot \sin(37^\circ) + R_{Dy} &= 0 \\ F_{DB} &= \frac{-R_{Dy}}{\sin(37^\circ)} = -8.308 \text{ kN} \quad (C)\end{aligned}$$

Nodo B: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.12 (f), para comprobación.

$$\sum F_y = 0; \quad F_{BA} \cdot \cos(53^\circ) + F_{BD} \cdot \cos(53^\circ) = 10 \text{ kN}$$

$$10 \text{ kN} = 10 \text{ kN} \quad \text{ok!}$$

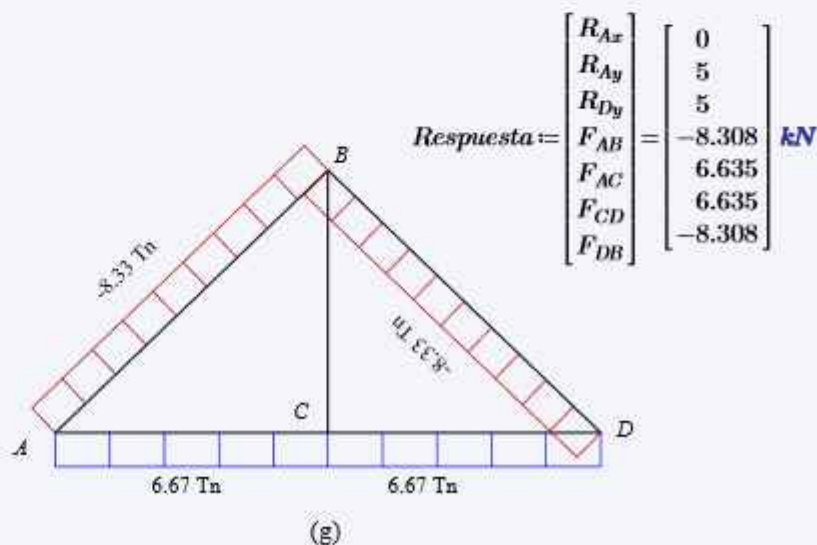
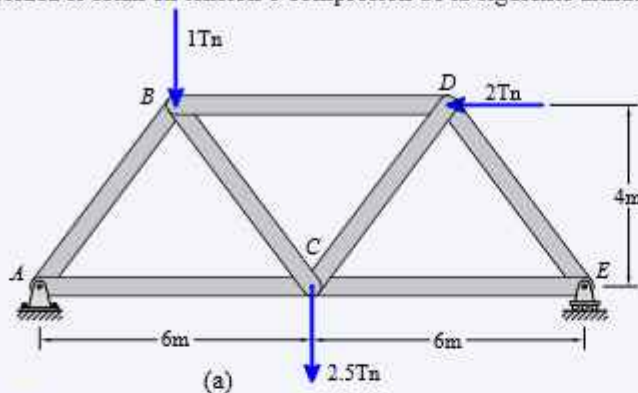


Figura 3.12

Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si están en tensión o compresión de la siguiente armadura.



EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.6

Paso ①: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) figura 3.13 (b).

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio.

$$\sum M_A = 0 ; 2 Tn \cdot 4 m + R_{Ey} \cdot 12 m - 1 Tn \cdot 3 m - 2.5 Tn \cdot 6 m = 0$$

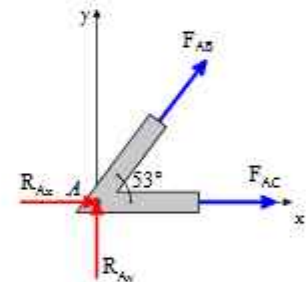
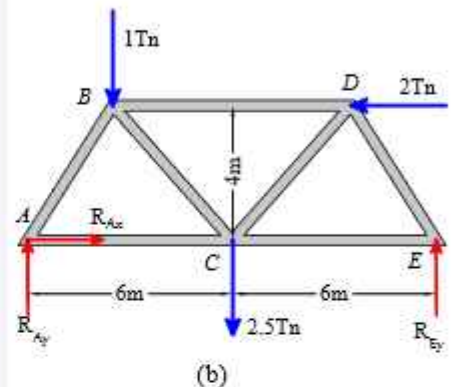
$$R_{Ey} := \frac{-2 Tn \cdot 4 m + 1 Tn \cdot 3 m + 2.5 Tn \cdot 6 m}{12 m}$$

$$R_{Ey} = 0.833 Tn$$

$$\sum Fx = 0 ; R_{Ax} - 2 Tn = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 2 Tn$$

$$\sum Fy = 0 ; R_{Ay} + R_{Ey} - 2.5 Tn - 1 Tn = 0$$

$$R_{Ay} := -R_{Ey} + 2.5 Tn + 1 Tn = 2.667 Tn$$



Paso ③: Determinamos las fuerzas en los elementos Empezaremos a resolver por el nodo "A"

Nodo A: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.13 (c).

$$\sum Fy = 0 ; R_{Ay} + F_{AB} \cdot \sin(53^\circ) = 0$$

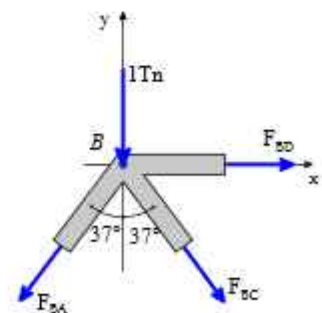
$$F_{AB} := \frac{-R_{Ay}}{\sin(53^\circ)} = -3.339 Tn$$

(C)

$$\sum Fx = 0 ; R_{Ax} + F_{AC} + F_{AB} \cdot \cos(53^\circ) = 0$$

$$F_{AC} := -F_{AB} \cdot \cos(53^\circ) - R_{Ax} = 0 Tn$$

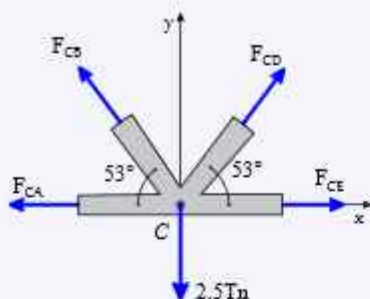
$$F_{AC} = 0 Tn$$



(d)

Nodo B: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.13 (d).

CONTINUACIÓN



$$\sum F_y = 0 ; -1 Tn + F_{BA} \cdot \cos(37^\circ) - F_{BC} \cdot \cos(37^\circ) = 0$$

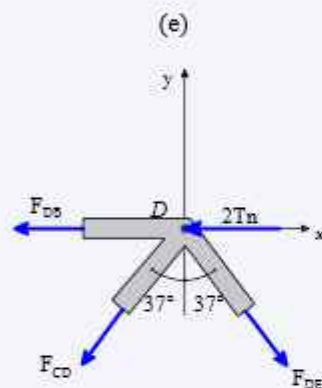
$$F_{BC} := \frac{-1 Tn + F_{BA} \cdot \cos(37^\circ)}{\cos(37^\circ)} = 2.087 Tn \quad (T)$$

$$\sum F_x = 0 ; F_{BA} \cdot \sin(37^\circ) + F_{BC} \cdot \sin(37^\circ) + F_{BD} = 0$$

$$F_{BD} := -F_{BA} \cdot \sin(37^\circ) - F_{BC} \cdot \sin(37^\circ)$$

$$F_{BD} = -3.265 Tn \quad (C)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.13 (c).



$$\sum F_y = 0 ; F_{CB} \cdot \sin(53^\circ) + F_{CD} \cdot \sin(53^\circ) - 2.5 Tn = 0$$

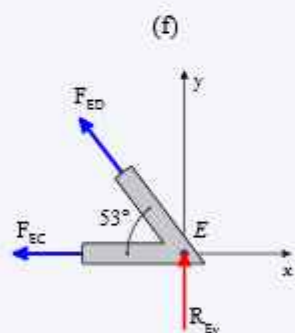
$$F_{CD} := \frac{-F_{BC} \cdot \sin(53^\circ) + 2.5 Tn}{\sin(53^\circ)} = 1.043 Tn \quad (T)$$

$$\sum F_x = 0 ; -F_{AC} - F_{CB} \cdot \cos(53^\circ) + F_{CE} + F_{CD} \cdot \cos(53^\circ) = 0$$

$$F_{CE} := F_{AC} + F_{BC} \cdot \cos(53^\circ) - F_{CD} \cdot \cos(53^\circ)$$

$$F_{CE} = 0.628 Tn \quad (T)$$

Nodo E: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.13 (f).



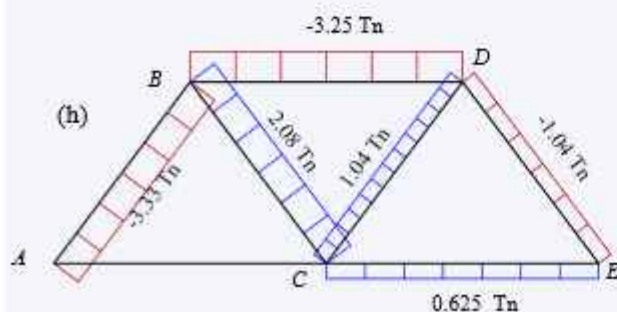
$$\sum F_y = 0 ; F_{ED} \cdot \sin(53^\circ) - R_{E_y} = 0$$

$$F_{ED} := \frac{R_{E_y}}{\sin(53^\circ)} = 1.043 Tn \quad (C)$$

$$\sum F_x = 0 ; F_{EC} - F_{ED} \cdot \cos(53^\circ) = 0$$

$$F_{EC} := F_{ED} \cdot \cos(53^\circ) = 0.628 Tn \quad (T)$$

Nodo D: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.13 (g), para comprobación



$$\sum F_x = 0 ;$$

$$F_{DB} - 2 Tn - F_{DC} \cdot \sin(37^\circ) + F_{DE} \cdot \sin(37^\circ) = 0$$

$$F_{BD} - 2 Tn - F_{CD} \cdot \sin(37^\circ) - F_{ED} \cdot \sin(37^\circ) = 0 Tn \quad ok$$

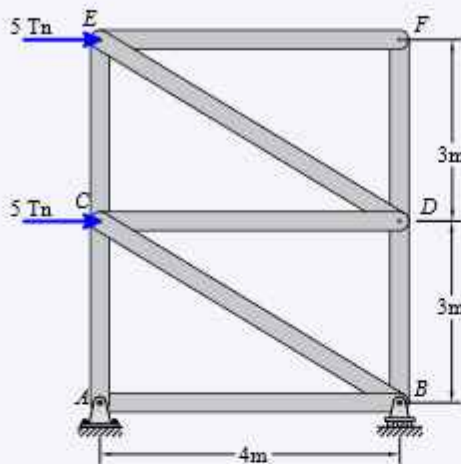
$$\sum F_y = 0 ;$$

$$F_{CD} \cdot \cos(53^\circ) - F_{DE} \cdot \cos(53^\circ) = 0$$

$$F_{CD} \cdot \cos(53^\circ) - F_{ED} \cdot \cos(53^\circ) = 0 Tn \quad ok$$

Figura 3.13

Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si están en tensión o compresión de la siguiente armadura.



(a)

Paso ①: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) figura 3.14 (b)

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio

$$\sum M_A = 0 ; R_{By} \cdot 4 \text{ m} - 5 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} - 5 \text{ Tn} \cdot 6 \text{ m} = 0$$

$$R_{By} = \frac{5 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} + 5 \text{ Tn} \cdot 6 \text{ m}}{4 \text{ m}} = 11.25 \text{ Tn}$$

$$\sum F_x = 0 ; -R_{Ax} + 5 \text{ Tn} + 5 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ax} = 5 \text{ Tn} + 5 \text{ Tn} = 10 \text{ Tn}$$

$$\sum F_y = 0 ; -R_{Ay} + R_{By} = 0 \quad R_{Ay} = R_{By} = 11.25 \text{ Tn}$$

Paso ③: Determinamos las fuerzas en los elementos

Empezaremos a resolver por el nodo "A"

Nodo A: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.14 (c).

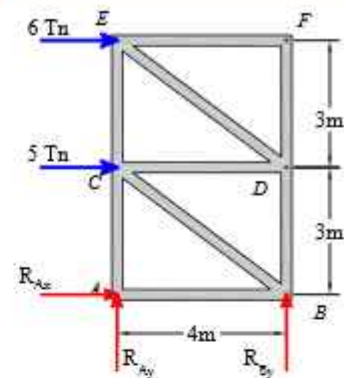
$$\sum F_x = 0 ; -R_{Ax} + F_{AB} = 0 \quad F_{AB} = R_{Ax} = 10 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$\sum F_y = 0 ; -R_{Ay} + F_{AC} = 0 \quad F_{AC} = R_{Ay} = 11.25 \text{ Tn} \quad (T)$$

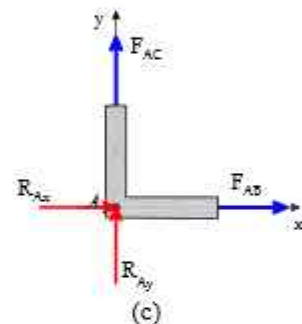
Nodo B: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.14 (d).

$$\sum F_x = 0 ; -F_{BA} - F_{BC} \cdot \cos(37^\circ) = 0$$

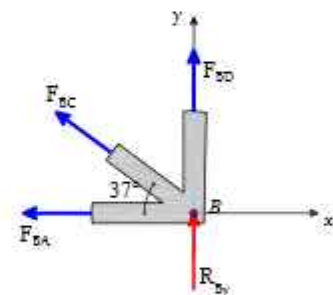
EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.7



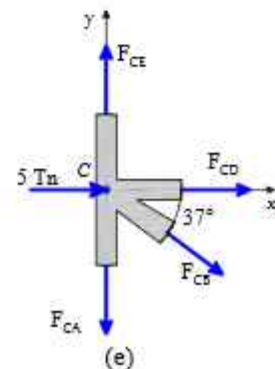
(b)



(c)



(d)



(e)

CONTINUACIÓN

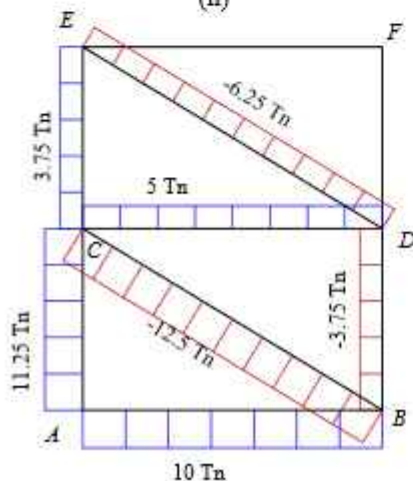
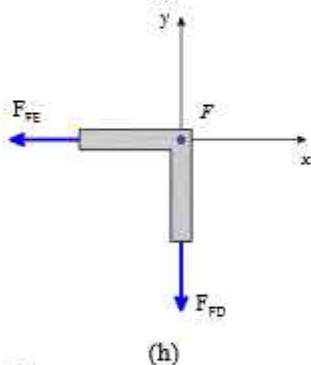
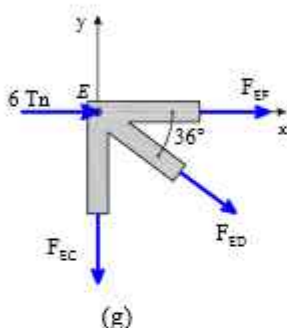
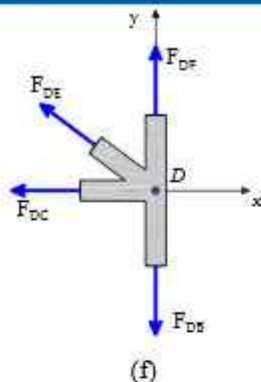


Figura 3.14 (i)

$$F_{BC} := \frac{-F_{AB}}{\cos(37^\circ)} = -12.521 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum F_y = 0; \quad R_{By} + F_{BC} \cdot \sin(37^\circ) + F_{BD} = 0$$

$$F_{BD} := -R_{By} - F_{BC} \cdot \sin(37^\circ) = -3.714 \text{ Tn} \quad (C)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.14 (e).

$$\sum F_x = 0; \quad F_{CD} + 5 \text{ Tn} - F_{CB} \cdot \cos(37^\circ) = 0$$

$$F_{CD} := -5 \text{ Tn} + F_{BC} \cdot \cos(37^\circ) = 5 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$\sum F_y = 0; \quad F_{CE} + F_{CB} \cdot \sin(37^\circ) - F_{CA} = 0$$

$$F_{CE} := -F_{BC} \cdot \sin(37^\circ) + F_{AC} = 3.714 \text{ Tn} \quad (T)$$

Nodo D: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.14 (f).

$$\sum F_x = 0; \quad -F_{DC} - F_{DE} \cdot \cos(37^\circ) = 0$$

$$F_{DE} := \frac{-F_{CD}}{\cos(37^\circ)} = -6.261 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum F_y = 0; \quad F_{DF} + F_{DB} + F_{DE} \cdot \sin(37^\circ) = 0$$

$$F_{DF} := -F_{BD} - F_{DE} \cdot \sin(37^\circ) = 0 \text{ Tn}$$

Nodo E: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.14 (g).

$$\sum F_x = 0; \quad F_{EF} + 5 \text{ Tn} - F_{ED} \cdot \cos(37^\circ) = 0$$

$$F_{EF} := -5 \text{ Tn} + F_{DE} \cdot \cos(37^\circ) = 0 \text{ Tn}$$

$$\sum F_y = 0; \quad F_{DE} \sin(37^\circ) - F_{EC} = 0$$

$$F_{DE} \sin(37^\circ) - F_{CE} = 0 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$

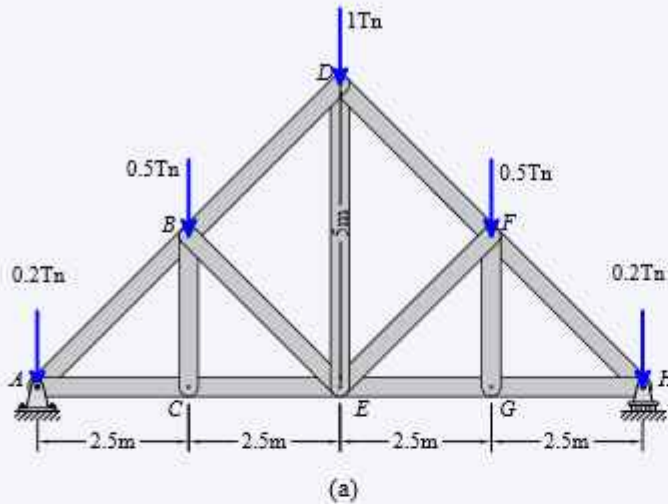
Nodo F: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.14 (h).

$$\sum F_x = 0; \quad F_{EF} = 0 \quad F_{EF} = 0 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_y = 0; \quad F_{FD} = 0 \quad F_{DF} = 0 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$

EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.8

Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si están en tensión o compresión de la siguiente armadura.



Paso ①: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) figura 3.15 (b)

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio

$$\sum M_A = 0 ;$$

$$R_{Hy} \cdot 10 \text{ m} - 0.5 \text{ Tn} \cdot 2.5 \text{ m} - 1 \text{ Tn} \cdot 5 \text{ m} - 0.5 \text{ Tn} \cdot 7.5 \text{ m} - 0.2 \text{ Tn} \cdot 10 \text{ m} = 0$$

$$R_{Hy} = \frac{0.5 \text{ Tn} \cdot 2.5 \text{ m} + 1 \text{ Tn} \cdot 5 \text{ m} + 0.5 \text{ Tn} \cdot 7.5 \text{ m} + 0.2 \text{ Tn} \cdot 10 \text{ m}}{10 \text{ m}}$$

$$R_{Hy} = 1.2 \text{ Tn}$$

$$\sum F_y = 0 ; -R_{Ay} - R_{Hy} + 0.2 \text{ Tn} + 0.5 \text{ Tn} + 0.5 \text{ Tn} + 0.2 \text{ Tn} + 1 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{Hy} + 0.2 \text{ Tn} + 0.5 \text{ Tn} + 0.5 \text{ Tn} + 0.2 \text{ Tn} + 1 \text{ Tn}$$

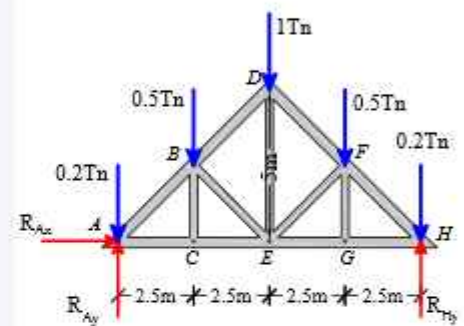
$$R_{Ay} = 1.2 \text{ Tn}$$

$$\sum F_x = 0 ; R_{Ax} = 0 \quad = \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

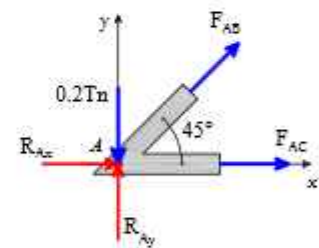
Paso ③: Determinamos las fuerzas en los elementos
Empezaremos a resolver por el nodo "A"

Nodo A: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.15 (c).

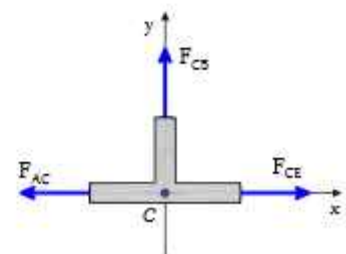
$$\sum F_y = 0 ; F_{AB} \cdot \sin(45^\circ) + R_{Ay} - 0.2 \text{ Tn} = 0$$



(b)

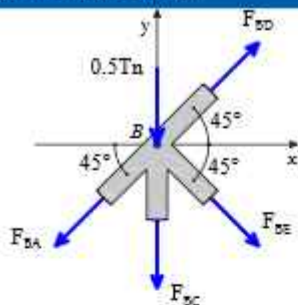


(c)

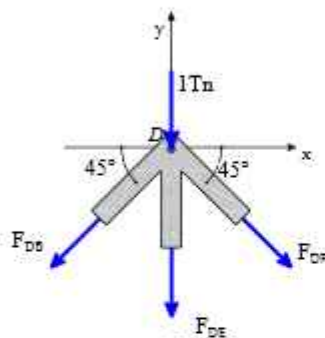


(d)

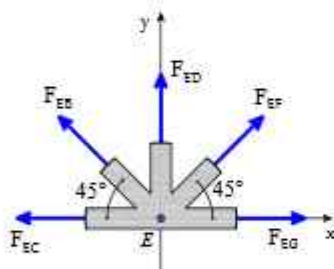
CONTINUACIÓN



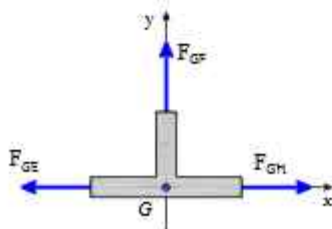
(e)



(f)



(g)



(h)

$$F_{AB} := \frac{-R_{Ay} + 0.2 \text{ Tn}}{\sin(45^\circ)} = -1.414 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & F_{AC} + F_{AB} \cdot \cos(45^\circ) + R_{Ax} = 0 \\ F_{AC} := & -F_{AB} \cdot \cos(45^\circ) + R_{Ax} = 1 \text{ Tn} \end{aligned} \quad (T)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.15 (d).

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & F_{CE} - F_{CA} = 0 & F_{CE} := F_{AC} = 1 \text{ Tn} \\ \sum F_y = 0; & F_{CB} = 0 & F_{CB} := 0 \text{ Tn} \end{aligned} \quad (T)$$

Nodo B: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.15 (e).

$$\sum F_x = 0; F_{BD} \cdot \cos(45^\circ) + F_{BE} \cdot \cos(45^\circ) + F_{BA} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$F_{BD} + F_{BE} = -(F_{AB}) \quad \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0; F_{BD} \cdot \sin(45^\circ) - F_{BE} \cdot \sin(45^\circ) + F_{AB} \cdot \sin(45^\circ) - 0.5 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{BD} - F_{BE} = \frac{0.5 \text{ Tn} - F_{AB} \cdot \sin(45^\circ)}{\sin(45^\circ)} \quad \dots (2)$$

De (1) y (2) tenemos:

$$F_{BD} = -1.061 \text{ Tn} \quad (C) \quad F_{BE} = -0.354 \text{ Tn} \quad (C)$$

Nodo D: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.15 (f).

$$\sum F_x = 0; F_{DB} \cdot \cos(45^\circ) + F_{DF} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$F_{DF} := -\frac{F_{DB} \cdot \cos(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} = -1.061 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum F_y = 0; F_{DB} \cdot \sin(45^\circ) - F_{DF} \cdot \sin(45^\circ) - 1 \text{ Tn} - F_{DE} = 0$$

$$\begin{aligned} F_{DE} := & F_{DB} \cdot \sin(45^\circ) - F_{DF} \cdot \sin(45^\circ) - 1 \text{ Tn} \\ F_{DE} = & 0.5 \text{ Tn} \end{aligned} \quad (T)$$

Nodo E: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.15 (g).

$$\sum F_y = 0; F_{EF} \cdot \sin(45^\circ) + F_{ED} - F_{EB} \cdot \sin(45^\circ) = 0$$

CONTINUACIÓN

$$F_{EF} = \frac{-F_{DE} + F_{BE} \cdot \sin(45^\circ)}{\sin(45^\circ)} = -0.354 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & F_{EG} + F_{EF} \cdot \cos(45^\circ) + F_{EB} \cdot \cos(45^\circ) - F_{EC} = 0 \\ & F_{EG} = -F_{EF} \cdot \cos(45^\circ) - F_{BE} \cdot \cos(45^\circ) + F_{CE} \\ & F_{EG} = 1 \text{ Tn} \end{aligned} \quad (T)$$

Nodo G: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.15 (h).

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & F_{GH} - F_{CE} = 0 \quad F_{GH} = F_{EG} = 1 \text{ Tn} \\ \sum F_y = 0; & F_{GF} = 0 \text{ Tn} \end{aligned} \quad (T)$$

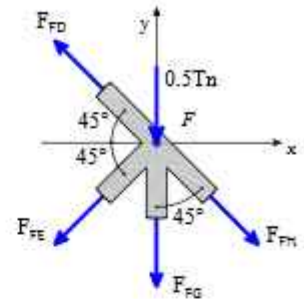
Nodo F: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.15 (i).

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; & -F_{FH} \cdot \sin(45^\circ) + F_{FE} \cdot \sin(45^\circ) - F_{FD} \cdot \sin(45^\circ) - 0.5 \text{ Tn} = 0 \\ & F_{FH} = \frac{F_{EF} \cdot \sin(45^\circ) - F_{DF} \cdot \sin(45^\circ) - 0.5 \text{ Tn}}{\sin(45^\circ)} \\ & F_{FH} = -1.414 \text{ Tn} \end{aligned} \quad (C)$$

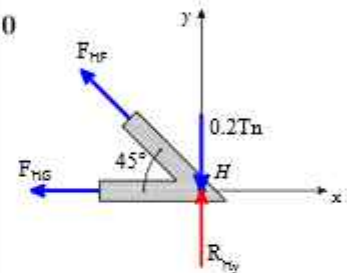
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & F_{FD} \cdot \cos(45^\circ) + F_{FE} \cdot \cos(45^\circ) + F_{FH} \cdot \cos(45^\circ) = 0 \\ & F_{FH} = \frac{-F_{DF} \cdot \cos(45^\circ) - F_{EF} \cdot \cos(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} \\ & F_{FH} = -1.414 \text{ Tn} \quad \text{ok!} \end{aligned}$$

Nodo H: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.15 (j).

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; & R_{Hy} - 0.2 \text{ Tn} - F_{HF} \cdot \sin(45^\circ) = 0 \\ & R_{Hy} - 0.2 \text{ Tn} - F_{FH} \cdot \sin(45^\circ) = 0 \text{ Tn} \quad \text{ok!} \end{aligned}$$



(i)



(j)

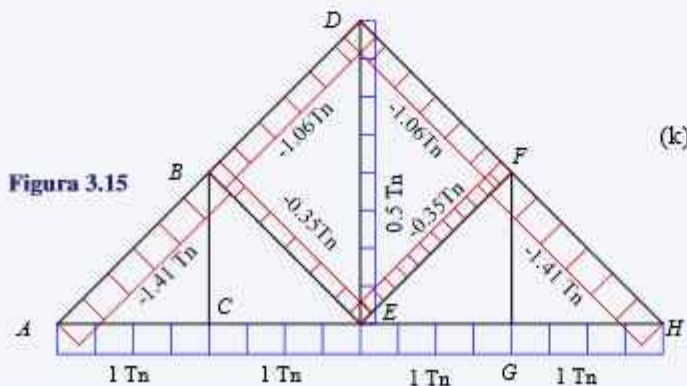
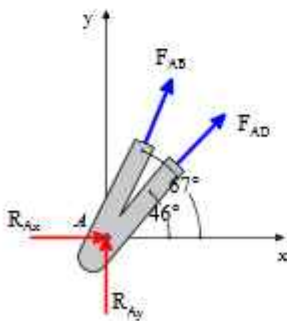
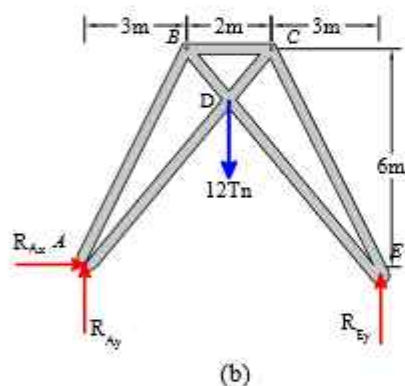
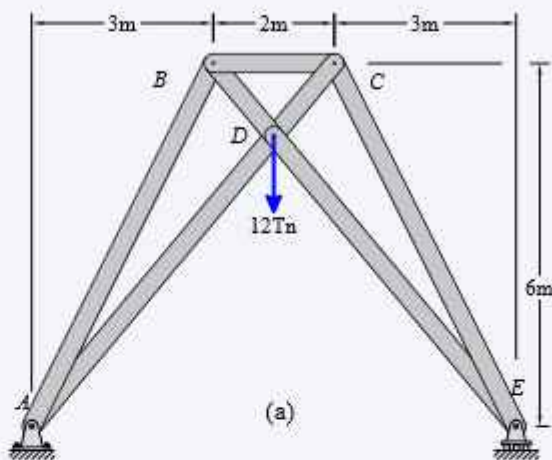


Figura 3.15

(k)

EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.9

Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si están en tensión o compresión de la siguiente armadura.



(c)

Paso ①: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) figura 3.16 (b).

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio

$$\sum M_A = 0 ; \quad R_{Ey} \cdot 8 \text{ m} - 12 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ey} := \frac{12 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 6 \text{ Tn}$$

$$\sum Fy = 0 ; \quad R_{Ay} + R_{Ey} - 12 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} := 12 \text{ Tn} - R_{Ey} = 6 \text{ Tn}$$

$$\sum Fx = 0 ; \quad R_{Ax} = 0 \quad = \quad R_{Ax} := 0 \text{ Tn}$$

$$\theta := \text{atan}\left(\frac{6}{5}\right) = 50.194^\circ \quad \alpha := \text{atan}\left(\frac{6}{3}\right) = 63.435^\circ$$

Paso ③: Determinamos las fuerzas en los elementos. Empezaremos a resolver por el nodo "A"

Nodo A: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.16 (c).

$$\sum Fx = 0 ; \quad F_{AB} \cdot \cos(\alpha) + F_{AD} \cdot \cos(\theta) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\sum Fy = 0 ; \quad F_{AB} \cdot \sin(\alpha) + F_{AD} \cdot \sin(\theta) + R_{Ay} = 0 \quad \dots (2)$$

CONTINUACIÓN

De (1) y (2) tenemos:

$$F_{AB} = -16.771 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$F_{AD} = 11.715 \text{ Tn} \quad (T)$$

Nodo E: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.16 (d).

$$\sum F_x = 0 ; F_{EC} \cdot \cos(\alpha) + F_{ED} \cdot \cos(\theta) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0 ; F_{EC} \cdot \sin(\alpha) + F_{ED} \cdot \sin(\theta) + R_{Ey} = 0 \quad \dots (2)$$

De (1) y (2) tenemos:

$$F_{EC} = -16.771 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$F_{ED} = 11.715 \text{ Tn} \quad (T)$$

Nodo D: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.16 (e).

$$\sum F_x = 0 ; F_{DE} \cdot \cos(\theta) - F_{DA} \cdot \cos(\theta) + F_{DC} \cdot \cos(\theta) - F_{DB} \cdot \cos(\theta) = 0$$

$$F_{DC} = F_{DB} \quad \dots (1)$$

$$\sum F_y = 0 ;$$

$$F_{DE} \cdot \sin(\theta) - F_{DA} \cdot \sin(\theta) + F_{DC} \cdot \sin(\theta) - F_{DB} \cdot \sin(\theta) - 12 \text{ Tn} = 0 \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos:

$$F_{DC} = 19.526 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$F_{DB} = 19.526 \text{ Tn} \quad (T)$$

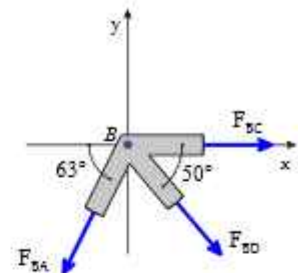
Nodo B: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.16 (f).

$$\sum F_x = 0 ; F_{BC} + F_{BD} \cdot \cos(\theta) + F_{BA} \cdot \cos(\alpha) = 0$$

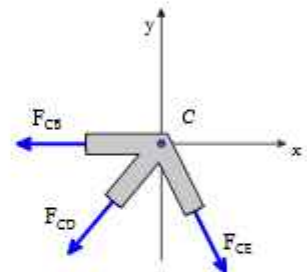
$$F_{BC} = -F_{BD} \cdot \cos(\theta) - F_{AB} \cdot \cos(\alpha) = -20 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum F_y = 0 ; F_{BD} \cdot \sin(\theta) - F_{BA} \cdot \sin(\alpha) = 0$$

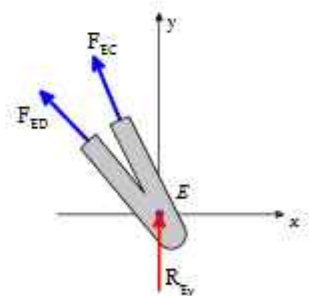
$$F_{DB} \cdot \sin(\theta) - F_{AB} \cdot \sin(\alpha) = 0 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$



(d)



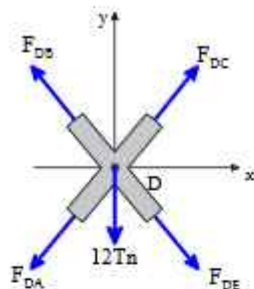
(e)



(f)

CONTINUACIÓN

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.16 (g), para comprobación



(g)

$$\sum F_x = 0 ; F_{CB} - F_{CD} \cdot \cos(\theta) - F_{CE} \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$F_{BC} - F_{DC} \cdot \cos(\theta) - F_{EC} \cdot \cos(\alpha) = 0 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$

$$\sum F_y = 0 ; F_{CD} \cdot \sin(\theta) - F_{CE} \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$F_{DC} \cdot \sin(\theta) - F_{EC} \cdot \sin(\alpha) = 0 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$

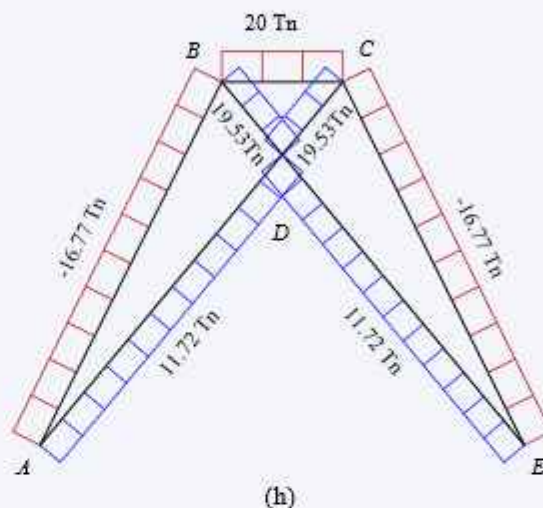


Figura 3.16

Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si están en tensión o compresión de la siguiente armadura.

EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.10

Paso ①: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) figura 3.17 (b)

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio

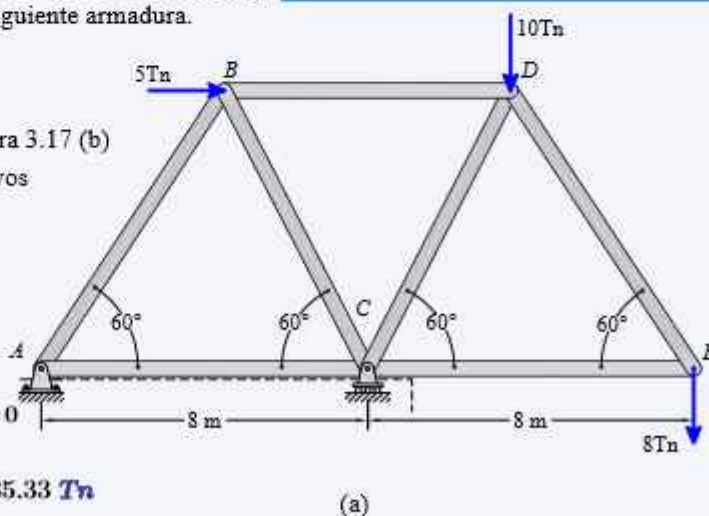
$$h = 4 \text{ m} \cdot \tan(60^\circ) = 6.928 \text{ m}$$

$$\sum M_A = 0 ;$$

$$R_{Cy} \cdot 8 \text{ m} - 8 \text{ Tn} \cdot 16 \text{ m} - 10 \text{ Tn} \cdot 12 \text{ m} - 5 \text{ Tn} \cdot h = 0$$

$$R_{Cy} = \frac{8 \text{ Tn} \cdot 16 \text{ m} + 10 \text{ Tn} \cdot 12 \text{ m} + 5 \text{ Tn} \cdot h}{8 \text{ m}} = 35.33 \text{ Tn}$$

$$\sum F_y = 0 ; \quad -R_{Ay} + R_{Cy} - 10 \text{ Tn} - 8 \text{ Tn} = 0$$



$$R_{Ay} := R_{Cy} - 10 \text{ Tn} - 8 \text{ Tn} = 17.33 \text{ Tn}$$

$$\sum F_x = 0 ; \quad -R_{Ax} + 5 \text{ Tn} = 0 \quad R_{Ax} := 5 \text{ Tn}$$

Paso ③: Determinamos las fuerzas en los elementos
Empezaremos a resolver por el nodo "A"

Nodo A: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.17 (c).

$$\sum F_y = 0 ; \quad F_{AB} \cdot \sin(60^\circ) - R_{Ay} = 0$$

$$F_{AB} := \frac{R_{Ay}}{\sin(60^\circ)} = 20.011 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$\sum F_x = 0 ; \quad F_{AC} + F_{AB} \cdot \sin(60^\circ) - R_{Ax} = 0$$

$$F_{AC} := -F_{AB} \cdot \cos(60^\circ) + R_{Ax} = -5.006 \text{ Tn} \quad (C)$$

(a)

Nodo B: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.17 (d).

$$\sum F_y = 0 ; \quad -F_{BA} \cdot \sin(60^\circ) - F_{BC} \cdot \sin(60^\circ) = 0$$

$$F_{BC} := \frac{-F_{AB} \cdot \sin(60^\circ)}{\sin(60^\circ)} = -20.01 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum F_x = 0 ; \quad F_{BD} + 5 \text{ Tn} - F_{BA} \cdot \cos(60^\circ) + F_{BC} \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$F_{BD} := -5 \text{ Tn} + F_{AB} \cdot \cos(60^\circ) - F_{BC} \cdot \cos(60^\circ)$$

$$F_{BD} = 15.011 \text{ Tn} \quad (T)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.17 (e).

$$\sum F_y = 0 ; \quad F_{CD} \cdot \sin(60^\circ) - F_{CB} \cdot \sin(60^\circ) + R_{Cy} = 0$$

$$F_{CD} := \frac{F_{BC} \cdot \sin(60^\circ) - R_{Cy}}{\sin(60^\circ)} = -20.78 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum F_x = 0 ; \quad F_{CE} + F_{CA} + F_{CD} \cdot \cos(60^\circ) + F_{CB} \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$F_{CE} := -F_{AC} - F_{CD} \cdot \cos(60^\circ) - F_{BC} \cdot \cos(60^\circ)$$

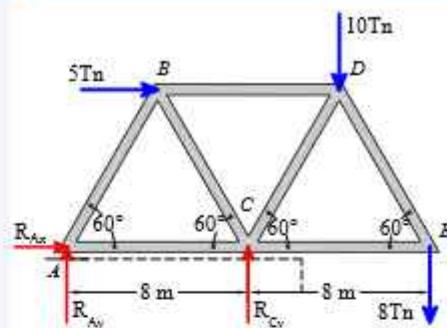
$$F_{CE} = -4.619 \text{ Tn} \quad (C)$$

Nodo D: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.17 (f).

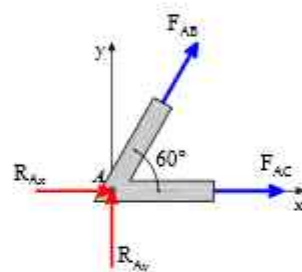
$$\sum F_x = 0 ; \quad F_{DE} \cdot \cos(60^\circ) + F_{DC} \cdot \cos(60^\circ) - F_{DB} = 0$$

$$F_{DE} := \frac{-F_{CD} \cdot \cos(60^\circ) + F_{BD}}{\cos(60^\circ)} = 9.24 \text{ Tn} \quad (T)$$

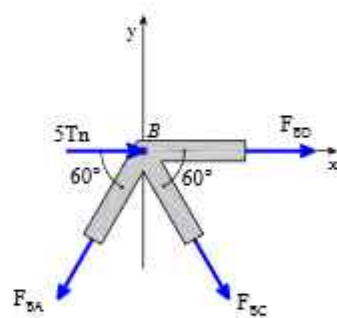
CONTINUACIÓN



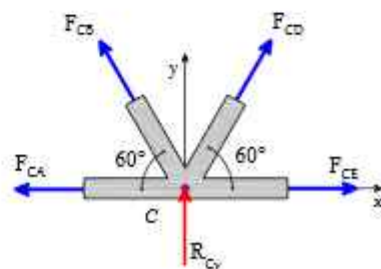
(b)



(c)

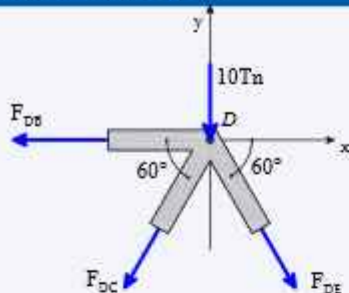


(d)

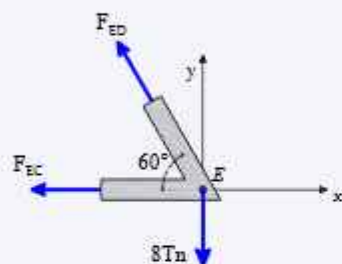


(e)

CONTINUACIÓN



(f)



(g)

$$\sum F_y = 0; -F_{DE} \cdot \sin(60^\circ) + F_{DC} \cdot \sin(60^\circ) - 10 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{DE} = \frac{F_{CD} \cdot \sin(60^\circ) - 10 \text{ Tn}}{\sin(60^\circ)} = 9.24 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$

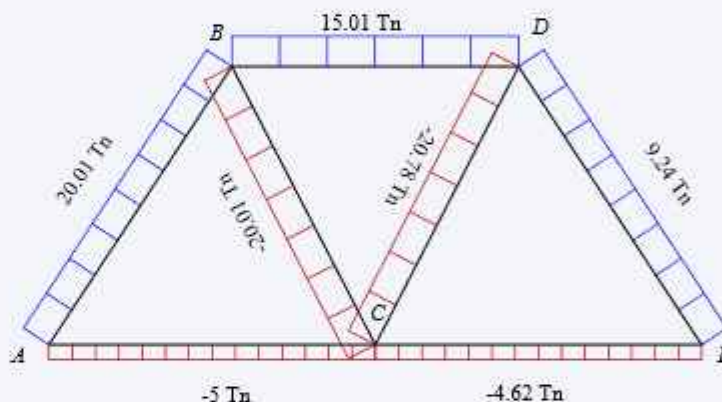
Nodo E: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.17 (g), para comprobación

$$\sum F_x = 0; F_{EC} - F_{ED} \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$F_{CE} - F_{DE} \cdot \cos(60^\circ) = 0 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$

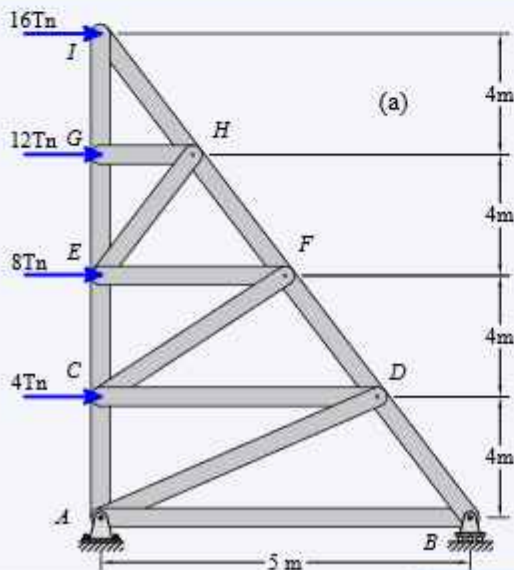
$$\sum F_y = 0; F_{ED} \cdot \sin(60^\circ) - 8 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{DE} \cdot \sin(60^\circ) - 8 \text{ Tn} = 0 \text{ Tn} \quad \text{ok!}$$



(h)

Figura 3.17



EJEMPLO RESUELTO 3.3.1.11

Determine por el método de los nodos las fuerzas en los miembros, y establezca si están en tensión o compresión de la siguiente armadura.

Paso ①: Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.), no es necesario.

Paso ②: Determinamos las fuerzas en los elementos
Nota: No es necesario calcular las reacciones en los apoyos pues nos pide calcular las fuerzas en los elementos, para el desarrollo empezaremos por el nodo I

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{5 \text{ m}}{16 \text{ m}}\right) = 17.354^\circ$$

CONTINUACIÓN

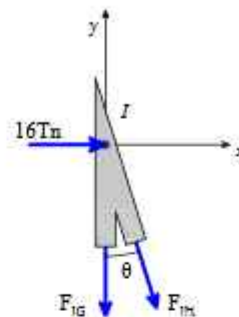
Nodo I: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.18 (b).

$$\sum F_x = 0 ; F_{IH} \cdot \sin(\theta) + 16 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{IH} = \frac{-16 \text{ Tn}}{\sin(\theta)} = -53.642 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum F_y = 0 ; F_{IH} \cdot \cos(\theta) - F_{IG} = 0$$

$$F_{IG} = -F_{IH} \cdot \cos(\theta) = 51.2 \text{ Tn} \quad (T)$$



(b)

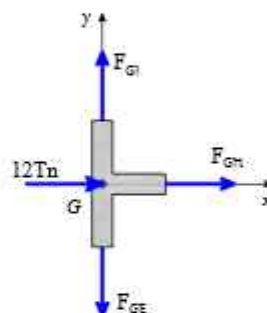
Nodo G: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 3.18 (c).

$$\sum F_x = 0 ; F_{GH} + 12 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{GH} = -12 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\sum F_y = 0 ; -F_{GE} + F_{IG} = 0$$

$$F_{GE} = F_{IG} = 51.2 \text{ Tn} \quad (T)$$



(c)

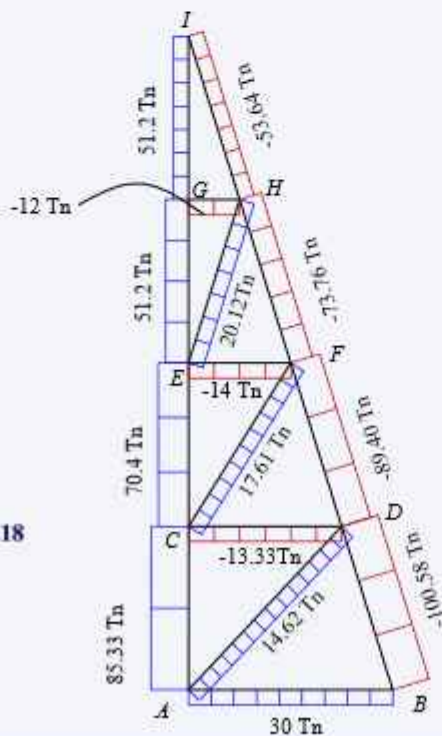


Figura 3.18

(d)

3.3.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

10 Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

Ejercicios

3.1

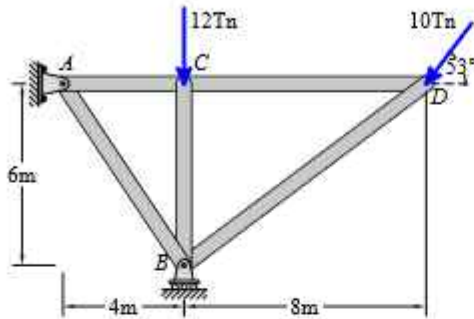


Figura 3.19

3.2

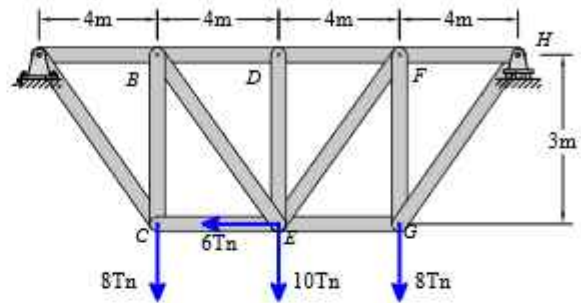


Figura 3.20

3.3

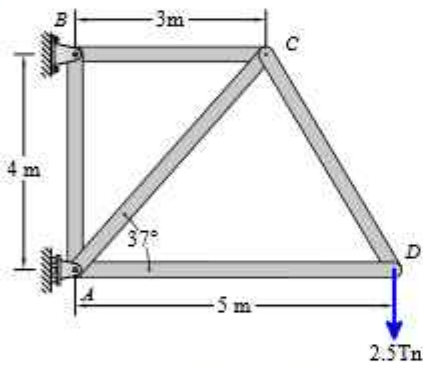


Figura 3.21

3.4

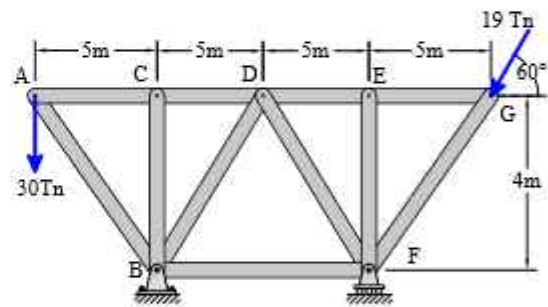


Figura 3.22

3.5

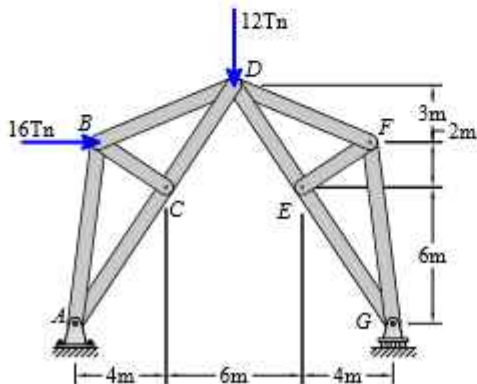


Figura 3.23

3.6

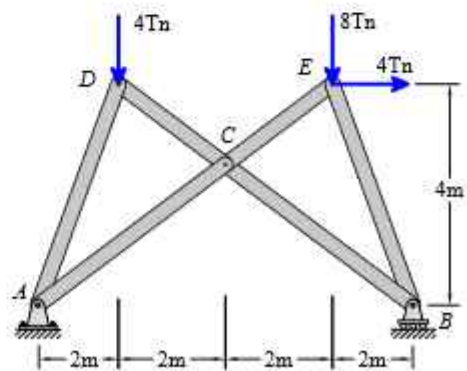


Figura 3.24

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.7

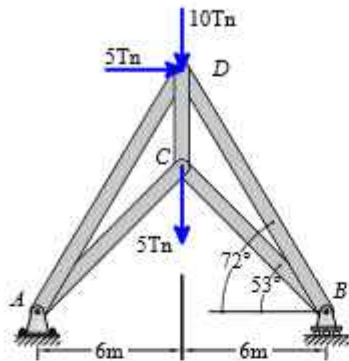


Figura 3.25

3.8

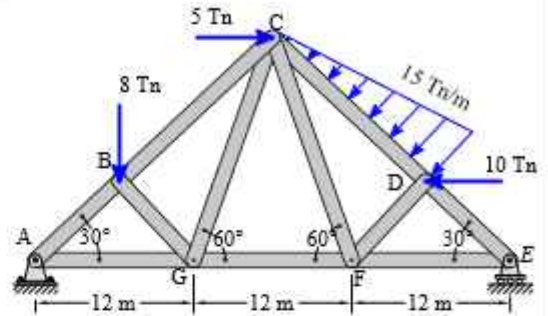


Figura 3.26

3.9

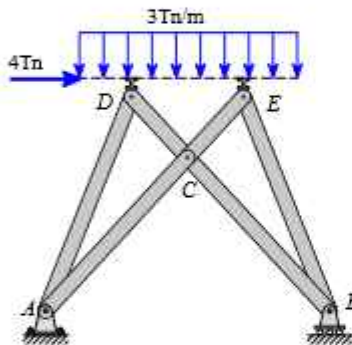


Figura 3.27

3.10

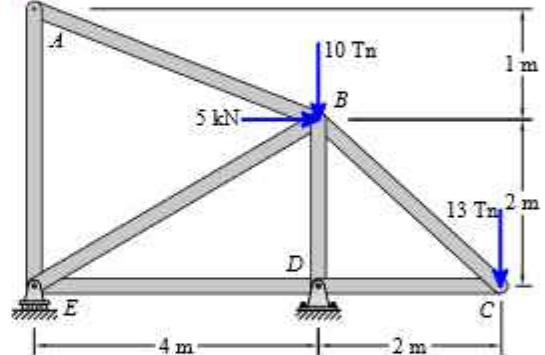


Figura 3.28

3.11

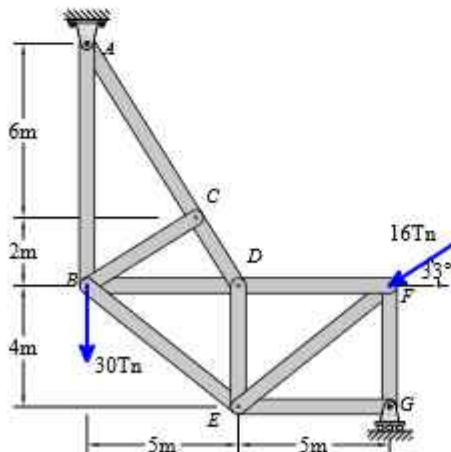


Figura 3.29

3.12

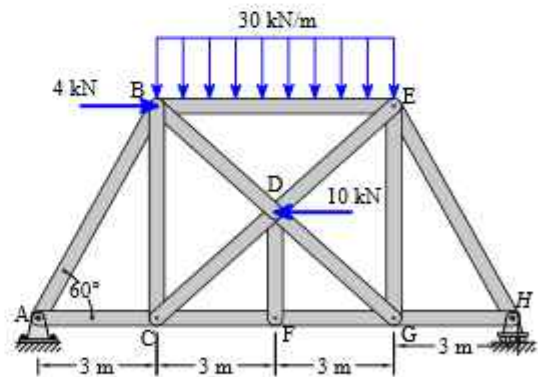


Figura 3.30

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.13

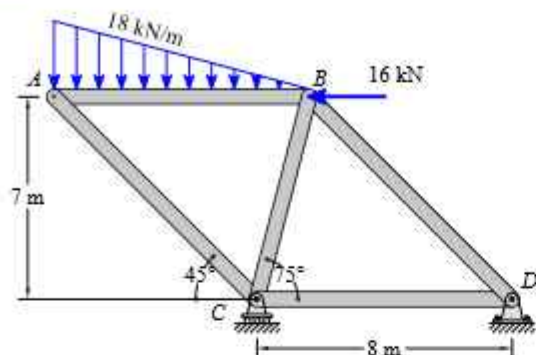


Figura 3.31

3.14

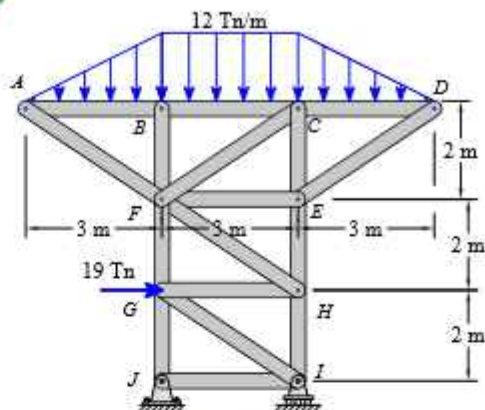


Figura 3.32

3.15

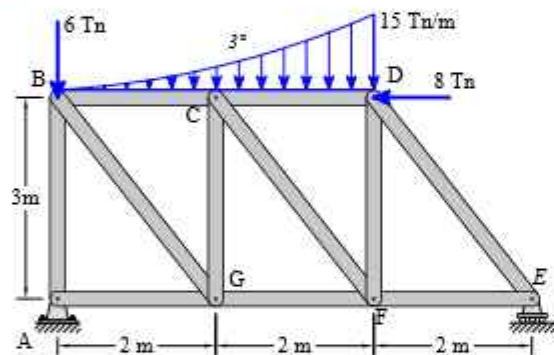


Figura 3.33

3.16

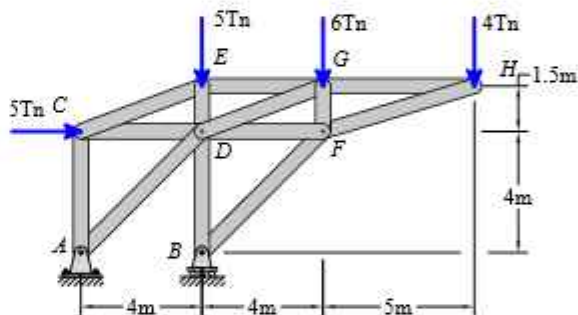


Figura 3.34

3.17

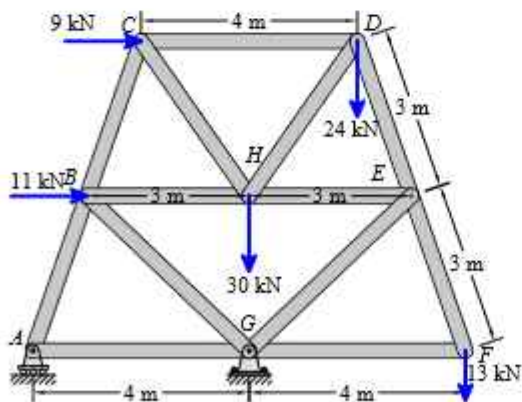


Figura 3.35

3.18

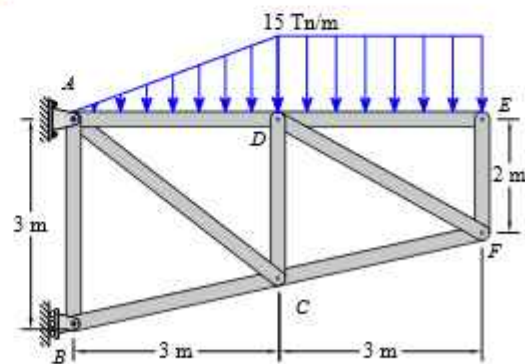


Figura 3.36

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.19

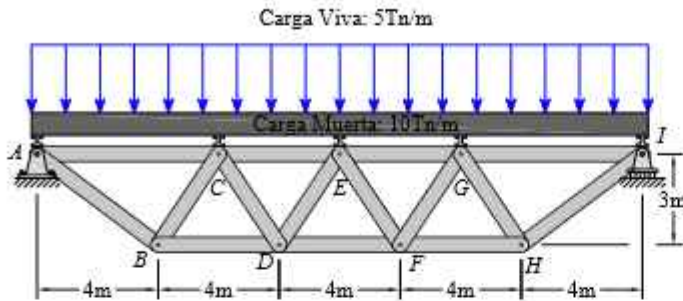


Figura 3.37

3.20

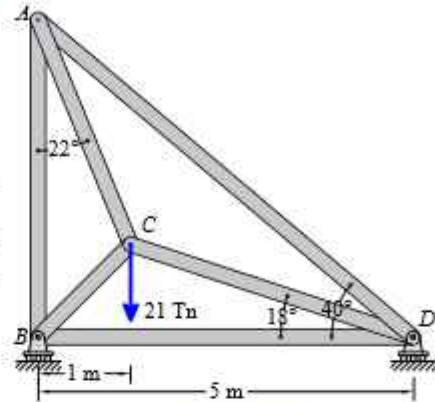


Figura 3.38

3.21

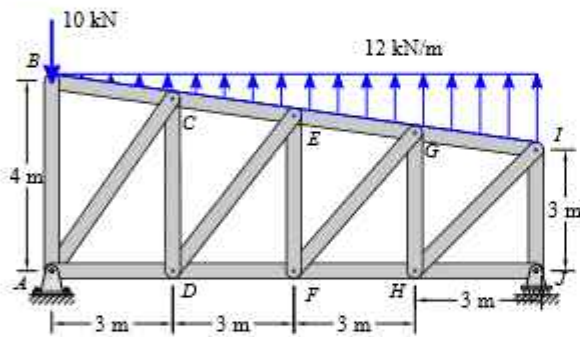


Figura 3.39

3.22

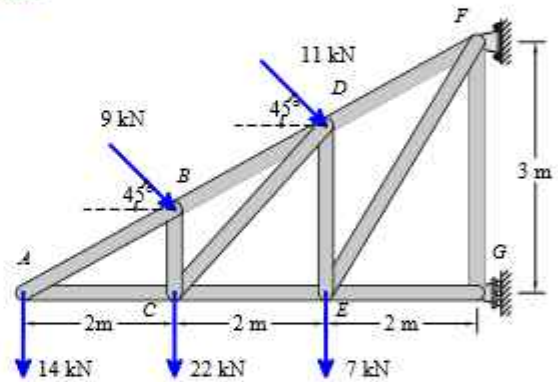


Figura 3.40

3.23

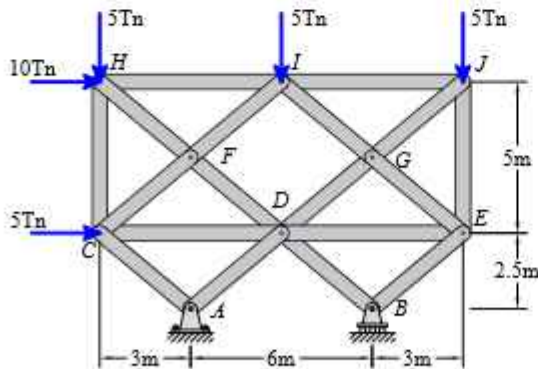


Figura 3.41

3.24

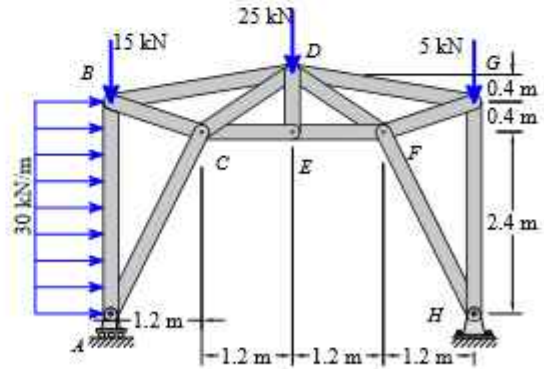


Figura 3.42

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.25

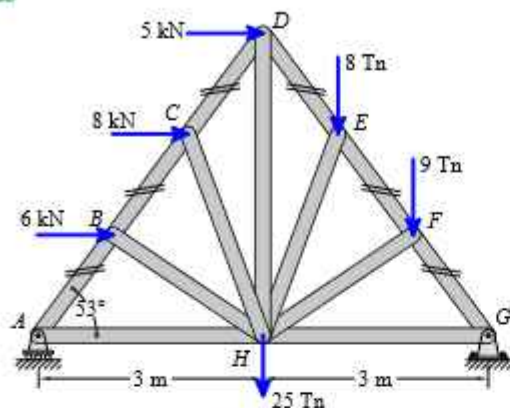


Figura 3.43

3.26

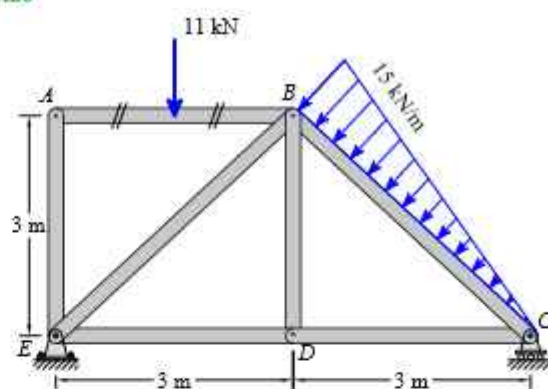


Figura 3.44

3.27

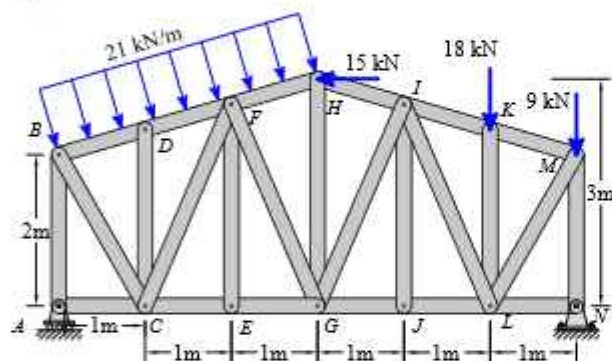


Figura 3.45

3.28

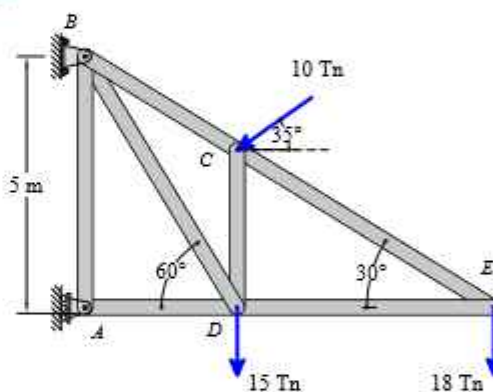


Figura 3.46

3.29

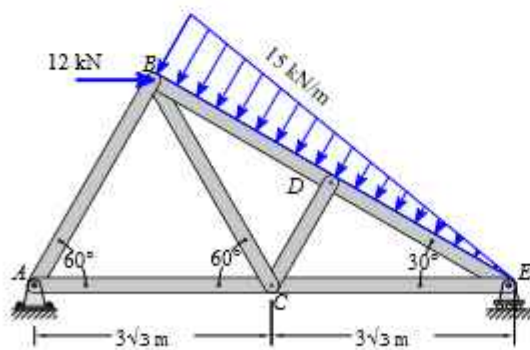


Figura 3.47

3.30

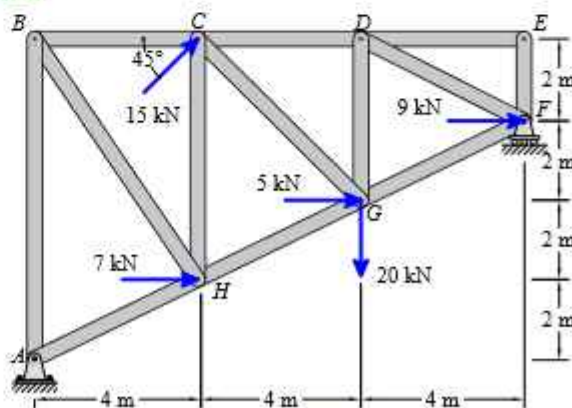


Figura 3.48

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.31

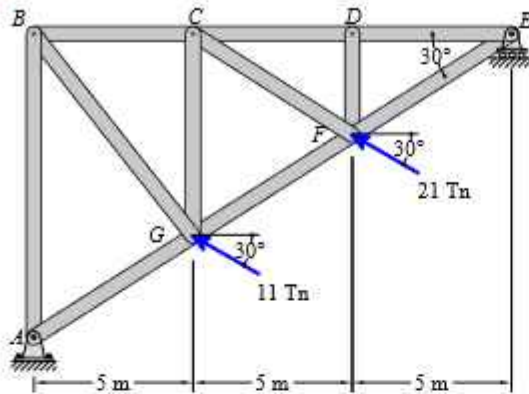


Figura 3.49

3.32

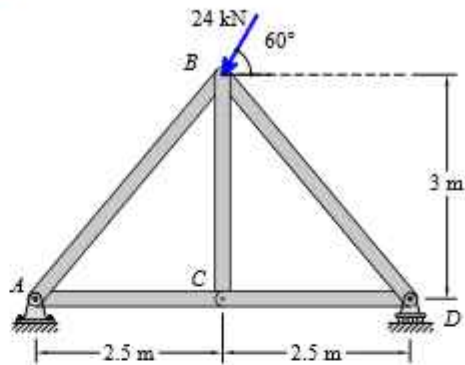


Figura 3.50

3.33

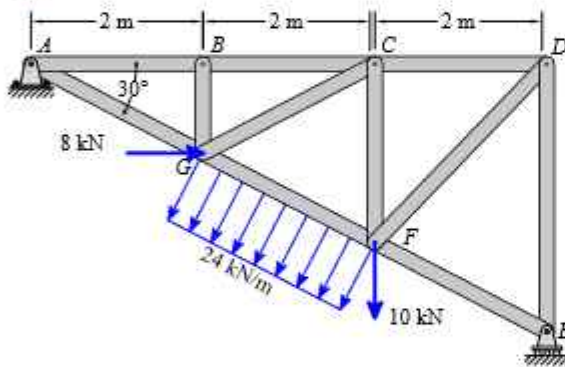


Figura 3.51

3.34

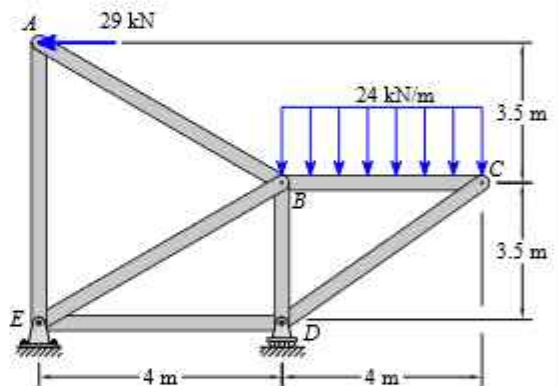


Figura 3.52

3.35

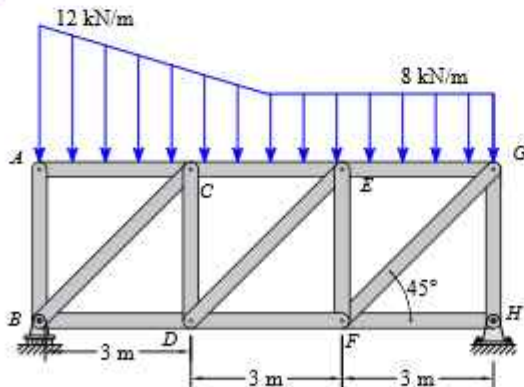


Figura 3.53

3.36

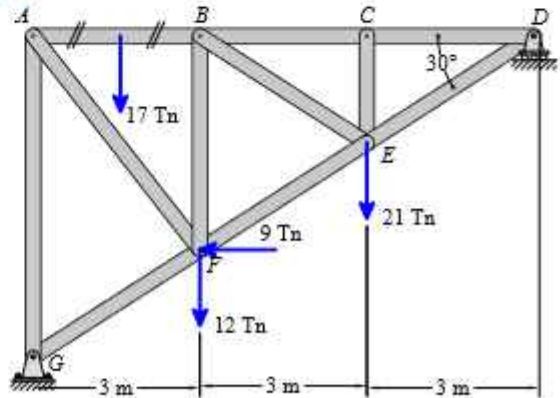


Figura 3.54

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.37

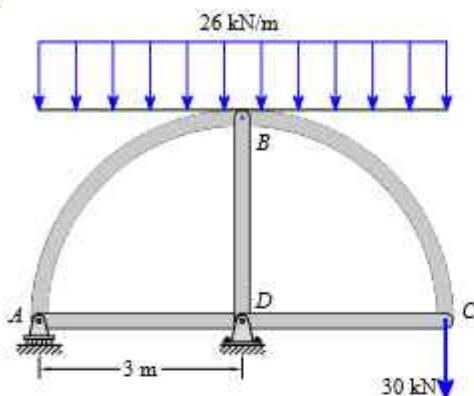


Figura 3.55

3.38

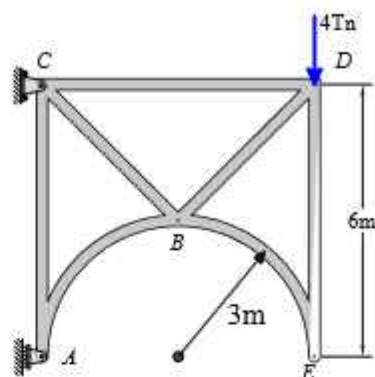


Figura 3.56

3.39

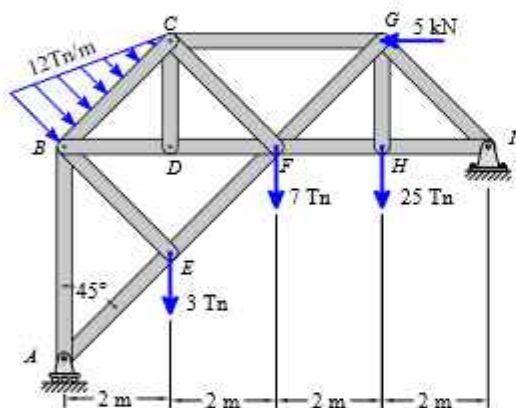


Figura 3.57

3.40

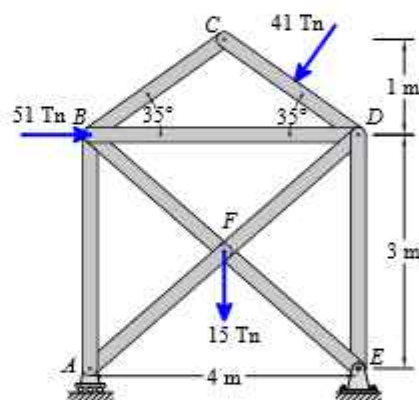


Figura 3.58

3.41

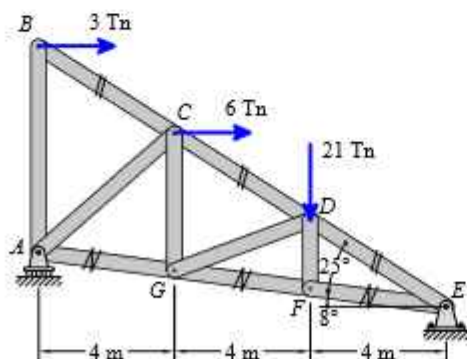


Figura 3.59

3.42

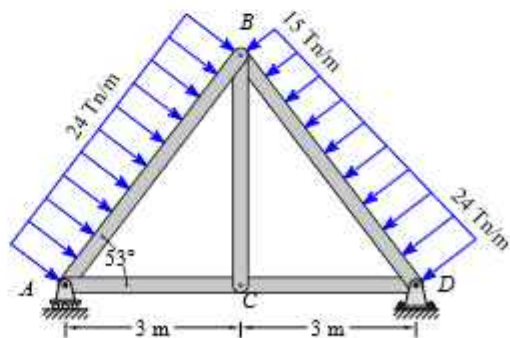


Figura 3.60

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.43

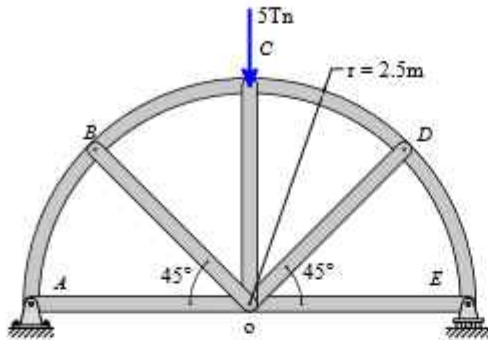


Figura 3.61

3.44

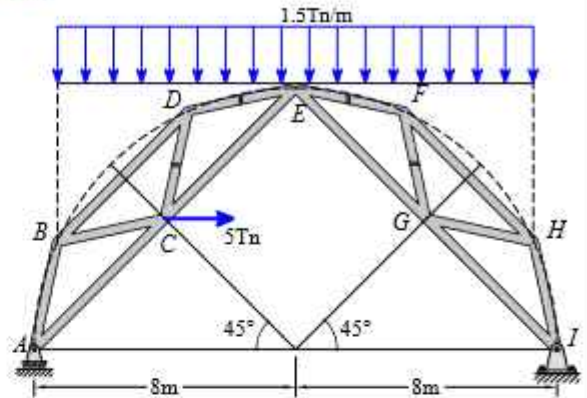


Figura 3.62

3.45

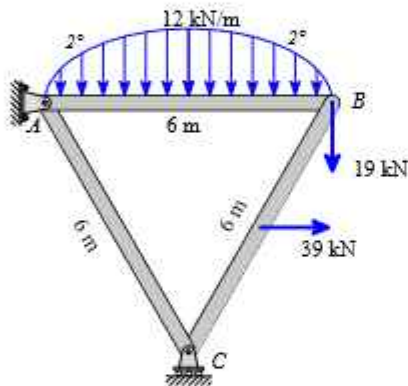


Figura 3.63

3.46

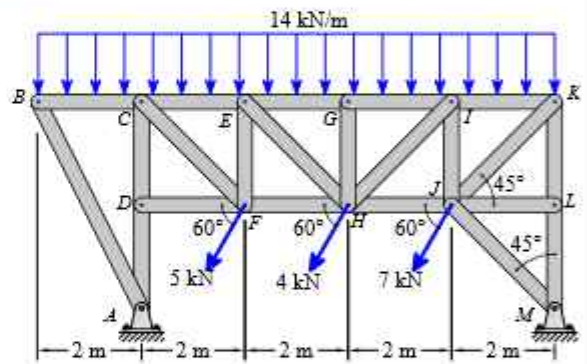


Figura 3.64

3.47

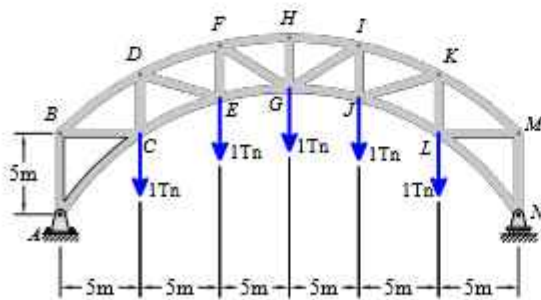


Figura 3.65

3.48

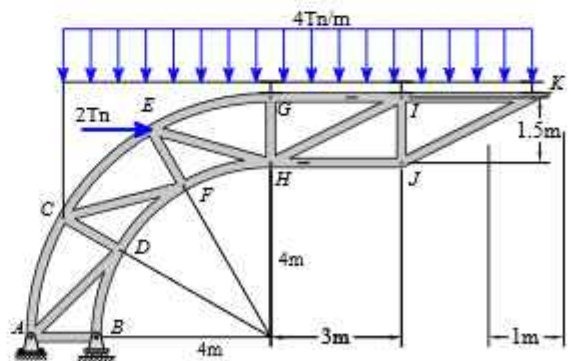


Figura 3.66

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.49

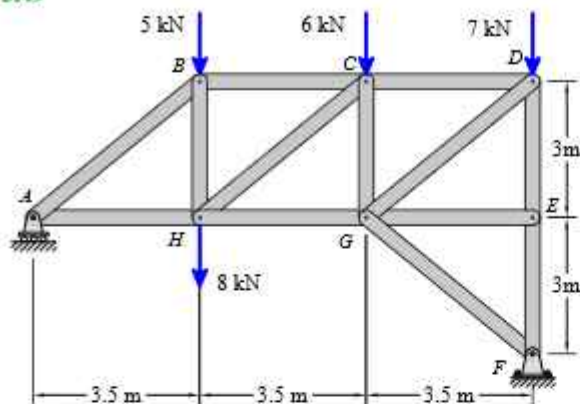


Figura 3.67

3.50

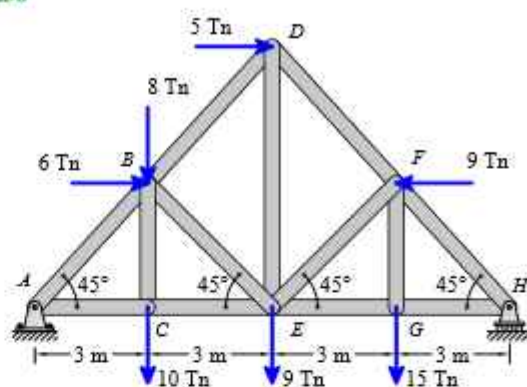


Figura 3.68

3.51

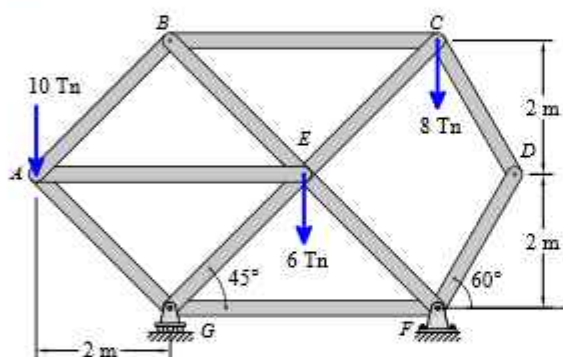


Figura 3.69

3.52

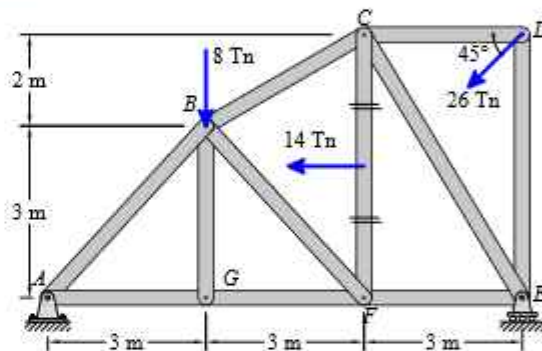


Figura 3.70

3.53

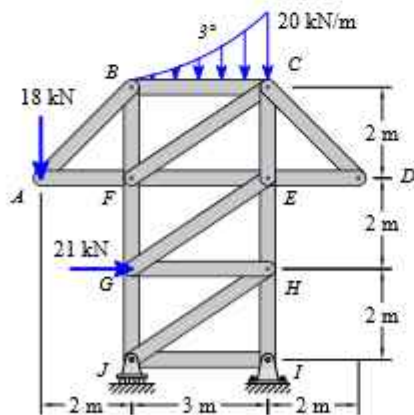


Figura 3.71

3.54

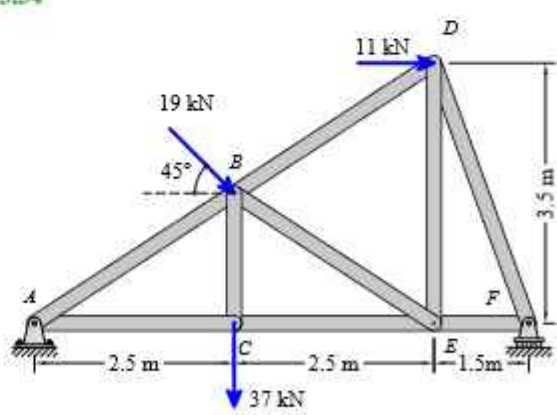


Figura 3.72

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.55

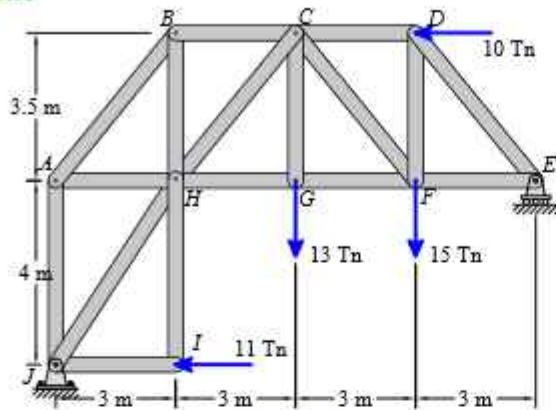


Figura 3.73

3.56

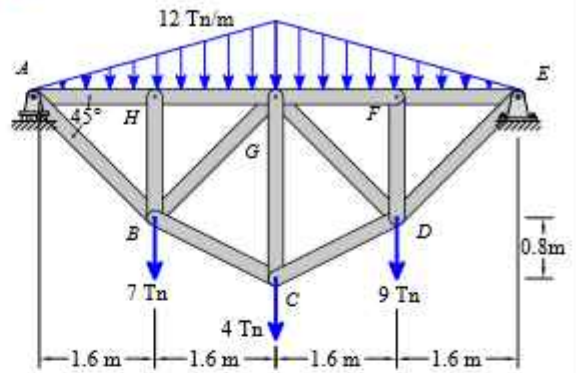


Figura 3.74

3.57

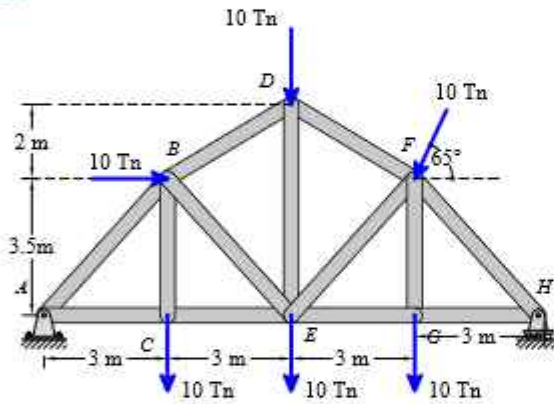


Figura 3.75

3.58

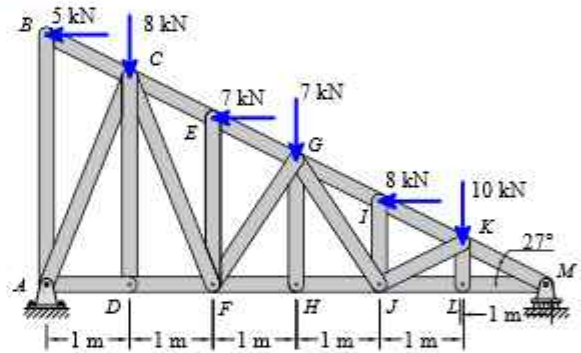


Figura 3.76

3.59

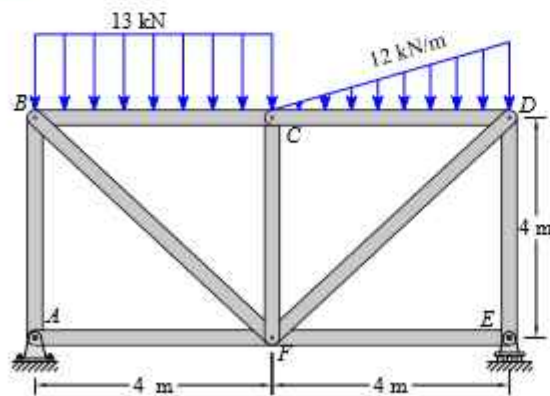


Figura 3.77

3.60

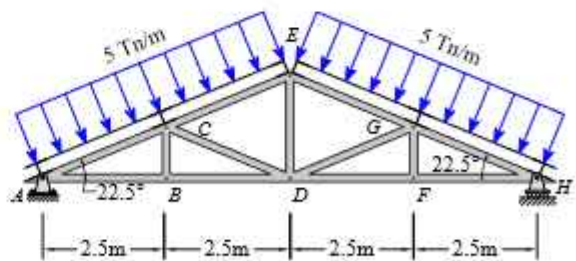


Figura 3.78

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.61

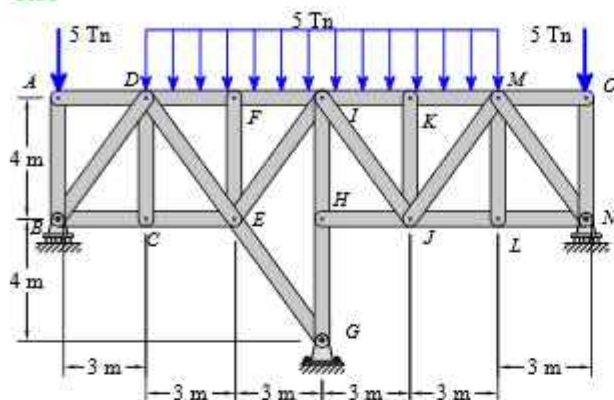


Figura 3.79

3.62

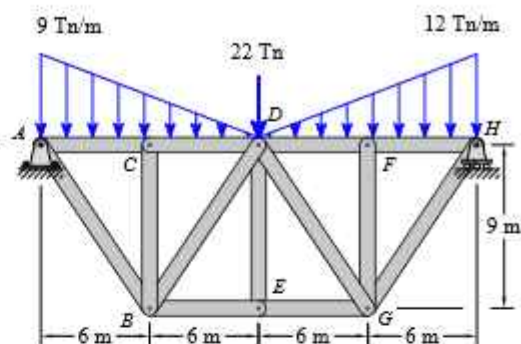


Figura 3.80

3.63

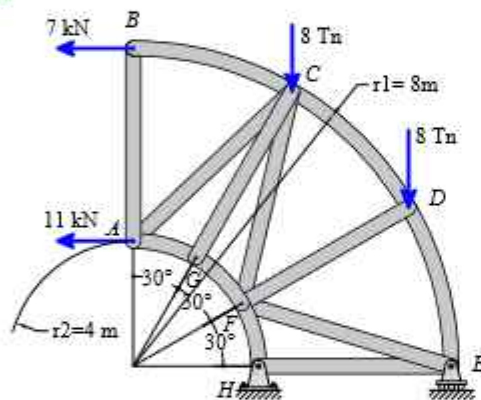


Figura 3.81

3.64

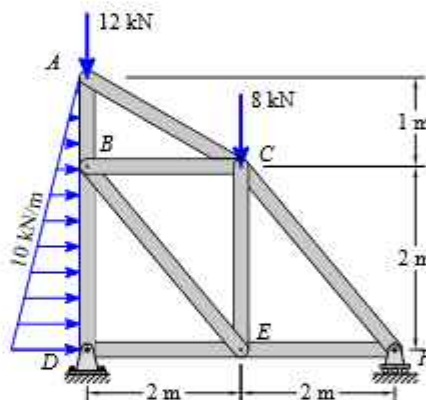


Figura 3.82

3.65

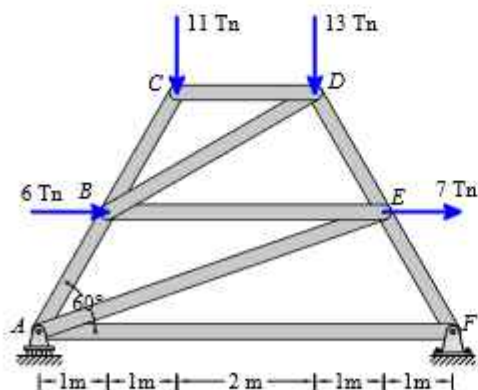


Figura 3.83

3.66

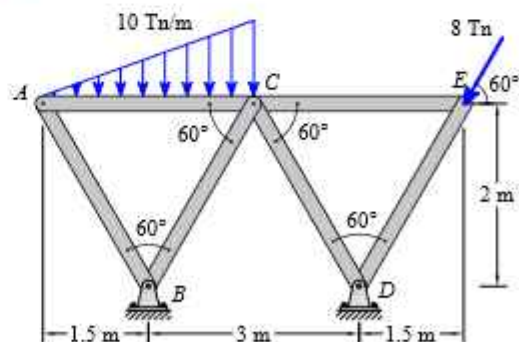


Figura 3.84

Determine la fuerza en cada armadura, de las siguientes figuras

3.67

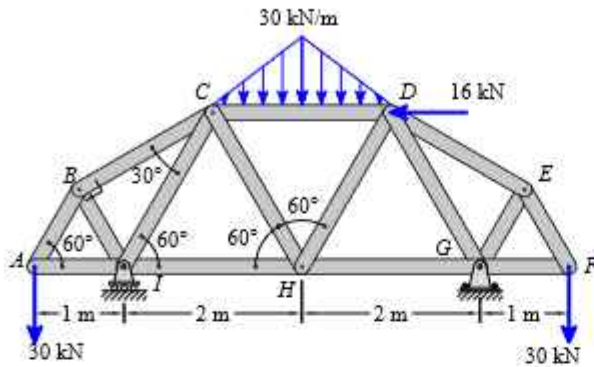


Figura 3.85

3.68

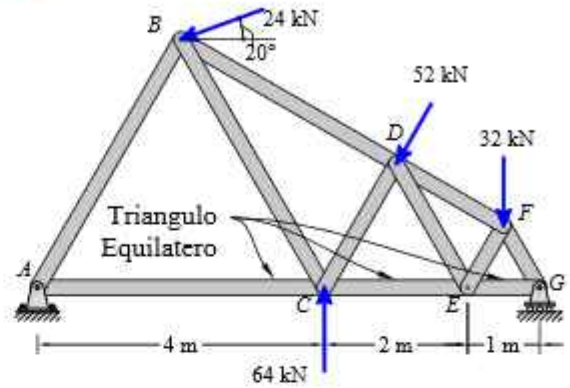


Figura 3.86

3.69

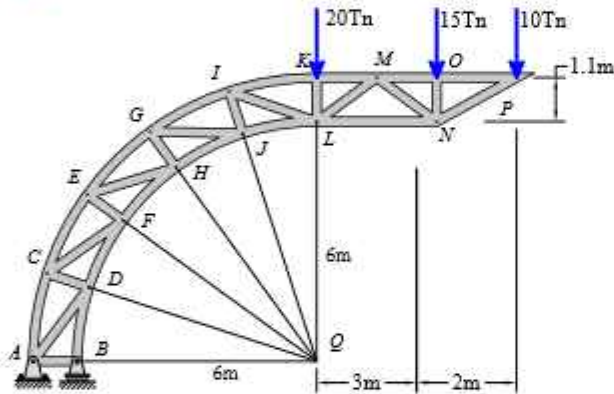


Figura 3.87

3.70

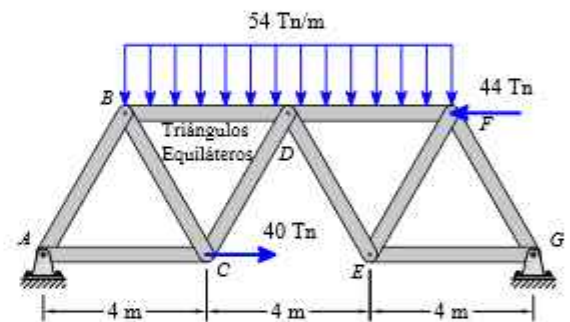


Figura 3.88

3.71

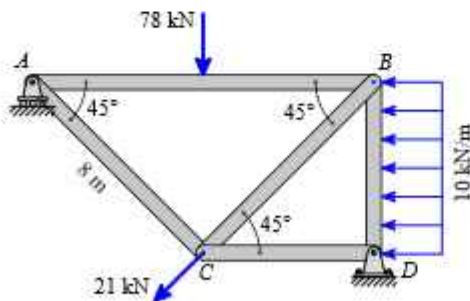


Figura 3.89

3.72

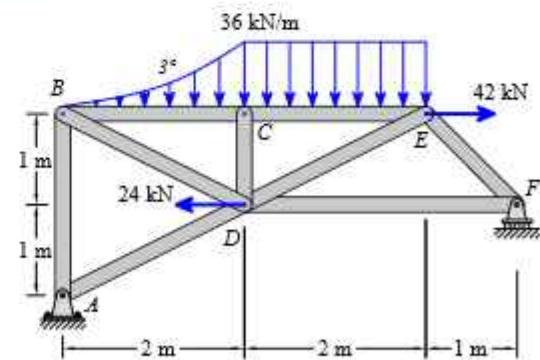


Figura 3.90

3.4. MÉTODO DE LAS SECCIONES

El método de las secciones es una técnica utilizada en el análisis de armaduras para determinar las fuerzas internas en los miembros de una armadura en un punto específico. La idea principal es cortar la armadura en una sección que incluye los miembros cuyas fuerzas internas se desean calcular y luego analizar esa sección aislada como si fuera una estructura plana. Esto simplifica el proceso y permite encontrar las fuerzas internas utilizando el equilibrio de fuerzas en esa sección.

Asimismo, el método de las reacciones se usa para determinar las cargas que actúan dentro de un cuerpo. Este método se basa en el principio de que si un cuerpo está en equilibrio, entonces cualquier parte del cuerpo está en equilibrio.

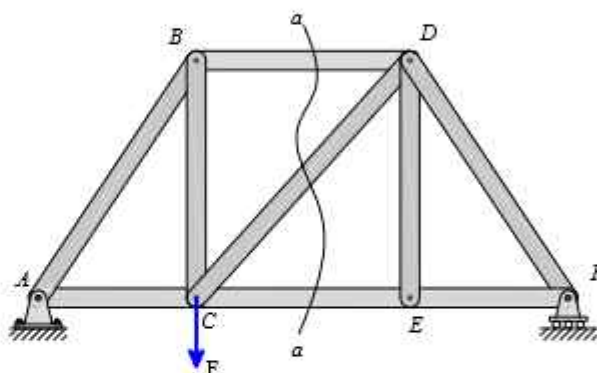


Figura 3.91: Selección de corte en la sección de la armadura

Separada en dos cuerpos con las fuerzas proyectadas en sus líneas de acción (cada cuerpo en equilibrio)

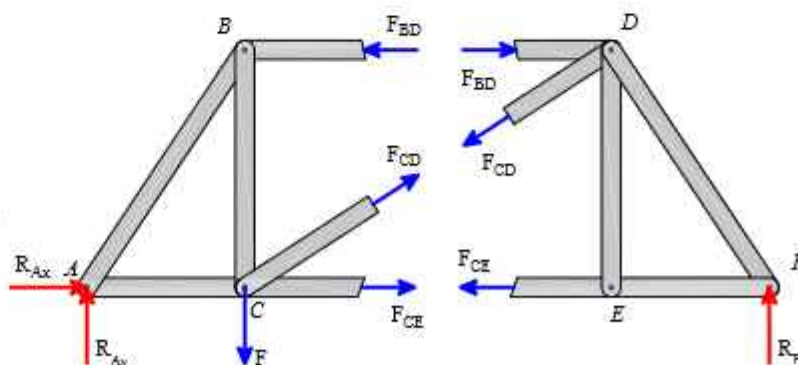


Figura 3.92: D.C.L. de las partes separadas

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LAS SECCIONES

El método de las secciones es una técnica utilizada para analizar armaduras y determinar las fuerzas internas en los miembros de una sección específica de la estructura. Procedimiento paso a paso, junto con las ecuaciones clave:

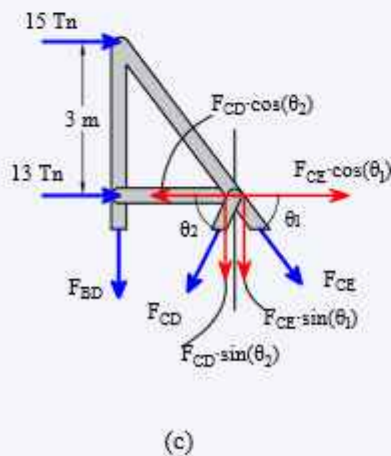
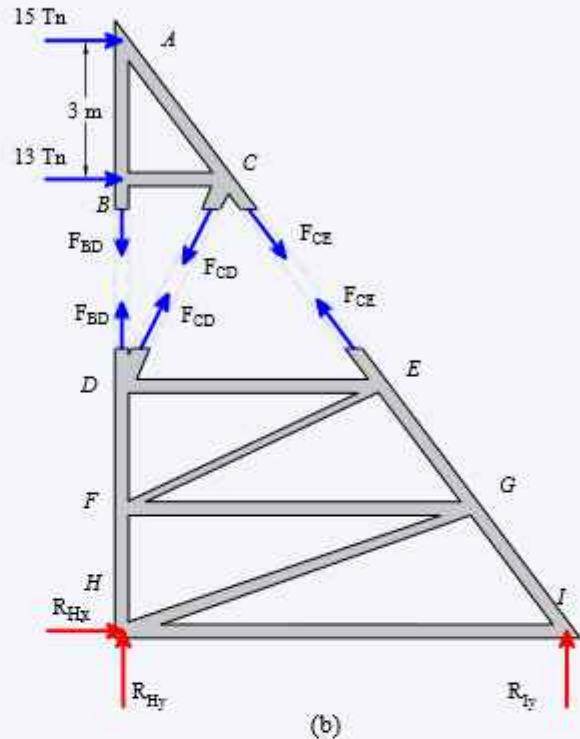
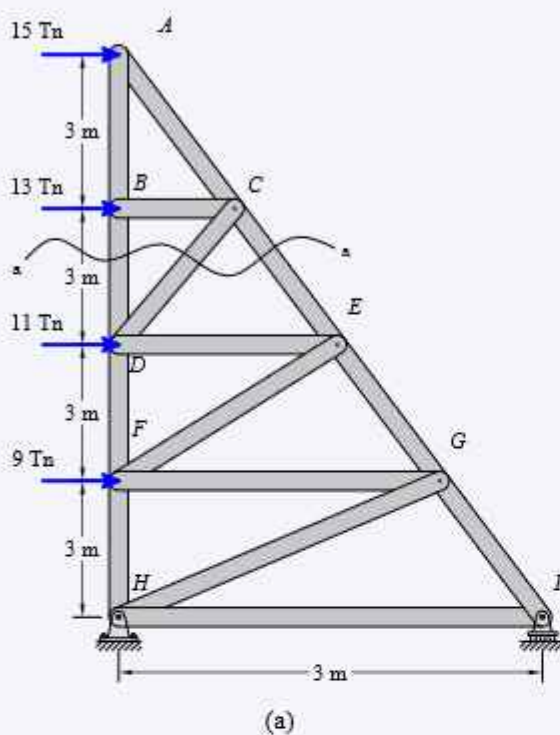
- a) **Identificación de la sección:** Determine la sección de la armadura que se analizará. Esta sección debe incluir los miembros de interés cuyas fuerzas internas se desean conocer.
- b) **Corte de la sección:** Realice un corte imaginario en la armadura a lo largo de la sección identificada.
- c) **Dibujo del diagrama de cuerpo libre:** Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la sección recortada. En el diagrama, muestre todas las fuerzas aplicadas a la sección, así como las fuerzas internas desconocidas en los miembros de la sección. Etiquete las fuerzas y momentos según las convenciones establecidas para cada miembro. Asegúrese de considerar las fuerzas axiales en los miembros y las fuerzas aplicadas en la sección.
- d) **Aplicación de las ecuaciones de equilibrio:** Aplique las ecuaciones de equilibrio para resolver las fuerzas internas en los miembros de la sección. Las ecuaciones de equilibrio son:
 - Sumatoria de fuerzas en dirección x : $\sum F_x = 0$
 - Sumatoria de fuerzas en dirección y : $\sum F_y = 0$
 - Sumatoria de momentos en un punto (elegir un punto estratégico que simplifique las ecuaciones): $\sum M_o = 0$
- e) **Resolución de ecuaciones:** Resuelva las ecuaciones de equilibrio para encontrar las fuerzas internas en los miembros de la sección. Las fuerzas internas pueden incluir fuerzas axiales (tensión o compresión) y momentos.
- f) **Repita según sea necesario:** Si se requiere analizar diferentes secciones de la armadura, repita los pasos anteriores para cada sección de interés.

El método de las secciones permite analizar partes específicas de una armadura y determinar las fuerzas internas en los miembros de esas secciones sin necesidad de analizar toda la estructura. Este enfoque simplifica el proceso y es especialmente útil cuando se busca comprender el comportamiento de ciertas áreas críticas de la armadura.

3.4.1. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.1

Determine por el método de las secciones las fuerzas en los miembros cortados por la línea a-a, y establezca si están en tensión o compresión los elementos del sistema de armaduras.



Paso ①: Para la solución del presente problema no se requiere determinar las reacciones, solo se necesita establecer la zona de seccionamiento y realizar su D.C.L. (diagrama de cuerpo libre).

Paso ②: Diagrama de cuerpo libre de la sección de análisis como se muestra en la figura 3.93 (b).

$$\theta := \text{atan}\left(\frac{12 \text{ m}}{6 \text{ m}}\right) = 63.435^\circ \quad \beta := 180^\circ - 2\theta = 53.13^\circ$$

Paso ③: Aplicación de condiciones de equilibrio en la figura 3.93 (c).

$$\curvearrowright \sum M_C = 0; \quad F_{BD} \cdot 1.5 \text{ m} - 15 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} = 0$$

$$F_{BD} := \frac{15 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m}}{1.5 \text{ m}} = 30 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 15 \text{ Tn} + 13 \text{ Tn} - F_{CD} \cdot \cos(\theta) + F_{CE} \cdot \cos(\theta) = 0$$

CONTINUACIÓN

$$\cos(\theta) F_{CD} - \cos(\theta) F_{CE} = 28 \text{ Tn} \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -F_{BD} - F_{CD} \cdot \sin(\theta) - F_{CE} \cdot \sin(\theta) = 0$$

$$-\sin(\theta) F_{CD} - \sin(\theta) F_{CE} = F_{BD} \quad \dots (2)$$

Solución del sistema de ecuaciones, para determinar F_{CD} , F_{CE} .

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{CD} \\ F_{CE} \end{bmatrix} \text{ Tn} = \begin{bmatrix} 28 \text{ Tn} \\ F_{BD} \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.447 & -0.447 \\ -0.894 & -0.894 \end{bmatrix}$$

$$v := \begin{bmatrix} 28 \text{ Tn} \\ F_{BD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$\begin{bmatrix} F_{CD} \\ F_{CE} \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} 14.534 \\ -48.075 \end{bmatrix} \text{ Tn} \quad \begin{bmatrix} (T) \\ (C) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{BD} \\ F_{CD} \\ F_{CE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 14.534 \\ -48.075 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

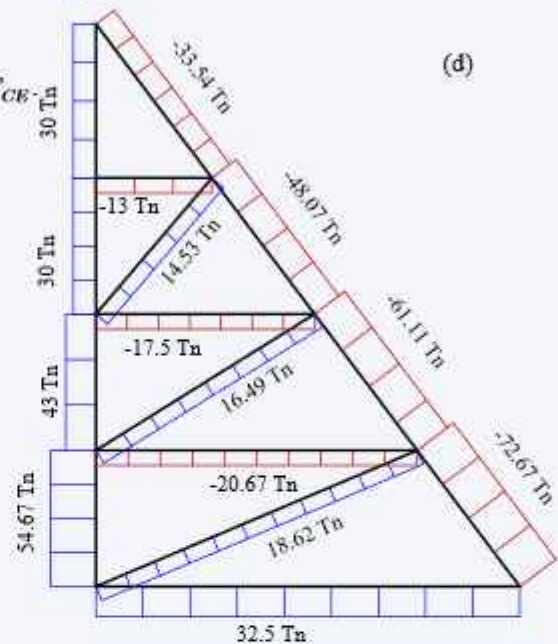
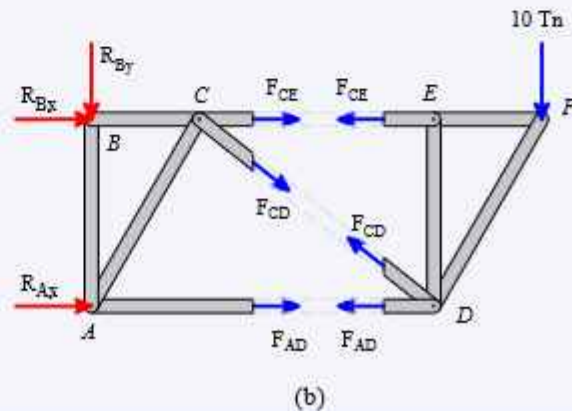
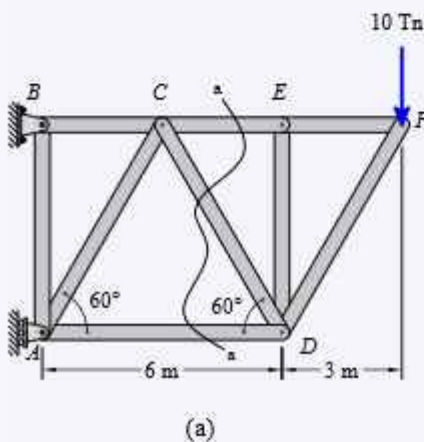


Figura 3.93

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.2

Determine por el método de las secciones las fuerzas en los miembros F_{CE} , F_{CD} y F_{AD} , además, establezca si están en tensión o compresión los elementos del sistema de armaduras.



CONTINUACIÓN

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre de la sección de análisis como se muestra en la figura 3.94 (b).

$$h = 3 \cdot \sqrt{3} \text{ m} = 5.196 \text{ m}$$

Paso ②: Aplicación de condiciones de equilibrio sobre la sección elegida, figura 3.94 (c).

$$\curvearrowright \sum M_A = 0; \quad F_{CE} \cdot h - 10 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} = 0$$

$$F_{CE} = \frac{10 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m}}{h} = 5.774 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad F_{CD} \cdot \sin(60^\circ) - 10 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{CD} = \frac{10 \text{ Tn}}{\sin(60^\circ)} = 11.547 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{CE} + F_{CD} \cdot \cos(60^\circ) + F_{AD} = 0$$

$$F_{AD} = -F_{CE} - F_{CD} \cdot \cos(60^\circ)$$

$$F_{AD} = -11.547 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\begin{bmatrix} F_{CE} \\ F_{CD} \\ F_{AD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.774 \\ 11.547 \\ -11.547 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

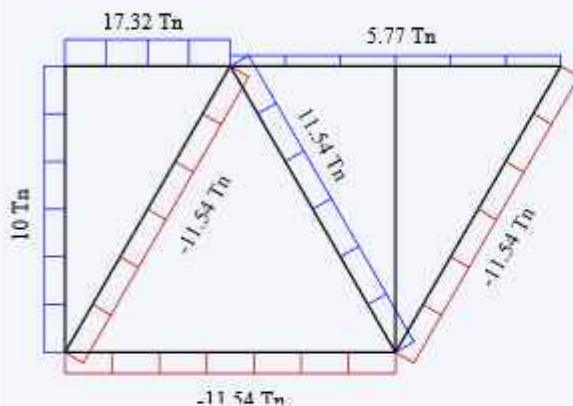
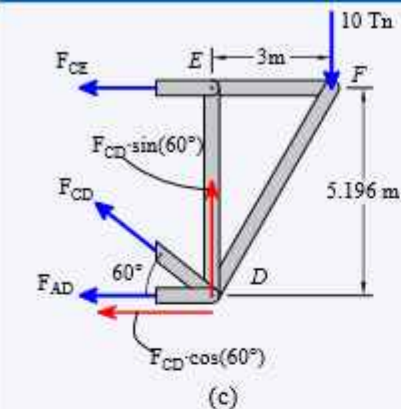
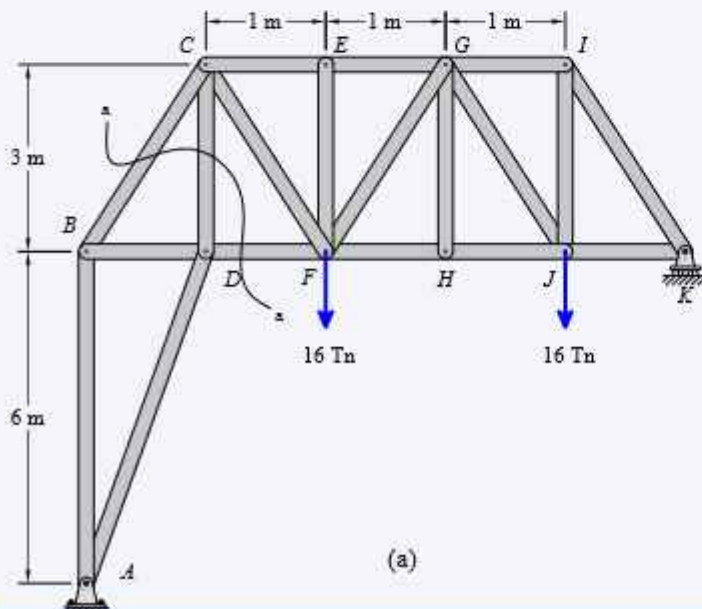


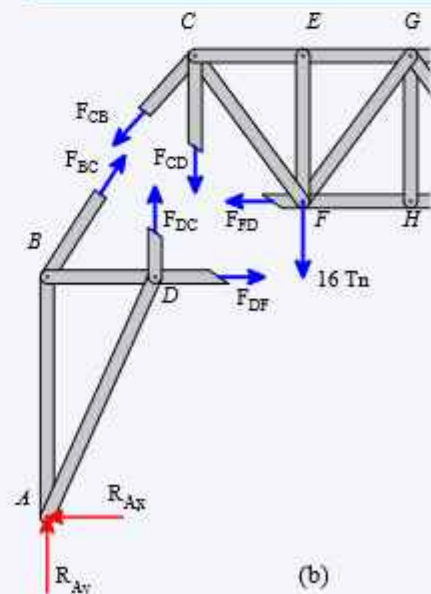
Figura 3.94

Determinar las fuerzas en F_{BC} , F_{CD} y F_{FD} . Por el método de las secciones de la siguiente figura mostrada.

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.3



(a)



(b)

CONTINUACIÓN

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre del sistema (D.C.L.) figura 3.95 (b)

Para la solución del problema necesitamos calcular las reacciones en los apoyos para poder trabajar con una parte del seccionamiento.

Paso ②: Cálculo de las reacciones en los apoyos:

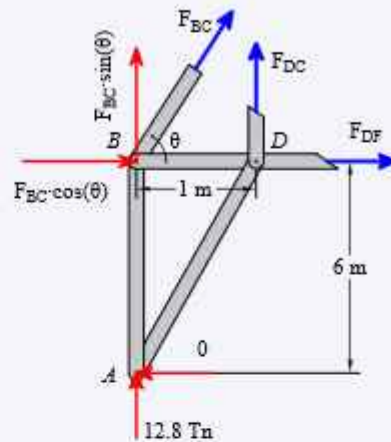
$$\curvearrowright \sum M_A = 0; \quad R_{Ky} \cdot 5 \text{ Tn} - 16 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} - 16 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ky} := \frac{16 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} + 16 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 19.2 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} + 0 = 0 \quad R_{Ax} := 0 \text{ Tn}$$

$$R_{Ay} + R_{Ky} - 16 \text{ Tn} - 16 \text{ Tn} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} := -R_{Ky} + 16 \text{ Tn} + 16 \text{ Tn} = 12.8 \text{ Tn}$$



(c)

Paso ③: Aplicación de condiciones de equilibrio sobre la sección elegida, figura 3.95 (c).

$$\theta := \text{atan} \left(\frac{3 \text{ m}}{1 \text{ m}} \right) = 71.565^\circ$$

$$\curvearrowright \sum M_D = 0;$$

$$F_{BC} \cdot \sin(\theta) \cdot 1 \text{ m} + R_{Ay} \cdot 1 \text{ m} = 0$$

$$F_{BC} := \frac{-R_{Ay} \cdot 1 \text{ m}}{\sin(\theta) \cdot 1 \text{ m}} = -13.492 \text{ Tn} \quad (C)$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0;$$

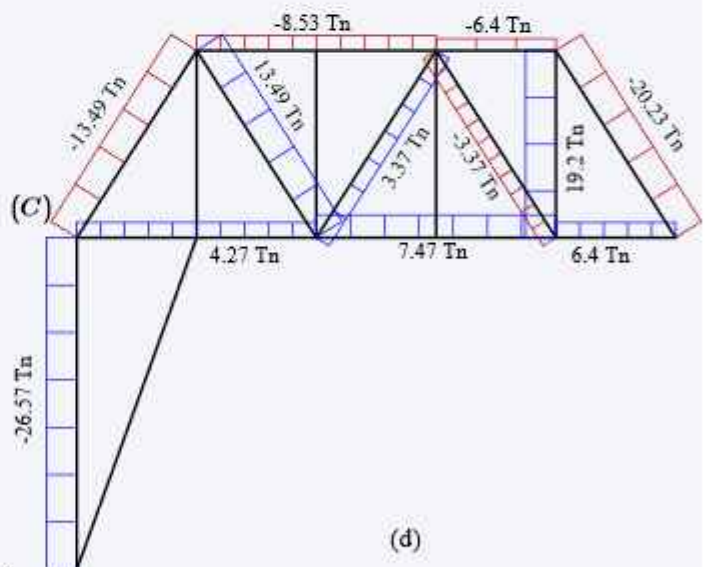
$$F_{DC} + F_{BC} \cdot \sin(\theta) + R_{Ay} = 0$$

$$F_{DC} := -F_{BC} \cdot \sin(\theta) - R_{Ay} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$F_{BC} \cdot \cos(\theta) + F_{DF} = 0$$

$$F_{DF} := -F_{BC} \cdot \cos(\theta) = 4.267 \text{ Tn} \quad (T)$$



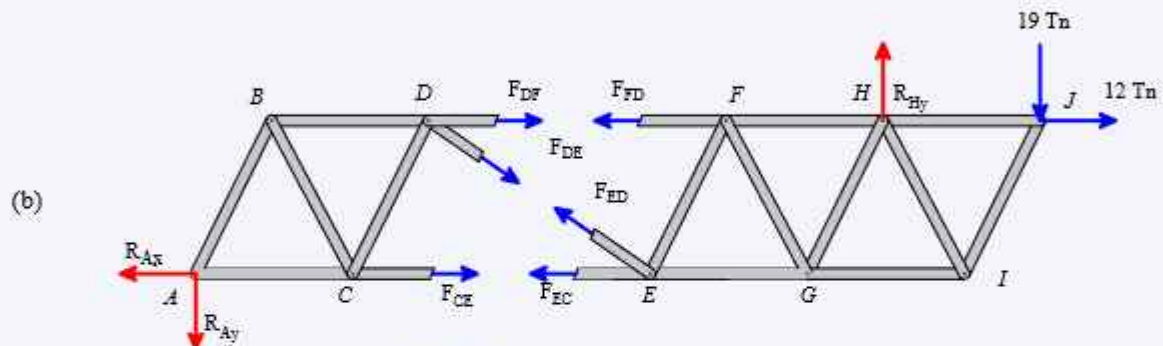
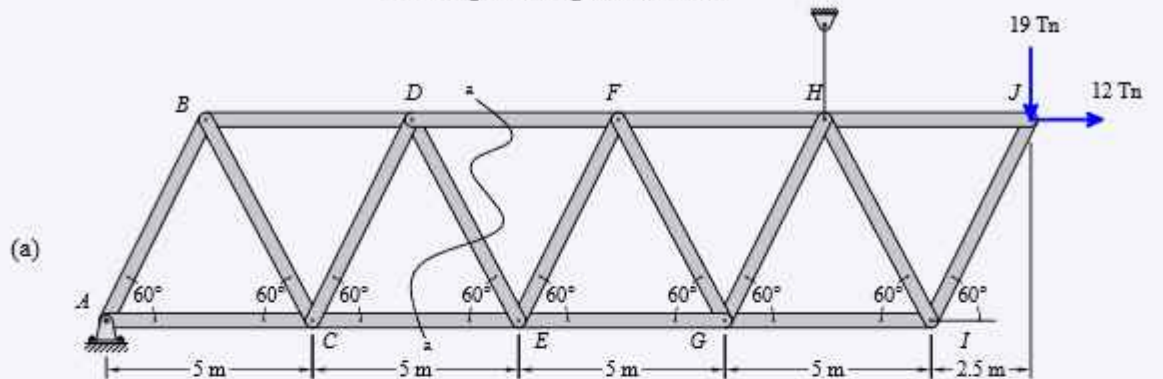
(d)

Figura 3.95

$$\begin{bmatrix} F_{BC} \\ F_{DC} \\ F_{DF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.492 \\ 0 \\ 4.267 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.4

Determinar las fuerzas en F_{CB} , F_{ED} y F_{FD} . Por el método de las secciones de la siguiente figura mostrada.



Paso ①: Diagrama de cuerpo libre del sistema (D.C.L.) figura 3.96 (b)

Para la solución del problema necesitamos calcular las reacciones en los apoyos para poder trabajar con una parte del seccionamiento.

Paso ②: Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$h := 2.5 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

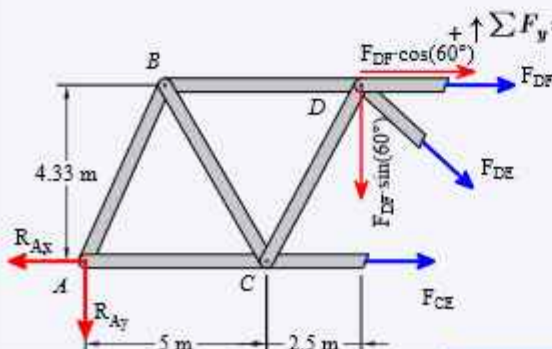
$$\curvearrowright \sum M_A = 0; \quad R_{Hy}(17.5 \text{ m}) - 12 \text{ Tn}(h) - 19 \text{ Tn}(22.5 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Hy} := \frac{12 \text{ Tn} \cdot h + 19 \text{ Tn} \cdot 22.5 \text{ m}}{17.5 \text{ m}} \quad R_{Hy} = 27.398 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 12 \text{ Tn} - R_{Ax} = 0 \quad R_{Ax} = 12 \text{ Tn}$$

(c)

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Hy} - 19 \text{ Tn} - R_{Ay} = 0 \quad R_{Ay} := R_{Hy} - 19 \text{ Tn} = 8.398 \text{ Tn}$$



Paso ③: Aplicación de condiciones de equilibrio sobre la sección elegida, figura 3.96 (c).

$$\curvearrowright \sum M_D = 0; \quad F_{CB}(h) + R_{Ay}(7.5 \text{ m}) - R_{Ax}(h) = 0$$

$$F_{CB} := \frac{-R_{Ay} \cdot 7.5 \text{ m} + R_{Ax} \cdot h}{h} = -2.545 \text{ Tn} \quad (C)$$

CONTINUACIÓN

$$\begin{aligned} & -F_{DE} \cdot \sin(60^\circ) - R_{Ay} = 0 \\ \rightarrow \sum F_x = 0; & \\ & F_{DE} = \frac{-R_{Ay}}{\sin(60^\circ)} = -9.697 \text{ Tn} \end{aligned} \quad (C)$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0; & F_{CE} + F_{DF} + F_{DE} \cdot \cos(60^\circ) - R_{Ax} = 0 \\ & F_{DF} = -F_{DE} \cdot \cos(60^\circ) + R_{Ax} - F_{CE} \\ & F_{DF} = 19.394 \text{ Tn} \end{aligned} \quad (T)$$

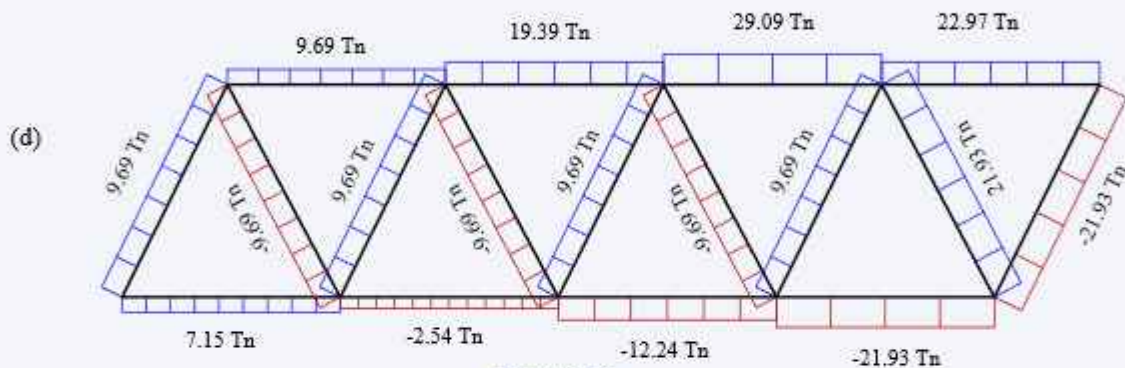
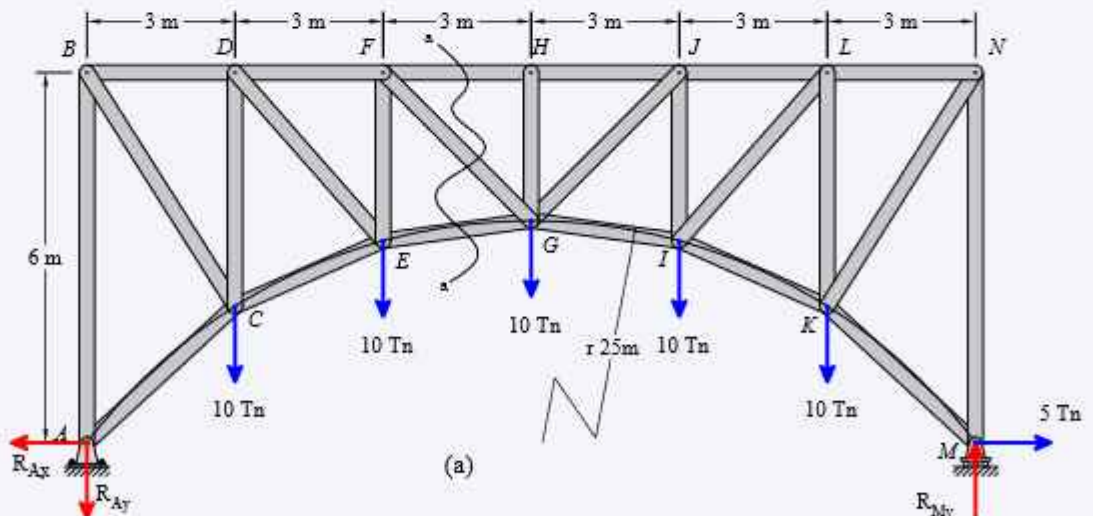


Figura 3.96

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.5

Determinar las fuerzas en F_{FH} , F_{FG} y F_{GG} . Por el método de las secciones de la siguiente figura mostrada.



Paso ①: Cálculo de las reacciones en los apoyos, según la figura 3.97 (a).

$$\curvearrowright \sum M_A = 0; \quad R_{My}(18 \text{ m}) - 10 \text{ Tn}(3 \text{ m}) - 10 \text{ Tn}(6 \text{ m}) - 10 \text{ Tn}(9 \text{ m}) - 10 \text{ Tn}(12 \text{ m}) - 10 \text{ Tn}(15 \text{ m}) = 0$$

$$R_{My} = \frac{10 \text{ Tn} \cdot (3 \text{ m}) + 10 \text{ Tn} \cdot (6 \text{ m}) + 10 \text{ Tn} \cdot (9 \text{ m}) + 10 \text{ Tn} \cdot (12 \text{ m}) + 10 \text{ Tn} \cdot (15 \text{ m})}{18 \text{ m}} = 25 \text{ Tn}$$

CONTINUACIÓN

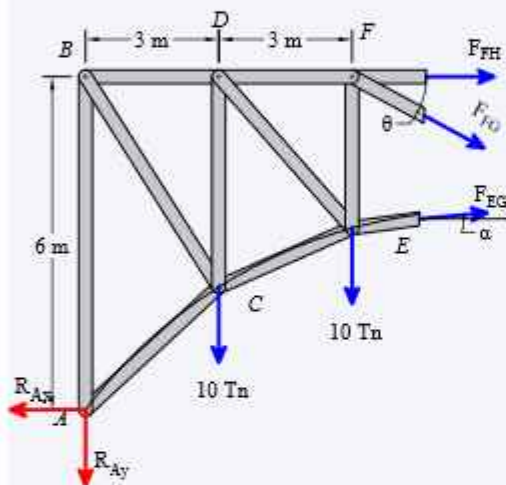
$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 5 \text{ Tn} - R_{Ax} = 0 \quad R_{Ax} = 5 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{My} - 10 \text{ Tn} - 10 \text{ Tn} - 10 \text{ Tn} - 10 \text{ Tn} - 10 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{My} + 10 \text{ Tn} + 10 \text{ Tn} + 10 \text{ Tn} + 10 \text{ Tn} + 10 \text{ Tn} = 25 \text{ Tn}$$

Paso ②: Aplicación de condiciones de equilibrio sobre la sección elegida, figura 3.97 (b).

$$\theta := \text{atan}\left(\frac{4.324 \text{ m}}{3 \text{ m}}\right) = 55.247 \text{ deg} \quad \alpha := \text{atan}\left(\frac{1.676 \text{ m} - 1.495 \text{ m}}{3 \text{ m}}\right) = 3.453 \text{ deg}$$



(b)

$$\curvearrow \sum M_F = 0;$$

$$F_{EG} \cdot \cos(\alpha) (4.505 \text{ m}) + 10 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} - R_{Ay} (6 \text{ m}) - R_{Ax} (6 \text{ m}) = 0$$

$$F_{EG} = \frac{-10 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} + R_{Ay} \cdot (6 \text{ m}) + R_{Ax} \cdot (6 \text{ m})}{\cos(\alpha) \cdot (4.505 \text{ m})}$$

$$F_{EG} = 33.357 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$-F_{EG} \cdot \sin(\theta) + F_{FC} \cdot \sin(\alpha) + R_{Ay} - 20 \text{ Tn} = 0$$

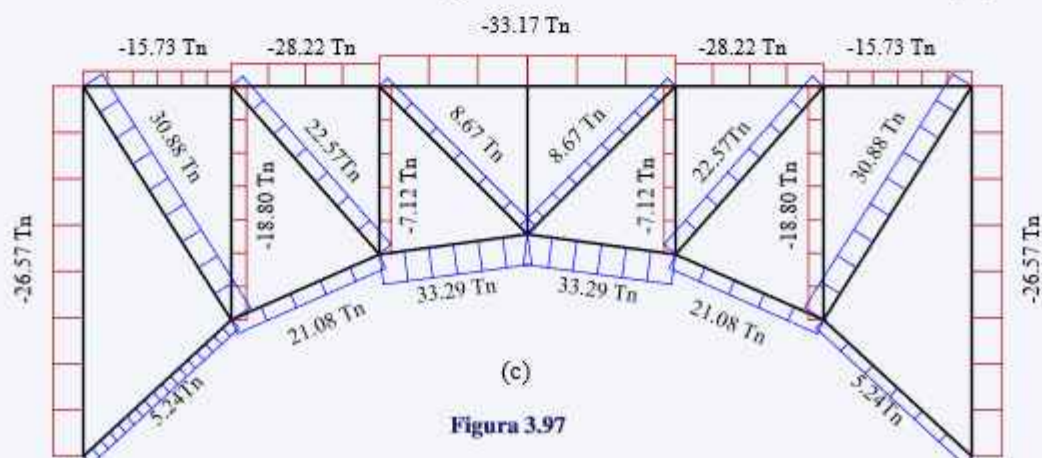
$$F_{FC} = \frac{F_{EG} \cdot \sin(\alpha) + R_{Ay} - 20 \text{ Tn}}{\sin(\theta)} = 8.531 \text{ Tn} \quad (T)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$F_{FH} + F_{FC} \cdot \cos(\theta) + F_{EG} \cdot \cos(\alpha) - R_{Ax} = 0$$

$$F_{FH} = -F_{FC} \cdot \cos(\theta) - F_{EG} \cdot \cos(\alpha) + R_{Ax}$$

$$F_{FH} = -33.159 \text{ Tn} \quad (C)$$

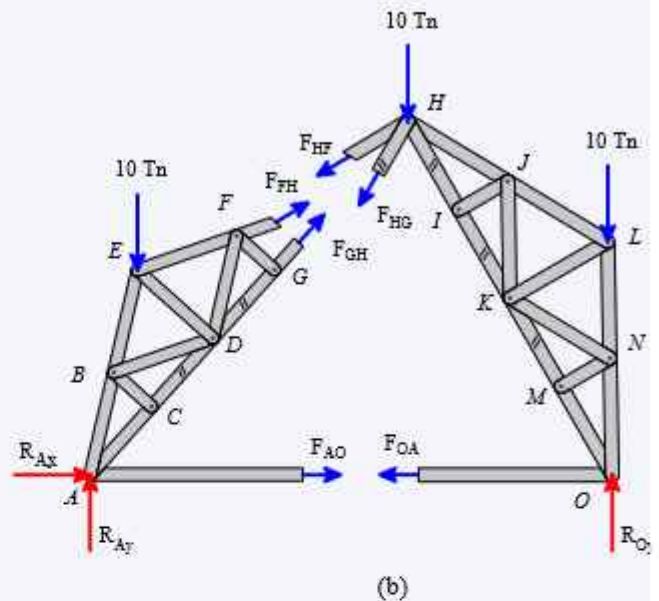
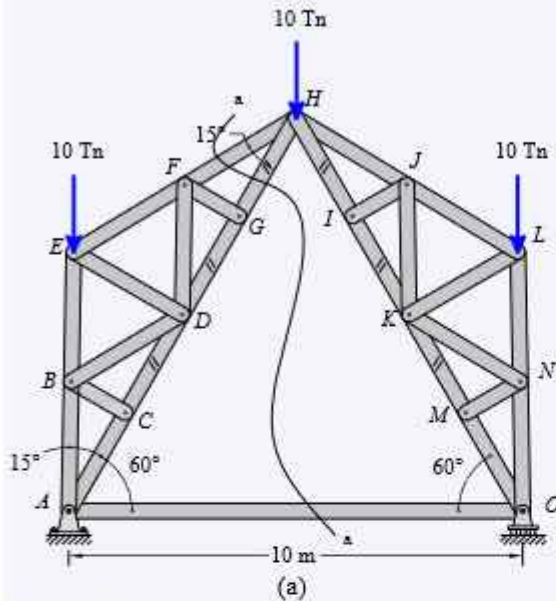


(c)

Figura 3.97

Determinar las fuerzas en F_{FH} , F_{AO} y F_{GH} . Por el método de las secciones de la siguiente figura mostrada.

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.6



Paso ①: Cálculo de las reacciones en los apoyos, figura 3.98 (b).

$$\curvearrowright \sum M_A = 0;$$

$$R_{Oy}(10 \text{ m}) - 10(8.66025404 \text{ m}) - 10(5 \text{ m}) - 10(1.33974596) = 0$$

$$R_{Oy} = \frac{10 \text{ Tn} \cdot (8.66025404 \text{ m}) + 10 \text{ Tn} \cdot (5 \text{ m}) + 10 \text{ Tn} \cdot (1.33974596 \text{ m})}{10 \text{ m}} = 15 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$R_{Ay} + 15 \text{ Tn} - 10 \text{ Tn} - 10 \text{ Tn} - 10 \text{ Tn} = 0$$

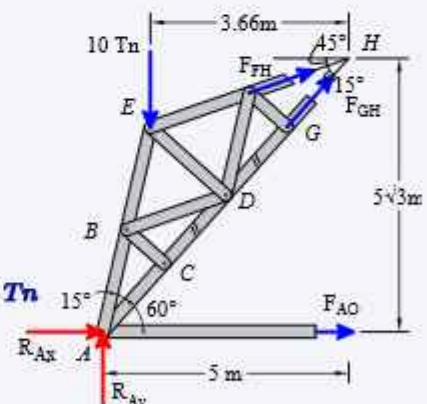
$$R_{Ay} = -15 \text{ Tn} + 10 \text{ Tn} + 10 \text{ Tn} + 10 \text{ Tn} = 15 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$R_{Ax} + 0 = 0$$

$$R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$



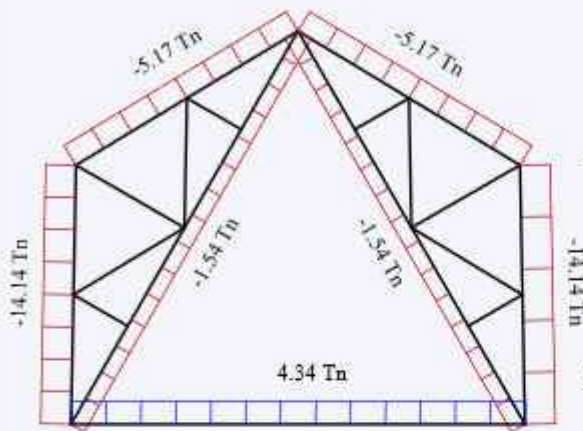
Paso ②: Aplicación de condiciones de equilibrio sobre la sección elegida, figura 3.98 (c).

$$\curvearrowright \sum M_H = 0;$$

$$-R_{Ay} \cdot (5 \text{ m}) + R_{Ax} \cdot (5\sqrt{3}) + F_{AO} \cdot (5 \text{ m}) + 10 \text{ Tn} \cdot (3.66 \text{ m}) = 0$$

$$F_{AO} = \frac{R_{Ay} \cdot (5 \text{ m}) - R_{Ax} \cdot (5\sqrt{3} \text{ m}) - 10 \text{ Tn} \cdot (3.66 \text{ m})}{5 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{m}} = 4.434 \text{ Tn} \quad (T)$$

CONTINUACIÓN



(d)
Figura 3.98

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ;$$

$$F_{AO} + R_{Ax} + F_{GH} \cdot \cos(60^\circ) + F_{FH} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$F_{GH} \cdot \cos(60^\circ) + F_{FH} \cdot \cos(45^\circ) = -F_{AO}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ;$$

$$R_{Ay} - 10 \text{ Tn} + F_{GH} \cdot \sin(60^\circ) + F_{FH} \cdot \sin(45^\circ) = 0$$

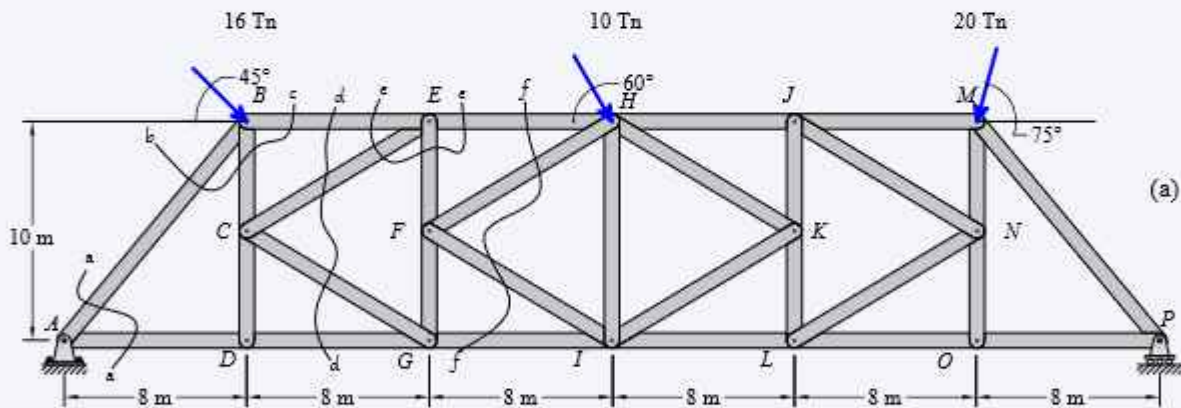
$$F_{GH} \cdot \sin(60^\circ) + F_{FH} \cdot \sin(45^\circ) = -5 \text{ Tn}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & \cos(45^\circ) \\ \sin(60^\circ) & \sin(45^\circ) \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} -F_{AO} \\ -5 \text{ Tn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{GH} \\ F_{FH} \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot u = \begin{bmatrix} -1.546 \\ -5.177 \end{bmatrix} \text{ Tn} \quad \begin{bmatrix} (C) \\ (C) \end{bmatrix}$$

Determinar las fuerzas en F_{AB} , F_{AD} , F_{BC} , F_{BE} , F_{CE} , F_{EF} , F_{EH} , F_{FH} , F_{FI} y F_{GI} . Por el método de las secciones de la siguiente figura mostrada.

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.7



Paso ①: Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 ;$$

$$R_{Py}(48) + 20 \cos(75^\circ)(10) - 20 \sin(75^\circ)(40) - 10 \cos(60^\circ)(10) - 10 \sin(60^\circ)(24) - 16 \cos(45^\circ)(10) - 16 \sin(45^\circ)(8) = 0$$

$$R_{Py} = \frac{-(20 \cos(75^\circ)(10) - 20 \sin(75^\circ)(40) - 10 \cos(60^\circ)(10) - 10 \sin(60^\circ)(24) - 16 \cos(45^\circ)(10) - 16 \sin(45^\circ)(8))}{48}$$

$$R_{Py} = 24.635 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad -R_{Ax} + 16 \cos(45^\circ) + 10 \cos(60^\circ) - 20 \cos(75^\circ) = 0$$

$$R_{Ax} = 16 \cos(45^\circ) + 10 \cos(60^\circ) - 20 \cos(75^\circ)$$

$$R_{Ax} = 11.137 \text{ Tn}$$

CONTINUACIÓN

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad R_{Ay} + R_{Py} - 16 \sin(45^\circ) - 10 \sin(60^\circ) - 20 \sin(75^\circ) = 0 \\
 R_{Ay} = & -R_{Py} + 16 \sin(45^\circ) + 10 \sin(60^\circ) + 20 \sin(75^\circ) \\
 R_{Ay} = & 14.658 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

Paso ②: Aplicación de **condiciones de equilibrio** sobre la sección elegida, para obtener F_{AB} y F_{AD} , figura 3.99 (b).

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0; & \\
 -F_{BA} \cdot \sin(51.34^\circ) + R_{Ay} = 0 & \\
 F_{BA} = & \frac{R_{Ay}}{\sin(51.34^\circ)} = 18.771 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \sum F_x = 0; & \\
 -F_{BA} \cdot \cos(51.34^\circ) + F_{AD} - R_{Ax} = 0 & \\
 F_{AD} = & F_{BA} \cdot \cos(51.34^\circ) + R_{Ax} = 22.864 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

Aplicación de **condiciones de equilibrio** sobre la sección elegida, para obtener F_{BE} y F_{BC} , figura 3.99 (c).

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \sum F_x = 0; & \\
 F_{BE} + F_{BA} \cdot \sin(38.66^\circ) + 16 \cos(45^\circ) = 0 & \\
 F_{BE} = & -F_{BA} \cdot \sin(38.66^\circ) - 16 \text{ Tn} \cos(45^\circ) = -23.04 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0; & \\
 -F_{BC} + F_{BA} \cdot \cos(38.66^\circ) - 16 \text{ Tn} \sin(45^\circ) = 0 & \\
 F_{BC} = & F_{BA} \cdot \cos(38.66^\circ) - 16 \text{ Tn} \sin(45^\circ) = 3.344 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

Aplicación de **condiciones de equilibrio** sobre la sección elegida, para obtener F_{DG} , F_{CE} y F_{CG} , figura 3.99 (d).

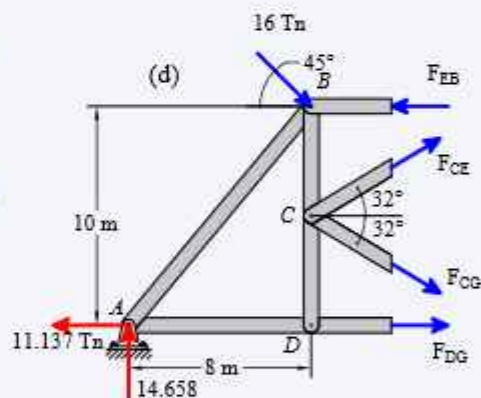
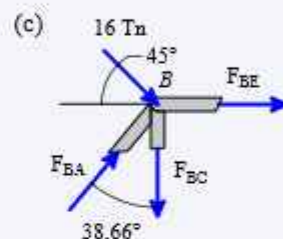
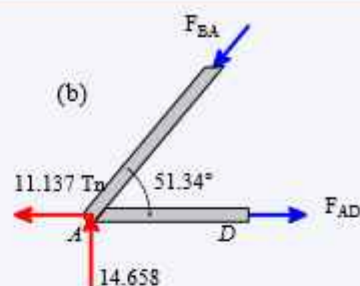
$$\begin{aligned}
 \curvearrowright \sum M_C = 0; & \\
 F_{DG} \cdot 5 \text{ m} + F_{EB} \cdot 5 \text{ m} - 16 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) \cdot 5 \text{ m} - R_{Ay} \cdot 8 \text{ m} - R_{Ax} \cdot 5 \text{ m} = 0 & \\
 F_{DG} = & \frac{-F_{EB} \cdot 5 \text{ m} + 16 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) \cdot 5 \text{ m} + R_{Ay} \cdot 8 \text{ m} + R_{Ax} \cdot 5 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 22.863 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad F_{DG} - R_{Ax} + F_{CG} \cdot \cos(32^\circ) + F_{CE} \cdot \cos(32^\circ) - F_{EB} + 16 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) = 0 \quad \dots (1)$$

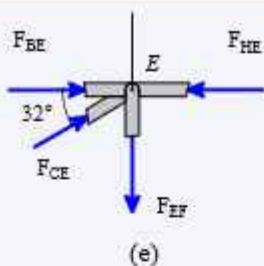
$$+ \uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - F_{CG} \cdot \sin(32^\circ) + F_{CE} \cdot \sin(32^\circ) - 16 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) = 0 \quad \dots (2)$$

Resolviendo las ecuaciones 1 y 2 obtenemos:

$$[F_{CE} \quad F_{CG}] = \begin{bmatrix} F_{DG} - R_{Ax} + F_{CG} \cdot \cos(32^\circ) + F_{CE} \cdot \cos(32^\circ) - F_{EB} + 16 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) = 0 \\ R_{Ay} - F_{CG} \cdot \sin(32^\circ) + F_{CE} \cdot \sin(32^\circ) - 16 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) = 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{solve, } F_{CE}, F_{CG}} \dots \begin{bmatrix} -3.155 \text{ Tn} \\ 3.155 \text{ Tn} \end{bmatrix}$$



CONTINUACIÓN



$$F_{CE} = -3.155 \text{ Tn}$$

$$F_{CG} = 3.155 \text{ Tn}$$

Aplicación de **condiciones de equilibrio** sobre la sección elegida, para obtener F_{HE} y F_{EF} , figura 3.99 (e).

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad F_{BE} - F_{HE} + F_{CE} \cdot \cos(32^\circ) = 0$$

$$F_{HE} = F_{BE} + F_{CE} \cdot \cos(32^\circ) = 25.716 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -F_{EF} + F_{CE} \cdot \sin(32^\circ) = 0$$

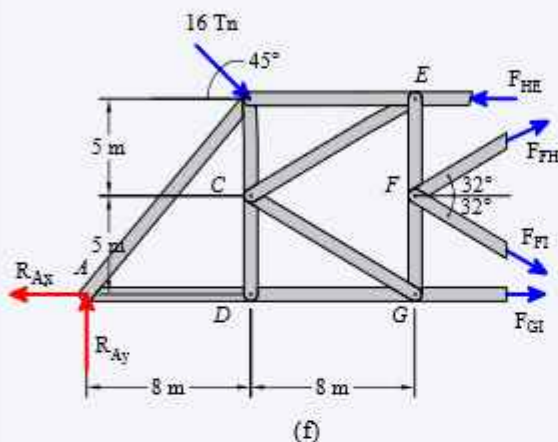
$$F_{EF} = F_{CE} \cdot \sin(32^\circ) = 1.672 \text{ Tn}$$

Aplicación de **condiciones de equilibrio** sobre la sección elegida, para obtener F_{GI} , F_{FI} y F_{FH} , figura 3.99 (f).

$$\curvearrowleft \sum M_F = 0;$$

$$F_{GI} \cdot 5 \text{ m} + F_{HE} \cdot 5 \text{ m} - 16 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) \cdot 5 \text{ m} + \dots$$

$$\dots - 16 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) \cdot 8 \text{ m} - R_{Ay} \cdot 16 \text{ m} - R_{Ax} \cdot 5 \text{ m} = 0$$



$$F_{GI} = \frac{-F_{HE} \cdot 5 \text{ m} + 16 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) \cdot 5 \text{ m} - 16 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) \cdot 8 \text{ m} + R_{Ay} \cdot 16 \text{ m} + R_{Ax} \cdot 5 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 25.538 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad F_{GI} - R_{Ax} + F_{FI} \cdot \cos(32^\circ) + F_{FH} \cdot \cos(32^\circ) - F_{HE} + 16 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) = 0 \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - F_{FI} \cdot \sin(32^\circ) + F_{FH} \cdot \sin(32^\circ) - 16 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) = 0 \quad \dots (2)$$

$$[F_{FI} \quad F_{FH}] = \begin{bmatrix} F_{GI} - R_{Ax} + F_{FI} \cdot \cos(32^\circ) + F_{FH} \cdot \cos(32^\circ) - F_{HE} + 16 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) = 0 \\ R_{Ay} - F_{FI} \cdot \sin(32^\circ) + F_{FH} \cdot \sin(32^\circ) - 16 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) = 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{solve, } F_{FI}, F_{FH}} \dots \begin{bmatrix} 3.156 \text{ Tn} \\ -3.155 \text{ Tn} \end{bmatrix}$$

$$[F_{FI} \quad F_{FH}] = [3.156 \quad -3.155] \text{ Tn}$$

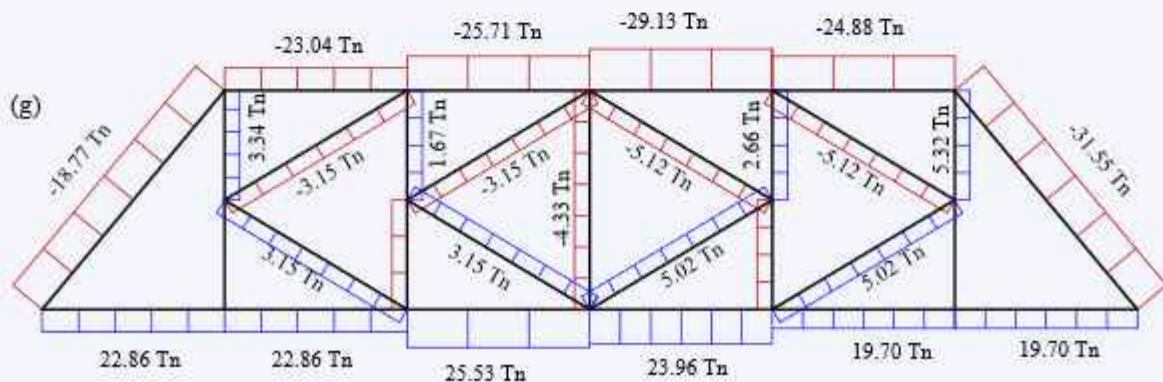
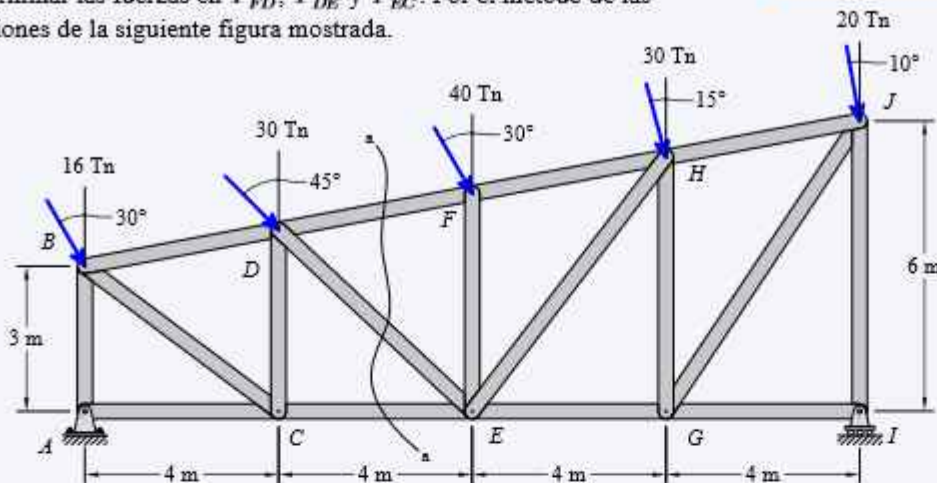


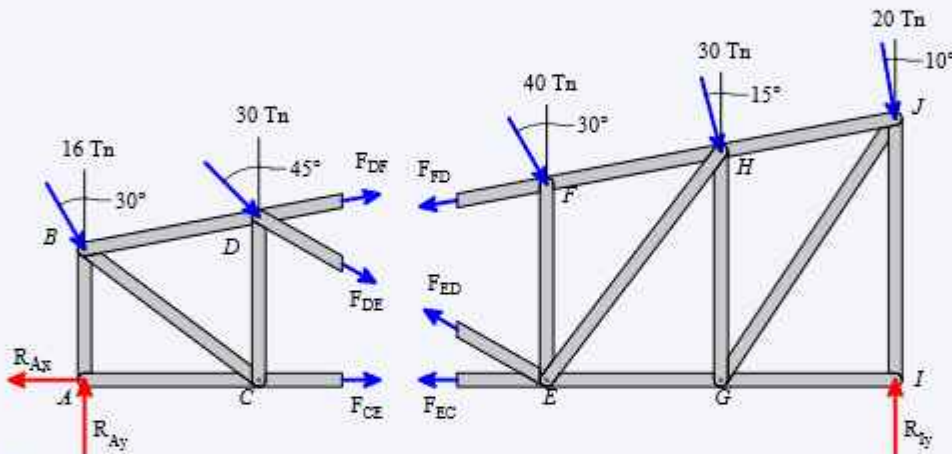
Figura 3.99

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.8

Determinar las fuerzas en F_{FD} , F_{DE} y F_{EC} . Por el método de las secciones de la siguiente figura mostrada.



(a)



(b)

Paso ①: Diagrama de cuerpo libre del sistema (DCL) figura 3.100 (b)

Para la solución del problema necesitamos calcular las reacciones en los apoyos para poder trabajar con una parte del seccionamiento.

Paso ②: Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 ;$$

$$R_{Iy} \cdot (16 \text{ m}) - 16 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) \cdot 3 \text{ m} - 30 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) \cdot 3.75 \text{ m} - 30 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) \cdot 4 \text{ m} - 40 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) \cdot 4.5 \text{ m} - \dots$$

$$\dots - 40 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) \cdot 8 \text{ m} - 30 \text{ Tn} \cdot \sin(15^\circ) \cdot 5.25 \text{ m} - 30 \text{ Tn} \cdot \cos(15^\circ) \cdot 12 \text{ m} - 20 \text{ Tn} \cdot \sin(10^\circ) \cdot 6 \text{ m} - 20 \text{ Tn} \cdot \cos(10^\circ) \cdot 16 \text{ m} = 0$$

$$R_{Iy} = 80 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ;$$

$$R_{Ax} - 16 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) - 30 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) - 40 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) - 30 \text{ Tn} \cdot \sin(15^\circ) - 20 \text{ Tn} \cdot \sin(10^\circ) = 0$$

$$R_{Ax} = 16 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) + 30 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) + 40 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) + 30 \text{ Tn} \cdot \sin(15^\circ) + 20 \text{ Tn} \cdot \sin(10^\circ)$$

$$R_{Ax} = 60.451 \text{ Tn}$$

CONTINUACIÓN

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$R_{Ay} + R_{By} - 16 \text{ Tn} \cos(30^\circ) - 30 \text{ Tn} \cos(45^\circ) - 40 \text{ Tn} \cos(30^\circ) - 30 \text{ Tn} \cdot \cos(15^\circ) - 20 \text{ Tn} \cdot \cos(10^\circ) = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{By} + 16 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) + 30 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) + 40 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) + 30 \text{ Tn} \cdot \cos(15^\circ) + 20 \text{ Tn} \cdot \cos(10^\circ)$$

$$R_{Ay} = 38.384 \text{ Tn}$$

Paso ③: Aplicación de **condiciones de equilibrio** sobre la sección elegida, figura 3.100 (c).

$$\curvearrowright \sum M_D = 0;$$

$$F_{CE}(3.75) + 16 \sin(30^\circ)(0.75) + 16 \cos(30^\circ)(4) - R_{Ay}(4) - R_{Ax}(3.75) = 0$$

$$F_{CE} = \frac{-16 \text{ Tn} \sin(30^\circ)(0.75) - 16 \text{ Tn} \cos(30^\circ)(4) + R_{Ay}(4) + R_{Ax}(3.75)}{3.75}$$

$$F_{CE} = 85.014 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad \theta := 10.62^\circ \quad \alpha := 46.85^\circ$$

$$F_{DF} \cdot \cos(\theta) + F_{DE} \cdot \sin(\alpha) + 16 \text{ Tn} \sin(30^\circ) + F_{CE} - R_{Ax} + 30 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$F_{DF} \cdot \sin(\theta) - F_{DE} \cdot \cos(\alpha) + R_{Ay} - 16 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) - 30 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

De las ecuaciones 1 y 2 obtenemos:

$$B := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\alpha) \\ \sin(\theta) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.983 & 0.73 \\ 0.184 & -0.684 \end{bmatrix}$$

$$v := \begin{bmatrix} -16 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) - F_{CE} + R_{Ax} - 30 \text{ Tn} \cdot \sin(45^\circ) \\ -R_{Ay} + 16 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) + 30 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53.776 \\ -3.315 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$\begin{bmatrix} F_{DF} \\ F_{DE} \end{bmatrix} := B^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} -48.592 \\ -8.247 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

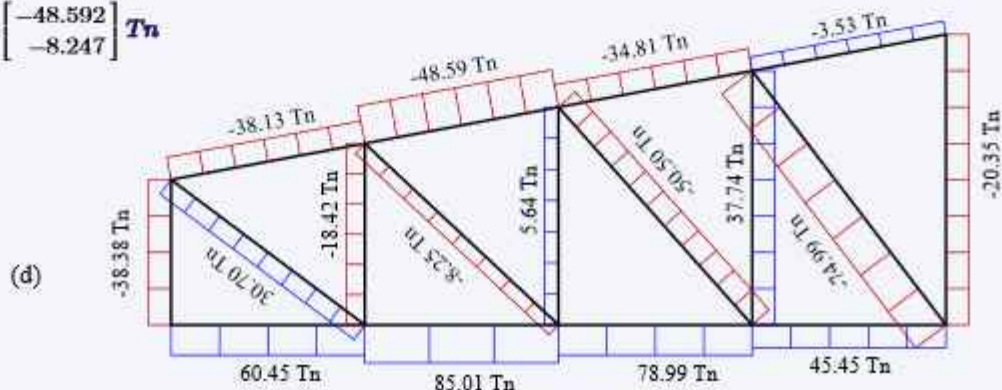
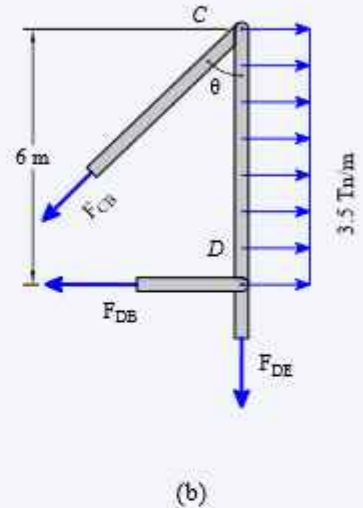
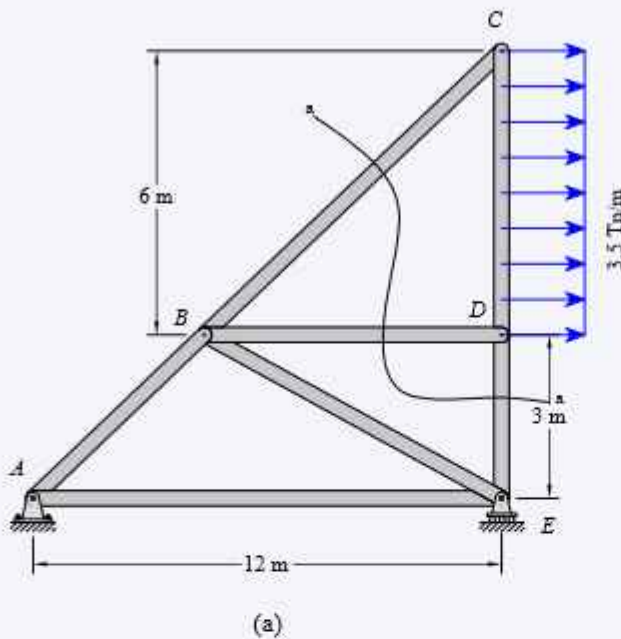


Figura 3.100

Determinar las fuerzas en F_{BC} , F_{BD} y F_{DE} . Por el método de las secciones de la siguiente figura mostrada.

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.9



Paso ①: Diagrama de cuerpo libre del sistema (D.C.L.)
 Para la solución del problema no necesitamos calcular las reacciones para el seccionamiento.

Paso ②: Aplicación de condiciones de equilibrio sobre la sección elegida, figura 3.101 (b). $\theta := 53.13^\circ$

$$\curvearrowright \sum M_C = 0 ; -F_{DB} \cdot (6 \text{ m}) + 20 \text{ Tn} \cdot (6 \text{ m}) \cdot \frac{6 \text{ m}}{2} = 0$$

$$F_{DB} := \frac{3.5 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot (6 \text{ m}) \cdot \frac{6 \text{ m}}{2}}{6 \text{ m}} = 10.5 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; -F_{DB} - F_{CB} \cdot \sin(\theta) + 21 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{CB} := \frac{21 \text{ Tn} - F_{DB}}{\sin(\theta)} = 13.125 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ;$$

$$-F_{CD} - F_{CB} \cdot \cos(\theta) = 0$$

$$F_{CD} := -F_{CB} \cdot \cos(\theta)$$

$$F_{CD} = -7.875 \text{ Tn}$$

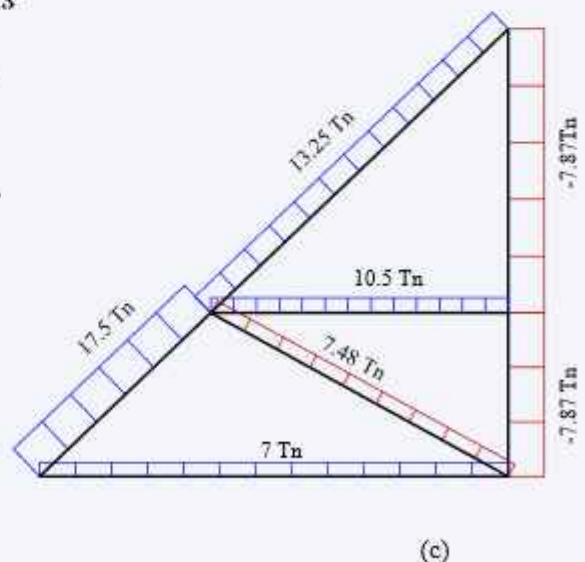
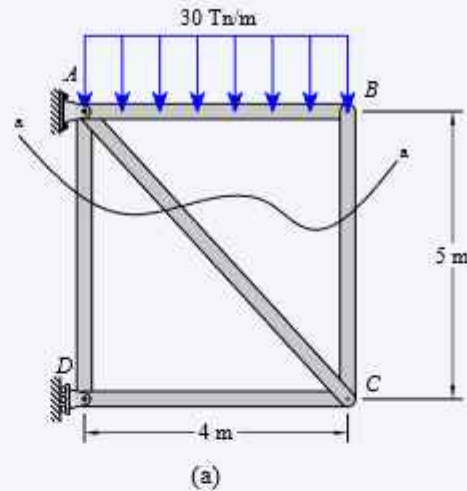
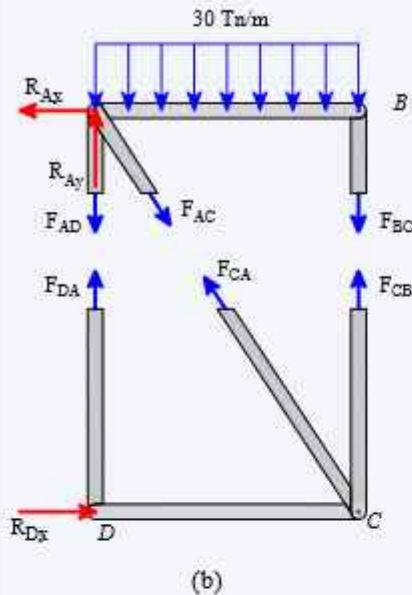


Figura 3.101

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.10

Determinar las fuerzas en F_{AD} , F_{AC} y F_{BC} . Por el método de las secciones de la siguiente figura mostrada.



Paso ①: Diagrama de cuerpo libre del sistema (D.C.L.) figura 3.102 (b)

Para la solución del problema necesitamos calcular las reacciones en los apoyos para poder trabajar con una parte del seccionamiento.

Paso ②: Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\curvearrowright \sum M_A = 0; -R_{Dx}(5 \text{ m}) - 30 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot (4 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$R_{Dx} = \frac{30 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot (8 \text{ m})}{5} = 48 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; -R_{Ax} + R_{Dx} = 0$$

$$R_{Ax} = R_{Dx} = 48 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; R_{Ay} - 30 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ay} = 30 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} = 120 \text{ Tn}$$

Paso ③: Aplicación de condiciones de equilibrio sobre la sección elegida, figura 3.102 (c).

$$\curvearrowright \sum M_A = 0; -F_{BC} \cdot 4 \text{ m} - 30 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m}$$

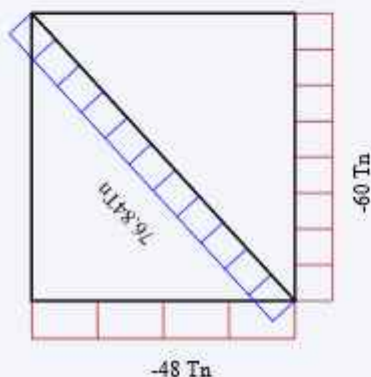
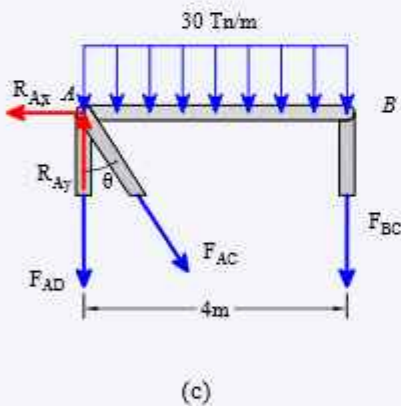
$$F_{BC} = -\frac{30 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m}}{4 \text{ m}} = -60 \text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; -R_{Ax} + F_{AC} \cdot \sin(\theta) = 0 \quad F_{AC} = \frac{R_{Ax}}{\sin(\theta)} = 76.837 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; R_{Ay} - F_{AC} \cdot \cos(\theta) - 30 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} - F_{BC} - F_{AD} = 0$$

$$F_{AD} = R_{Ay} - F_{AC} \cdot \cos(\theta) - 30 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} - F_{BC}$$

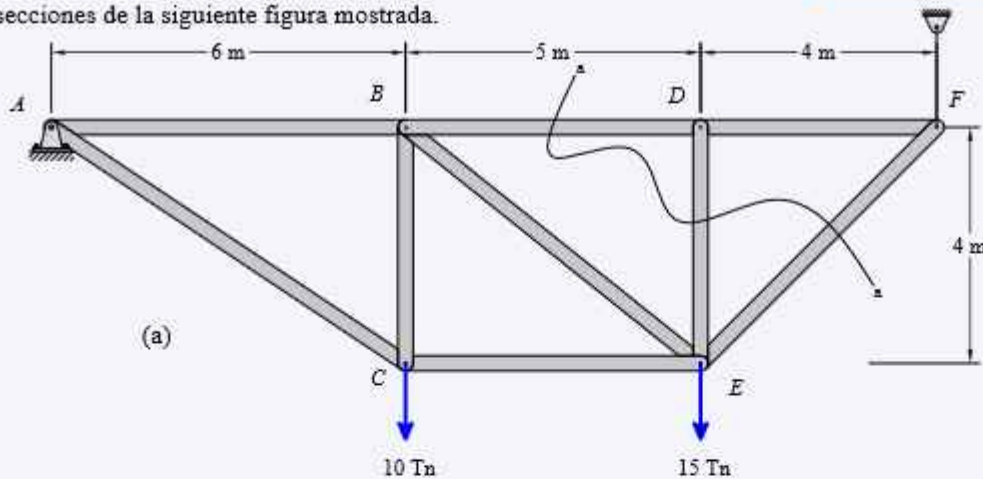
$$F_{AD} = 0 \text{ Tn}$$



(d) Figura 3.102

EJEMPLO RESUELTO 3.4.1.11

Determinar las fuerzas en F_{BD} , F_{DE} y F_{FE} . Por el método de las secciones de la siguiente figura mostrada.



Paso ①: Diagrama de cuerpo libre del sistema (D.C.L.)

Para la solución del problema necesitamos calcular las reacciones en los apoyos para poder trabajar con una parte del seccionamiento.

Paso ②: Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\curvearrowright \sum M_A = 0; \quad R_{Fy}(15\text{ m}) - 10\text{ Tn}(6\text{ m}) - 15\text{ Tn}(11\text{ m}) = 0$$

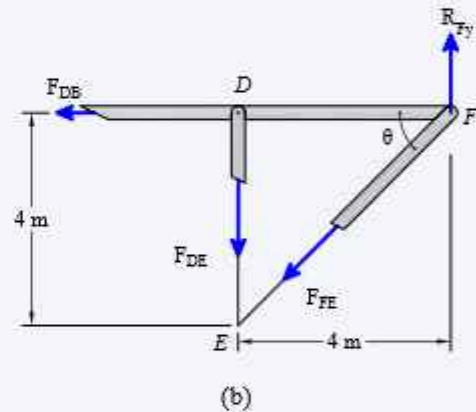
$$R_{Fy} = \frac{10\text{ Tn} \cdot (6\text{ m}) + 15\text{ Tn} \cdot (11\text{ m})}{15\text{ m}} = 15\text{ Tn}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} + 0 = 0 \quad R_{Ax} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Fy} - 10\text{ Tn} - 15\text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{Fy} + 10\text{ Tn} + 15\text{ Tn}$$

$$R_{Ay} = 10\text{ Tn}$$



Paso ③: Aplicación de condiciones de equilibrio sobre la sección elegida, figura 3.103 (b).

$$\curvearrowright \sum M_E = 0; \quad F_{DB}(4\text{ m}) + R_{Fy}(4\text{ m}) = 0 \quad \rightarrow \sum F_x = 0; \quad -F_{DB} - F_{FE} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$F_{DB} = \frac{-R_{Fy} \cdot (4\text{ m})}{4\text{ m}} = -15\text{ Tn}$$

$$F_{FE} = \frac{-F_{DB}}{\cos(45^\circ)} = 21.213\text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$-F_{DE} + R_{Fy} - F_{FE} \cdot \sin(45^\circ) = 0$$

$$F_{DE} = R_{Fy} - F_{FE} \cdot \sin(45^\circ) = 0\text{ Tn}$$

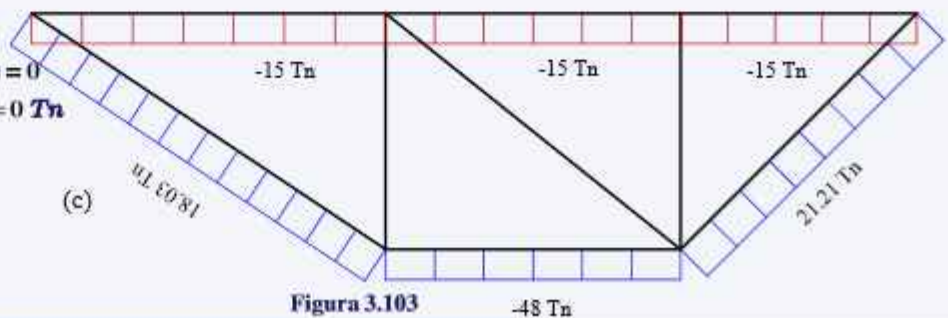


Figura 3.103

3.4.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

11 Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.73

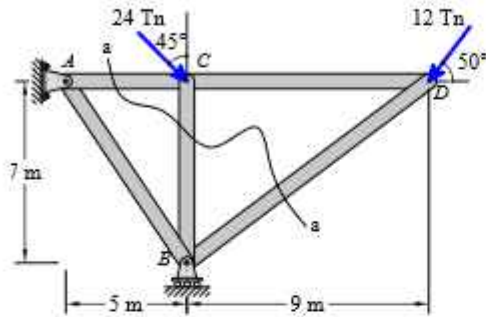


Figura 3.104

3.74

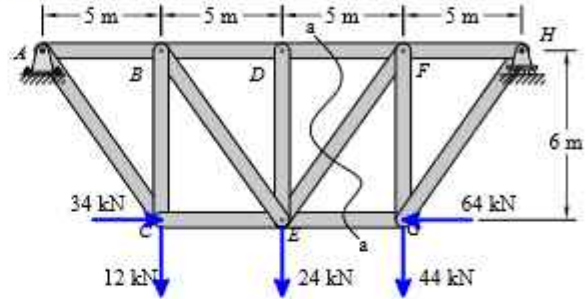


Figura 3.105

3.75

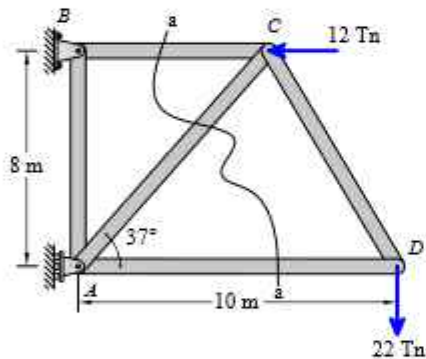


Figura 3.106

3.76

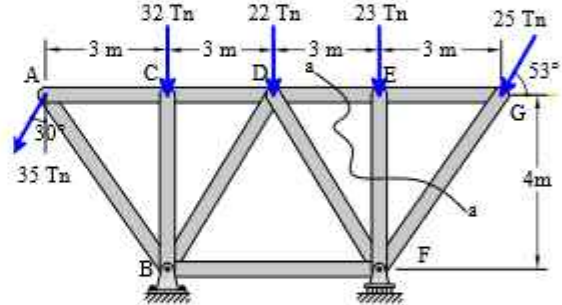


Figura 3.107

3.77

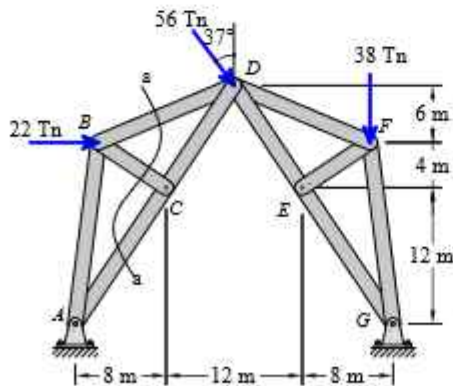


Figura 3.108

3.78

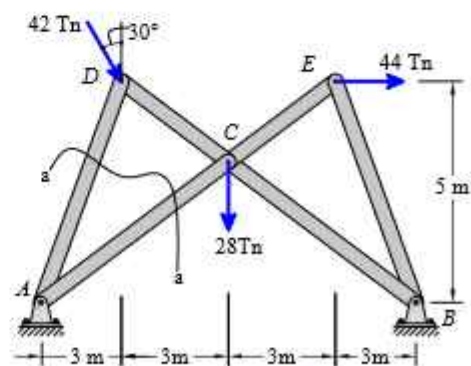


Figura 3.109

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.79

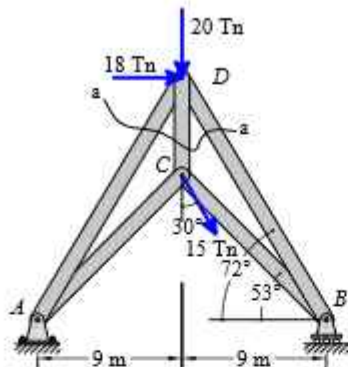


Figura 3.110

3.80

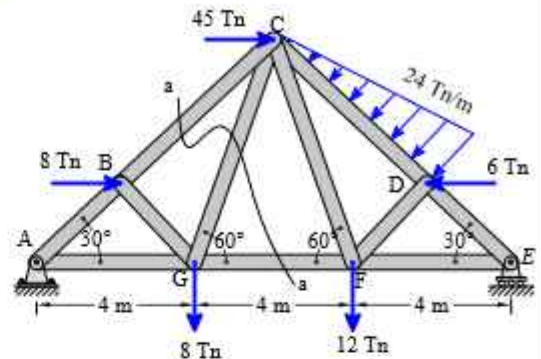


Figura 3.111

3.81

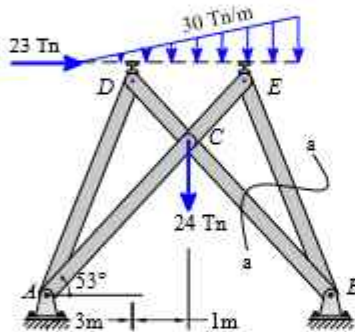


Figura 3.112

3.82

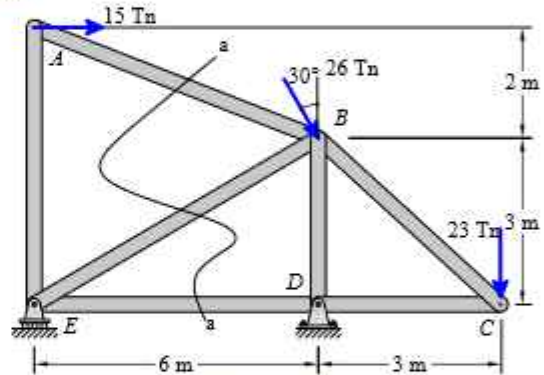


Figura 3.113

3.83

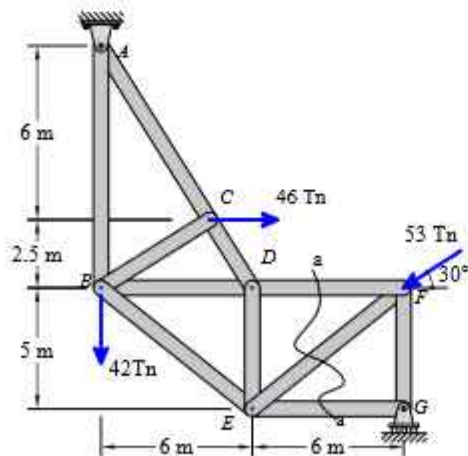


Figura 3.114

3.84

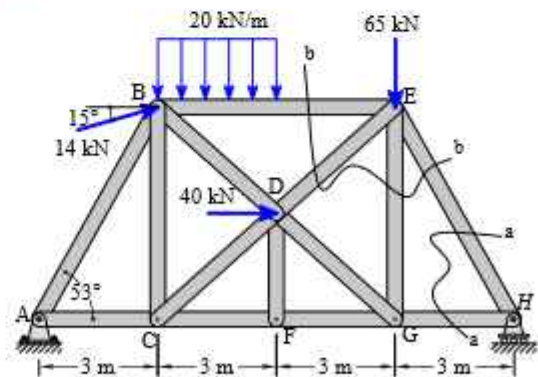


Figura 3.115

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.85

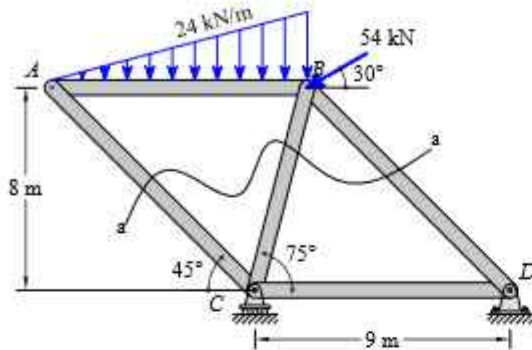


Figura 3.116

3.86

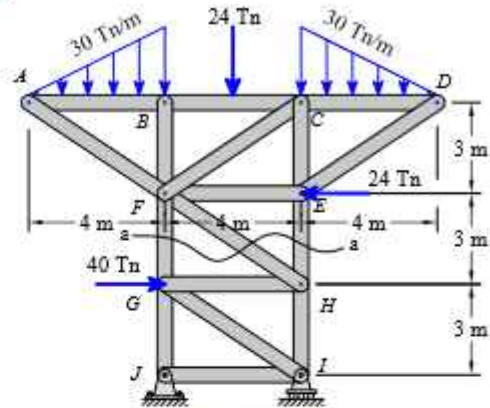


Figura 3.117

3.87

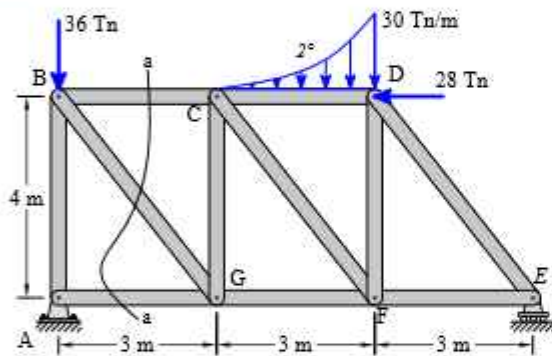


Figura 3.118

3.88

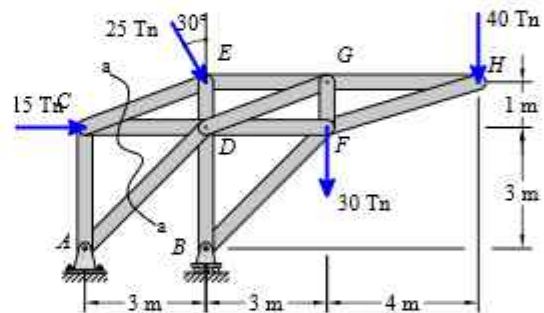


Figura 3.119

3.89

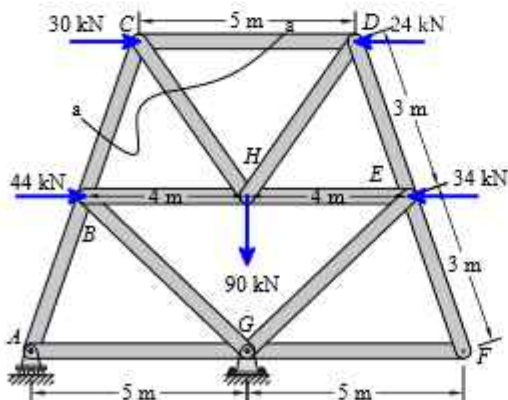


Figura 3.120

3.90

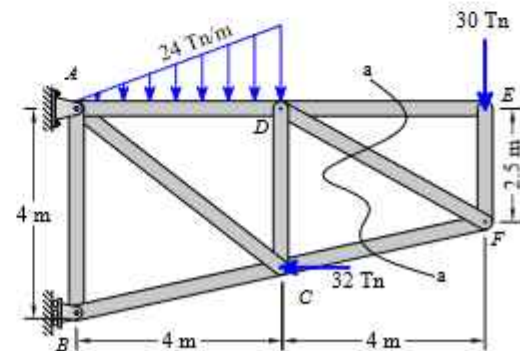


Figura 3.121

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.91

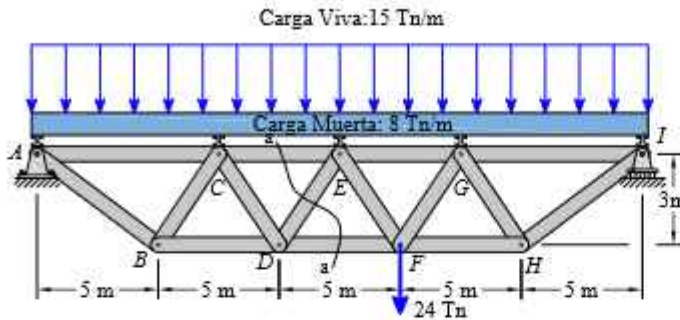


Figura 3.122

3.92

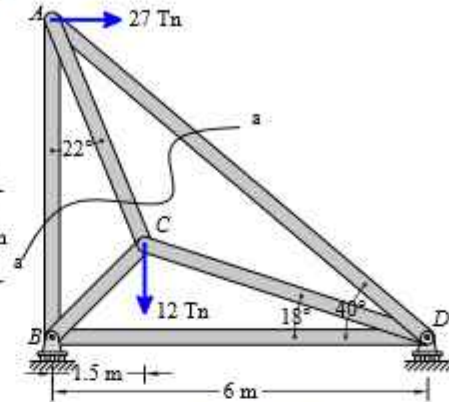


Figura 3.123

3.93

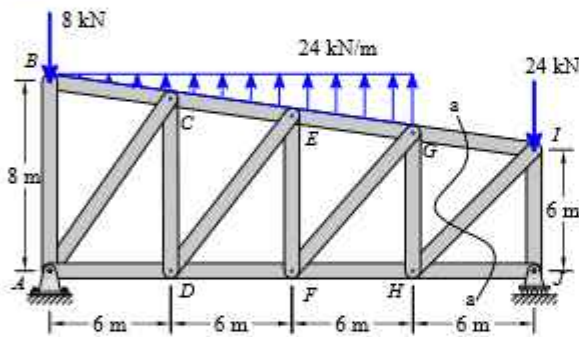


Figura 3.124

3.94

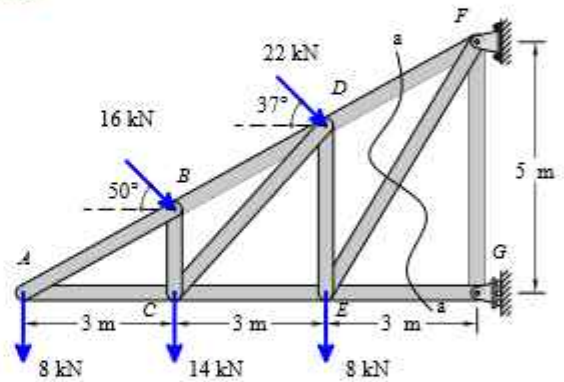


Figura 3.125

3.95

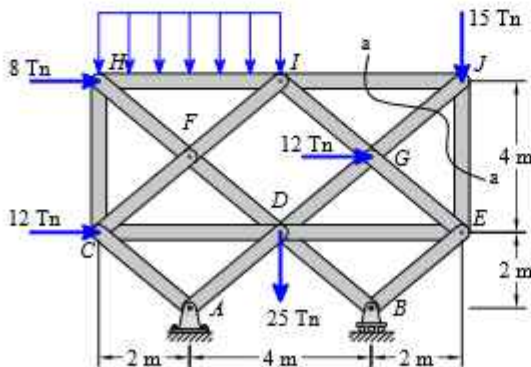


Figura 3.126

3.96

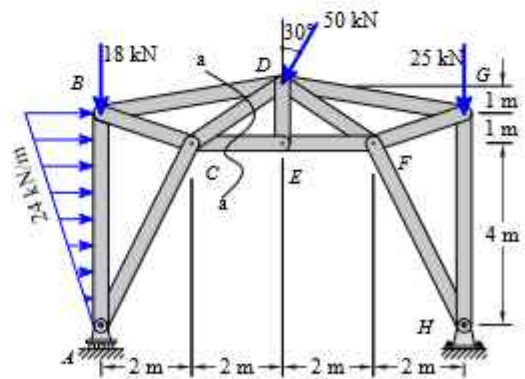


Figura 3.127

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.97

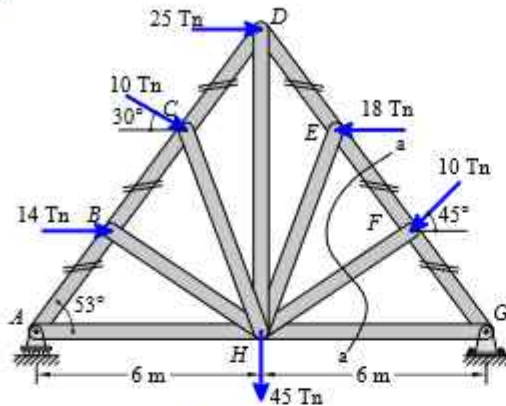


Figura 3.128

3.98

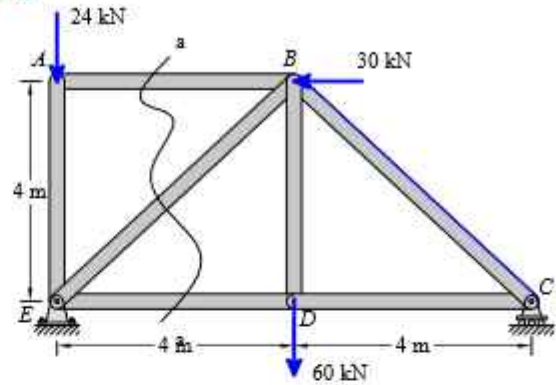


Figura 3.129

3.99

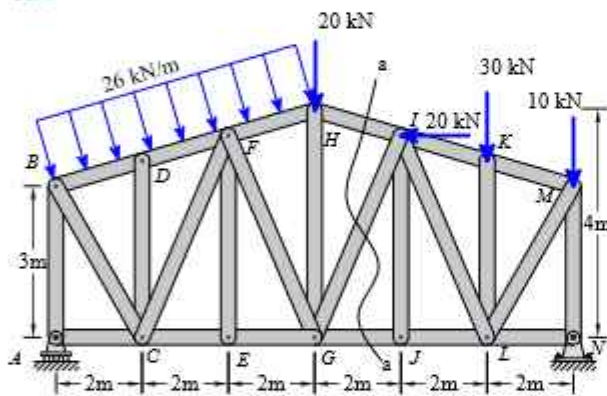


Figura 3.130

3.100

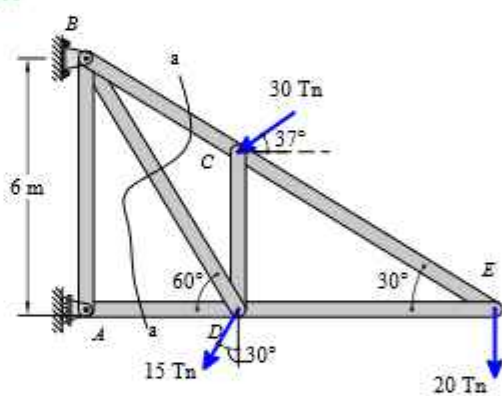


Figura 3.131

3.101

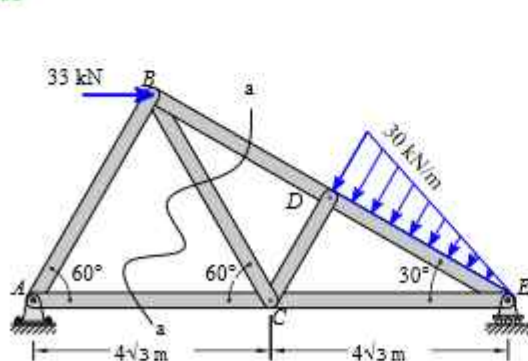


Figura 3.132

3.102

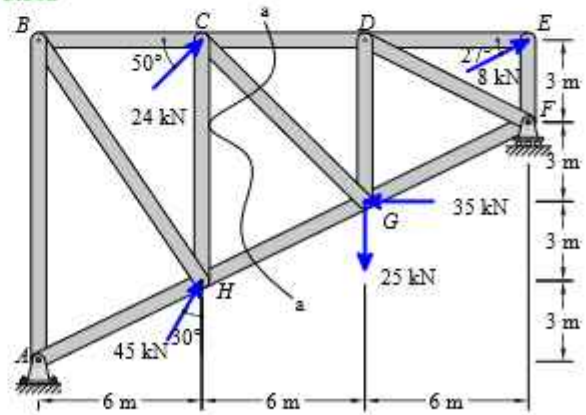


Figura 3.133

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.103

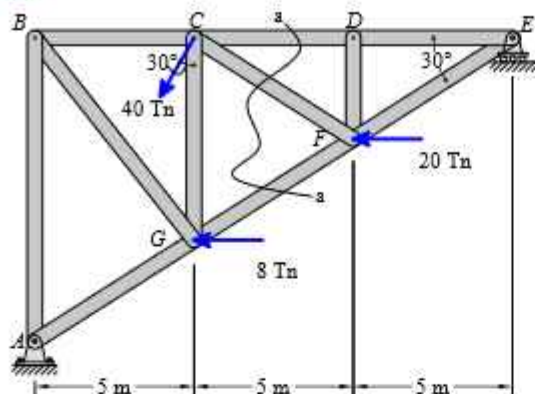


Figura 3.134

3.104

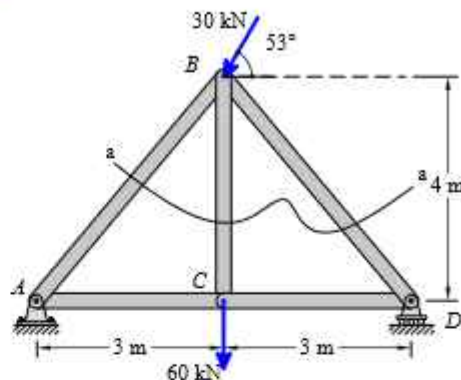


Figura 3.135

3.105

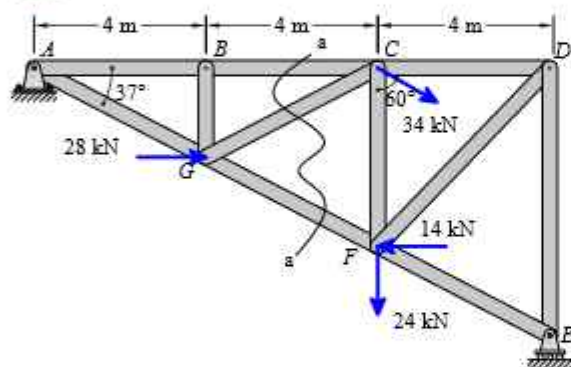


Figura 3.136

3.106

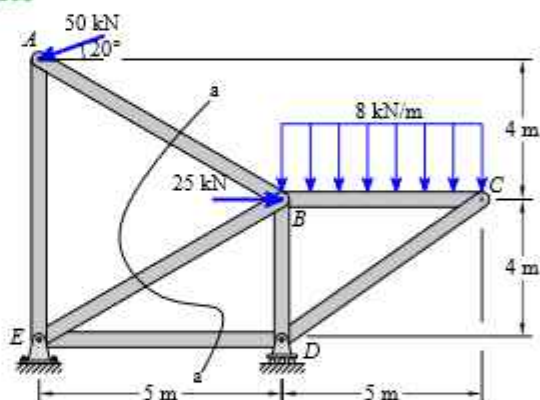


Figura 3.137

3.107

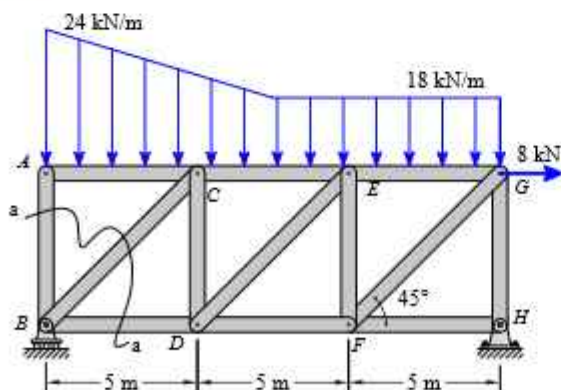


Figura 3.138

3.108

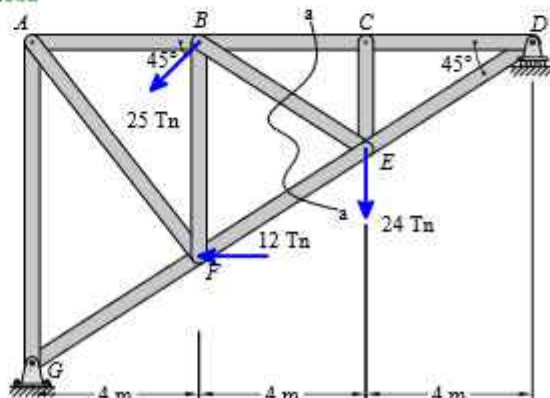


Figura 3.139

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.109

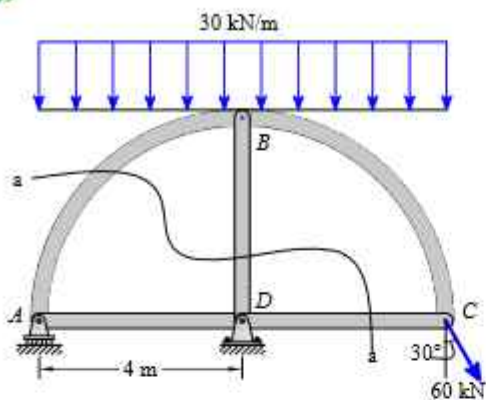


Figura 3.140

3.110

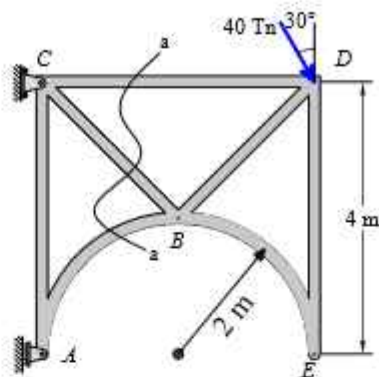


Figura 3.141

3.111

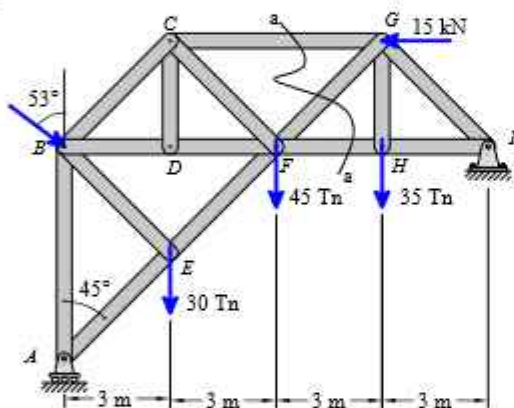


Figura 3.142

3.112

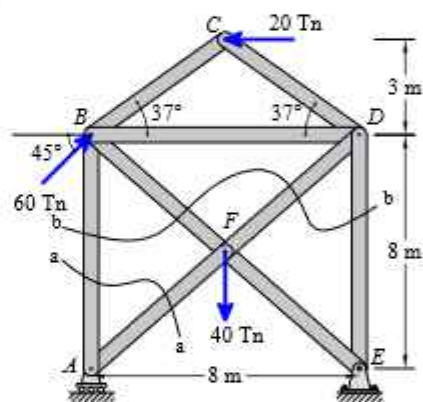


Figura 3.143

3.113

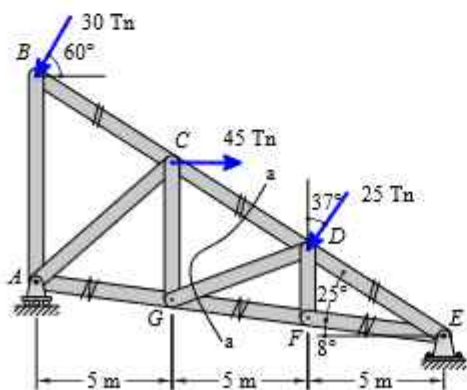


Figura 3.144

3.114

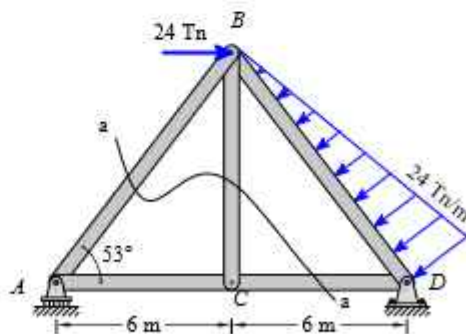


Figura 3.145

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.115

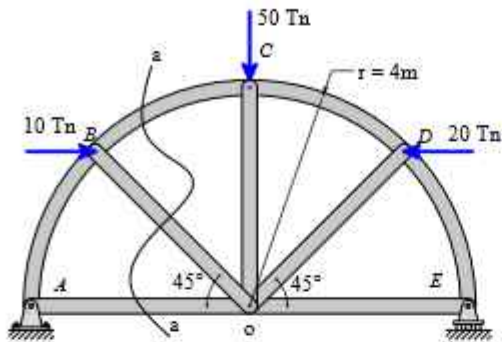


Figura 3.146

3.116

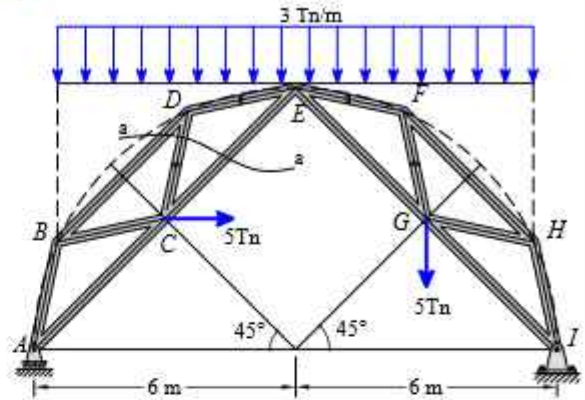


Figura 3.147

3.117

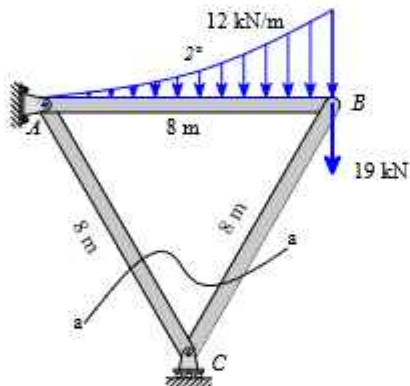


Figura 3.148

3.118

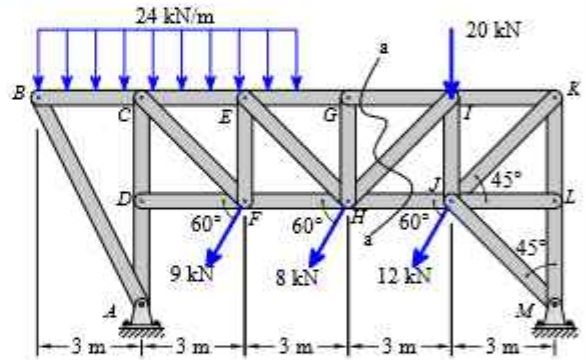


Figura 3.149

3.119

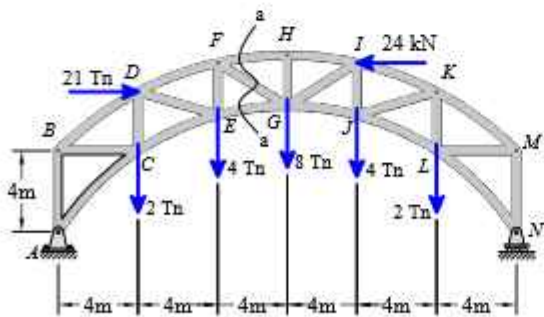


Figura 3.150

3.120

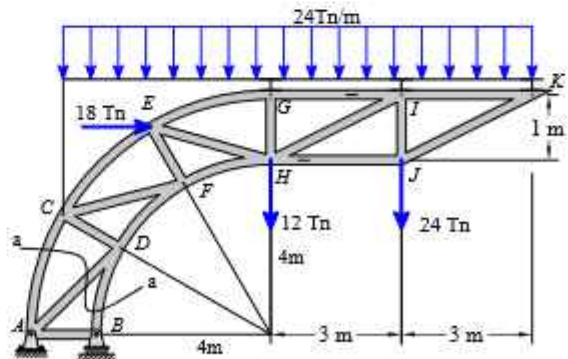


Figura 3.151

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.121

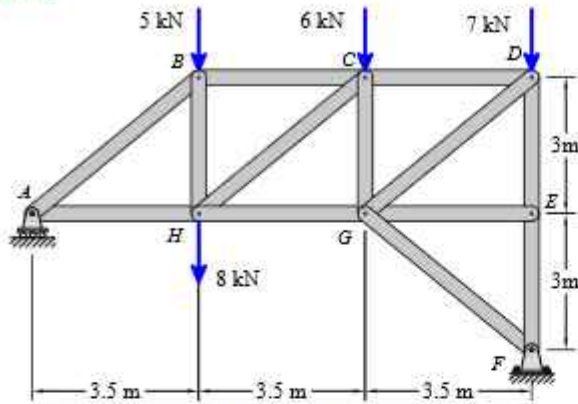


Figura 3.152

3.122

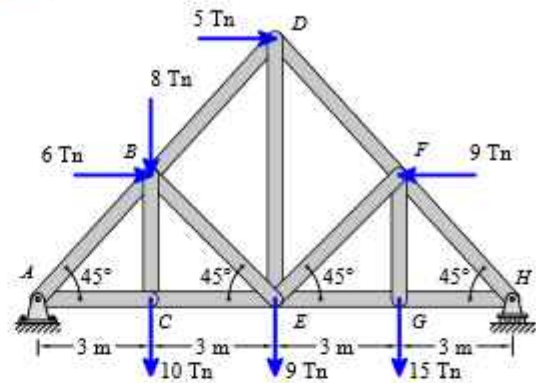


Figura 3.153

3.123

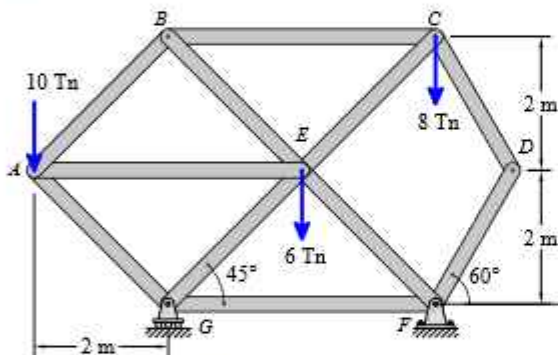


Figura 3.154

3.124

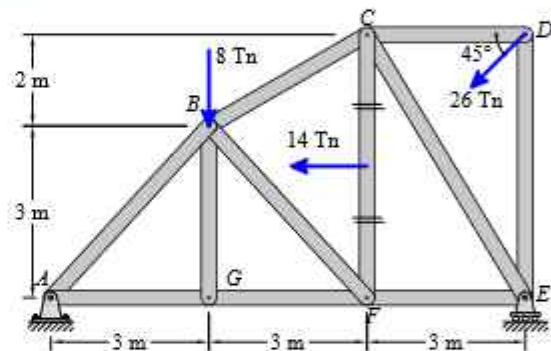


Figura 3.155

3.125

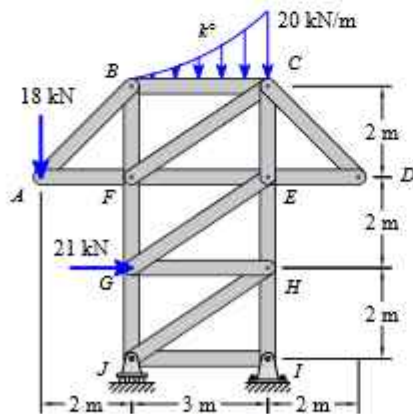


Figura 3.156

3.126

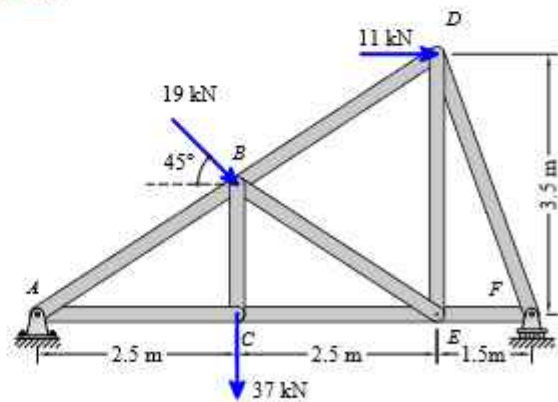


Figura 3.157

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.127

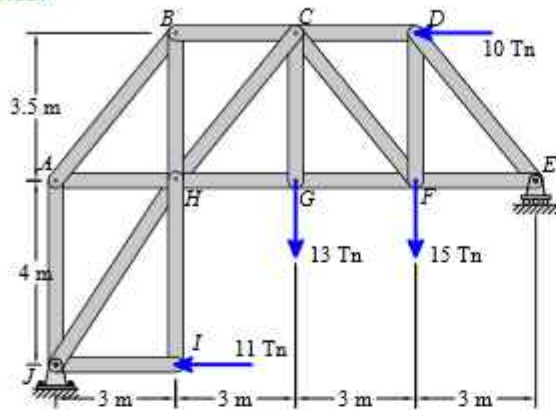


Figura 3.158

3.128

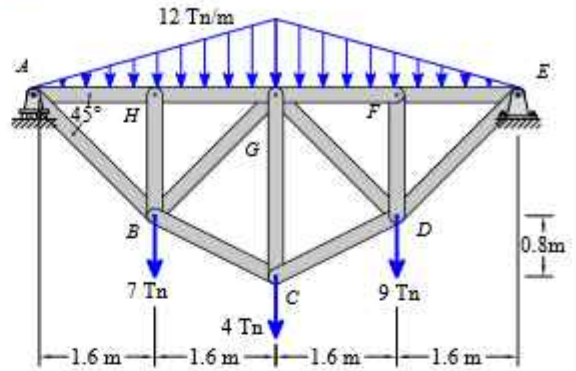


Figura 3.159

3.129

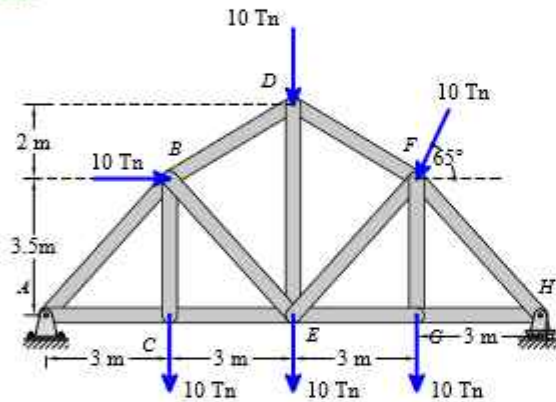


Figura 3.160

3.130

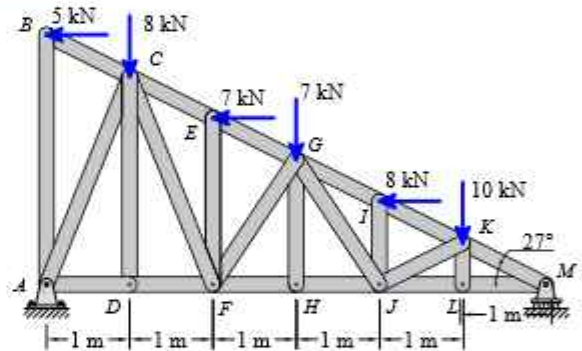


Figura 3.161

3.131

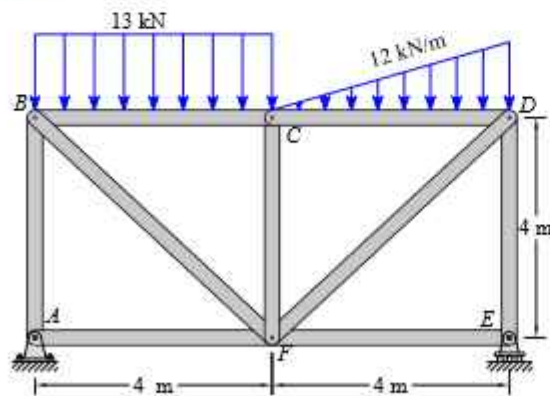


Figura 3.162

3.132

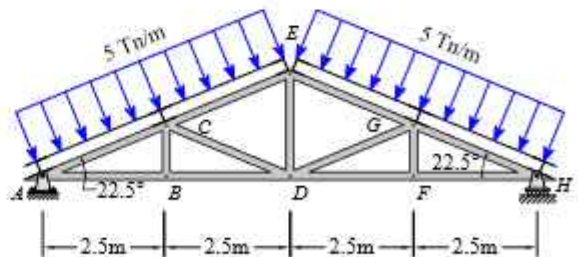


Figura 3.163

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.133

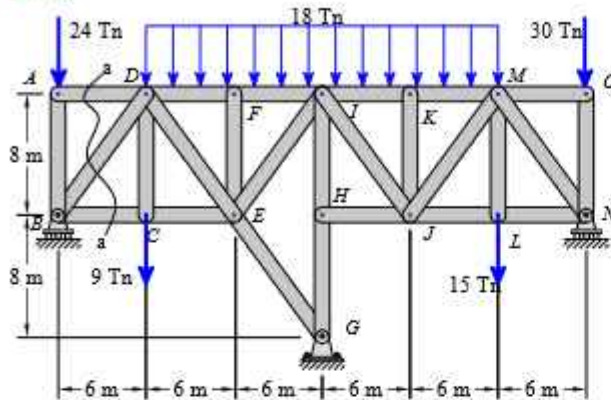


Figura 3.164

3.134

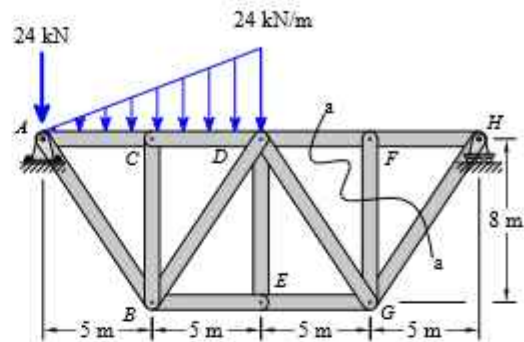


Figura 3.165

3.135

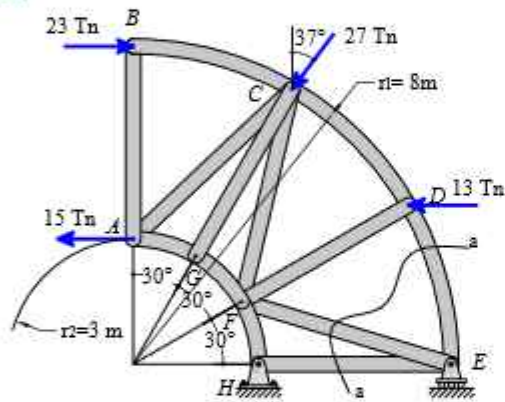


Figura 3.166

3.136

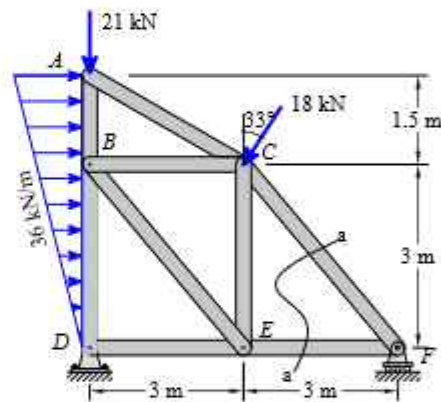


Figura 3.167

3.137

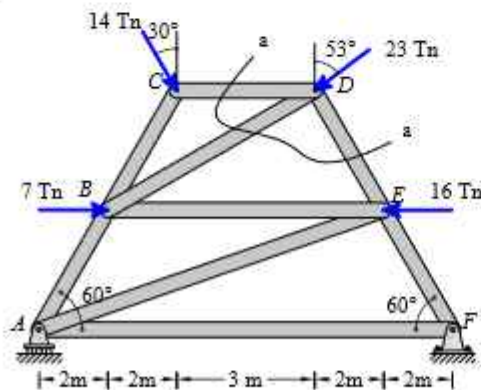


Figura 3.168

3.138

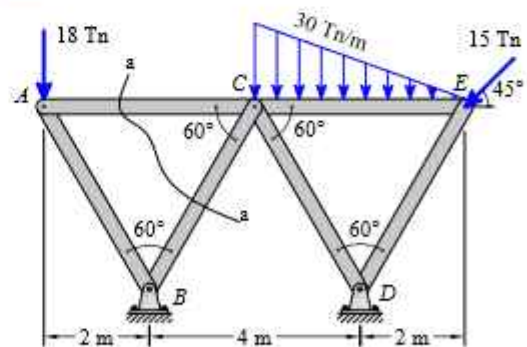


Figura 3.169

Determine las fuerzas en los elementos cortados a-a, b-b, c-c; de las siguientes figuras

3.139

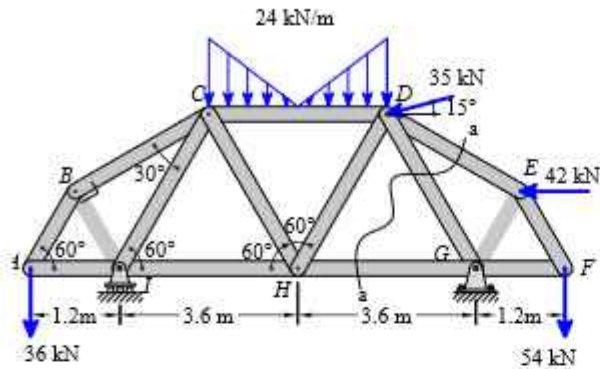


Figura 3.170

3.140

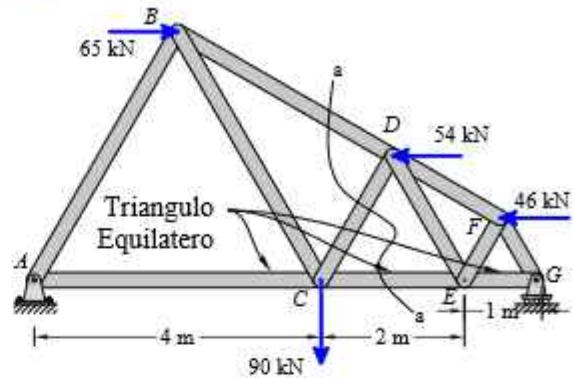


Figura 3.171

3.141

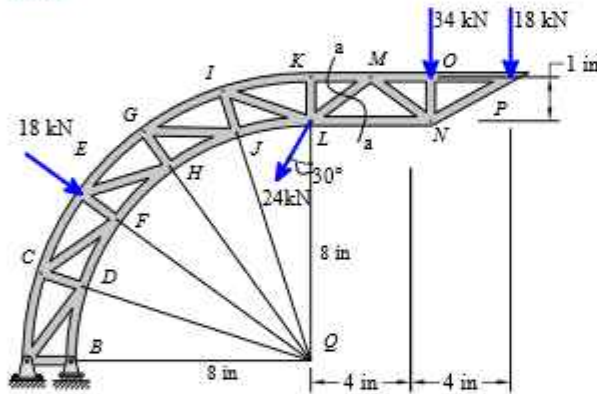


Figura 3.172

3.142

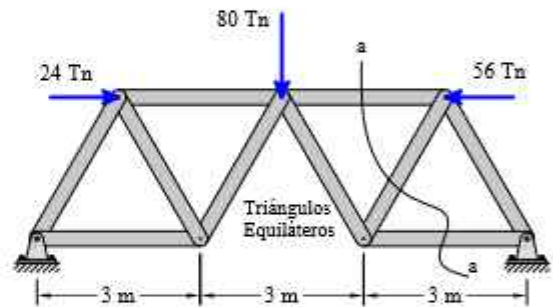


Figura 3.173

3.143

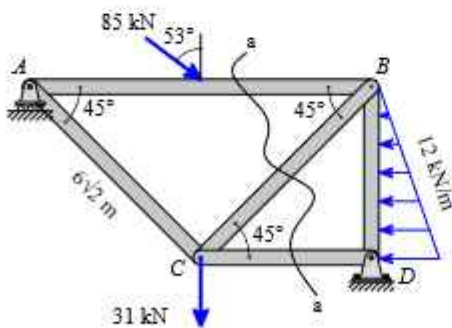


Figura 3.174

3.144

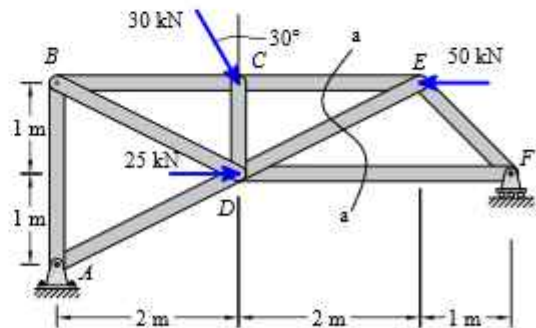
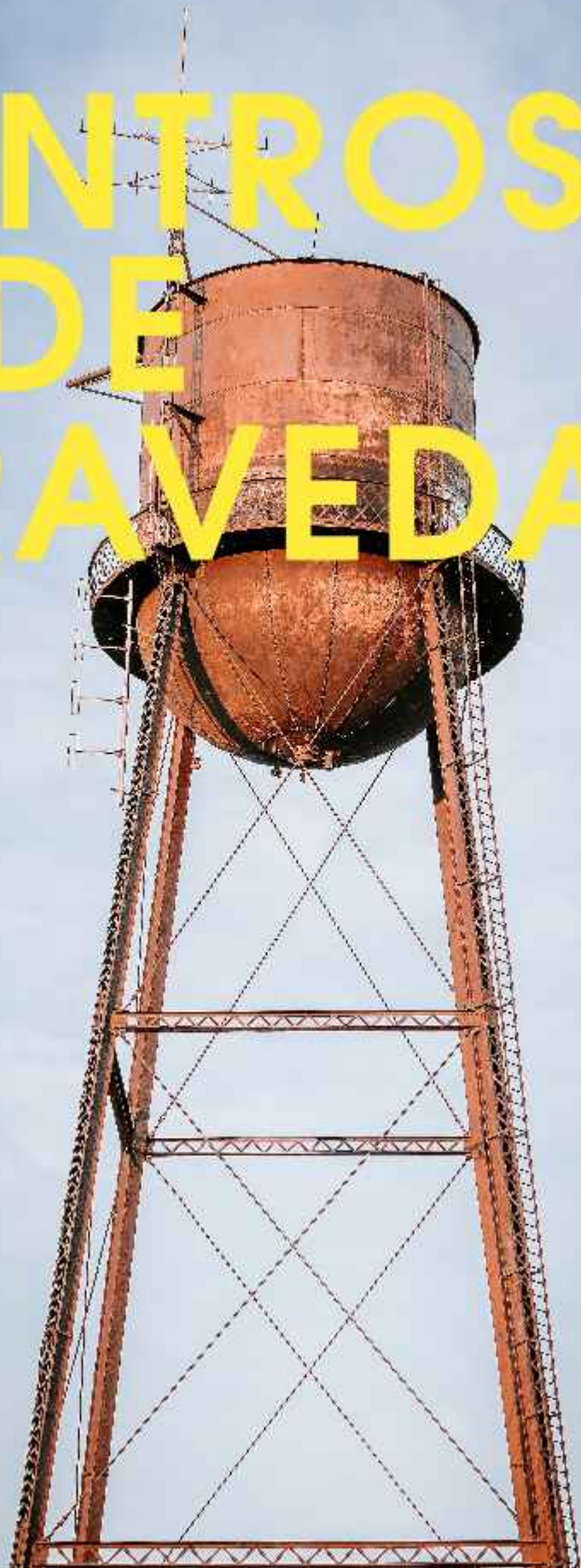


Figura 3.175

CENTROS DE GRAVEDAD

4



4

CENTROS DE GRAVEDAD

4.1. CENTROS DE GRAVEDAD DE UN CUERPO RÍGIDO EN EL PLANO

El centro de gravedad es un concepto fundamental en la mecánica y estática, especialmente en el análisis de cuerpos rígidos. Representa un punto específico dentro de un objeto donde se puede considerar que toda su masa está concentrada, de modo que se comporta como si toda su masa estuviera aplicada en ese único punto.

El centro de gravedad se define como el punto donde la suma de los productos de las masas de las partículas (o elementos infinitesimales) de un objeto y sus respectivas posiciones con respecto a un sistema de coordenadas es igual a cero en todas las direcciones. Matemáticamente, se expresa de la siguiente manera:

$$\sum w_i \cdot r_i = 0 \text{ ó } \sum m_i \cdot r_i = 0$$

Donde:

- w_i, m_i : es el peso ó masa de la i —ésima partícula o elemento.
- r_i : es el vector de posición de la i —ésima partícula o elemento con respecto al sistema de coordenadas.

El centro de gravedad es un concepto crucial en estática, ya que se utiliza para analizar la distribución de masas en un objeto y determinar cómo reacciona ante las fuerzas y momentos externos. Por lo tanto, comprender y calcular el centro de gravedad es esencial para predecir el equilibrio y el comportamiento de cuerpos rígidos en diversas aplicaciones, como la ingeniería estructural y la mecánica.

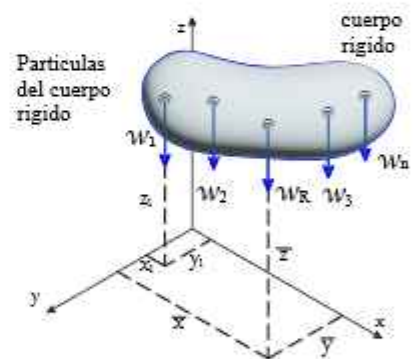


Figura 4.1: Cuerpo rígido

El centro de gravedad (G), se explica a continuación mediante el peso W del cuerpo rígido así como de las partículas que compone el cuerpo rígido

Cuerpo rígido = Sistema de partículas

$$W = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

$$W_R = \Sigma w \quad \dots\dots \text{Peso Total}$$

Para determinar \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} aplicamos la sumatoria de momentos el cuerpo rígido respecto a su brazo, e igualamos al momento de todas las partículas respecto a sus brazos.

$$\bar{x} \cdot W_R = \tilde{x}_1 \cdot w_1 + \tilde{x}_2 \cdot w_2 + \dots + \tilde{x}_n \cdot w_n$$

$$\bar{x} \cdot W_R = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \cdot w_n$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} \cdot W}{\Sigma W}$$

$$\bar{y} \cdot W_R = \tilde{y}_1 \cdot w_1 + \tilde{y}_2 \cdot w_2 + \dots + \tilde{y}_n \cdot w_n$$

$$\bar{y} \cdot W_R = \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \cdot w_n$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} \cdot W}{\Sigma W}$$

$$\bar{z} \cdot W_R = \tilde{z}_1 \cdot w_1 + \tilde{z}_2 \cdot w_2 + \dots + \tilde{z}_n \cdot w_n$$

$$\bar{z} \cdot W_R = \sum_{i=1}^n \tilde{z}_i \cdot w_n$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} \cdot W}{\Sigma W}$$

Donde:

1. $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ = Coordenadas del centro de gravedad del cuerpo rígido.
2. $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ = Coordenadas del centro de gravedad de cada partícula.
3. ΣW = Suma de los pesos de las partículas que conforman el cuerpo rígido.

Ademas, en dinámica es necesario determinar el centro de masa, por lo tanto

$m = \frac{W}{g}$, siendo la gravedad una constante.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} \cdot m}{\Sigma m}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} \cdot m}{\Sigma m}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} \cdot m}{\Sigma m}$$

4.1.1. CLASIFICACIÓN DE LOS CENTROS DE GRAVEDAD

Se clasifican los centros de gravedad según su relación con la gravedad y su geometría de la siguiente manera:

a) **Según su Gravitación:**

- **Centro de Masa:** Representa el punto donde se concentra la masa de un objeto, independientemente de la gravedad a la que esté expuesto.
- **Centro de Gravedad:** Es el punto donde se concentra la fuerza gravitatoria que actúa sobre un objeto debido a la gravedad de un cuerpo masivo, como la Tierra.

b) **Según su Geometría:**

- **Centro de Volumen:** Se refiere al punto donde se concentra el volumen de un objeto. Es relevante para objetos tridimensionales como sólidos y se utiliza en el cálculo de propiedades físicas, como la densidad.
- **Centro de Área:** Representa el punto donde se concentra el área de una superficie bidimensional. Se utiliza en problemas relacionados con placas, láminas o estructuras planas.
- **Centro de Línea o Lineal:** Es el punto donde se concentra una línea unidimensional, como un alambre o una barra. Se aplica a objetos alargados y delgados, como vigas y cables.

⇒ SEGÚN SU ACEPTACIÓN GRAVITACIONAL

Formulación Específica:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} \cdot W}{\sum W}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} \cdot W}{\sum W}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} \cdot W}{\sum W}$$

PESO: Primer momento de peso ó centro de gravedad.

Formulación Genérica:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \cdot W}{\int W}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \cdot W}{\int W}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \tilde{z} \cdot W}{\int W}$$

Formulación Específica:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} \cdot m}{\sum m}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} \cdot m}{\sum m}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} \cdot m}{\sum m}$$

MASA: Primer momento de masa ó centro de masa.

Formulación Genérica:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \cdot m}{\int m}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \cdot m}{\int m}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \tilde{z} \cdot m}{\int m}$$

⇒ SEGÚN SU GEOMETRÍA

A. Volumen: Ubicado en el centroide (primer momento de volumen)**Formulación Específica:**

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} \cdot V}{\sum V}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} \cdot V}{\sum V}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} \cdot V}{\sum V}$$

Formulación Genérica:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \cdot V}{\int V}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \cdot V}{\int V}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \tilde{z} \cdot V}{\int V}$$

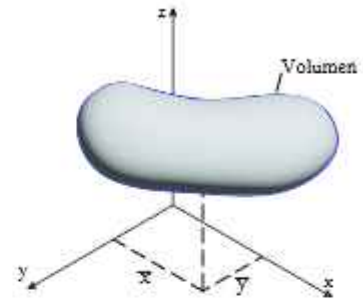


Figura 4.2: Volumen de un cuerpo rígido

B. Área: Primer momento de área.**Formulación Específica:**

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} \cdot A}{\sum A}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} \cdot A}{\sum A}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} \cdot A}{\sum A}$$

Formulación Genérica:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \cdot A}{\int A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \cdot A}{\int A}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \tilde{z} \cdot A}{\int A}$$

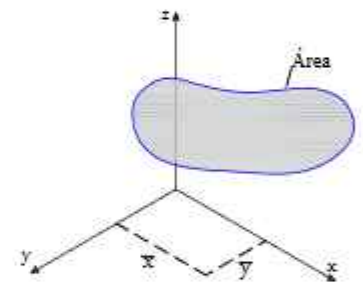


Figura 4.3: Área de un cuerpo rígido

C. Línea: Primer momento de línea.**Formulación Específica:**

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} \cdot L}{\sum L}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} \cdot L}{\sum L}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} \cdot L}{\sum L}$$

Formulación Genérica:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \cdot L}{\int L}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \cdot L}{\int L}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \tilde{z} \cdot L}{\int L}$$



Figura 4.4: Centro de gravedad lineal en una presa

Estas clasificaciones te ayudan a entender mejor cómo calcular y aplicar los centros de gravedad en función de las características y propiedades del objeto o sistema que estás analizando. El concepto de centro de gravedad es esencial en la física, la ingeniería y muchas otras disciplinas para comprender el comportamiento de objetos en relación con la gravedad y la distribución de masa o geometría de los mismos.

Por otro lado, los centros de gravedad de elementos compuestos en función de su peso, masa, volumen, área y línea:

- a) **Centro de Gravedad de un Elemento Compuesto en Peso:** El centro de gravedad de un elemento compuesto en peso es el punto en el espacio donde se concentra la fuerza gravitatoria total debida al peso del elemento compuesto. Se calcula considerando la masa de cada componente y su ubicación relativa. Este centro de gravedad es relevante cuando se necesita entender cómo actúa la fuerza gravitatoria sobre un objeto compuesto por partes con diferentes masas.
- b) **Centro de Gravedad de un Elemento Compuesto en Masa:** El centro de gravedad de un elemento compuesto en masa es el punto en el espacio donde se concentra la masa total del elemento compuesto. Al igual que el centro de gravedad en peso, se calcula teniendo en cuenta la ubicación relativa de las masas individuales. Se utiliza para analizar el comportamiento de sistemas compuestos por partes con masas diversas, como sistemas de partículas o estructuras multicuerpo.
- c) **Centro de Gravedad de un Elemento Compuesto en Volumen:** El centro de gravedad de un elemento compuesto en volumen es el punto donde se concentra el volumen total del elemento. Se utiliza en objetos tridimensionales y se calcula considerando las coordenadas y volúmenes de las partes individuales. Es fundamental para el estudio de objetos complejos, como sólidos con formas irregulares.
- d) **Centro de Gravedad de un Elemento Compuesto en Área:** El centro de gravedad de un elemento compuesto en área se encuentra en el punto donde se concentra el área total del elemento. Se utiliza en estructuras bidimensionales, como placas o láminas compuestas por secciones con diferentes áreas. Su cálculo implica la consideración de las coordenadas y áreas de las partes constituyentes.
- e) **Centro de Gravedad de un Elemento Compuesto en Línea o Lineal:** El centro de gravedad de un elemento compuesto en línea o lineal es el punto donde se concentra la longitud total del elemento. Se aplica a objetos alargados y delgados, como barras compuestas por segmentos con diferentes longitudes. Se calcula teniendo en cuenta las coordenadas y longitudes de cada sección.

⇒ **COMPUESTOS:** Serie de cuerpos rígidos puede ser en: peso, masa, volumen, área o línea.

TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN

—Pag 5—

El teorema de Pappus-Guldin establece una relación importante entre el volumen, el área y la longitud de un objeto generado al girar una figura bidimensional alrededor de un eje en el espacio tridimensional. Este teorema proporciona una forma de calcular estas propiedades para objetos de revolución.

Para comprender la relación entre el teorema de Pappus-Guldin y los centros de gravedad de elementos compuestos, es necesario considerar que el centro de gravedad es un concepto relacionado con la distribución de masa. A continuación, se muestra la relación entre estos conceptos y se incluyen las fórmulas relevantes:

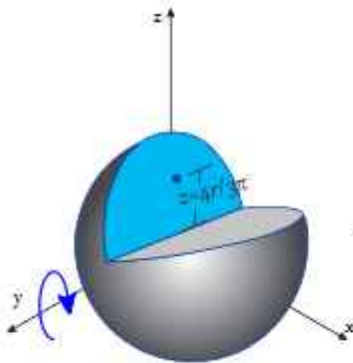


Figura 4.5: Volumen

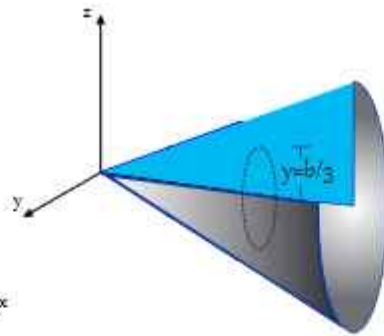


Figura 4.6: Área

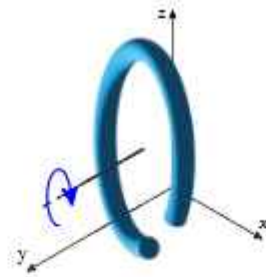
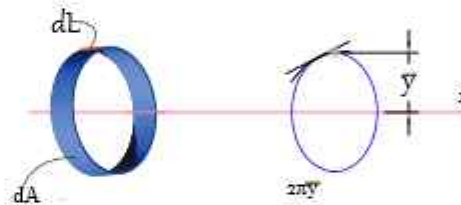


Figura 4.7: Línea

TEOREMA I:

Si una figura bidimensional L se gira 360 grados alrededor de un eje que no interseca la figura, el área superficial del sólido generado A está dada por:

$$A = 2\pi\bar{y}L$$



Donde: $2\pi\bar{y}$ es la longitud de curvatura o distancia recorrida.

TEOREMA II:

El volumen de un cuerpo de revolución es igual al arco generatriz multiplicado por la distancia recorrida por el centroide de arco al momento de generar el cuerpo. DEFINIDO POR:

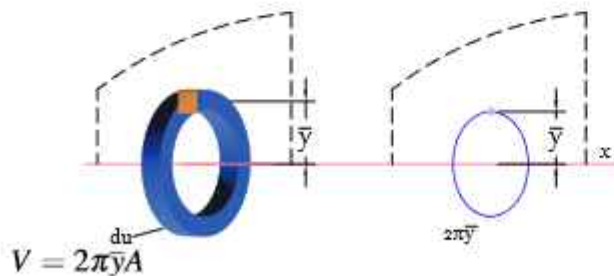


Figura 4.8: El volumen de un Reservorio puede ser calculado por el segundo teorema de Pappus y Guldinus

Donde: $2\pi\bar{y}$ = longitud de arco o distancia recorrida. $y = (h/b^2) \cdot x^2$

Estos conceptos son esenciales en la física y la ingeniería, ya que permiten determinar cómo actúan las fuerzas y momentos gravitatorios sobre objetos compuestos por múltiples partes o elementos. El cálculo de los centros de gravedad de elementos compuestos es crucial para predecir el equilibrio y el comportamiento de sistemas complejos.

PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR EL CENTRO DE GRAVEDAD

El procedimiento para determinar el centro de gravedad de un objeto compuesto depende de la dimensión del objeto (volumen, área o línea) y la geometría específica. Aquí están los procedimientos generales para calcular el centro de gravedad en diferentes dimensiones:

1. Centro de Gravedad en Volumen (Objetos Tridimensionales):

- Divida el objeto en partes más pequeñas o elementos.
- Determine las coordenadas de cada elemento en un sistema de referencia.
- Calcule la masa de cada elemento o parte.
- Calcule el producto de la masa por las coordenadas de cada elemento en cada dirección ($m_i \cdot x_i$, $m_i \cdot y_i$, $m_i \cdot z_i$).
- Suma todos los productos de masa por coordenadas en cada dirección.
- Calcule las coordenadas del centro de gravedad dividiendo la suma de productos de masa por coordenadas por la masa total (M).
- Para el centro de gravedad en X (X_{cg}), use la fórmula:

$$\bar{X} = \frac{\sum(m_i \cdot r_i)}{\sum m_i}$$

Repita este proceso para Y y Z si es necesario.

2. Centro de Gravedad en Área (Objetos Bidimensionales):

- Divida el objeto en partes más pequeñas si es necesario.
- Determine las coordenadas de cada elemento bidimensional en un sistema de referencia.
- Calcule el área de cada elemento.
- Calcule el producto del área por las coordenadas de cada elemento en cada dirección (por ejemplo, dirección ($A_i \cdot x_i$, $A_i \cdot y_i$, $A_i \cdot z_i$)).
- Suma todos los productos de masa por coordenadas en cada dirección.
- Calcule las coordenadas del centro de gravedad dividiendo la suma de productos de área por coordenadas por el área total (A).
- Para el centro de gravedad en X (X_{cg}), use la fórmula:

$$\bar{X} = \frac{\sum(A_i \cdot r_i)}{\sum A_i}$$

Repita este proceso para Y si es necesario.

3. Centro de Gravedad en Línea o Lineal (Objetos Unidimensionales):

- Determine las coordenadas de cada elemento unidimensional en un sistema de referencia.
- Calcule la longitud de cada elemento.
- Calcule el producto de la longitud por las coordenadas de cada elemento.
- Suma todos los productos de longitud por coordenadas.
- Calcule las coordenadas del centro de gravedad dividiendo la suma de productos de longitud por coordenadas por la longitud total (L).
- Para el centro de gravedad en X (X_{cg}), use la fórmula:

$$\bar{X} = \frac{\sum(L_i \cdot r_i)}{\sum L_i}$$

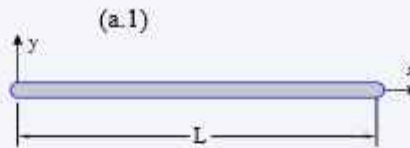
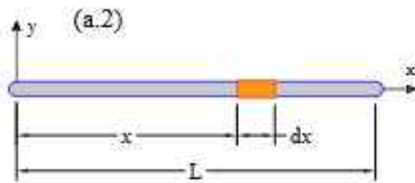
Nota que en objetos unidimensionales, la dirección Y y Z generalmente no es relevante.

El resultado final en cada caso será el centro de gravedad en el sistema de referencia utilizado para cada dimensión (X , Y , Z). Este procedimiento es esencial para comprender cómo se distribuye la masa de un objeto compuesto y su influencia en el equilibrio y el comportamiento bajo la gravedad.

4.1.2. CENTRO DE GRAVEDAD: LINEAL - EJERCICIOS RESUELTOS

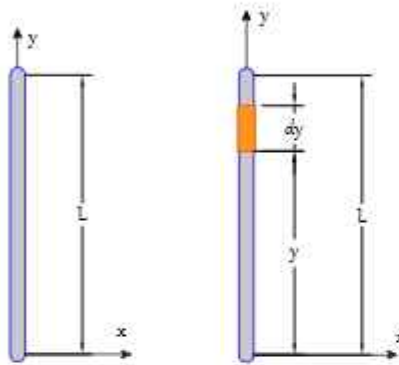
EJEMPLO RESUELTO 4.1.2.1

Determine el centroide de la varillas mostradas en las figuras 4.9 (a) y (b).



Primer momento respecto al eje y, figura 4.9 (a.2):

$$dM_y = x \cdot dx \quad M_y := \int_0^L x \, dx \rightarrow \frac{L^2}{2} \quad x_c = \frac{M_y}{L} = \frac{\frac{L^2}{2}}{L} = \frac{L}{2}$$



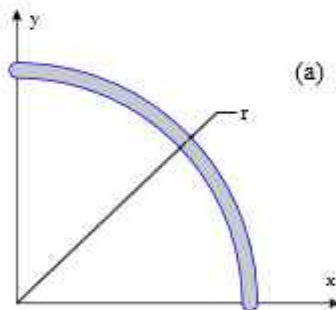
Primer momento respecto al eje x, figura 4.9 (b.2):

$$dM_x = y \cdot dy \quad M_x := \int_0^L y \, dy \rightarrow \frac{L^2}{2} \quad y_c = \frac{M_x}{L} = \frac{\frac{L^2}{2}}{L} = \frac{L}{2}$$

(b.1)

(b.2)

Figura 4.9



Determinar el centro de gravedad Lineal de un cuarto de círculo, figura 4.10.

$$dL = r \cdot d\theta$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, d\theta \rightarrow L = \frac{r \cdot \pi}{2} \quad x = r \cdot \cos(\theta) \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

Primer momento respecto al eje y, figura 4.10 (a):

Primer momento respecto al eje x, figura 4.10 (b):

$$dM_y = x \cdot dL = r \cdot \cos(\theta) \cdot r \cdot d\theta$$

$$dM_x = y \cdot dL = r \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta$$

$$M_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \cos(\theta) \cdot r \, d\theta \rightarrow M_y = r^2$$

$$M_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \sin(\theta) \cdot r \, d\theta \rightarrow M_x = r^2$$

$$x_c = \frac{M_y}{L} = \frac{r^2}{r \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2 \cdot r}{\pi}$$

$$y_c = \frac{M_x}{L} = \frac{r^2}{r \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2 \cdot r}{\pi}$$

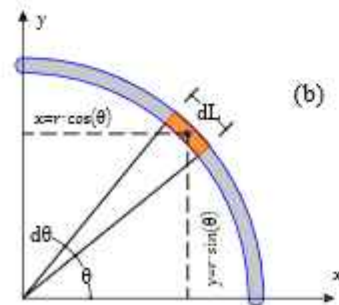


Figura 4.10

Determinar el centroide del arco de círculo mostrado en la figura 4.11 (a)

EJEMPLO RESUELTO 4.1.2.2

$$dL = r \cdot d\theta \quad L = \int_0^\pi r \, d\theta \rightarrow L = r \cdot \pi \quad x = r \cdot \cos(\theta) \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

Primer momento respecto al eje y, figura 4.11 (a):

$$dM_y = x \cdot dL = r \cdot \cos(\theta) \cdot r \cdot d\theta$$

$$M_y = \int_0^\pi r \cdot \cos(\theta) \cdot r \, d\theta \rightarrow M_y = 0$$

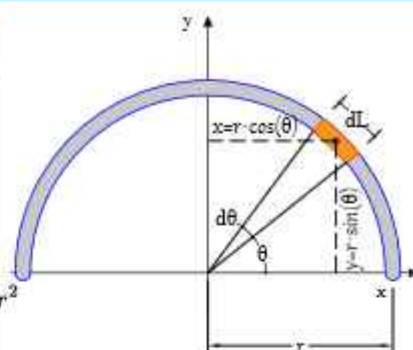
$$x_c = \frac{0}{L} = \frac{0}{r \cdot \pi}$$

Primer momento respecto al eje x, figura 4.11 (a):

$$dM_x = y \cdot dL = r \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta$$

$$M_x = \int_0^\pi r \cdot \sin(\theta) \cdot r \, d\theta \rightarrow M_x = 2 \cdot r^2$$

$$y_c = \frac{M_x}{L} = \frac{2 \cdot r^2}{r \cdot \pi} = \frac{2 \cdot r}{\pi}$$



(a)

Determinar el centroide del arco de círculo mostrado en la figura 4.11 (b).

$$dL = r \cdot d\theta \quad L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \, d\theta \rightarrow L = r \cdot \pi \quad x = r \cdot \cos(\theta) \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

Primer momento respecto al eje y, figura 4.11 (b):

$$dM_y = x \cdot dL = r \cdot \cos(\theta) \cdot r \cdot d\theta$$

$$M_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \cdot \cos(\theta) \cdot r \, d\theta \rightarrow M_y = 2 \cdot r^2$$

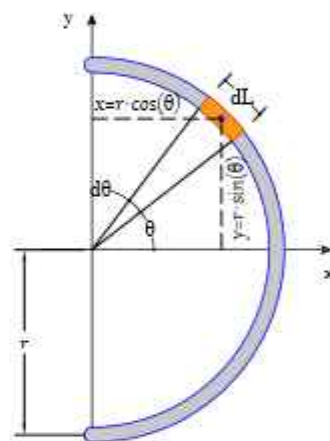
$$x_c = \frac{2 \cdot r^2}{r \cdot \pi} = \frac{2 \cdot r}{\pi}$$

Primer momento respecto al eje x, figura 4.11 (b):

$$dM_x = y \cdot dL = r \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta$$

$$M_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \cdot \sin(\theta) \cdot r \, d\theta \rightarrow M_x = 0$$

$$y_c = \frac{M_x}{L} = \frac{0}{r \cdot \pi} = 0$$



(b)

Determinar el centroide del arco de círculo mostrado en la figura 4.11 (c).

$$dL = r \cdot d\theta \quad L = \int_{-\alpha}^{\alpha} r \, d\theta \rightarrow L = 2 \cdot \alpha \cdot r \quad x = r \cdot \cos(\theta) \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

Primer momento respecto al eje y, figura 4.11 (c):

$$dM_y = x \cdot dL = r \cdot \cos(\theta) \cdot r \cdot d\theta$$

$$M_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} r \cdot \cos(\theta) \cdot r \, d\theta = 2 \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha)$$

$$x_c = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha)}{2 \cdot \alpha \cdot r} = \frac{r \cdot \sin(\alpha)}{\alpha}$$

Primer momento respecto al eje x, figura 4.11 (c):

$$dM_x = y \cdot dL = r \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta$$

$$M_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} r \cdot \sin(\theta) \cdot r \, d\theta \rightarrow M_x = 0$$

$$y_c = \frac{M_x}{L} = \frac{0}{2 \cdot \alpha \cdot r} = 0$$

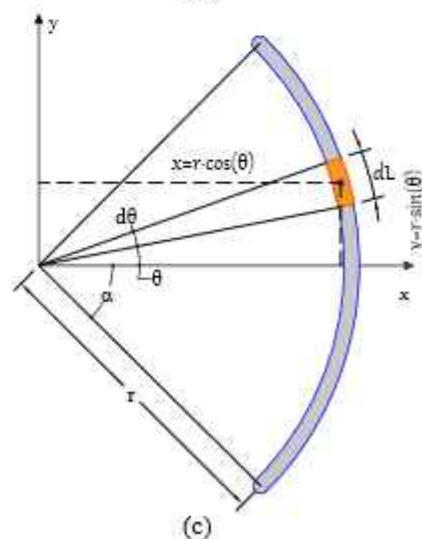


Figura 4.11

EJEMPLO RESUELTO 4.1.2.3

Encuentre el centroide de la varilla mostrada en la figura 4.12.

SOLUCIÓN

Elemento diferencial de longitud: su ubicación es un punto arbitrario (x, y) , como se muestra en la figura 4.12 (b) y se expresa en términos de las diferenciales dx y dy , con el teorema de Pitágoras.

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Donde:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x \quad dL = \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

$$\bar{x} = x \quad \bar{y} = y$$

Centroide de la varilla a través de **Integraciones:**

$$L = \int_L dL = \int_0^3 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{2 \cdot \ln(\sqrt{37} - 6) + 73}{8} - \frac{1}{96 \cdot \sqrt{37} - 584}$$

$$L = 9.747 \text{ m}$$

Determinación del centro de gravedad lineal x_c :

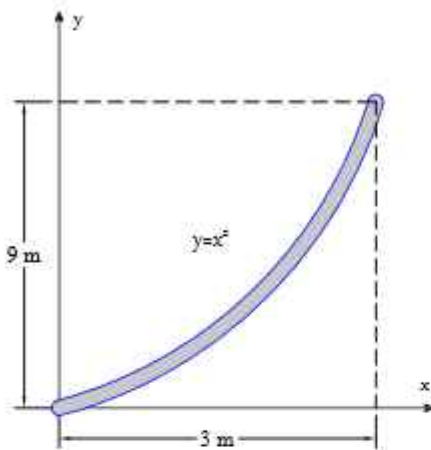
$$x_c = \frac{\int \bar{x} dL}{\int 1 dL} = \frac{\int_0^3 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx}{\int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2} dx} = \frac{\frac{37}{252300} \cdot \sqrt{37} - 1534680}{9.747} = \frac{32779}{1740}$$

$$x_c = 1.916 \text{ m}$$

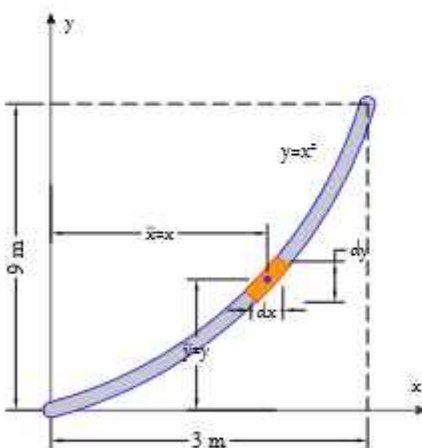
Determinación del centro de gravedad lineal y_c :

$$y_c = \frac{\int \bar{y} dL}{\int 1 dL} = \frac{\int_0^3 x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2} dx}{\int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2} dx} = \frac{\frac{4 \cdot \ln(\sqrt{37} - 6) - 10657}{256} - \frac{1}{448512 \cdot \sqrt{37} - 2728192}}{9.747}$$

$$y_c = 4.267 \text{ m}$$



(a)



(b)

Figura 4.12

EJEMPLO RESUELTO 4.1.2.4

Encuentre el centroide de la varilla mostrada en la figura 4.13, como segunda forma de determinar el centroide de la figura 4.12

Elemento diferencial de longitud: su ubicación es un punto arbitrario (x , y), como se muestra en la figura 4.13 (b) y se expresa en términos de las diferenciales dx y dy , con el teorema de Pitágoras.

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy$$

Donde:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \quad \frac{d}{dy} \sqrt{y} \rightarrow \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}$$

$$\bar{x} = x \quad \bar{y} = y \quad dL = \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}\right)^2 + 1} dy$$

Centroide de la varilla a través de **Integraciones:**

$$L = \int_0^9 \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}\right)^2 + 1} dy \rightarrow \frac{\ln\left(\frac{12}{\sqrt{37}-6} + 1\right) + 12 \cdot \sqrt{37}}{8} = 9.747$$

$$L = 9.747 \text{ m}$$

Determinación del centro de gravedad lineal x_c :

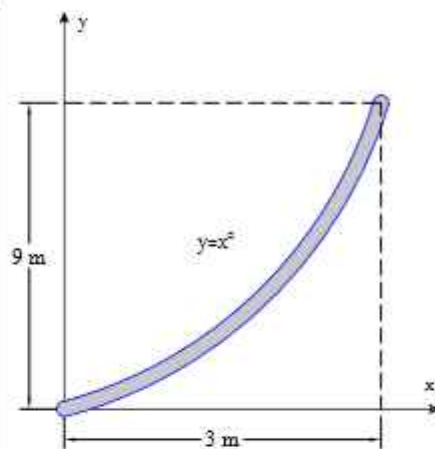
$$x_c = \frac{\int \bar{x} dL}{\int 1 dL} = \frac{\int_0^9 \sqrt{y} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}\right)^2 + 1} dy}{\int_0^9 \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}\right)^2 + 1} dy} = \frac{37 \cdot \sqrt{37} - 1}{9.747}$$

$$x_c = 1.916 \text{ m}$$

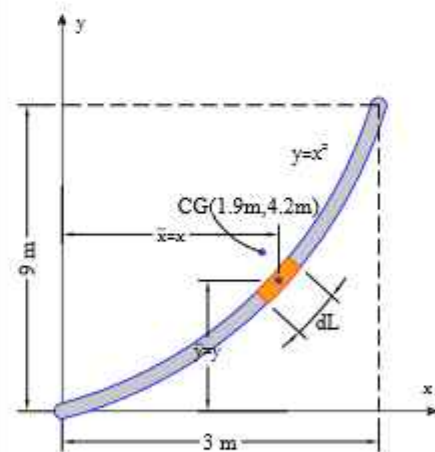
Determinación del centro de gravedad lineal y_c :

$$y_c = \frac{\int \bar{y} dL}{\int 1 dL} = \frac{\int_0^9 y \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}\right)^2 + 1} dy}{\int_0^9 \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}\right)^2 + 1} dy} = \frac{\ln\left(\frac{12}{\sqrt{37}+6} + 1\right) + 876 \cdot \sqrt{37}}{128}$$

$$y_c = 4.267 \text{ m}$$

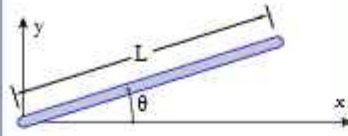
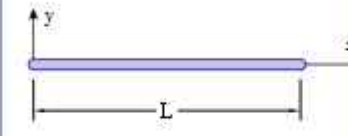
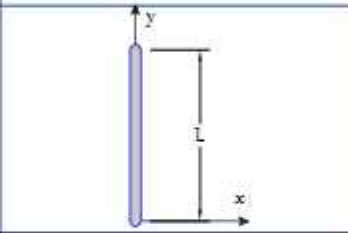
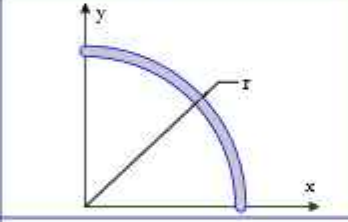
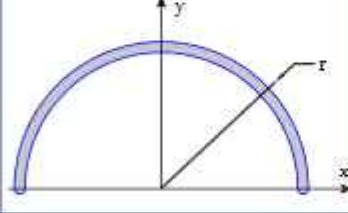
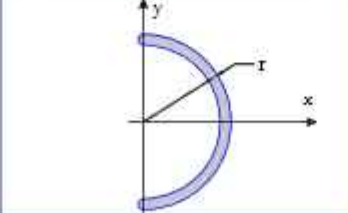
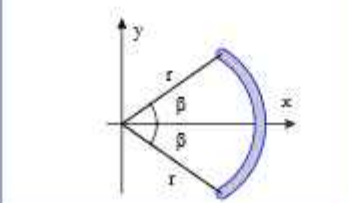


(a)



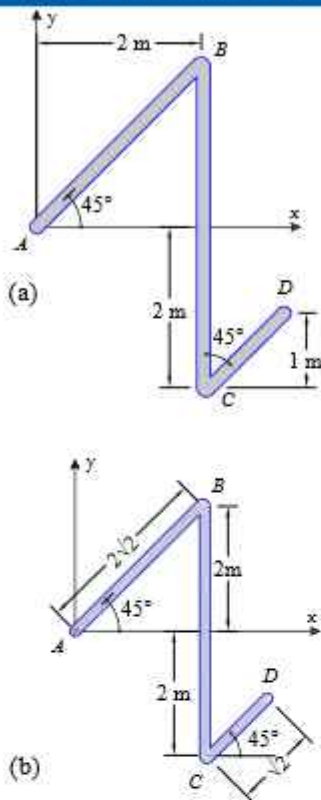
(b)

Figura 4.13

Forma	Figura	Longitud	x_c	y_c
<i>Línea Inclinada</i>		L	$\frac{L}{2} \cos(\theta)$	$\frac{L}{2} \sin(\theta)$
<i>Línea Horizontal</i>		L	$\frac{L}{2}$	0
<i>Línea Vertical</i>		L	0	$\frac{L}{2}$
<i>Arco de un cuarto de Circulo</i>		$\frac{\pi \cdot r}{2}$	$\frac{2 \cdot r}{\pi}$	$\frac{2 \cdot r}{\pi}$
<i>Arco de Semicirculo</i>		$\pi \cdot r$	0	$\frac{2 \cdot r}{\pi}$
<i>Arco de Semicirculo</i>		$\pi \cdot r$	$\frac{2 \cdot r}{\pi}$	0
<i>Arco de un circulo</i>		$2 \cdot \beta \cdot r$	$\frac{r \cdot \sin(\beta)}{\beta}$	0

EJEMPLO RESUELTO 4.1.2.5

Encuentre el centroide de la varilla mostrada en la figura 4.14.



SOLUCIÓN

$$L_1 := 2 \cdot \sqrt{2} \text{ m} \quad \bar{x}_1 := \frac{L_1}{2} \cdot \cos(45^\circ) = 1 \text{ m} \quad \bar{y}_1 := \frac{L_1}{2} \cdot \sin(45^\circ) = 1 \text{ m}$$

$$L_2 := 4 \text{ m} \quad \bar{x}_2 := 2 \text{ m} \quad \bar{y}_2 := 0 \text{ m}$$

$$L_3 := \sqrt{2} \text{ m} \quad \bar{x}_3 := 2 \text{ m} + \frac{L_3}{2} \cos(45^\circ) = 2.5 \text{ m} \quad \bar{y}_3 := -\left(2 \text{ m} - \frac{L_3}{2} \sin(45^\circ)\right)$$

Elemento	L_i	\bar{x}_i	\bar{y}_i	$L_i \cdot \bar{x}_i$	$L_i \cdot \bar{y}_i$
AB	2.83	1.00	1.00	2.83	2.83
BC	4.00	2.00	0.00	8.00	0.00
CD	1.41	2.50	-1.50	3.54	-2.12
	8.24			14.36	0.71

$$x_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{x}_i}{\sum L_i}$$

$$x_c = \frac{14.364 \text{ m}^2}{8.243 \text{ m}} = 1.743 \text{ m}$$

$$y_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{y}_i}{\sum L_i}$$

$$y_c = \frac{0.707 \text{ m}^2}{8.243 \text{ m}} = 0.086 \text{ m}$$

Figura 4.14

Encuentre el centroide de la varilla mostrada en la figura 4.15.

SOLUCIÓN

$$r := 2 \text{ m}$$

$$L_1 := \frac{\pi \cdot r}{2} = 3.142 \text{ m}$$

$$\bar{x}_1 := \frac{2 \cdot r}{\pi} = 1.273 \text{ m}$$

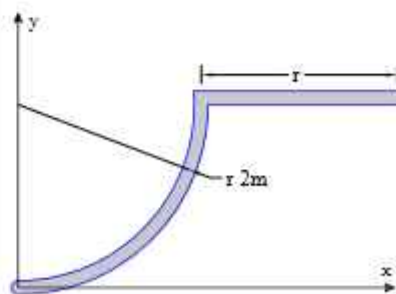
$$\bar{y}_1 := 2 \text{ m} - \frac{2 \cdot r}{\pi} = 0.727 \text{ m}$$

$$L_2 := 2 \text{ m}$$

$$\bar{x}_2 := 2 \text{ m} + 1 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := 2 \text{ m}$$

EJEMPLO RESUELTO 4.1.2.6



(a)

Resumen de los centros de gravedad lineal de la figura compuesta.

CONTINUACIÓN

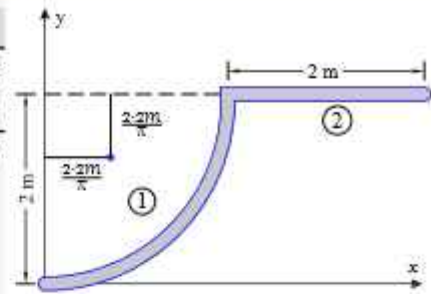
Elemento	L_i	\bar{x}_i	\bar{y}_i	$L_i \cdot \bar{x}_i$	$L_i \cdot \bar{y}_i$
①	3.14	1.27	0.73	4.00	2.28
②	2.00	3.00	2.00	6.00	4.00
	5.14			10.00	6.28

$$x_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{x}_i}{\sum L_i}$$

$$x_c = \frac{10 \text{ m}^2}{5.142 \text{ m}} = 1.945 \text{ m}$$

$$y_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{y}_i}{\sum L_i}$$

$$y_c = \frac{6.283 \text{ m}^2}{5.142 \text{ m}} = 1.222 \text{ m}$$



(b)

Figura 4.15

EJEMPLO RESUELTO 4.1.2.7

Encuentre el centroide de la varilla mostrada en la figura 4.16.

SOLUCIÓN $r := 2 \text{ m}$

$$L_1 := \frac{\pi \cdot r}{2} = 3.142 \text{ m}$$

$$L_2 := 1 \text{ m}$$

$$L_3 := 2 \text{ m}$$

$$L_4 := 1 \text{ m}$$

$$\bar{x}_1 := \frac{2 \cdot r}{\pi} = 1.273 \text{ m}$$

$$\bar{x}_2 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{x}_3 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{x}_4 := 0.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := \frac{2 \cdot r}{\pi} = 1.273 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := 2.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_3 := 3 \text{ m}$$

$$\bar{y}_4 := 3 \text{ m}$$

$$\bar{z}_1 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{z}_2 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{z}_3 := 1 \text{ m}$$

$$\bar{z}_4 := 2 \text{ m}$$

Resumen de los centros de gravedad lineal de la figura compuesta:

Elemento	L_i	\bar{x}_i	\bar{y}_i	\bar{z}_i	$L_i \cdot \bar{x}_i$	$L_i \cdot \bar{y}_i$	$L_i \cdot \bar{z}_i$
①	3.14	1.27	1.27	0.00	4.00	4.00	0.00
②	1.00	0.00	2.50	0.00	0.00	2.50	0.00
③	2.00	0.00	3.00	1.00	0.00	6.00	2.00
④	1.00	0.50	3.00	2.00	0.50	3.00	2.00
	7.14				4.50	15.50	4.00

$$x_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{x}_i}{\sum L_i}$$

$$x_c = \frac{4.5 \text{ m}^2}{7.142 \text{ m}}$$

$$x_c = 0.63 \text{ m}$$

$$y_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{y}_i}{\sum L_i}$$

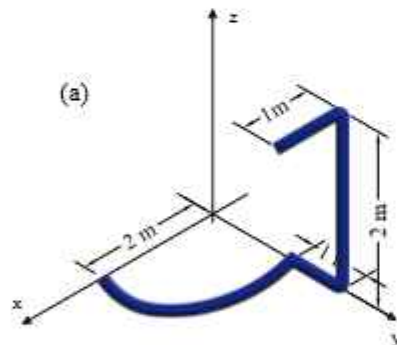
$$y_c = \frac{15.5 \text{ m}^2}{7.142 \text{ m}} = 2.17 \text{ m}$$

$$y_c = 2.17 \text{ m}$$

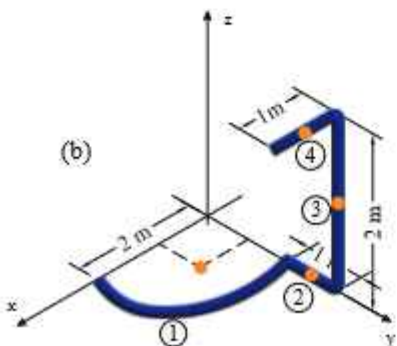
$$z_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{z}_i}{\sum L_i}$$

$$z_c = \frac{4 \text{ m}^2}{7.142 \text{ m}}$$

$$z_c = 0.56 \text{ m}$$



(a)

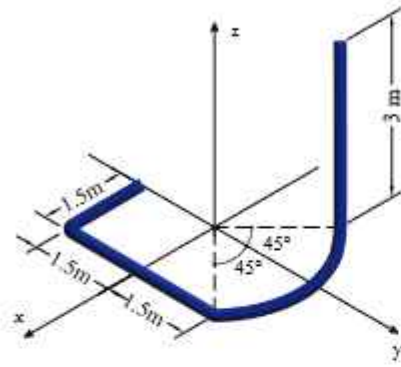


(b)

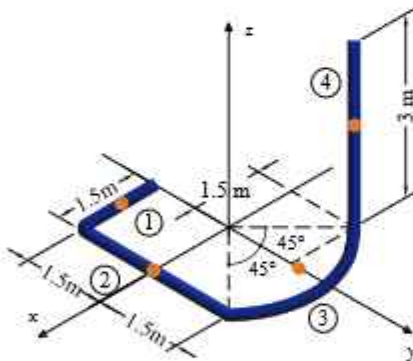
Figura 4.16

EJEMPLO RESUELTO 4.1.2.8

Encuentre el centroide de la varilla mostrada en la figura 4.17.



(a)



(b)

SOLUCIÓN

$$r := 1.5 \cdot \sqrt{2} \text{ m}$$

$$L_1 := 1.5 \text{ m}$$

$$L_2 := 3 \text{ m}$$

$$L_3 := 2 \cdot 45^\circ \cdot r = 3.332 \text{ m}$$

$$\bar{x}_1 := \frac{1.5 \text{ m}}{2}$$

$$\bar{x}_2 := 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{x}_3 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := -1.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{y}_3 := \frac{r \cdot \sin(45^\circ)}{45^\circ} = 1.91 \text{ m}$$

$$\bar{z}_1 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{z}_2 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{z}_3 := 0 \text{ m}$$

$$L_4 := 3 \text{ m}$$

$$\bar{x}_4 := -1.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_4 := 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{z}_4 := 1.5 \text{ m}$$

Resumen de los centros de gravedad lineal de la figura compuesta.

Elemento	L_i	\bar{x}_i	\bar{y}_i	\bar{z}_i	$L_i \cdot \bar{x}_i$	$L_i \cdot \bar{y}_i$	$L_i \cdot \bar{z}_i$
①	1.50	0.75	-1.50	0.00	1.13	-2.25	0.00
②	3.00	1.50	0.00	0.00	4.50	0.00	0.00
③	3.33	0.00	1.91	0.00	0.00	6.36	0.00
④	3.00	-1.50	1.50	1.50	-4.50	4.50	4.50
	10.83				1.13	8.61	4.50

$$x_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{x}_i}{\sum L_i}$$

$$y_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{y}_i}{\sum L_i}$$

$$z_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{z}_i}{\sum L_i}$$

$$x_c := \frac{1.125 \text{ m}^2}{10.832 \text{ m}}$$

$$y_c := \frac{8.614 \text{ m}^2}{10.832 \text{ m}}$$

$$z_c := \frac{4.5 \text{ m}^2}{10.832 \text{ m}}$$

$$x_c = 0.104 \text{ m}$$

$$y_c = 0.795 \text{ m}$$

$$z_c = 0.415 \text{ m}$$

Figura 4.17

4.1.3. CENTRO DE GRAVEDAD: LINEAL - EJERCICIOS PROPUESTOS

12 Determinar el centro de gravedad lineal de las siguientes figuras mostradas

Ejercicios

4.1

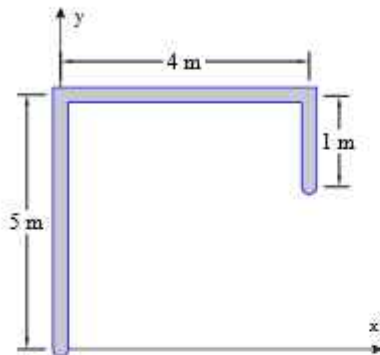


Figura 4.18

4.2

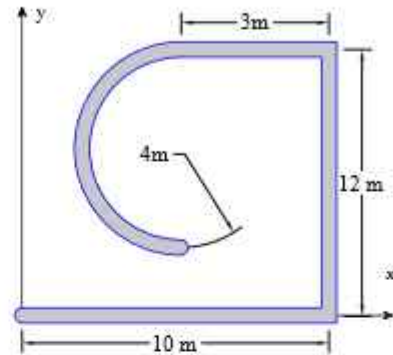


Figura 4.19

4.3

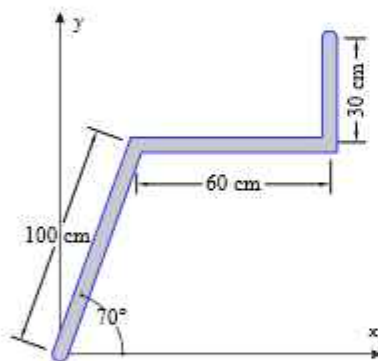


Figura 4.20

4.4

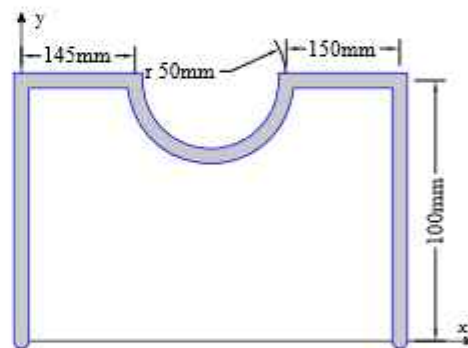


Figura 4.21

4.5

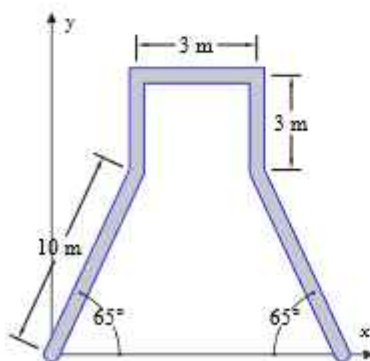


Figura 4.22

4.6

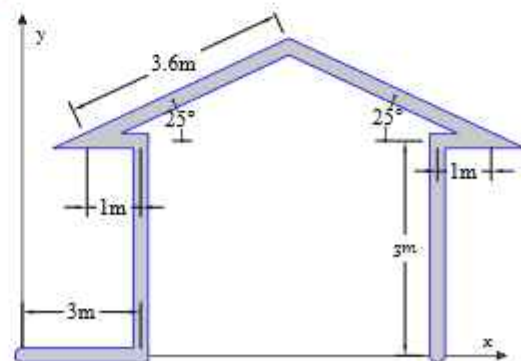


Figura 4.23

Determinar el centro de gravedad lineal de las siguientes figuras mostradas

4.7

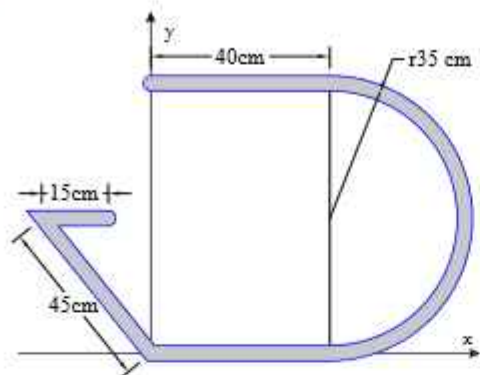


Figura 4.24

4.8

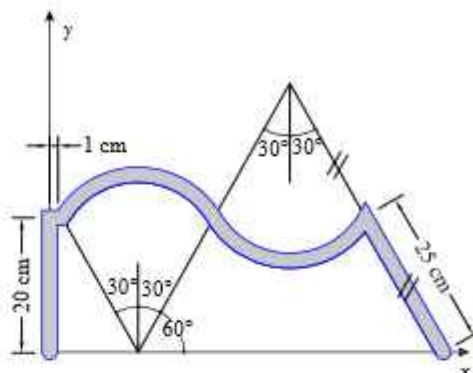


Figura 4.25

4.9

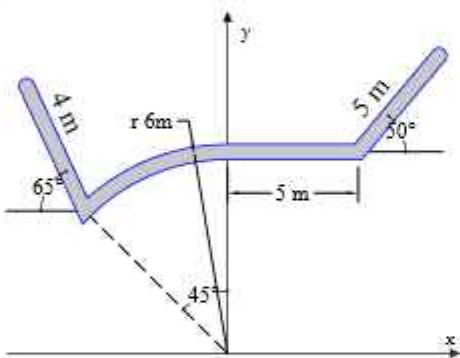


Figura 4.26

4.10

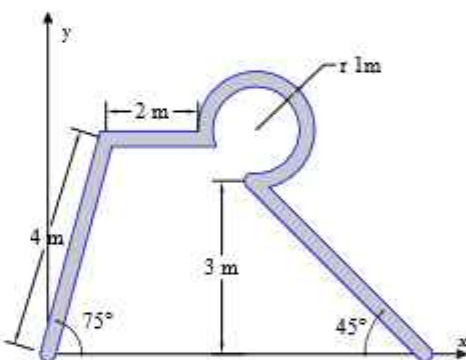


Figura 4.27

4.11

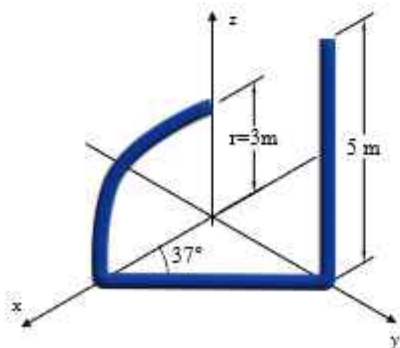


Figura 4.28

4.12

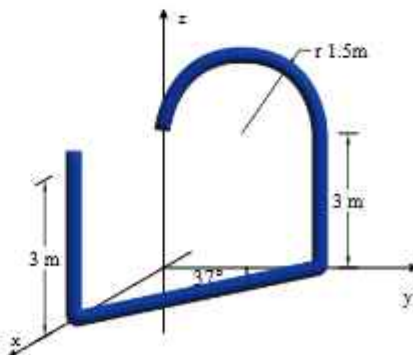


Figura 4.29

4.13

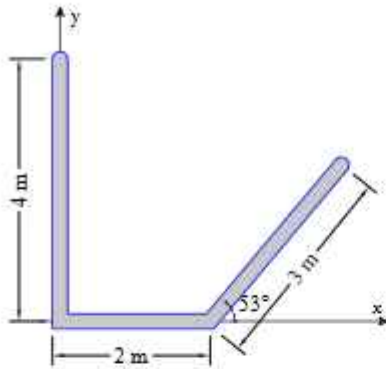


Figura 4.30

4.14

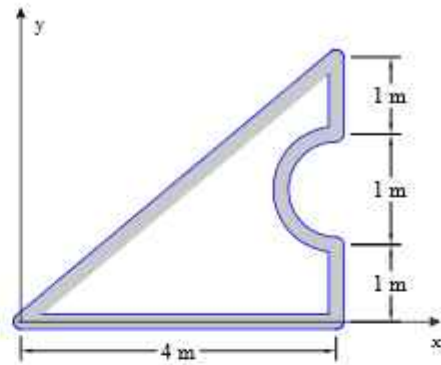


Figura 4.31

4.15

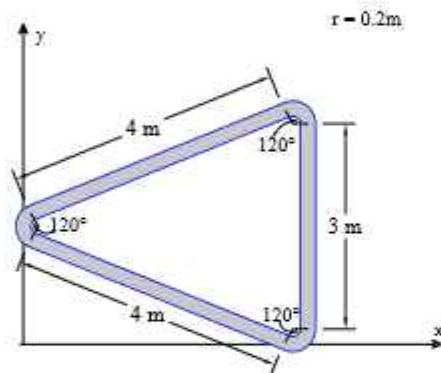


Figura 4.32

4.16

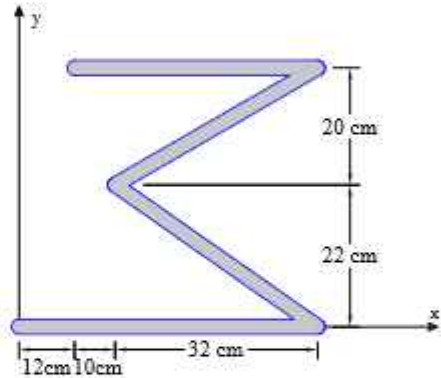


Figura 4.33

4.17

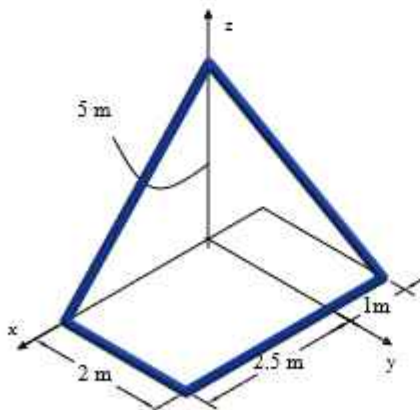


Figura 4.34

4.18

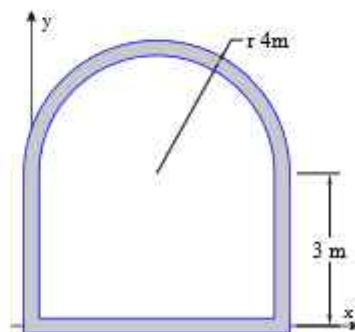


Figura 4.35

4.19

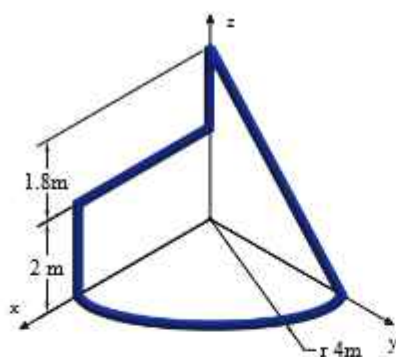


Figura 4.36

4.20

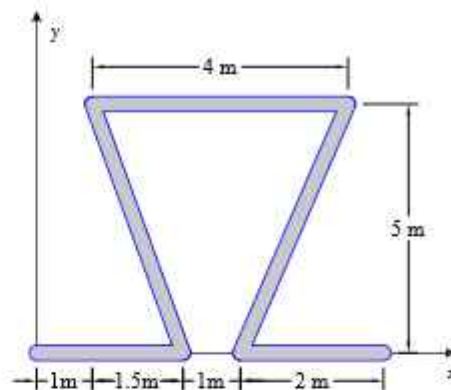


Figura 4.37

4.21

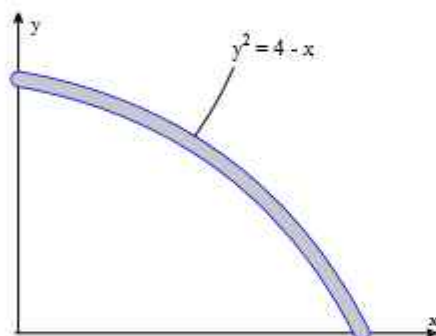


Figura 4.38

4.22

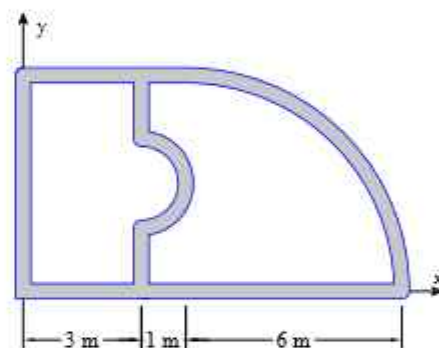


Figura 4.39

4.23

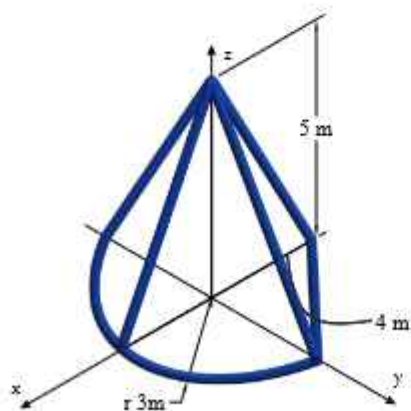


Figura 4.40

4.24

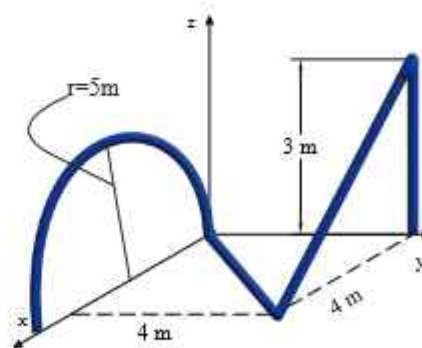


Figura 4.41

4.1.4. CENTRO DE GRAVEDAD: ÁREA - EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 4.1.4.1

Determine las coordenadas del centro de gravedad que se muestra en la siguiente figura.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.42 (b).

$$dA = x \cdot dy \quad dA = b \cdot dy \quad \bar{x} = \frac{x}{2} = \frac{b}{2} \quad \bar{y} = y$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A 1 dA} = \frac{\int_0^h \frac{b}{2} b dy}{\int_0^h b dy} \quad x_c = \frac{\frac{b^2}{2} \int_0^h 1 dy}{b \int_0^h 1 dy} \rightarrow \frac{b}{2}$$

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A 1 dA} = \frac{\int_0^h y b dy}{\int_0^h b dy} \quad y_c = \frac{b \int_0^h y dy}{b \int_0^h 1 dy} \rightarrow \frac{h}{2}$$

Cambiamos la dirección del diferencial para obtener el centro de gravedad.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.42 (c).

$$dA = y \cdot dx \quad dA = h \cdot dx \quad \bar{y} = \frac{y}{2} = \frac{h}{2} \quad \bar{x} = x$$

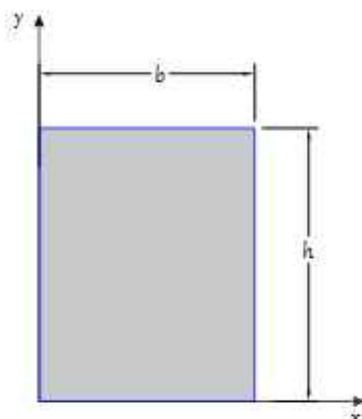
Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b x h dx}{\int_0^b h dx} \quad x_c = \frac{h \int_0^b x dx}{h \int_0^b 1 dx} \rightarrow \frac{b}{2}$$

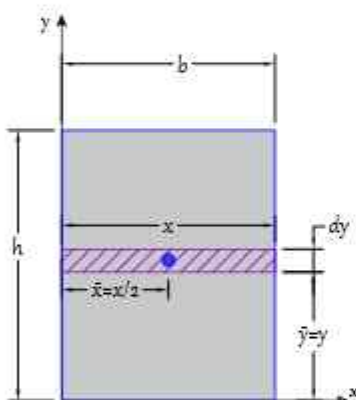
$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b \frac{h}{2} h dx}{\int_0^b h dx} \quad y_c = \frac{\frac{h}{2} \int_0^b 1 dx}{\int_0^b 1 dx} \rightarrow \frac{h}{2}$$

Podemos comprobar que al tomar el elemento diferencial en cualquier dirección el centro de gravedad es el mismo.

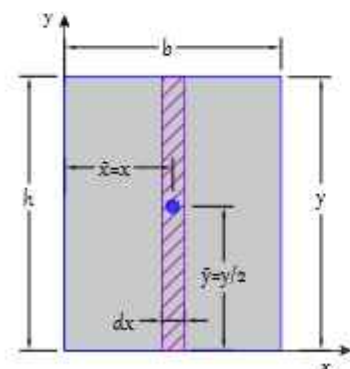
$$\text{Respuesta} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{h}{2} \end{bmatrix}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 4.42

Determine las coordenadas del centro de gravedad que se muestra en la siguiente figura.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.43 (b).

$$dA = x \cdot dy \quad \bar{x} = \frac{x}{2} \quad \bar{y} = y \quad y = h \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right) \\ x = b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y \cdot x dy}{\int_0^h x dy} \quad y_c = \frac{\int_0^h y \cdot b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy}{\int_0^h b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy} \rightarrow y_c = \frac{h}{3}$$

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b \frac{x}{2} \cdot x dx}{\int_0^b x dx} \quad x_c = \frac{\frac{1}{2} \int_0^b \left(b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)\right)^2 dy}{\int_0^b b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy} \rightarrow x_c = \frac{b}{3}$$

Cambiamos la dirección del diferencial para obtener el centro de gravedad

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.43 (c).

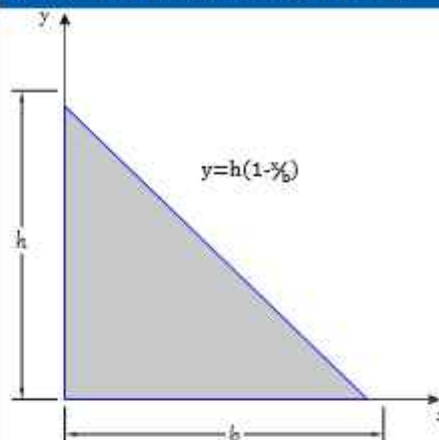
$$dA = y \cdot dx \quad \bar{y} = \frac{y}{2} \quad \bar{x} = x \quad y = h \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right) \quad x = b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

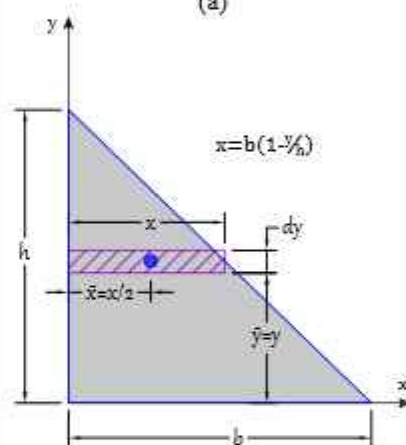
$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b \frac{y}{2} \cdot y dx}{\int_0^b y dx} \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_0^b \left(h \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)\right)^2 dx}{\int_0^b h \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx} \rightarrow y_c = \frac{h}{3}$$

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b x \cdot y dx}{\int_0^b y dx} \quad x_c = \frac{\int_0^b x \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx}{\int_0^b \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx} \rightarrow x_c = \frac{b}{3}$$

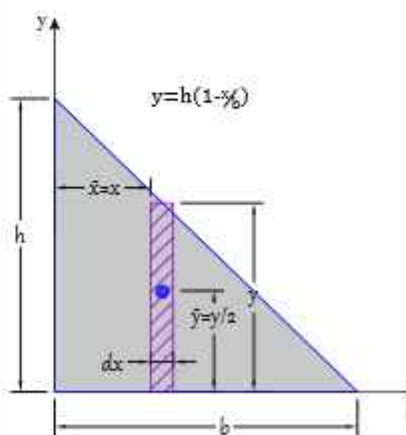
EJEMPLO RESUELTO 4.1.4.2



(a)



(b)



(c)

Figura 4.43

EJEMPLO RESUELTO 4.1.4.3

Determine las coordenadas del centro de gravedad que se muestra en la siguiente figura.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.44 (b).

$$dA = (b-x) \cdot dy \quad \bar{x} = \frac{x+b}{2} \quad \bar{y} = y \quad y = \frac{h}{b} x$$

$$x = \frac{b}{h} y$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y \cdot (b-x) dy}{\int_0^h (b-x) dy} = \frac{b \int_0^h y \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy}{\int_0^h b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy} \rightarrow y_c = \frac{h}{3}$$

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h \frac{x+b}{2} \cdot (b-x) dy}{\int_0^h b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy} = \frac{\int_0^h \frac{b^2 - \left(\frac{b}{h} y\right)^2}{2} dy}{\int_0^h b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy} \rightarrow x_c = \frac{2 \cdot b}{3}$$

Cambiamos la dirección del diferencial para obtener el centro de gravedad.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.44 (c).

$$dA = y \cdot dx \quad \bar{y} = \frac{y}{2} \quad \bar{x} = x \quad x = \frac{b}{h} y \quad y = \frac{h}{b} x$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b \frac{y}{2} \cdot y dx}{\int_0^b y dx} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{h}{b} x\right)^2 dx}{\int_0^b \frac{h}{b} x dx} \rightarrow y_c = \frac{h}{3}$$

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b x \cdot y dx}{\int_0^b y dx} = \frac{\int_0^b x \cdot \left(\frac{h}{b} x\right) dx}{\int_0^b \left(\frac{h}{b} x\right) dx} \rightarrow x_c = \frac{2 \cdot b}{3}$$

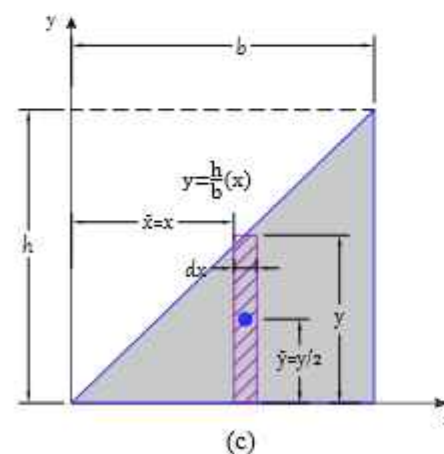
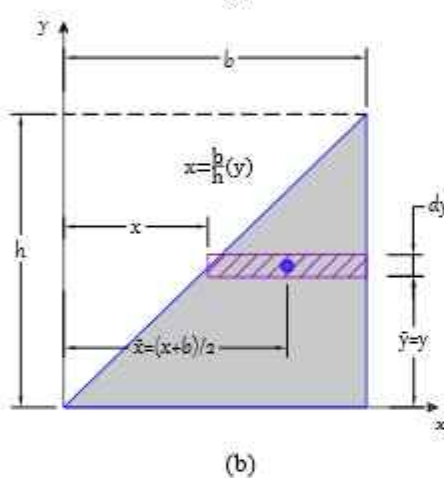
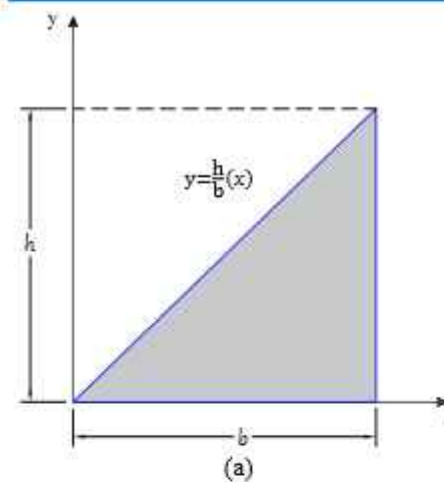


Figura 4.44

Determine las coordenadas del centro de gravedad que se muestra en la siguiente figura.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.45 (b).

$$dA = x \cdot dy \quad \bar{x} = \frac{x}{2} \quad \bar{y} = y \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} \, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^r y \cdot (x) \, dy}{\int_0^r x \, dy} \quad y_c = \frac{\int_0^r y \cdot (\sqrt{r^2 - y^2}) \, dy}{\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} \, dy} \xrightarrow{\text{simplify}} y_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} \, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^r \frac{x}{2} \cdot x \, dy}{\int_0^r x \, dy} \quad x_c = \frac{\int_0^r \frac{(\sqrt{r^2 - y^2})^2}{2} \, dy}{\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} \, dy} \xrightarrow{\text{simplify}} x_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

Cambiamos la dirección del diferencial para obtener el centro de gravedad

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.45 (c).

$$dA = y \cdot dx \quad \bar{y} = \frac{y}{2} \quad \bar{x} = x \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} \, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^r \frac{y}{2} \cdot (y) \, dx}{\int_0^r y \, dx} \quad y_c = \frac{\int_0^r \frac{r^2 - x^2}{2} \, dx}{\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx} \xrightarrow{\text{simplify}} y_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} \, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^r x \cdot y \, dx}{\int_0^r y \, dx} \quad x_c = \frac{\int_0^r x (\sqrt{r^2 - x^2}) \, dx}{\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx} \xrightarrow{\text{simplify}} x_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

EJEMPLO RESUELTO 4.1.4.4

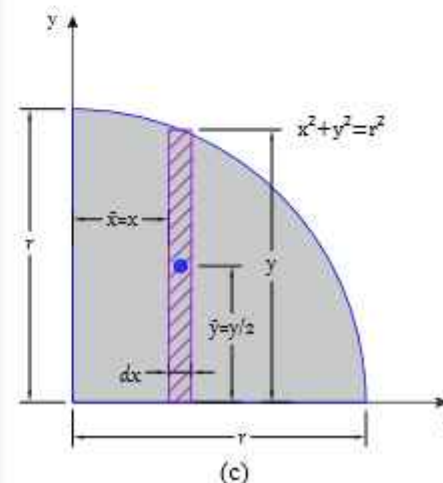
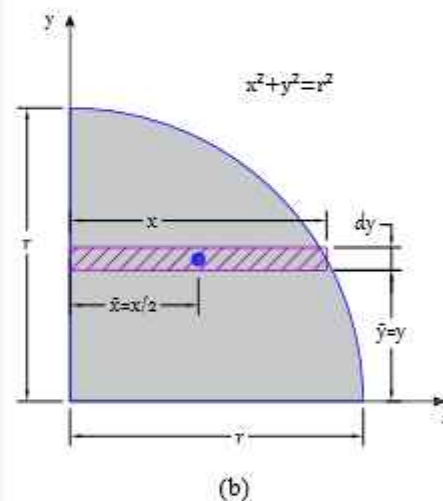
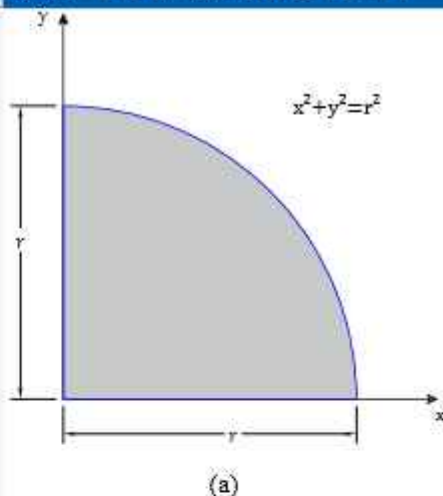
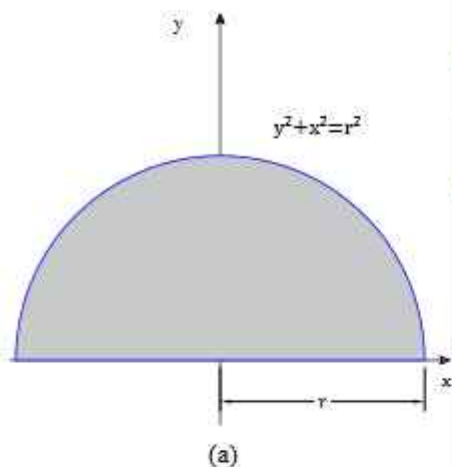


Figura 4.45

EJEMPLO RESUELTO 4.1.4.5

Determine las coordenadas del centro de gravedad que se muestra en la siguiente figura.

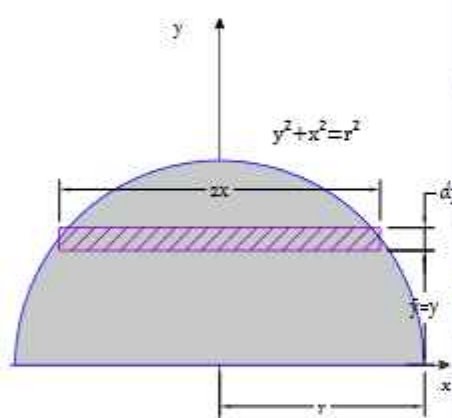


Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.46 (b).

$$dA = 2x \cdot dy \quad \bar{x} = 0 \quad \bar{y} = y \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ x = \sqrt{r^2 - y^2} \end{array}$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^r y \cdot (2x) dy}{\int_0^r 2x dy} \quad y_c = \frac{\int_0^r y \cdot (\sqrt{r^2 - y^2}) dy}{\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy} \xrightarrow{\text{simplify}} y_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$



$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^r 0 \cdot 2x dy}{\int_0^r 2x dy} \quad x_c = 0$$

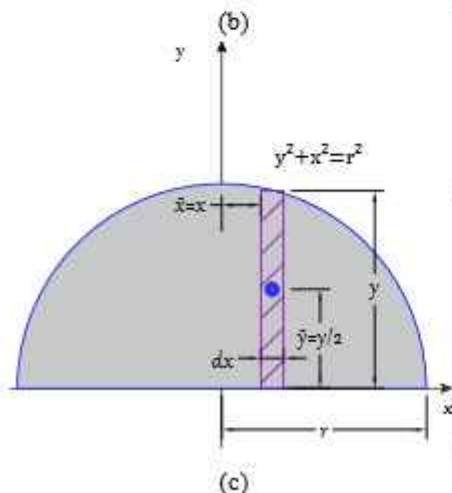
Cambiamos la dirección del diferencial para obtener el centro de gravedad

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.46 (c).

$$dA = y \cdot dx \quad \bar{y} = \frac{y}{2} \quad \bar{x} = x \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} \end{array}$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{-r}^r \frac{y}{2} \cdot (y) dx}{\int_{-r}^r y dx} \quad y_c = \frac{\int_{-r}^r \frac{r^2 - x^2}{2} dx}{\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx} \xrightarrow{\text{simplify}} y_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$



$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{-r}^r x \cdot y dx}{\int_{-r}^r y dx} \quad x_c = \frac{\int_{-r}^r x (\sqrt{r^2 - x^2}) dx}{\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx} \xrightarrow{\text{simplify}} x_c = 0$$

Figura 4.46

Determine las coordenadas del centro de gravedad que se muestra en la siguiente figura

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.47 (b).

$$dA = \frac{r \cdot r \cdot d\theta}{2} \quad \bar{x} = \frac{2r}{3} \cdot \cos(\theta) \quad \bar{y} = \frac{2r}{3} \cdot \sin(\theta) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ x &= \sqrt{r^2 - y^2} \end{aligned}$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a x e y

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{2r}{3} \cdot \sin(\theta) \cdot \left(\frac{r^2}{2}\right) d\theta}{\int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2} d\theta} \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{2r}{3} \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\frac{r^2}{2}\right) d\theta}{\int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2} d\theta} \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

De igual forma podemos calcular el centro de gravedad de un sector circular.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.47 (b).

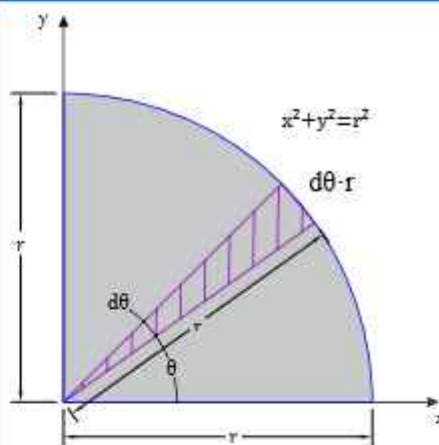
$$dA = \frac{r \cdot r \cdot d\theta}{2} \quad \bar{x} = \frac{2r}{3} \cdot \cos(\theta) \quad \bar{y} = \frac{2r}{3} \cdot \sin(\theta) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ x &= \sqrt{r^2 - y^2} \end{aligned}$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a x e y

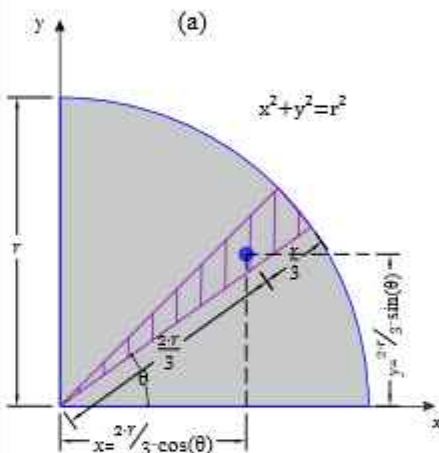
$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2r}{3} \cdot \sin(\theta) \cdot \left(\frac{r^2}{2}\right) d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{r^2}{2} d\theta} \xrightarrow{\text{simplify}} 0$$

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2r}{3} \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\frac{r^2}{2}\right) d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{r^2}{2} d\theta} \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{2 \cdot r \cdot \sin(\alpha)}{3 \cdot \alpha}$$

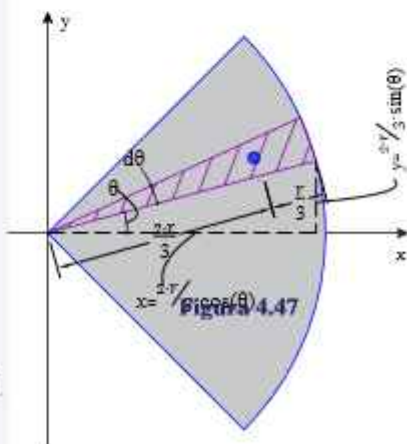
EJEMPLO RESUELTO 4.1.4.6



(a)



(b)



(c)

EJEMPLO RESUELTO 4.1.4.7

Determine las coordenadas del centro de gravedad que se muestra en la siguiente figura.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.48 (b).

$$dA = (b - x) \cdot dy \quad \bar{x} = \frac{x + b}{2} \quad \bar{y} = y$$

$$y = k \cdot x^2 \quad h = k \cdot b^2 \quad k = \frac{h}{b^2} \quad x = \sqrt{\frac{y \cdot b^2}{h}}$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y \cdot (b - x) dy}{\int_0^h (b - x) dy} \quad y_c = \frac{\int_0^h y \cdot \left(b - \sqrt{\frac{y \cdot b^2}{h}}\right) dy}{\int_0^h \left(b - \sqrt{\frac{y \cdot b^2}{h}}\right) dy} = \frac{3h}{10}$$

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h \left(\frac{\sqrt{\frac{y \cdot b^2}{h}} + b}{2}\right) \cdot \left(b - \sqrt{\frac{y \cdot b^2}{h}}\right) dy}{\int_0^h \left(b - \sqrt{\frac{y \cdot b^2}{h}}\right) dy} = \frac{3b}{4}$$

De igual forma podemos calcular el centro de gravedad de un sector circular

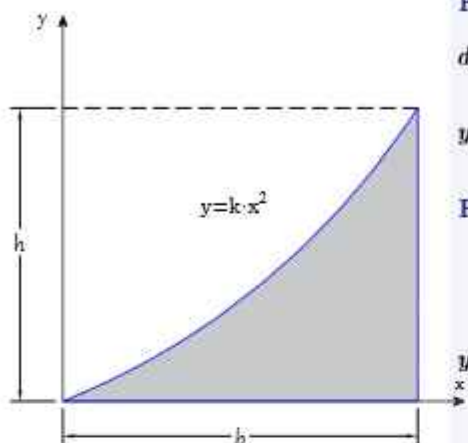
Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.48 (c).

$$dA = y \cdot dx \quad \bar{y} = \frac{y}{2} \quad \bar{x} = x \quad y = \frac{h}{b^2} \cdot x^2$$

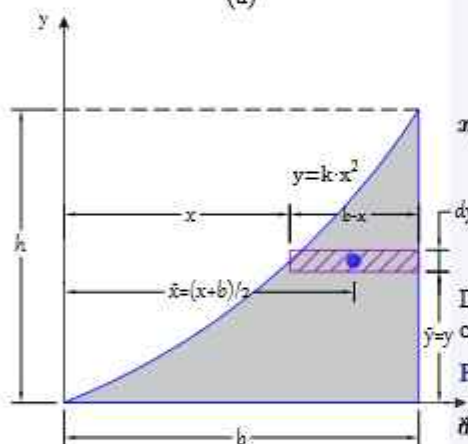
Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b \frac{y}{2} \cdot (y) dx}{\int_0^b y dx} \quad y_c = \frac{\int_0^b \left(\frac{h}{b^2} \cdot x^2\right)^2 dx}{\int_0^b \frac{h}{b^2} \cdot x^2 dx} \xrightarrow{\text{simplify}} y_c = \frac{3 \cdot h}{10}$$

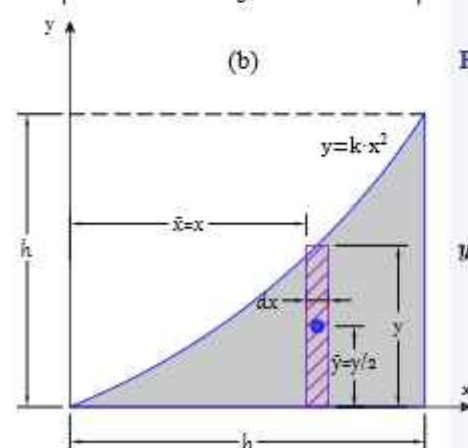
$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b x \cdot y dx}{\int_0^b y dx} \quad x_c = \frac{\int_0^b x \cdot \frac{h}{b^2} \cdot x^2 dx}{\int_0^b \frac{h}{b^2} \cdot x^2 dx} \xrightarrow{\text{simplify}} x_c = \frac{3 \cdot b}{4}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 4.48

EJEMPLO RESUELTO 4.1.4.8

Determine las coordenadas del centro de gravedad que se muestra en la siguiente figura

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.49 (b).

$$dA = 2x \cdot dy \quad \bar{x} = 0 \quad \bar{y} = y$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad x = \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) a^2}$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b y \cdot 2x dy}{\int_0^b 2x dy} \quad y_c = \frac{\int_0^b 2y \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) a^2} dy}{\int_0^b 2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) a^2} dy} = \frac{4b}{3\pi}$$

$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} \quad x_c = 0 \quad \text{Simetría}$$

De igual forma podemos calcular el centro de gravedad de un sector circular.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 4.49 (c).

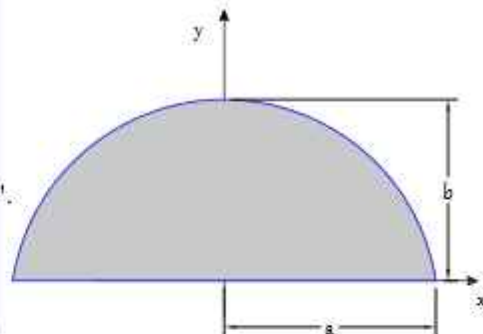
$$dA = y \cdot dx \quad \bar{y} = \frac{y}{2} \quad \bar{x} = x$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad y = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2}$$

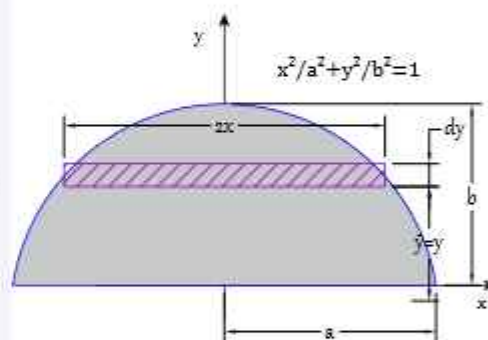
Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto a "x" e "y".

$$y_c = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{-a}^a \frac{y}{2} \cdot (y) dx}{\int_{-a}^a y dx} \quad y_c = \frac{\int_{-a}^a \left(\frac{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2}\right)^2 dx}{\int_{-a}^a \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} dx} = \frac{4b}{3\pi}$$

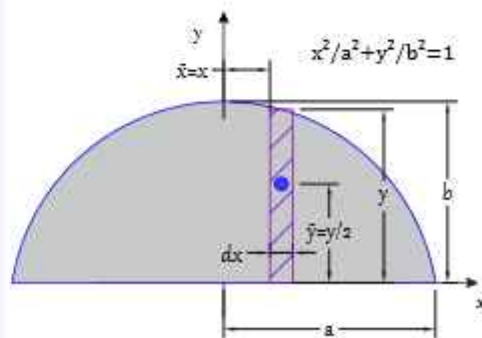
$$x_c = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{-a}^a x \cdot y dx}{\int_{-a}^a y dx} \quad x_c = \frac{\int_{-a}^a x \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} dx}{\int_{-a}^a \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} dx} = 0$$



(a)



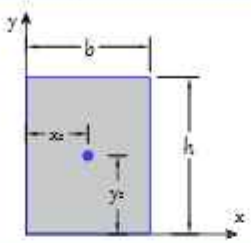
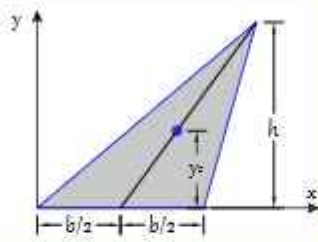
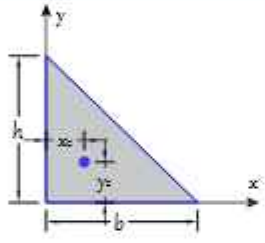
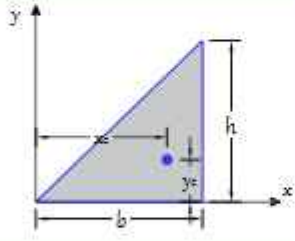
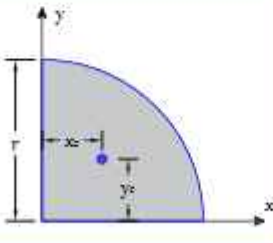
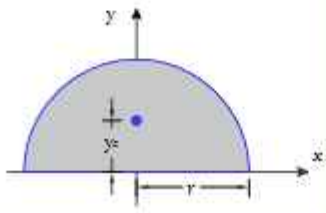
(b)



(c)

Figura 4.49

Tabla de resumen de centros de gravedad de figuras conocidas

Forma	Figura	Área	x_c	y_c
Rectángulo		$b \cdot h$	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$
Triángulo		$\frac{b \cdot h}{2}$	--	$\frac{h}{3}$
Triángulo Rectángulo		$\frac{b \cdot h}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$
Triángulo Rectángulo		$\frac{b \cdot h}{2}$	$\frac{2 \cdot b}{3}$	$\frac{h}{3}$
Arco de un cuarto de Círculo		$\frac{\pi \cdot r^2}{4}$	$\frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$	$\frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$
Arco de Semicírculo		$\frac{\pi \cdot r^2}{2}$	0	$\frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$

Forma	Figura	Área	x_c	y_c
Arco de Semicirculo		$\frac{\pi \cdot r^2}{2}$	$\frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$	0
Arco de un Circulo		$\alpha \cdot r^2$	$\frac{2 \cdot r \cdot \sin(\alpha)}{3 \cdot \alpha}$	0
Parábola Segundo Grado		$\frac{b \cdot h}{3}$	$\frac{3 \cdot b}{4}$	$\frac{3 \cdot h}{10}$
Parábola General		$\frac{b \cdot h}{n+1}$	$\frac{(n+1) \cdot b}{n+2}$	$\frac{(n+1) \cdot h}{4n+2}$
Elipse		$\frac{\pi \cdot a \cdot b}{2}$	0	$\frac{4 \cdot b}{3 \cdot \pi}$

4.1.5. CENTRO DE GRAVEDAD: ÁREA - EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicios

13 Determinar el centro de gravedad de las siguientes figuras

4.25

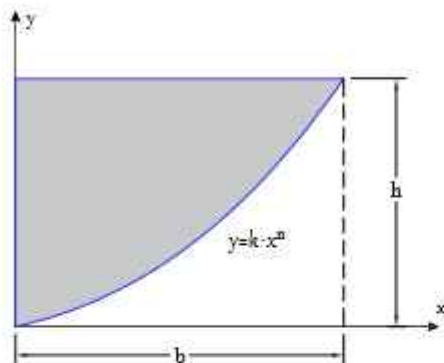


Figura 4.50

4.26

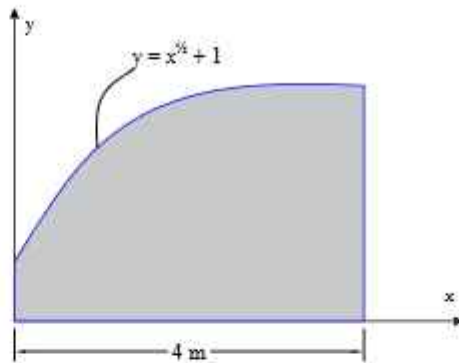


Figura 4.51

4.27

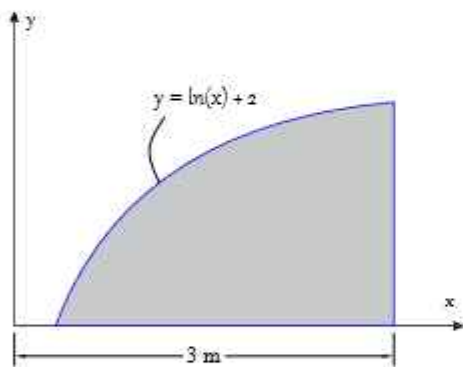


Figura 4.52

4.28

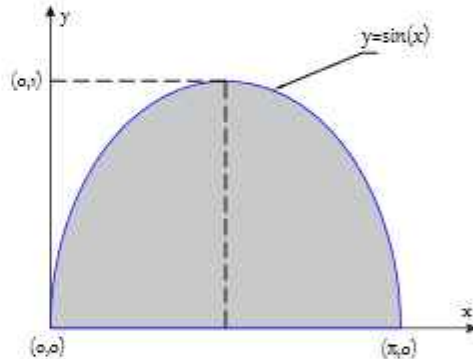


Figura 4.53

4.29

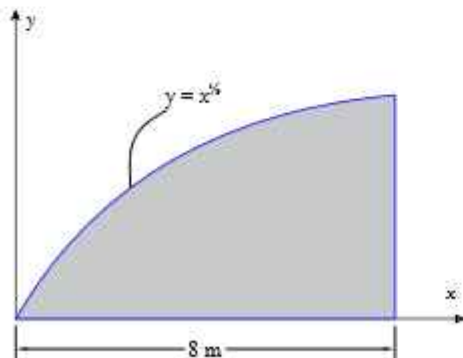


Figura 4.54

4.30

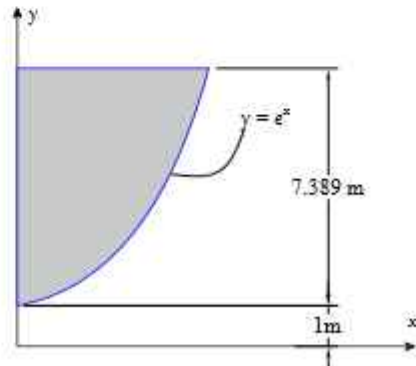


Figura 4.55

Determinar el centro de gravedad de la siguientes figuras

4.31

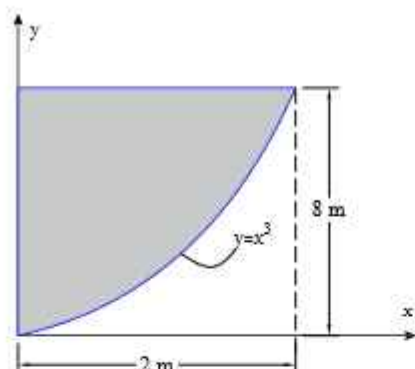


Figura 4.56

4.32

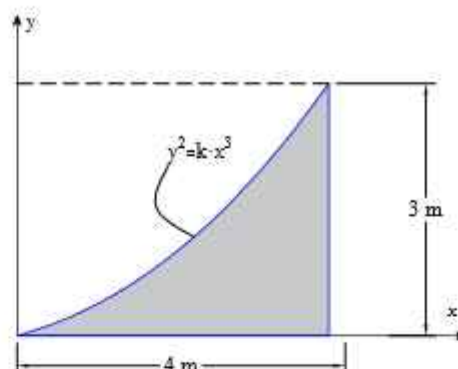


Figura 4.57

4.33

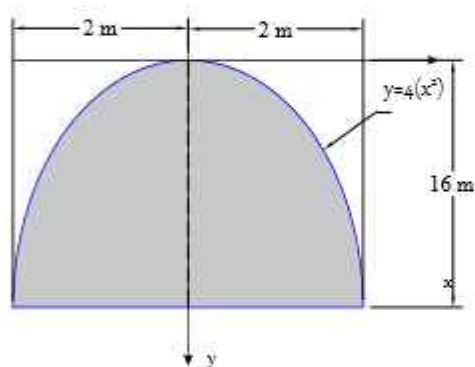


Figura 4.58

4.34

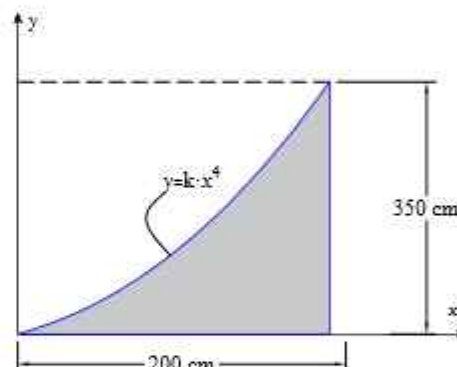


Figura 4.59

4.35

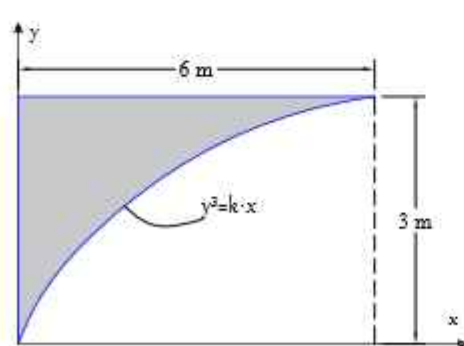


Figura 4.60

4.36

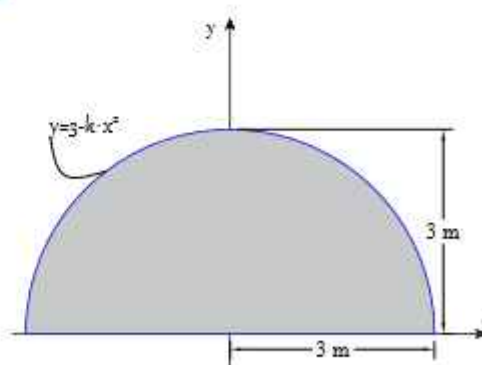


Figura 4.61

Determinar el centro de gravedad de la siguientes figuras

4.37

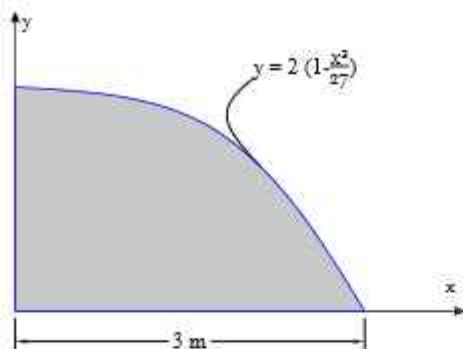


Figura 4.62

4.38

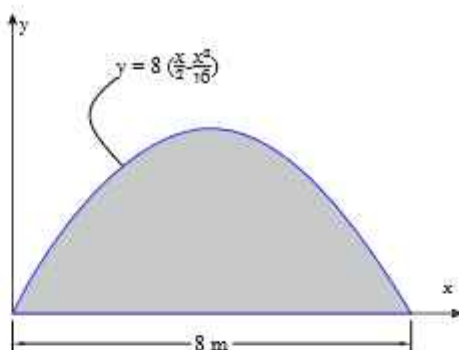


Figura 4.63

4.39

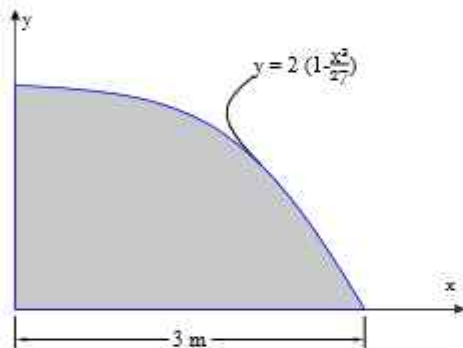


Figura 4.64

4.40

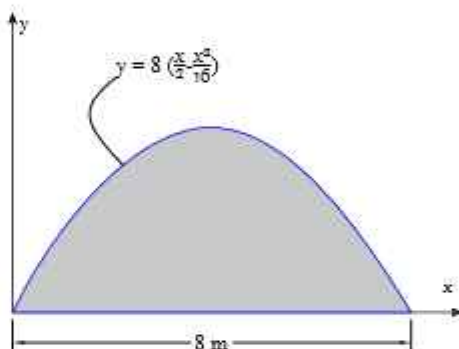


Figura 4.65

4.41

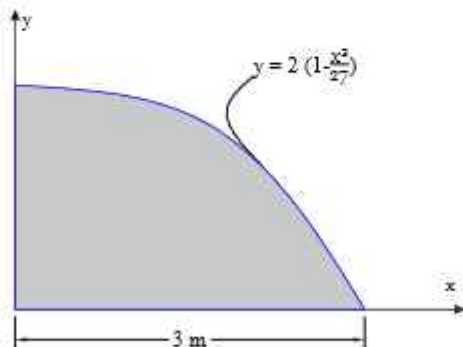


Figura 4.66

4.42

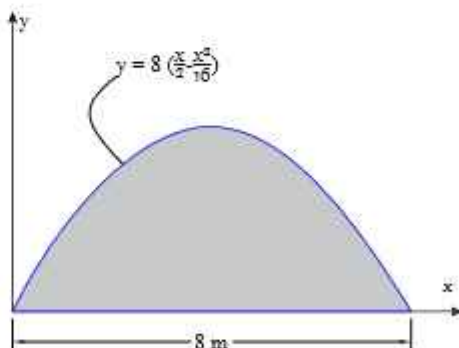


Figura 4.67

Determinar el centro de gravedad de la siguientes figuras

4.43

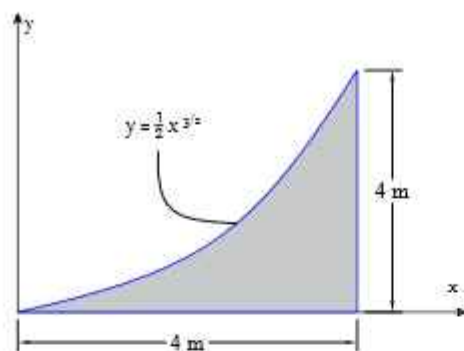


Figura 4.68

4.44

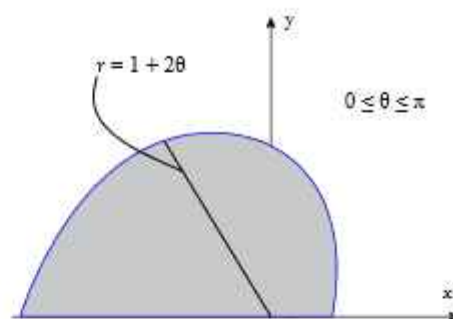


Figura 4.69

4.45

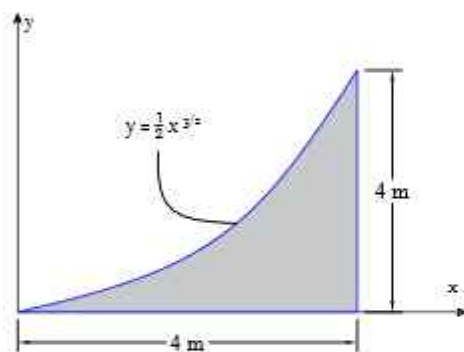


Figura 4.70

4.46

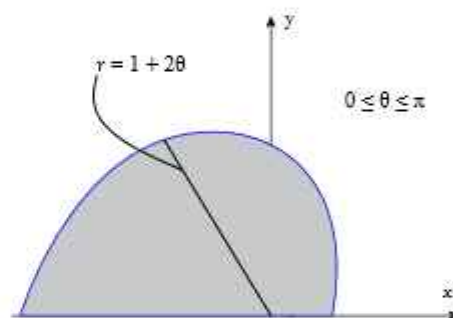


Figura 4.71

4.47

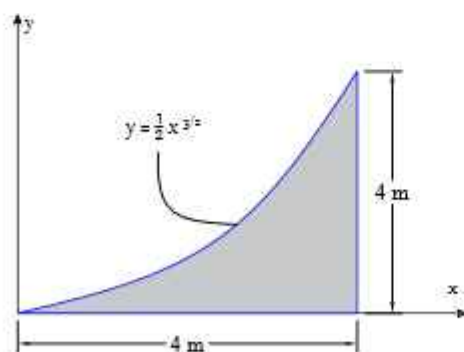


Figura 4.72

4.48

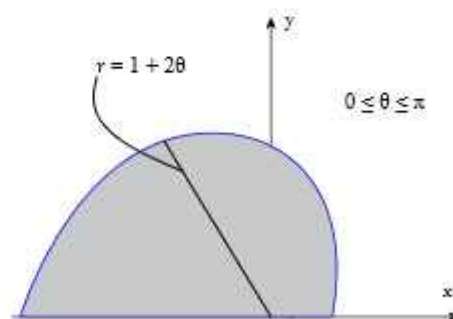
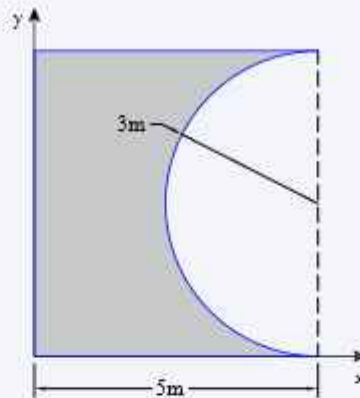


Figura 4.73

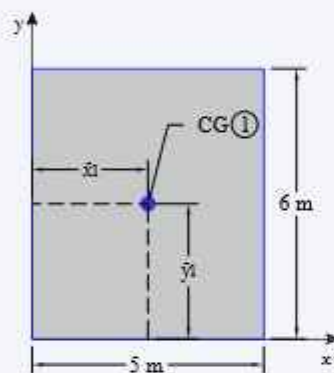
4.1.6. CENTRO DE GRAVEDAD: ÁREA COMPUESTA - EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.1

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.



(a)



(b)

Paso 1: Identificación de elementos ① y ② figuras 4.74 (b) y (c) respectivamente, luego cálculo de área y centroide de cada elemento.

Área y Centroide:
Elemento ①

$$b_1 = 5 \text{ m}$$

$$h_1 = 6 \text{ m}$$

$$A_1 = b_1 \cdot h_1 = 30 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_1 = b_1 \div 2 = 2.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 = h_1 \div 2 = 3 \text{ m}$$

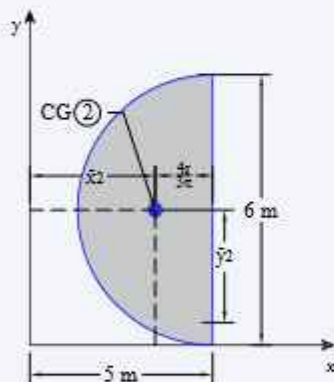
Área y Centroide:
Elemento ②

$$r_2 = 3 \text{ m}$$

$$A_2 = \frac{\pi r_2^2}{2} = 14.137 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_2 = 5 \text{ m} - \frac{4 r_2}{3 \pi} = 3.727 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 = 3 \text{ m}$$



(c)

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta.

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)
①	30	2.5	3	75	90
②	-14.14	3.73	3	-52.69	-42.41
Σ	15.86			22.31	47.59

CONTINUACIÓN

Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c = 1.407 \text{ m}$$

$$y_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$y_c = 3 \text{ m}$$

∴ El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 1.407 \text{ m}$,
 $y_c = 3 \text{ m}$

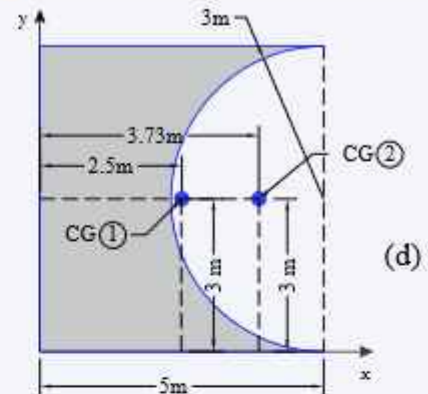
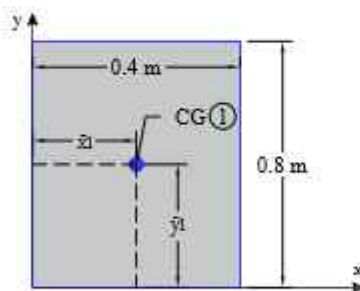


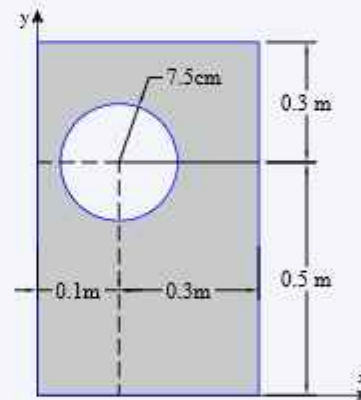
Figura 4.74

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.2

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.



(b)



(a)

Paso 1: Identificación de elementos ① y ② figuras 4.75 (b) y (c) respectivamente, luego cálculo de área y centroide de cada elemento:

Área y Centroides :
 Elemento ①

$$b_1 := 0.4 \text{ m}$$

$$h_1 := 0.8 \text{ m}$$

$$A_1 := b_1 \cdot h_1 = 0.32 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_1 := b_1 \div 2 = 0.2 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := h_1 \div 2 = 0.4 \text{ m}$$

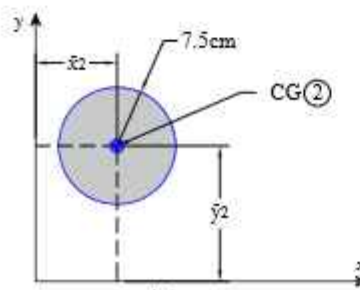
Área y Centroides :
 Elemento ②

$$r_2 := 7.5 \text{ cm}$$

$$A_2 := \pi r_2^2 = 0.018 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_2 := 0.1 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := 0.5 \text{ m}$$



(c)

CONTINUACIÓN

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)
①	0.32	0.2	0.4	0.064	0.128
②	-0.018	0.10	0.5	-0.002	-0.009
Σ	0.30			0.062	0.119

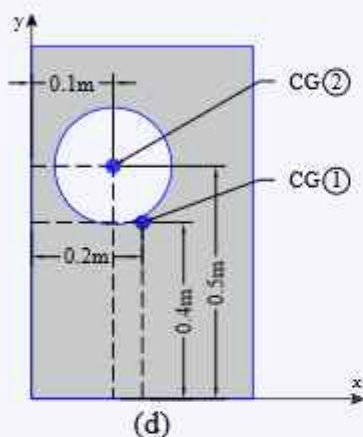


Figura 4.75

Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c = 0.206 \text{ m}$$

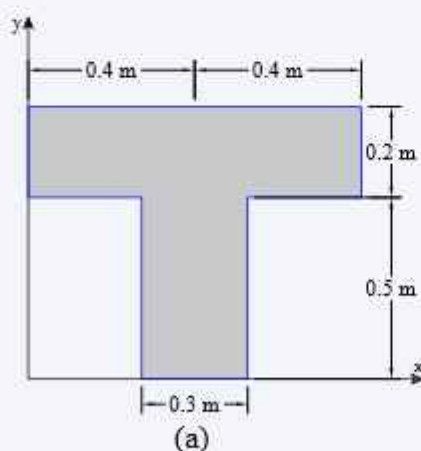
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$y_c = 0.394 \text{ m}$$

∴ El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 0.206 \text{ m}$, $y_c = 0.394 \text{ m}$

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.3



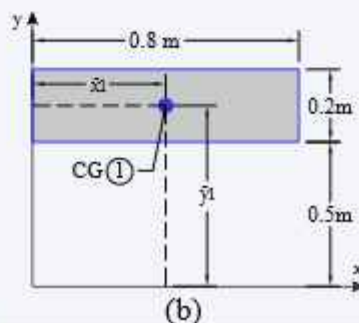
Paso 1: Identificación de elementos ① y ② figuras 4.76 (b) y (c) respectivamente, luego cálculo de área y centroide de cada elemento:

Área y Centroides : Elemento ①

$$b_1 = 0.8 \text{ m}$$

Área y Centroides : Elemento ②

$$b_2 = 0.3 \text{ m}$$



CONTINUACIÓN

$$h_1 := 0.2 \text{ m}$$

$$h_2 := 0.5 \text{ m}$$

$$A_1 := b_1 \cdot h_1 = 0.16 \text{ m}^2$$

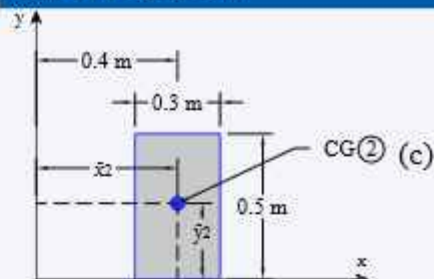
$$A_2 := b_2 \cdot h_2 = 0.15 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_1 := b_1 \div 2 = 0.4 \text{ m}$$

$$\bar{x}_2 := 0.25 \text{ m} + b_2 \div 2 = 0.4 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := 0.5 \text{ m} + h_1 \div 2 = 0.6 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := h_2 \div 2 = 0.25 \text{ m}$$



Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)
①	0.16	0.4	0.6	0.064	0.096
②	0.150	0.40	0.25	0.060	0.038
Σ	0.31			0.124	0.134

Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c = 0.4 \text{ m}$$

$$y_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$y_c = 0.4306 \text{ m}$$

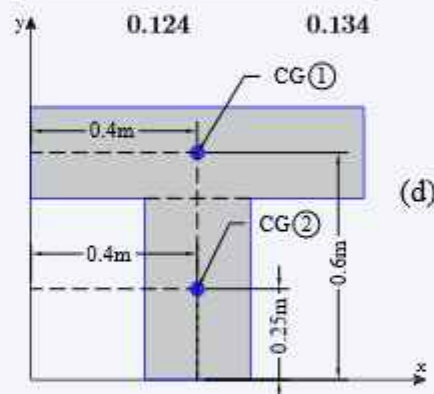
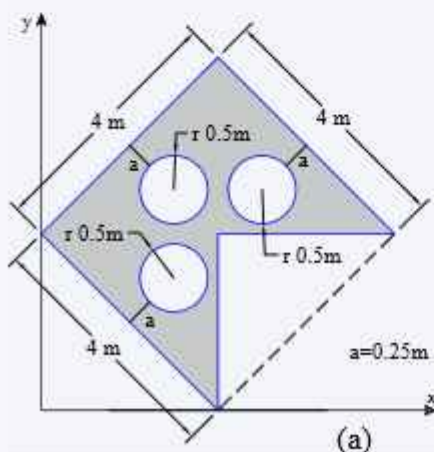


Figura 4.76

∴ El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 0.4 \text{ m}$, $y_c = 0.4306 \text{ m}$

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.4

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.



Paso 1: Identificación de elementos ①, ②, ③, ④, ⑤ y ⑥ figuras 4.77 (b), (c), (d), (e), (f) y (g) respectivamente, luego cálculo de área y centroide de cada elemento

Área y Centroide : Elemento ①

$$b_1 := 2 \sqrt{2} \text{ m}$$

$$h_1 := 2 \sqrt{2} \text{ m}$$

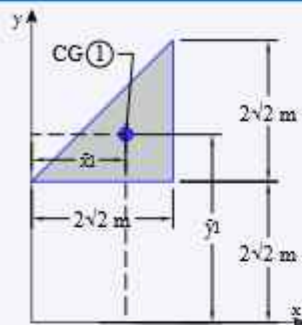
$$A_1 := b_1 \cdot h_1 = 8 \text{ m}^2$$

Área y Centroide : Elemento ②

$$r_2 := 0.5 \text{ m}$$

$$A_2 := \pi \cdot r_2^2 = 0.785 \text{ m}^2$$

CONTINUACIÓN



$$\bar{x}_1 := 2 b_1 \div 3 = 1.886 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := 2 \sqrt{2} \text{ m} + h_1 \div 3$$

$$(b) \quad \bar{y}_1 = 3.771 \text{ m}$$

Área y Centroide : Elemento ③

$$b_3 := 2 \sqrt{2} \text{ m}$$

$$h_3 := 2 \sqrt{2} \text{ m}$$

$$A_3 := b_3 \cdot h_3 = 8 \text{ m}^2$$

$$(c) \quad \bar{x}_3 := b_1 + b_3 \div 3 = 3.771 \text{ m}$$

$$\bar{y}_3 := 2 \sqrt{2} \text{ m} + h_1 \div 3$$

$$\bar{y}_3 = 3.771 \text{ m}$$

Área y Centroide : Elemento ⑤

$$b_5 := 2 \sqrt{2} \text{ m}$$

$$h_5 := 2 \sqrt{2} \text{ m}$$

$$(d) \quad A_5 := b_5 \cdot h_5 = 8 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_5 := 2 b_5 \div 3 = 1.886 \text{ m}$$

$$\bar{y}_5 := 2 \sqrt{2} \text{ m} - h_5 \div 3$$

$$\bar{y}_5 = 1.886 \text{ m}$$

$$\bar{x}_2 := b_1 - 1.25 \text{ m} \div \sqrt{2} = 1.945 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := 2 \sqrt{2} \text{ m} + 1.25 \text{ m} \div \sqrt{2}$$

$$\bar{y}_2 = 3.712 \text{ m}$$

Área y Centroide : Elemento ④

$$r_4 = 0.5 \text{ m}$$

$$A_4 := \pi \cdot (r_4)^2 = 0.785 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_4 := b_1 + 1.25 \text{ m} \div \sqrt{2} = 3.712 \text{ m}$$

$$\bar{y}_4 := 2 \sqrt{2} \text{ m} + 1.25 \text{ m} \div \sqrt{2}$$

$$\bar{y}_4 = 3.712 \text{ m}$$

Área y Centroide : Elemento ⑥

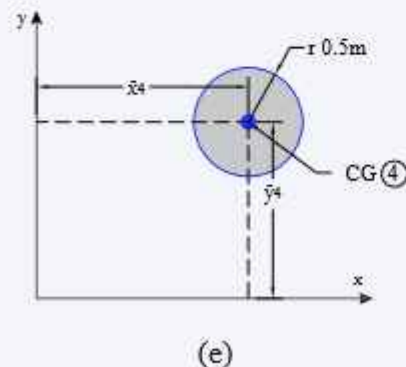
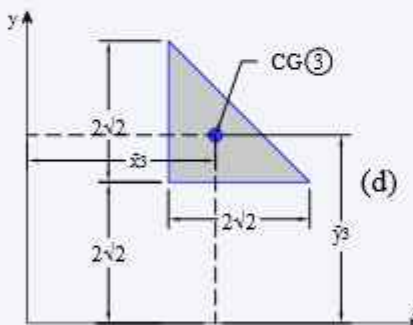
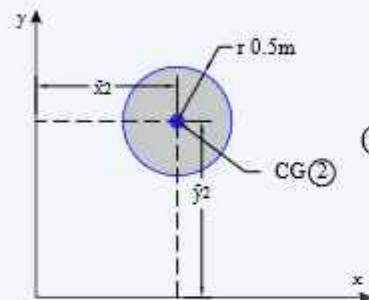
$$r_6 = 0.5 \text{ m}$$

$$A_6 := \pi \cdot (r_6)^2 = 0.785 \text{ m}^2$$

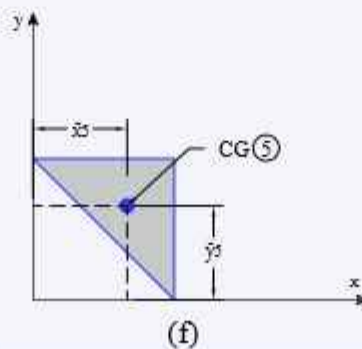
$$\bar{x}_6 := b_5 - 1.25 \text{ m} \div \sqrt{2} = 1.945 \text{ m}$$

$$\bar{y}_6 := 2 \sqrt{2} \text{ m} - 1.25 \text{ m} \div \sqrt{2}$$

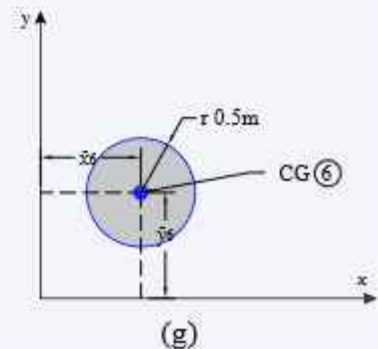
$$\bar{y}_6 = 1.945 \text{ m}$$



(e)



(f)



(g)

CONTINUACIÓN

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)
①	8	1.886	3.771	15.085	30.170
②	-0.785	1.94	3.712	-1.527	-2.916
③	8.00	3.771	3.771	30.170	30.170
④	-0.785	3.712	3.712	-2.916	-2.916
⑤	8	1.886	1.886	15.085	15.085
⑥	-0.785	1.945	1.945	-1.527	-1.527
Σ	21.644			54.370	68.066

Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c = 2.512 \text{ m}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$y_c = 3.1448 \text{ m}$$

∴ El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 2.512 \text{ m}$,
 $y_c = 3.1448 \text{ m}$

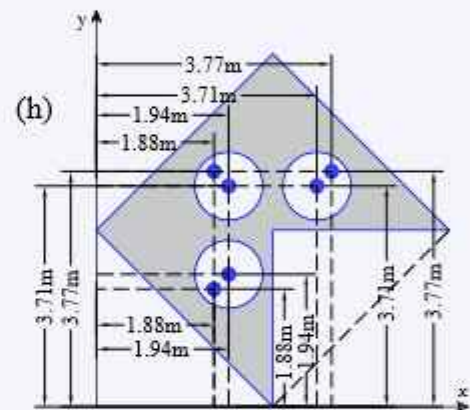
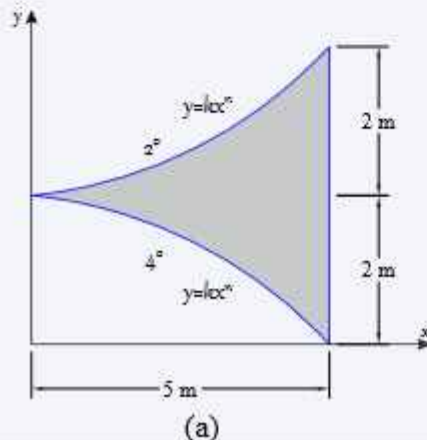


Figura 4.77

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.5

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.



Paso 1: Identificación de elementos ① y ② figuras 4.78 (b) y (c) respectivamente, luego cálculo de área y centroide de cada elemento:

Área y Centroide : Elemento ①

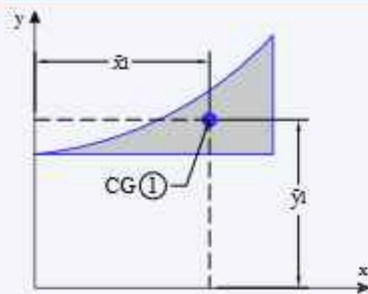
$$b_1 = 5 \text{ m}$$

$$h_1 = 2 \text{ m}$$

$$n_1 = 2$$

$$A_1 = \frac{b_1 \cdot h_1}{n_1 + 1} = 3.333 \text{ m}^2$$

CONTINUACIÓN



(b)

$$\bar{x}_1 := \frac{n_1 + 1}{n_1 + 2} b_1 = 3.75 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := 2 \text{ m} + \frac{n_1 + 1}{4 n_1 + 2} h_1 = 2.6 \text{ m}$$

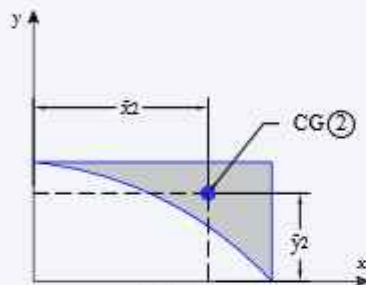
Área y Centroide : Elemento ②

$$b_2 := 5 \text{ m}$$

$$h_2 := 2 \text{ m}$$

$$n_2 := 4$$

$$A_2 := \frac{b_2 \cdot h_2}{n_2 + 1} = 2 \text{ m}^2$$



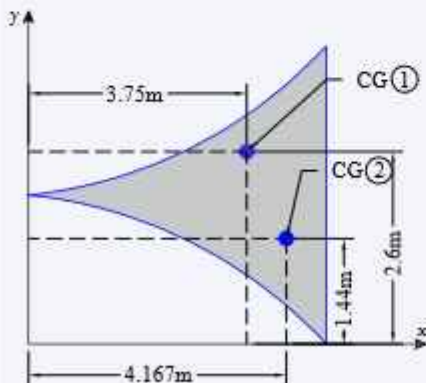
(c)

$$\bar{x}_2 := \frac{n_2 + 1}{n_2 + 2} b_2 = 4.167 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := h_2 - \frac{n_2 + 1}{4 n_2 + 2} h_2 = 1.444 \text{ m}$$

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)
①	3.333	3.750	2.6	12.500	8.667
②	2	4.167	1.444	8.333	2.889
Σ	5.33			20.833	11.556



(d)

Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c = 3.906 \text{ m}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$y_c = 2.1667 \text{ m}$$

∴ El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 3.906 \text{ m}$,
 $y_c = 2.1667 \text{ m}$

Figura 4.78

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.6

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.

Paso 1: Identificación de elementos ① y ② figura 4.79 (b) y (c) respectivamente, luego cálculo de área y centroide de cada elemento

$$r_2 := 2 \text{ m} \cdot \tan(33^\circ) = 1.299 \text{ m}$$

Área y Centroide :
Elemento ①

$$b_1 := 4 \text{ m}$$

$$h_1 := 4 \text{ m}$$

$$A_1 := b_1 \cdot h_1 = 16 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_1 := 0.588 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := 2.767 \text{ m}$$

Área y Centroide :
Elemento ②

$$r_2 = 1.299 \text{ m}$$

$$A_2 := \frac{\pi \cdot r_2^2}{2} = 2.65 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_2 := 4.524 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := 1.39 \text{ m}$$

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)
①	16.000	0.588	2.77	9.408	44.272
②	2.650	4.524	1.390	11.988	3.683
Σ	18.65			21.396	47.955

Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c = 1.147 \text{ m}$$

$$y_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$y_c = 2.5714 \text{ m}$$

∴ El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 1.147 \text{ m}$,
 $y_c = 2.5714 \text{ m}$

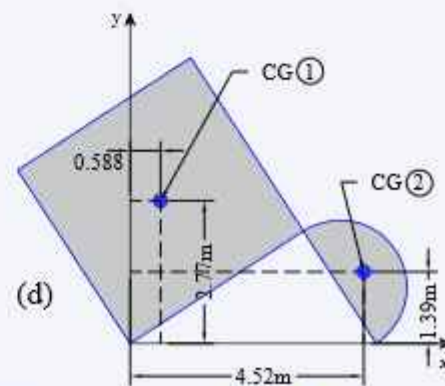
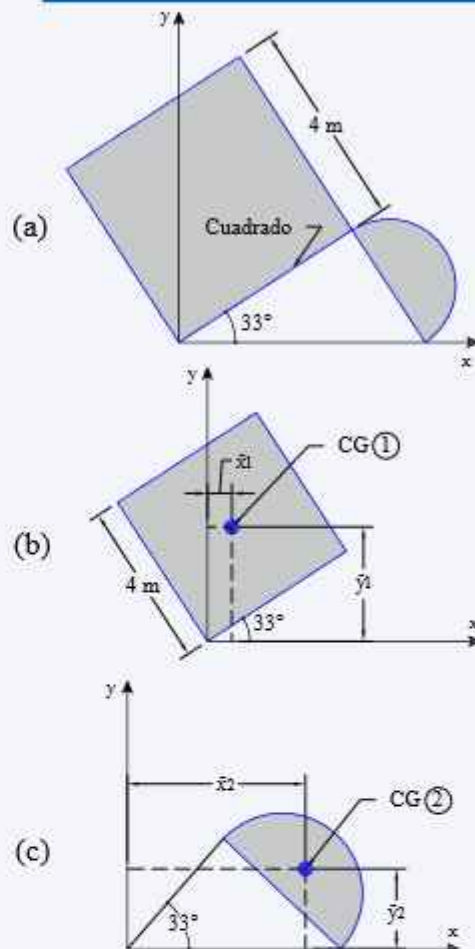
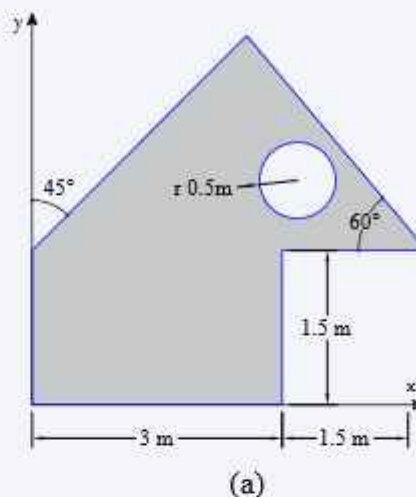
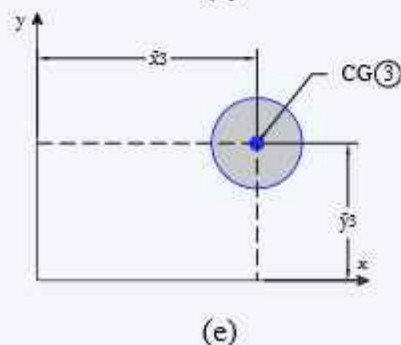
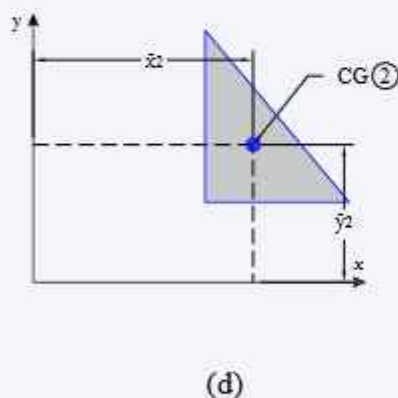
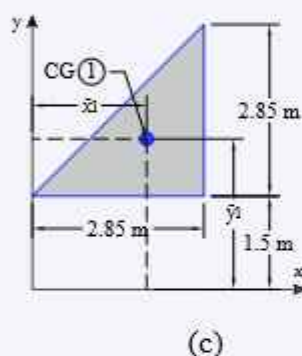
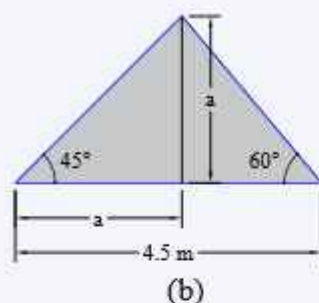


Figura 4.79

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.7

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.



Paso 1: Identificación de elementos ①, ②, ③ y ④ figuras 4.80 (c), (d), (e) y (f) respectivamente, luego cálculo de área y centroide de cada elemento

$$a := \frac{4.5 \text{ m}}{\left(1 + \frac{1}{\tan(60^\circ)}\right)} = 2.853 \text{ m}$$

Área y Centroide :
Elemento ①

$$b_1 := a = 2.853 \text{ m}$$

$$h_1 := a = 2.853 \text{ m}$$

$$A_1 := \frac{b_1 \cdot h_1}{2} = 4.069 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_1 := 2 b_1 \div 3 = 1.902 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := 1.5 \text{ m} + h_1 \div 3 = 2.451 \text{ m}$$

Área y Centroide :
Elemento ③

$$r_3 := 0.5 \text{ m}$$

Área y Centroide :
Elemento ②

$$b_2 := 4.5 \text{ m} - b_1 = 1.647 \text{ m}$$

$$h_2 := h_1 = 2.853 \text{ m}$$

$$A_2 := \frac{b_2 \cdot h_2}{2} = 2.35 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_2 := b_1 + b_2 \div 3 = 3.402 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := 1.5 \text{ m} + h_2 \div 3 = 2.451 \text{ m}$$

Área y Centroide :
Elemento ④

$$b_4 := 3 \text{ m}$$

$$h_4 := 1.5 \text{ m}$$

$$A_3 := \pi \cdot (r_3)^2 = 0.785 \text{ m}^2 \quad A_4 := b_4 \cdot h_4 = 4.5 \text{ m}^2$$

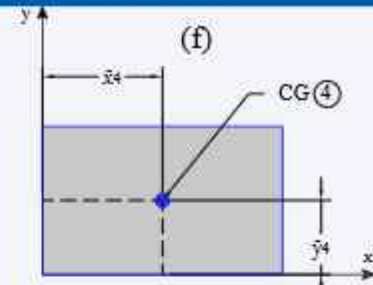
$$\bar{x}_3 := 3 \text{ m} + 0.157 \text{ m} = 3.157 \text{ m} \quad \bar{x}_4 := b_4 \div 2 = 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_3 := 1.5 \text{ m} + 1.126 \text{ m} = 2.626 \text{ m} \quad \bar{y}_4 := h_4 \div 2 = 0.75 \text{ m}$$

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)
①	4.069	1.902	2.451	7.740	9.974
②	2.350	3.40	2.451	7.993	5.759
③	-0.79	3.157	2.626	-2.480	-2.063
④	4.500	1.500	0.750	6.750	3.375
Σ	10.134			20.003	17.045

CONTINUACIÓN



Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad y_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c = 1.974 \text{ m} \quad y_c = 1.6821 \text{ m}$$

∴ El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 1.974 \text{ m}$, $y_c = 1.6821 \text{ m}$

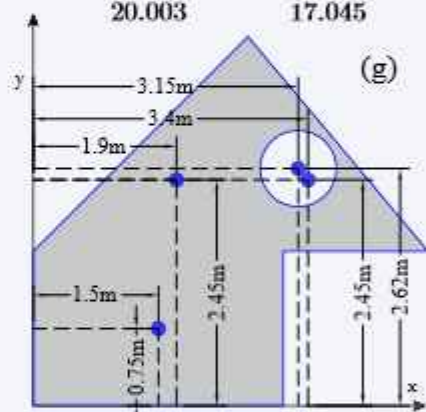
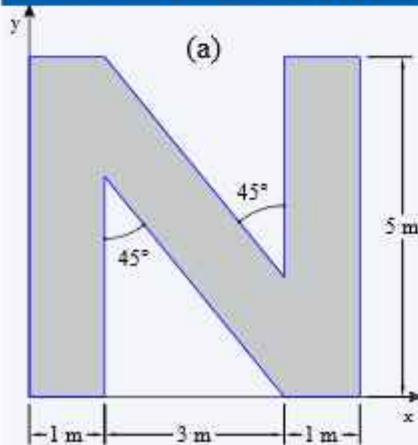


Figura 4.80

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.8

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.



Paso 1: Identificación de elementos ①, ② y ③ figuras 4.81 (b), (c) y (d) respectivamente, luego cálculo de área y centroide de cada elemento

Área y Centroide : Elemento ①

$$b_1 := 5 \text{ m}$$

$$h_1 := 5 \text{ m}$$

$$A_1 := b_1 \cdot h_1 = 25 \text{ m}^2$$

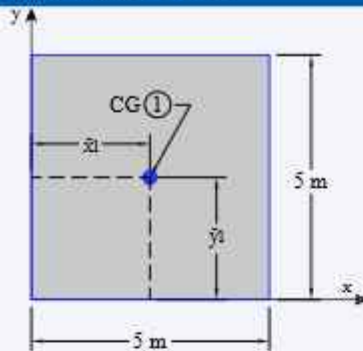
Área y Centroide : Elemento ②

$$b_2 := 3 \text{ m}$$

$$h_2 := 3 \text{ m}$$

$$A_2 := \frac{b_2 \cdot h_2}{2} = 4.5 \text{ m}^2$$

CONTINUACIÓN



(b)

$$\bar{x}_1 := b_1 \div 2 = 2.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := h_1 \div 2 = 2.5 \text{ m}$$

Área y Centroide : Elemento ③

$$b_3 := 3 \text{ m}$$

$$h_3 := 3 \text{ m}$$

$$\bar{x}_2 := 1 \text{ m} + \frac{1}{3} b_2 = 2 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := h_2 \div 3 = 1 \text{ m}$$

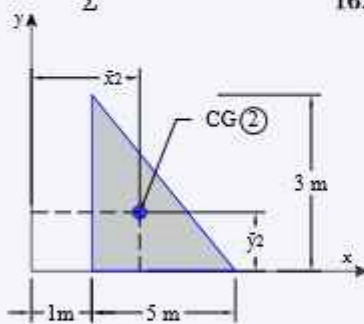
$$A_3 := \frac{b_3 \cdot h_3}{2} = 4.5 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_3 := 1 \text{ m} + \frac{2}{3} b_3 = 3 \text{ m}$$

$$\bar{y}_3 := 5 \text{ m} - h_3 \div 3 = 4 \text{ m}$$

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)
①	25.000	2.500	2.500	62.500	62.500
②	-4.500	2.000	1.000	-9.000	-4.500
③	-4.500	3.000	4.000	-13.500	-18.000
Σ	16.000			40.000	40.000



(c)

Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

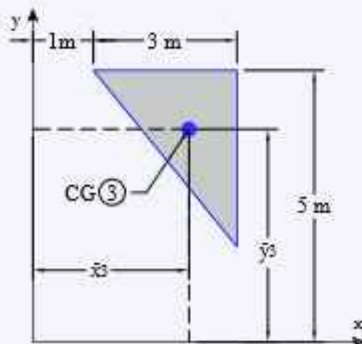
$$x_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c = 2.5 \text{ m}$$

$$y_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$y_c = 2.5 \text{ m}$$

∴ El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 2.5 \text{ m}$,
 $y_c = 2.5 \text{ m}$



(d)

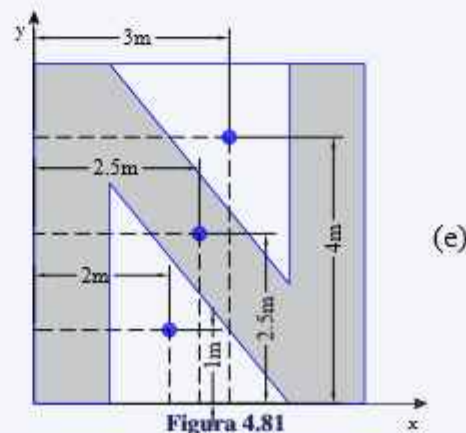
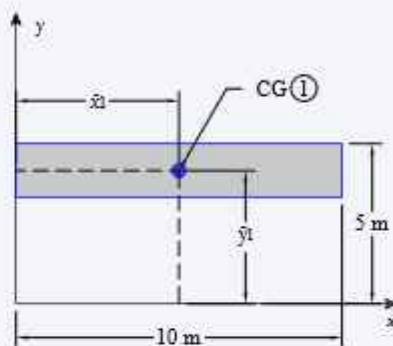
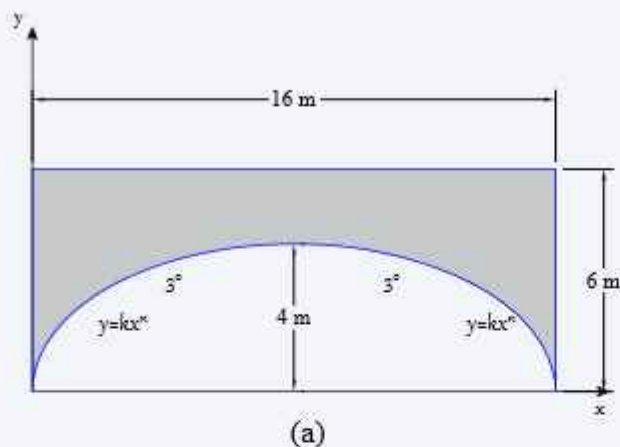


Figura 4.81

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.9



Paso 1: Identificación de elementos ①, ② y ③ figuras 4.82 (b), (c) y (d) respectivamente, luego cálculo de área y centroide de cada elemento

Área y Centroides : Elemento ①

$$b_1 := 16 \text{ m}$$

$$h_1 := 2 \text{ m}$$

$$A_1 := b_1 \cdot h_1 = 32 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_1 := b_1 \div 2 = 8 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := 4 \text{ m} + h_1 \div 2 = 5 \text{ m}$$

Área y Centroides : Elemento ②

$$b_2 := 8 \text{ m}$$

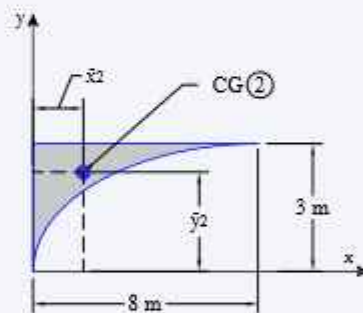
$$h_2 := 4 \text{ m}$$

$$n_2 := 3$$

$$A_2 := \frac{b_2 \cdot h_2}{n_2 + 1} = 8 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_2 := 8 \text{ m} - \frac{b_2 \cdot (n_2 + 1)}{(n_2 + 2)} = 1.6 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := 4 \text{ m} - \frac{h_2 \cdot (n_2 + 1)}{2(2n_2 + 1)} = 2.857 \text{ m}$$



(c)

Área y Centroides : Elemento ③

$$b_3 := 8 \text{ m}$$

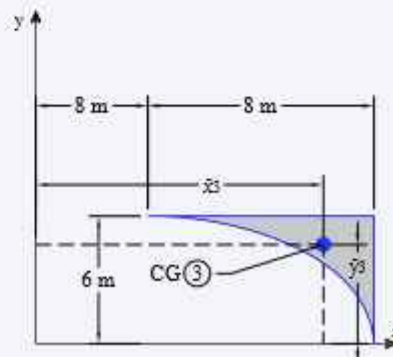
$$n_3 := 3$$

$$h_3 := 4 \text{ m}$$

$$A_3 := \frac{b_3 \cdot h_3}{n_3 + 1} = 8 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_3 := 8 \text{ m} + \frac{b_3 \cdot (n_3 + 1)}{(n_3 + 2)} = 14.4 \text{ m}$$

$$\bar{y}_3 := 4 \text{ m} - \frac{h_3 \cdot (n_3 + 1)}{2(2n_3 + 1)} = 2.857 \text{ m}$$



(d)

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

CONTINUACIÓN

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)
①	32.000	8.000	5.000	256.000	160.000
②	8.000	1.60	2.857	12.800	22.857
③	8.00	14.400	2.857	115.200	22.857
Σ	48.000			384.000	205.714

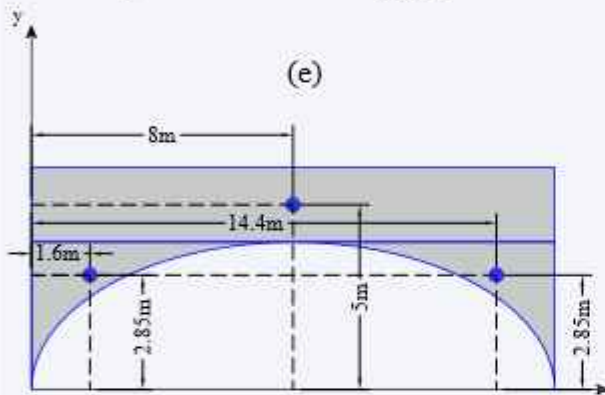


Figura 4.82

Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i} \qquad y_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c = 8 \text{ m} \qquad y_c = 4.2857 \text{ m}$$

∴ El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 8 \text{ m}$, $y_c = 4.2857 \text{ m}$

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.10

Paso 1: Identificación de elementos ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨, ⑩, ⑪, ⑫, ⑬, ⑭, ⑮ y ⑯ figuras 4.83 (b), (c), (d), (e), (f), (g) y (h) respectivamente, luego cálculo de área y centroide de cada elemento

Área y Centroide: Elemento ① y ②

$$r_1 = 10 \text{ mm}$$

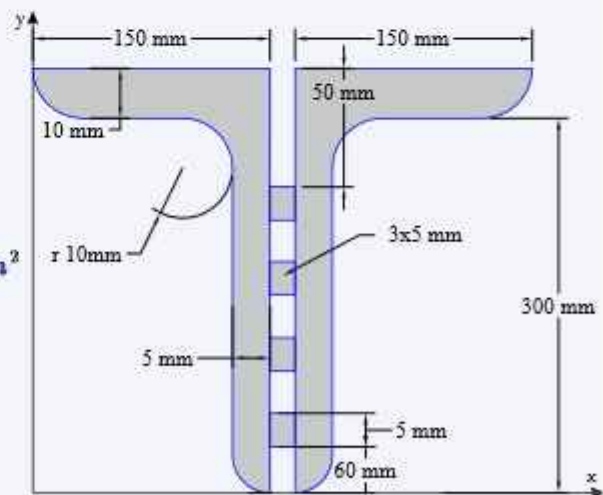
$$A_1 = \frac{\pi \cdot r_1^2}{4} = 78.54 \text{ mm}^2 \qquad A_2 = \frac{\pi \cdot r_1^2}{4} = 78.54 \text{ mm}^2$$

$$\bar{x}_1 = 10 \text{ mm} - \frac{4 r_1}{3 \pi} = 5.756 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_1 = 310 \text{ mm} - \frac{4 r_1}{3 \pi} = 305.756 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_2 = 293 \text{ mm} + \frac{4 r_1}{3 \pi} = 297.244 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_2 = 310 \text{ mm} - \frac{4 r_1}{3 \pi} = 305.756 \text{ mm}$$



(a)

Área y Centroide: Elemento ③ y ④

$$b_3 := 125 \text{ mm}$$

$$h_3 := 10 \text{ mm}$$

$$A_3 := b_3 \cdot h_3 = 1250 \text{ mm}^2$$

$$A_4 := b_3 \cdot h_3 = 1250 \text{ mm}^2$$

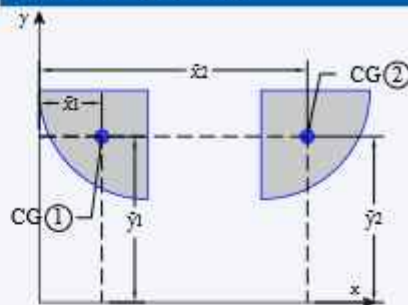
$$\bar{x}_3 := 10 \text{ mm} + b_3 \div 2 = 72.5 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_3 := 310 \text{ mm} - h_3 \div 2 = 305 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_4 := 168 \text{ mm} + b_3 \div 2 = 230.5 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_4 := 310 \text{ mm} - h_3 \div 2 = 305 \text{ mm}$$

CONTINUACIÓN



(b)

Área y Centroide: Elemento ⑤ y ⑥

$$b_5 := 15 \text{ mm}$$

$$h_5 := 20 \text{ mm}$$

$$A_5 := b_5 \cdot h_5 = 300 \text{ mm}^2$$

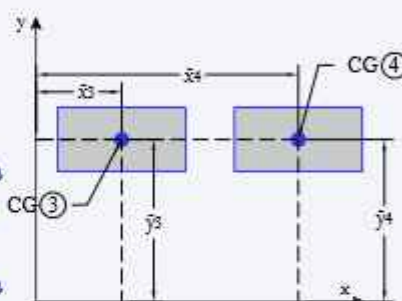
$$A_6 := b_5 \cdot h_5 = 300 \text{ mm}^2$$

$$\bar{x}_5 := 135 \text{ mm} + b_5 \div 2 = 142.5 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_5 := 310 \text{ mm} - h_5 \div 2 = 300 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_6 := 153 \text{ mm} + b_5 \div 2 = 160.5 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_6 := 310 \text{ mm} - h_5 \div 2 = 300 \text{ mm}$$



(c)

Área y Centroide: Elemento ⑦ y ⑧

$$r_7 := 10 \text{ mm}$$

$$A_7 := \frac{\pi \cdot r_7^2}{4} = 78.54 \text{ mm}^2$$

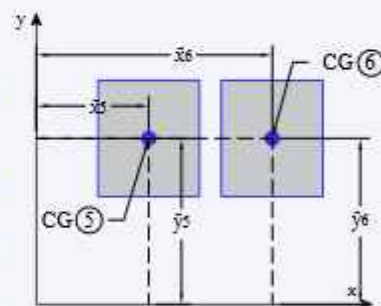
$$A_8 := \frac{\pi \cdot r_7^2}{4} = 78.54 \text{ mm}^2$$

$$\bar{x}_7 := 135 \text{ mm} + \frac{4 r_7}{3 \pi} = 139.244 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_7 := 290 \text{ mm} + \frac{4 r_7}{3 \pi} = 294.244 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_8 := 168 \text{ mm} - \frac{4 r_7}{3 \pi} = 163.756 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_8 := 290 \text{ mm} + \frac{4 r_7}{3 \pi} = 294.244 \text{ mm}$$



(d)

Área y Centroide: Elemento ⑨ y ⑩

$$b_9 := 5 \text{ mm}$$

$$h_9 := 285 \text{ mm}$$

$$A_9 := b_9 \cdot h_9 = 1425 \text{ mm}^2$$

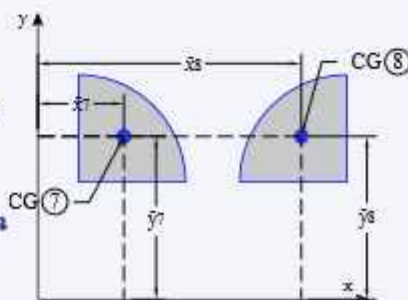
$$A_{10} := b_9 \cdot h_9 = 1425 \text{ mm}^2$$

$$\bar{x}_9 := 150 \text{ mm} - b_9 \div 2 = 147.5 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_9 := 5 \text{ mm} + h_9 \div 2 = 147.5 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_{10} := 153 \text{ mm} + b_9 \div 2 = 155.5 \text{ mm}$$

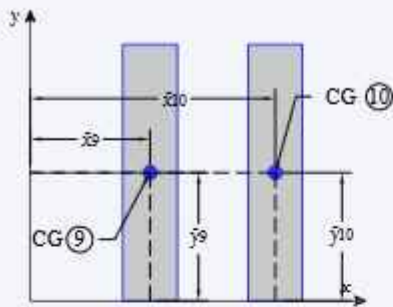
$$\bar{y}_{10} := 5 \text{ mm} + h_9 \div 2 = 147.5 \text{ mm}$$



(e)

CONTINUACIÓN

Área y Centroide: Elemento ⑪ y ⑫



(f)

$$r_{11} = 5 \text{ mm}$$

$$A_{11} = \frac{\pi \cdot r_{11}^2}{4} = 19.635 \text{ mm}^2 \quad A_{12} = \frac{\pi \cdot r_{11}^2}{4} = 19.635 \text{ mm}^2$$

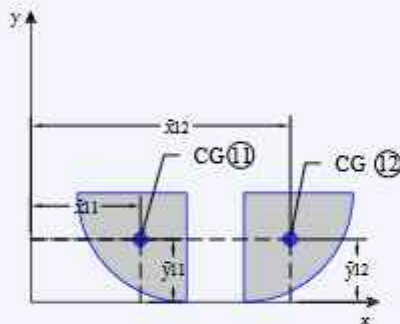
$$\bar{x}_{11} = 150 \text{ mm} - \frac{4 r_{11}}{3 \pi} = 147.878 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_{11} = 5 \text{ mm} - \frac{4 r_{11}}{3 \pi} = 2.878 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_{12} = 153 \text{ mm} + \frac{4 r_{11}}{3 \pi} = 155.122 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_{12} = 5 \text{ mm} - \frac{4 r_{11}}{3 \pi} = 2.878 \text{ mm}$$

Área y Centroide: Elemento ⑬, ⑭, ⑮ y ⑯



(g)

$$b_{13} = 3 \text{ mm}$$

$$h_{13} = 5 \text{ mm}$$

- Áreas

$$A_{13} = b_{13} \cdot h_{13} = 15 \text{ mm}^2$$

$$A_{14} = b_{13} \cdot h_{13} = 15 \text{ mm}^2$$

$$A_{15} = b_{13} \cdot h_{13} = 15 \text{ mm}^2$$

$$A_{16} = b_{13} \cdot h_{13} = 15 \text{ mm}^2$$

- Centroides

$$\bar{x}_{13} = 150 \text{ mm} + b_{13} \div 2 = 151.5 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_{13} = 60 \text{ mm} + h_{13} \div 2 = 62.5 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_{14} = 150 \text{ mm} + b_{13} \div 2 = 151.5 \text{ mm}$$

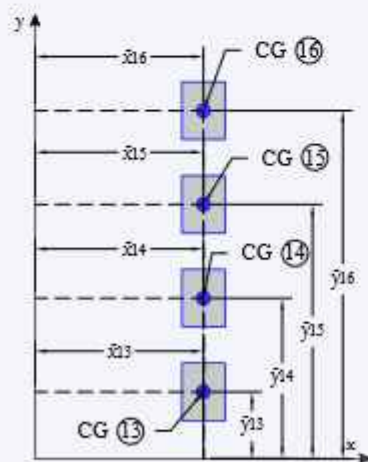
$$\bar{y}_{14} = 125 \text{ mm} + h_{13} \div 2 = 127.5 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_{15} = 150 \text{ mm} + b_{13} \div 2 = 151.5 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_{15} = 190 \text{ mm} + h_{13} \div 2 = 192.5 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_{16} = 150 \text{ mm} + b_{13} \div 2 = 151.5 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_{16} = 255 \text{ mm} + h_{13} \div 2 = 257.5 \text{ mm}$$



(h)

Figura 4.83

CONTINUACIÓN

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)
①	78.540	5.756	305.756	452.065	24014.010
②	78.540	297.24	305.756	23345.500	24014.010
③	1250.00	72.500	305.000	90625.000	381250.000
④	1250.00	230.500	305.000	288125.000	381250.000
⑤	300.00	142.500	300.000	42750.000	90000.000
⑥	300.00	160.500	300.000	48150.000	90000.000
⑦	-78.54	139.244	294.244	-10936.209	-23109.880
⑧	-78.54	163.756	294.244	-12861.356	-23109.880
⑨	1425.00	147.500	147.500	210187.500	210187.500
⑩	1425.00	155.500	147.500	221587.500	210187.500
⑪	19.63	147.878	2.878	2903.576	56.508
⑫	19.63	155.122	2.878	3045.815	56.508
⑬	15.00	151.500	62.500	2272.500	937.500
⑭	15.00	151.500	127.500	2272.500	1912.500
⑮	15.00	151.500	192.500	2272.500	2887.500
⑯	15.00	151.500	257.500	2272.500	3862.500
Σ	6049.270			916464.391	1374396.276

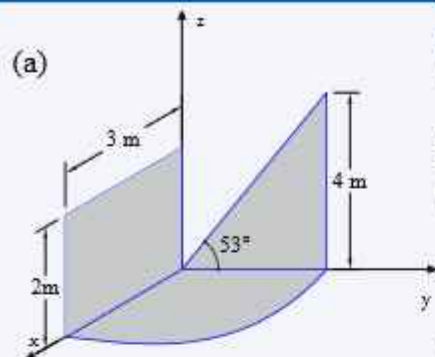
Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i} = 151.5 \text{ mm} \quad y_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i} = 227.2 \text{ mm}$$

\therefore El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 151.5 \text{ mm}$,
 $y_c = 227.2004 \text{ mm}$

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.11

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.



Paso 1: Identificación de elementos ①, ② y ③ como se muestra en la figura 4.84 (c), luego cálculo de área y centroide de cada elemento

Área y Centroide:

Elemento ①

$$h_1 := 2 \text{ m} \quad b_1 := 3 \text{ m}$$

$$A_1 := h_1 \cdot b_1 = 6 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_1 := \frac{b_1}{2} = 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{z}_1 := \frac{h_1}{2} = 1 \text{ m}$$

Área y Centroide:

Elemento ②

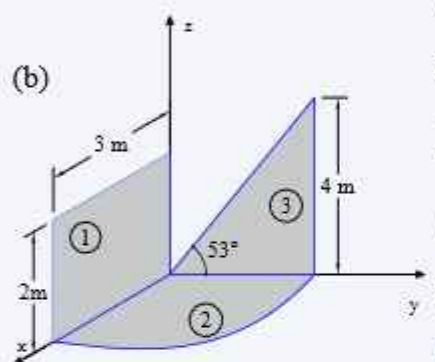
$$r := 3 \text{ m}$$

$$A_2 := \frac{\pi \cdot r^2}{4} = 7.069 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_2 := \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} = 1.273 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} = 1.273 \text{ m}$$

$$\bar{z}_2 := 0 \text{ m}$$



Área y Centroide: Elemento ③

$$h_3 := 4 \text{ m} \quad b_3 := 3 \text{ m}$$

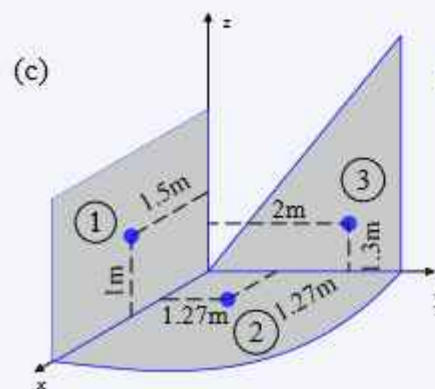
$$A_3 := 0.5 \cdot h_3 \cdot b_3 = 6 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_3 := 0 \text{ m} \quad \bar{y}_3 := \frac{2 \cdot b_3}{3} = 2 \text{ m}$$

$$\bar{z}_3 := \frac{h_3}{3} = 1.333 \text{ m}$$

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	\bar{z}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{z}_i$ (m^3)
①	6.000	1.500	0.000	1.000	9.000	0.000	6.000
②	7.069	1.27	1.273	0.000	9.000	9.000	0.000
③	6.00	0.000	2.000	1.333	0.000	12.000	8.000
Σ	19.069				18.000	21.000	14.000



Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad y_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad z_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c := \frac{18 \text{ m}^3}{19.069 \text{ m}^2} \quad y_c := \frac{21 \text{ m}^3}{19.069 \text{ m}^2} \quad z_c := \frac{14 \text{ m}^3}{19.069 \text{ m}^2}$$

$$x_c = 0.944 \text{ m} \quad y_c = 1.101 \text{ m} \quad z_c = 0.734 \text{ m}$$

Figura 4.84

Determine el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.

EJEMPLO RESUELTO 4.1.6.12

Paso 1: Identificación de elementos ①, ②, ③, ④, ⑤ y ⑥ como se muestra en la figura 4.85 (c), luego cálculo de área y centroide de cada elemento

Área y Centroide:

Elemento ①

$$h_1 := 1.5 \text{ m} \quad b_1 := 1.5 \text{ m}$$

$$A_1 := 0.5 \cdot h_1 \cdot b_1 = 1.125 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_1 := 1.5 \text{ m} + \frac{b_1}{3} = 2 \text{ m}$$

$$\bar{y}_1 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{z}_1 := 3 \text{ m} + \frac{h_1}{3} = 3.5 \text{ m}$$

Área y Centroide:

Elemento ②

$$h_2 := 1.5 \text{ m} \quad b_2 := 1.5 \text{ m}$$

$$A_2 := 0.5 \cdot h_2 \cdot b_2 = 1.125 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_2 := \frac{2 \cdot b_2}{3} = 1 \text{ m}$$

$$\bar{y}_2 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{z}_2 := 3 \text{ m} + \frac{h_2}{3} = 3.5 \text{ m}$$

Área y Centroide:

Elemento ③

$$h_3 := 3 \text{ m} \quad b_3 := 3 \text{ m}$$

$$A_3 := h_3 \cdot b_3 = 9 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_3 := \frac{b_3}{2} = 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_3 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{z}_3 := \frac{h_3}{2} = 1.5 \text{ m}$$

Área y Centroide:

Elemento ④

$$h_4 := 1 \text{ m} \quad b_4 := 1 \text{ m}$$

$$A_4 := -h_4 \cdot b_4 = -1 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_4 := 1 \text{ m} + \frac{b_4}{2} = 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_4 := 0 \text{ m}$$

$$\bar{z}_4 := \frac{h_4}{2} = 0.5 \text{ m}$$

Área y Centroide:

Elemento ⑤

$$h_5 := 3 \text{ m} \quad b_5 := 1 \text{ m}$$

$$A_5 := -h_5 \cdot b_5 = -3 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_5 := 1 \text{ m} + \frac{b_5}{2} = 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_5 := \frac{h_5}{2} = 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{z}_5 := 0 \text{ m}$$

Área y Centroide:

Elemento ⑥

$$h_6 := 6 \text{ m} \quad b_6 := 3 \text{ m}$$

$$A_6 := h_6 \cdot b_6 = 18 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_6 := \frac{b_6}{2} = 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{y}_6 := \frac{h_6}{2} = 3 \text{ m}$$

$$\bar{z}_6 := 0 \text{ m}$$

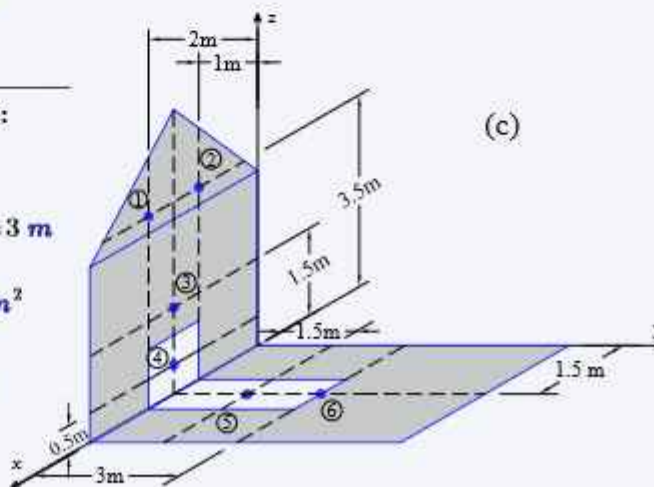
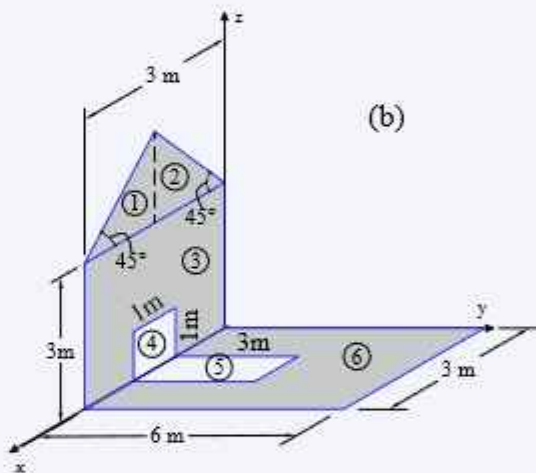
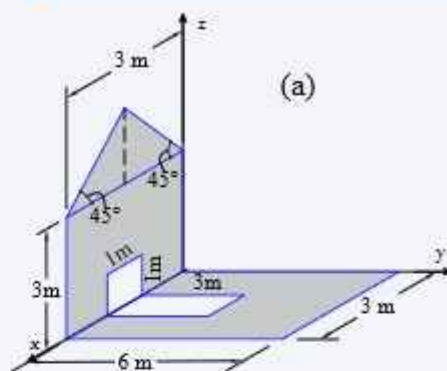


Figura 4.85

CONTINUACIÓN

Paso 2: Cuadro de resumen para el cálculo de centro de gravedad de la figura compuesta

Elemento	A_i (m^2)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	\bar{z}_i (m)	$A_i \cdot \bar{x}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{y}_i$ (m^3)	$A_i \cdot \bar{z}_i$ (m^3)
①	1.125	2.000	0.000	3.500	2.250	0.000	3.938
②	1.125	1.00	0.000	3.500	1.125	0.000	3.938
③	9.00	1.500	0.000	1.500	13.500	0.000	13.500
④	-1.00	1.500	0.000	0.500	-1.500	0.000	-0.500
⑤	-3.00	1.500	1.500	0.000	-4.500	-4.500	0.000
⑥	18.00	1.500	3.000	0.000	27.000	54.000	0.000
Σ	25.250				37.875	49.500	20.875

Paso 3: Cálculo del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$x_c = \frac{37.875 \text{ m}^3}{25.25 \text{ m}^2} \quad y_c = \frac{49.5 \text{ m}^3}{25.25 \text{ m}^2} \quad z_c = \frac{20.875 \text{ m}^3}{25.25 \text{ m}^2}$$

$$x_c = 1.5 \text{ m} \quad y_c = 1.96 \text{ m} \quad z_c = 0.827 \text{ m}$$

\therefore El centro de gravedad de la figura compuesta es $x_c = 1.5 \text{ m}$,
 $y_c = 1.9604 \text{ m}$ y $z_c = 0.827 \text{ m}$

4.1.7. CENTRO DE GRAVEDAD: ÁREA COMPUESTA - EJERCICIOS PROPUESTOS

14 Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

Ejercicios

4.49

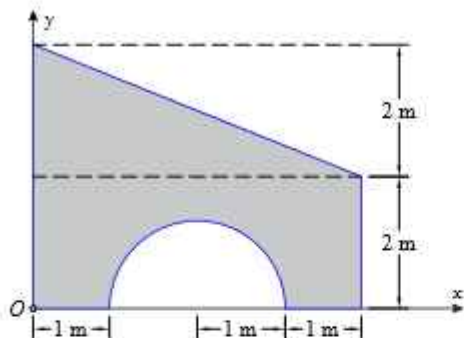


Figura 4.86: FigR01

4.50

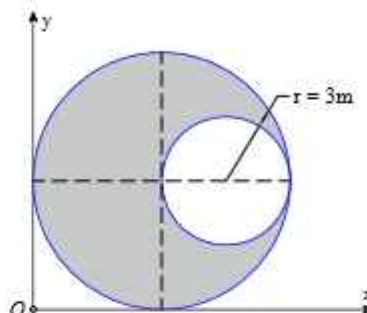


Figura 4.87

4.51

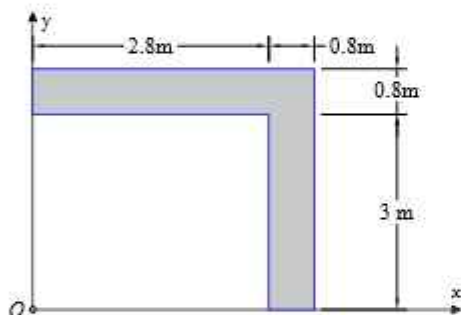


Figura 4.88

4.52

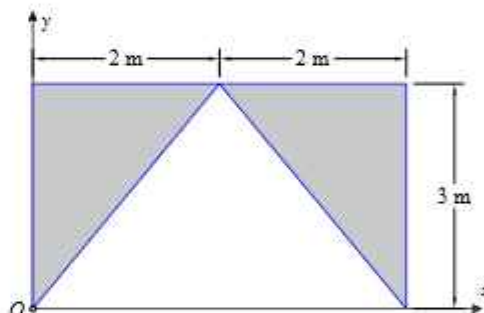


Figura 4.89

4.53

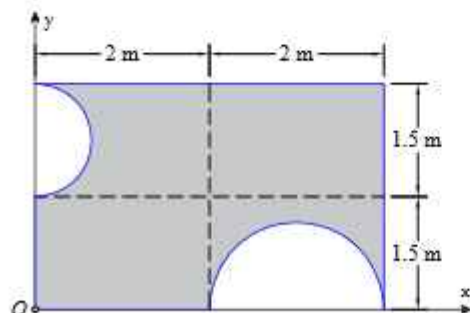


Figura 4.90

4.54

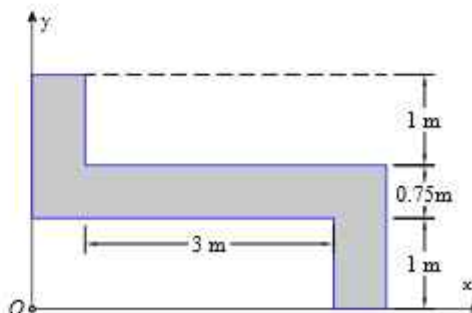


Figura 4.91

Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

4.55

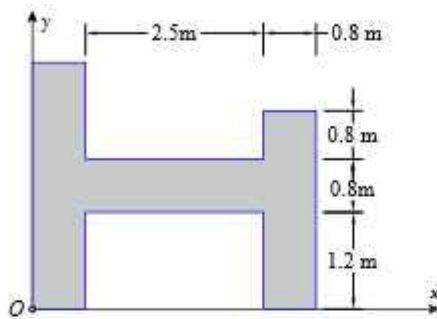


Figura 4.92

4.56

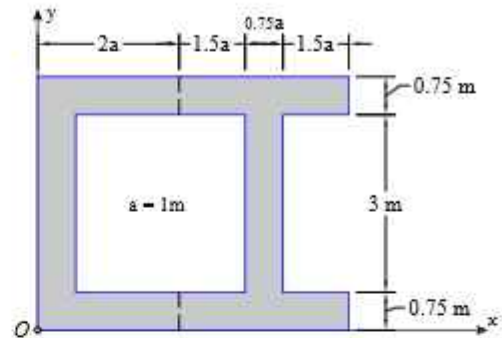


Figura 4.93

4.57

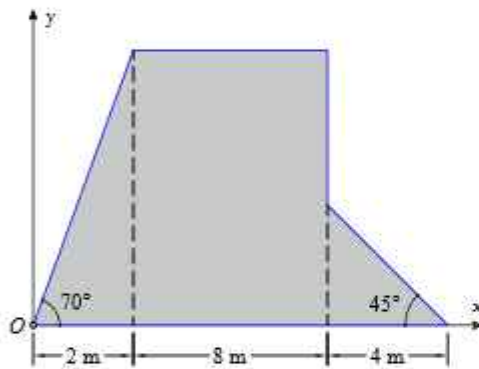


Figura 4.94

4.58

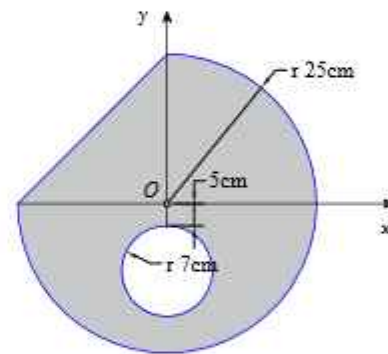


Figura 4.95

4.59

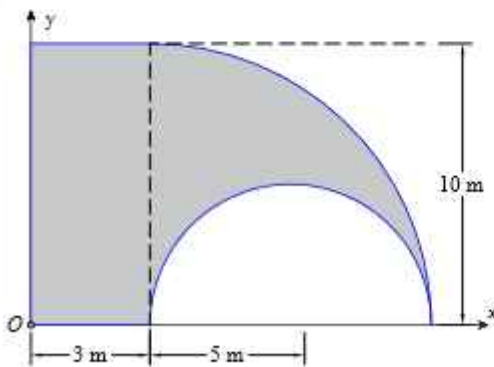


Figura 4.96

4.60

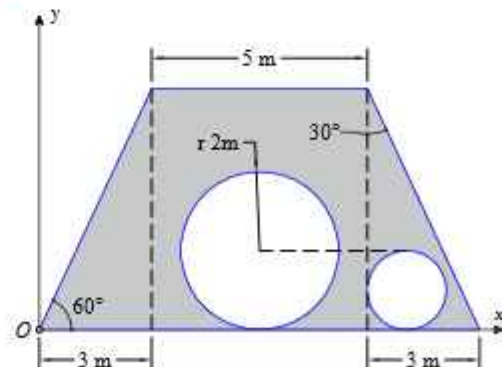


Figura 4.97

Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

4.61

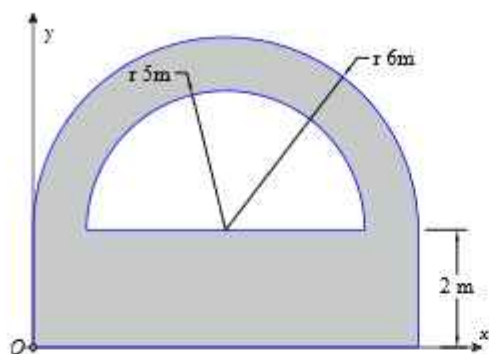


Figura 4.98

4.62

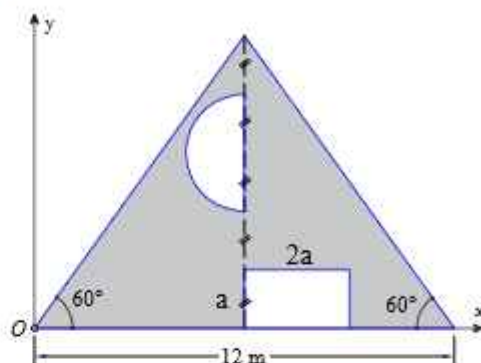


Figura 4.99

4.63

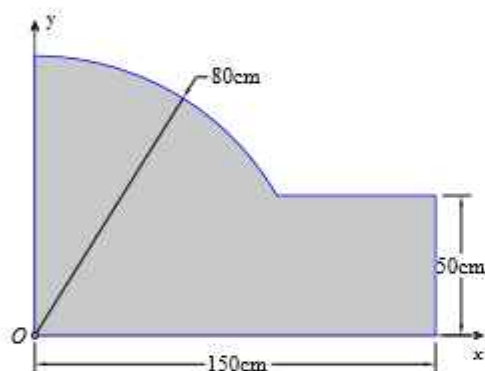


Figura 4.100

4.64

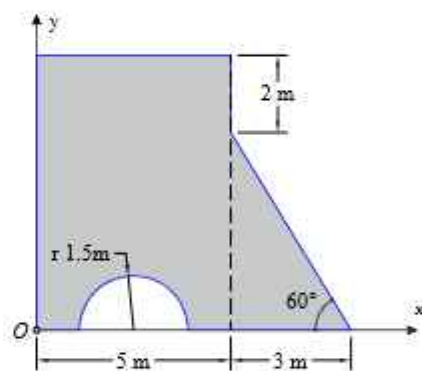


Figura 4.101

4.65

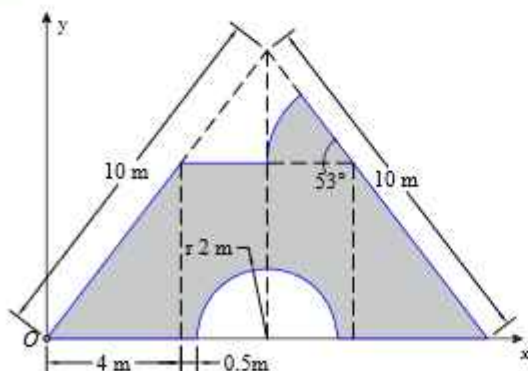


Figura 4.102

4.66

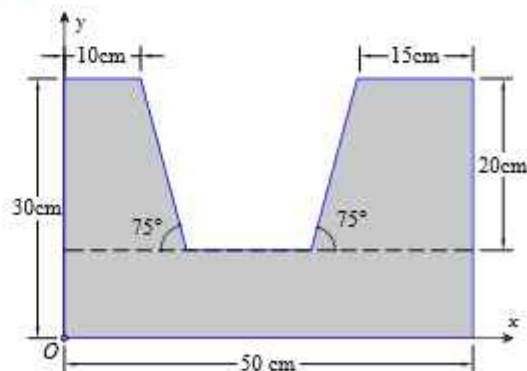


Figura 4.103

Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

4.67

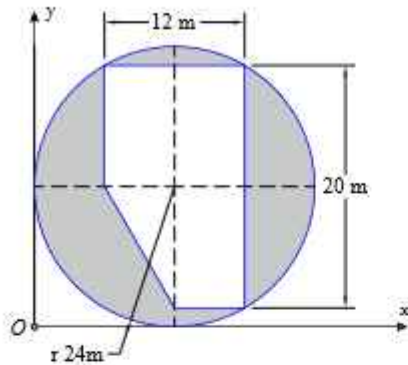


Figura 4.104

4.68

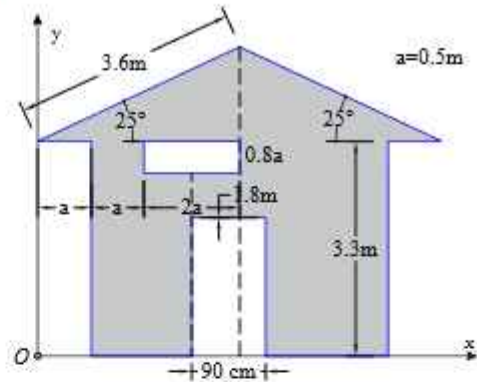


Figura 4.105

4.69

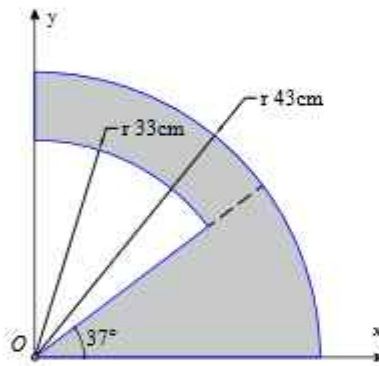


Figura 4.106

4.70

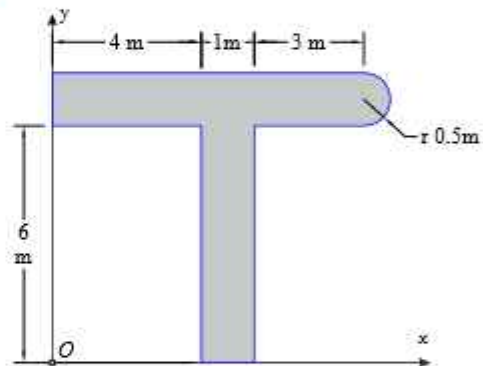


Figura 4.107

4.71

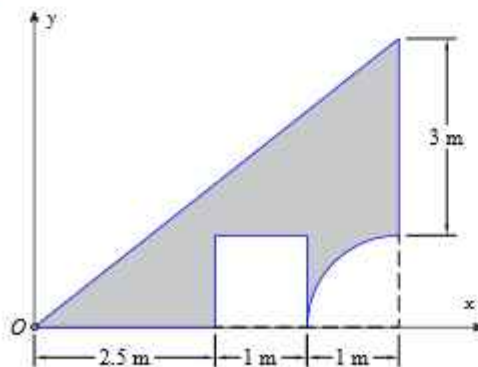


Figura 4.108

4.72

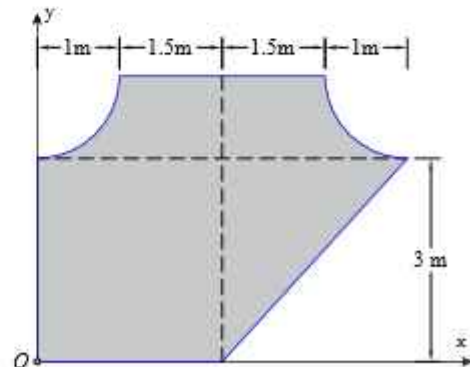


Figura 4.109

Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

4.73

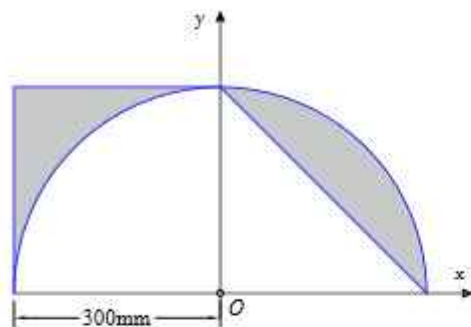


Figura 4.110

4.74

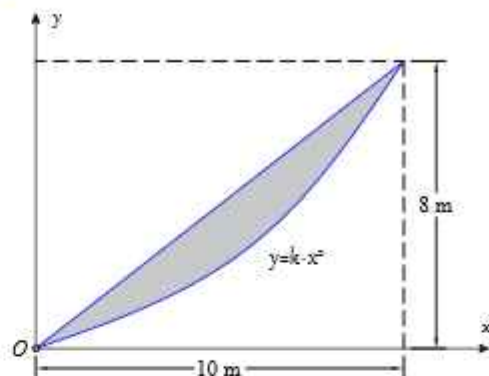


Figura 4.111

4.75

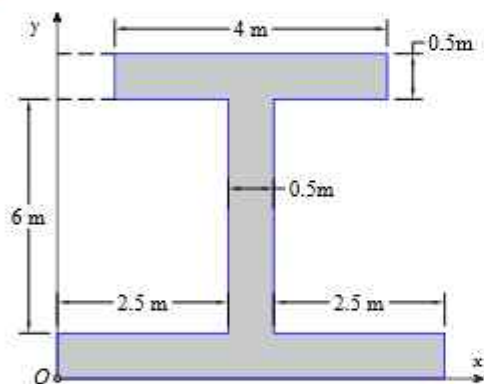


Figura 4.112

4.76

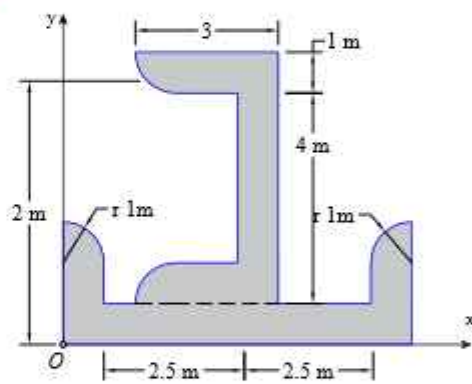


Figura 4.113

4.77

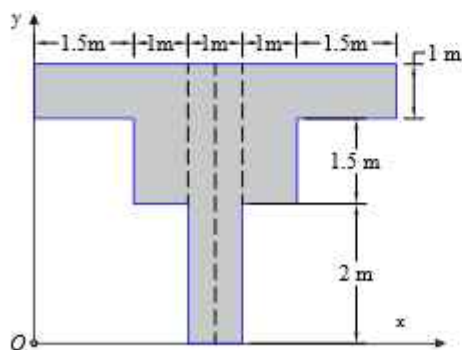


Figura 4.114

4.78

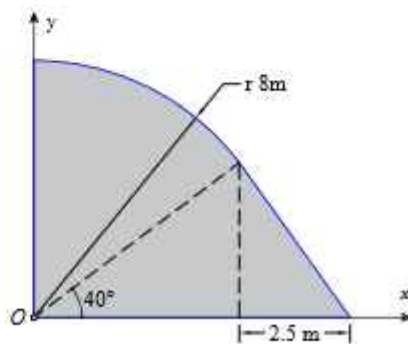


Figura 4.115

Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

4.79

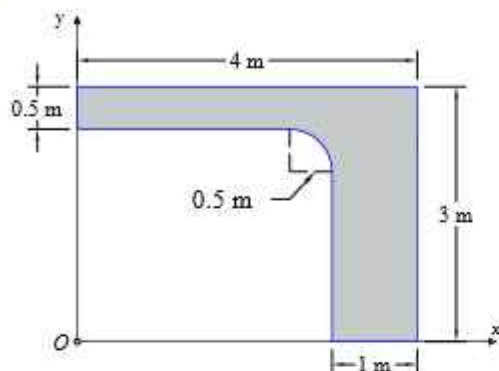


Figura 4.116

4.80

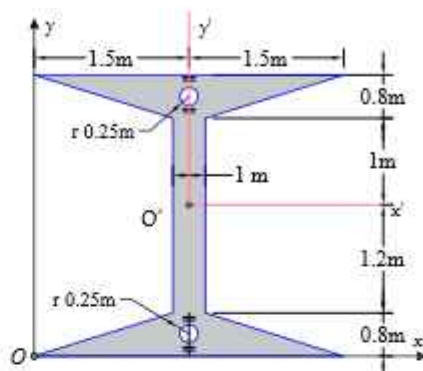


Figura 4.117

4.81

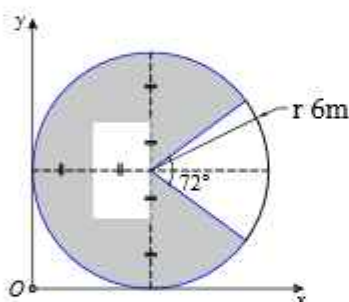


Figura 4.118

4.82

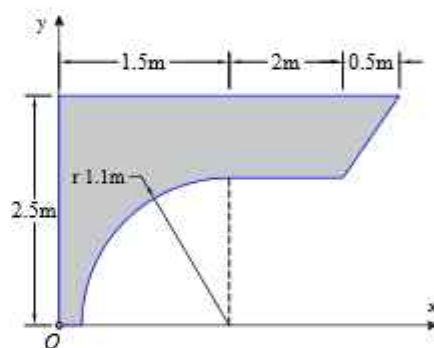


Figura 4.119

4.83

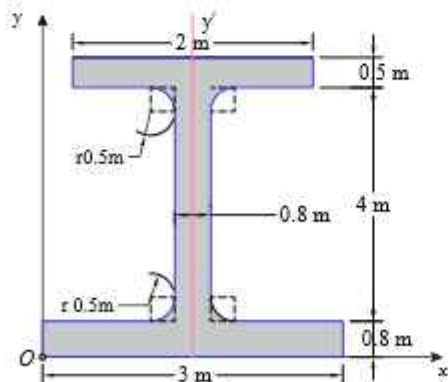


Figura 4.120

4.84

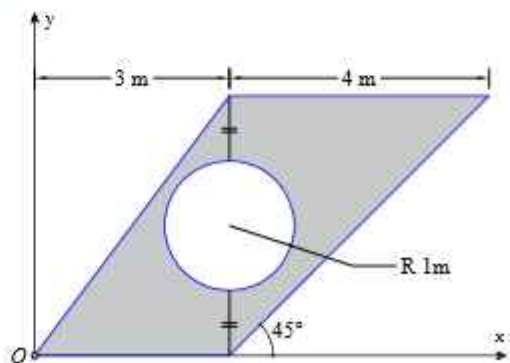


Figura 4.121

Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

4.85

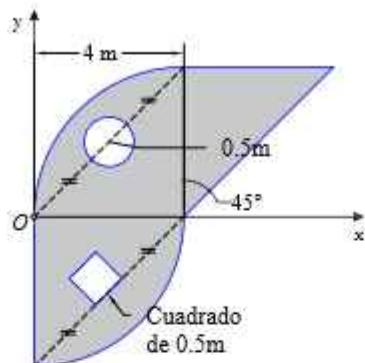


Figura 4.122

4.86

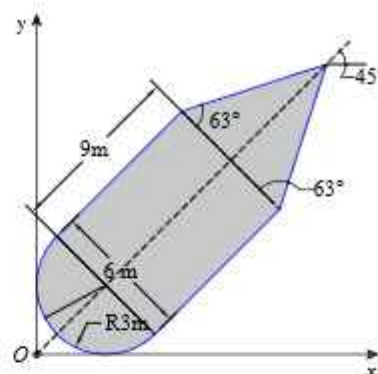


Figura 4.123

4.87

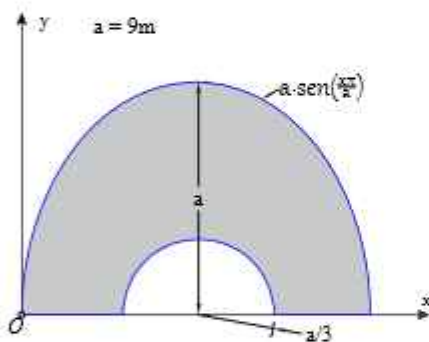


Figura 4.124

4.88

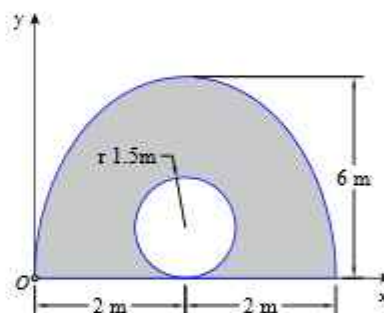


Figura 4.125

4.89

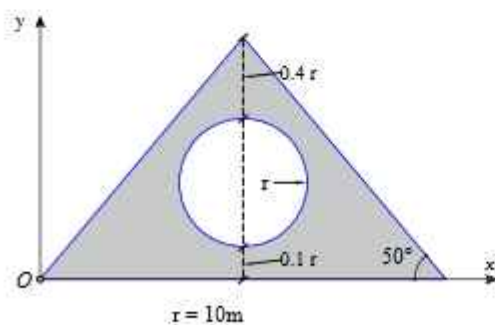


Figura 4.126

4.90

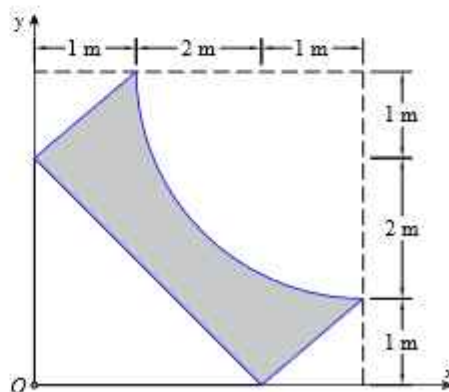


Figura 4.127

Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

4.91

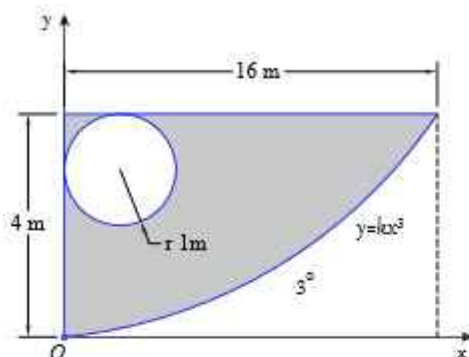


Figura 4.128

4.92

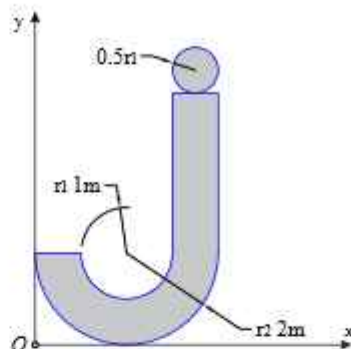


Figura 4.129

4.93

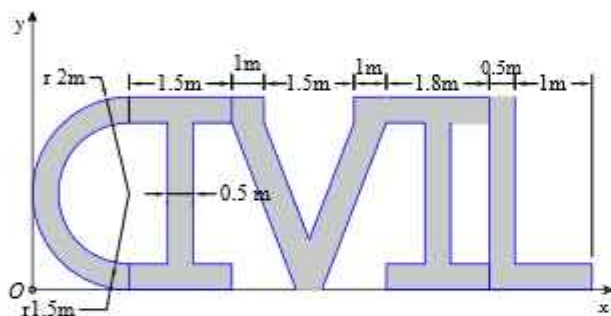


Figura 4.130

4.94

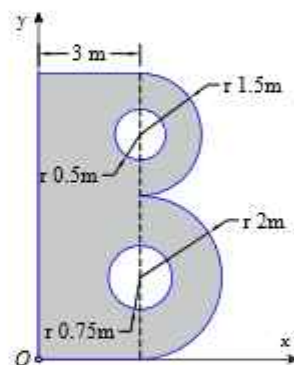


Figura 4.131

4.95

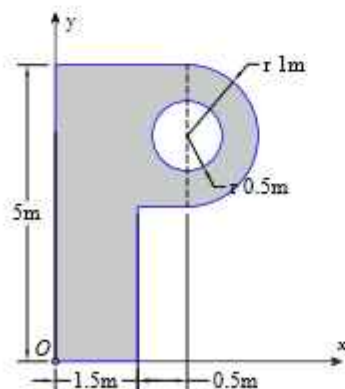


Figura 4.132

4.96

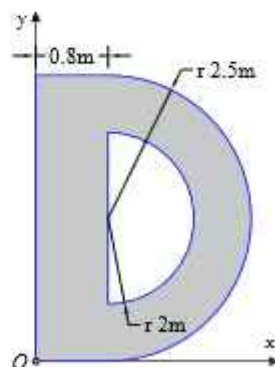


Figura 4.133

Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

4.97

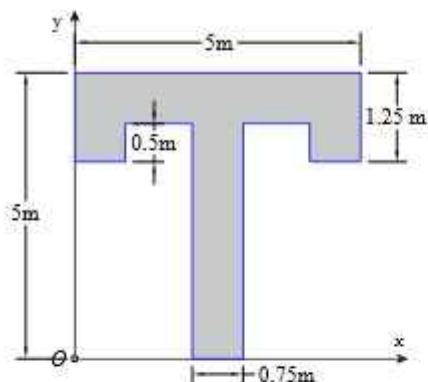


Figura 4.134

4.98

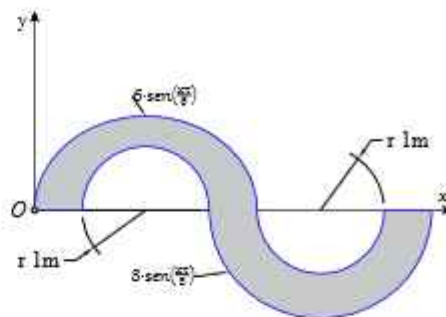


Figura 4.135

4.99

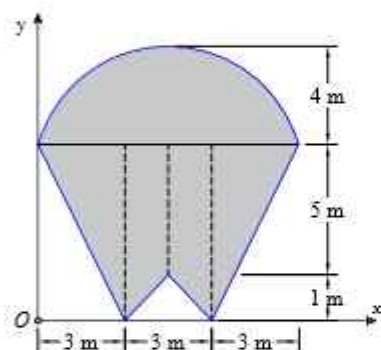


Figura 4.136

4.100

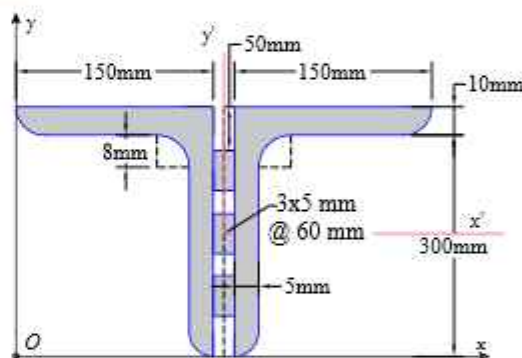


Figura 4.137

4.101

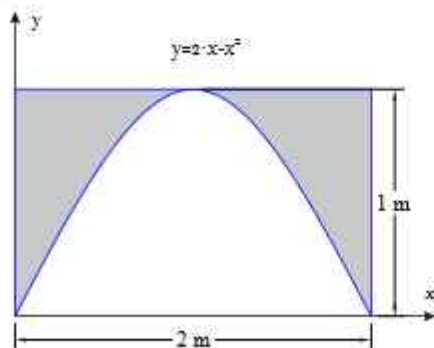


Figura 4.138

4.102

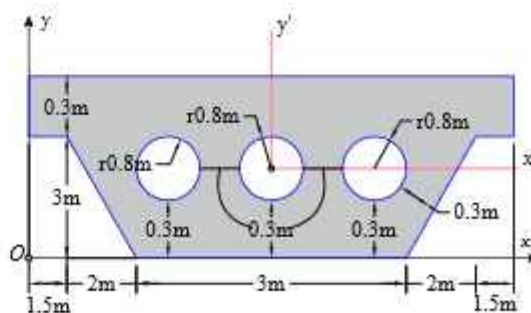


Figura 4.139

Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

4.103

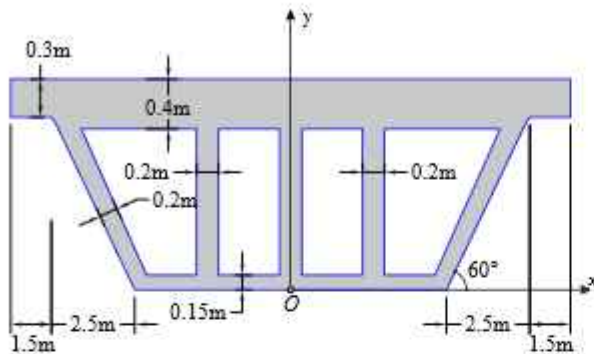


Figura 4.140

4.104

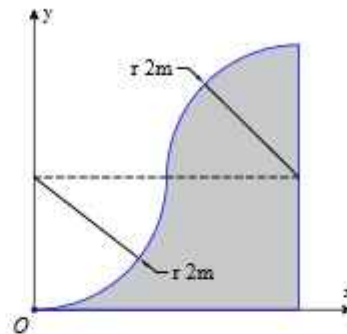


Figura 4.141

4.105

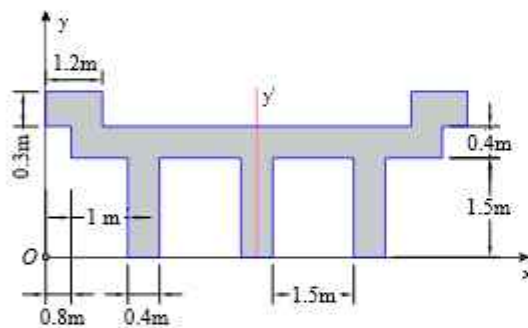


Figura 4.142

4.106

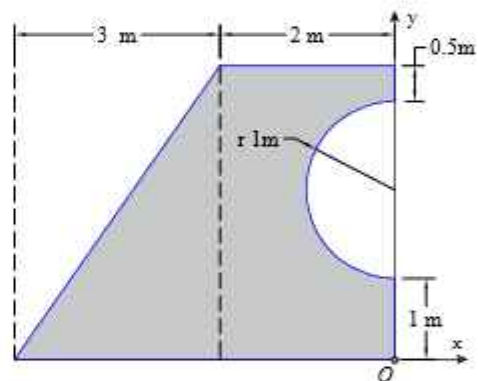


Figura 4.143

4.107

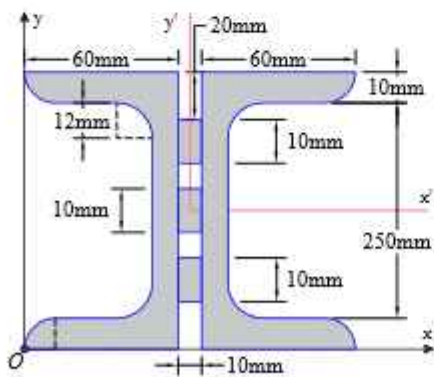


Figura 4.144

4.108

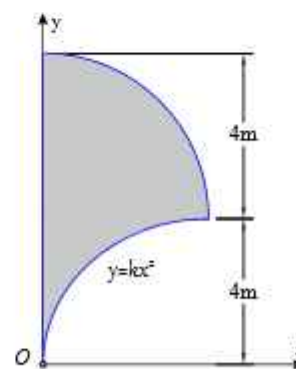


Figura 4.145

Determine el centro de gravedad del área sombreada mostrada en las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y

4.109

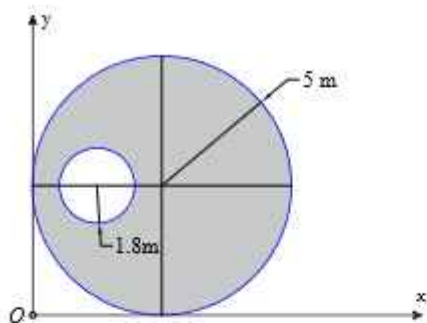


Figura 4.146

4.110

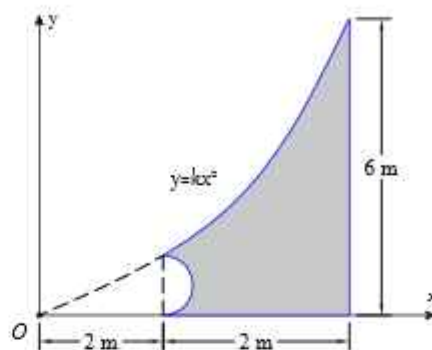


Figura 4.147

4.111

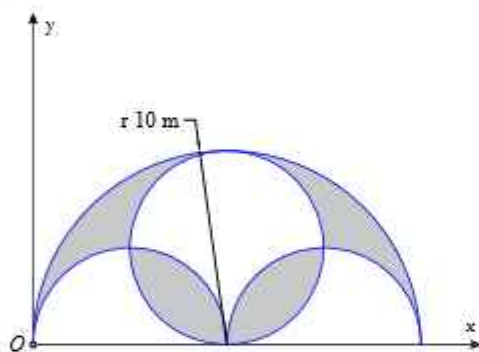


Figura 4.148

4.112

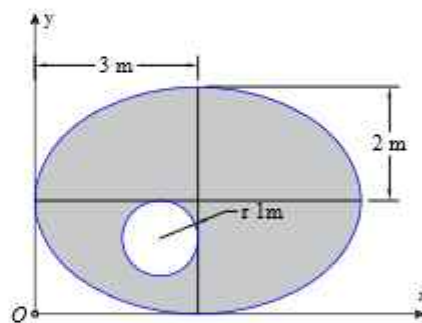


Figura 4.149

4.113

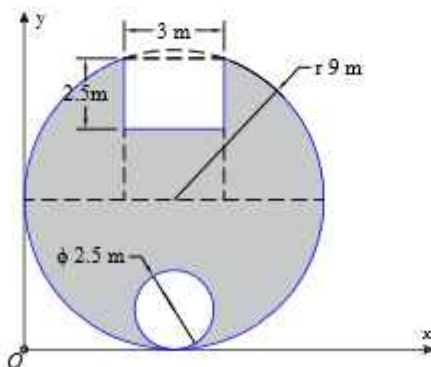


Figura 4.150

4.114

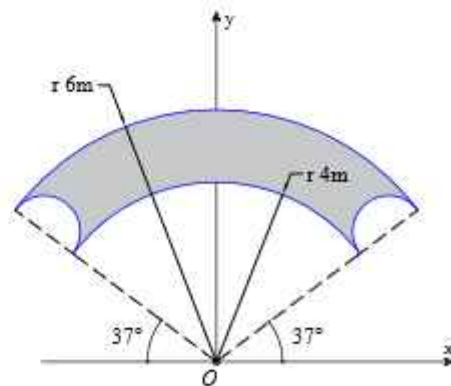


Figura 4.151

4.1.8. CENTRO DE GRAVEDAD: MASA - EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 4.1.8.1

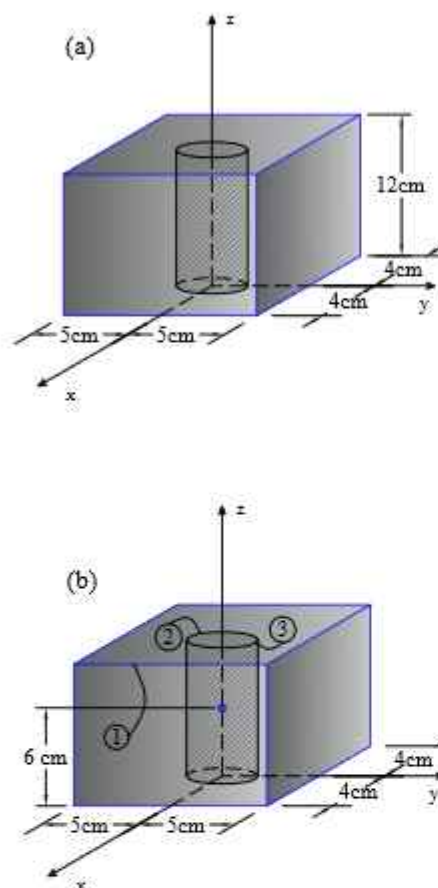
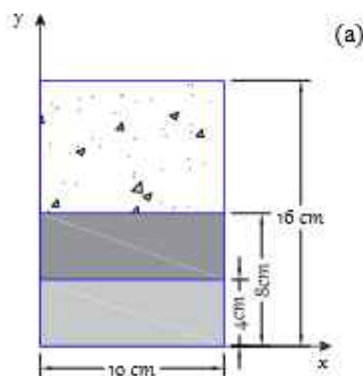


Figura 4.152



Determinar el centro de gravedad del cuerpo formado por dos materiales mostrado en la siguiente figura, si la densidad del cubo es $\rho_1 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$,

la densidad del cilindro es $\rho = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ($g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

Paso 1: Identificación de elementos ①, ② y ③, figura 4.152 (b) luego calculamos el peso y centroide de cada elemento

Peso y Centroide: Elemento ①

$$\rho_1 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$V_1 = 8 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}$$

$$V_1 = 960 \text{ cm}^3$$

$$w_1 = \rho_1 \cdot g \cdot V_1 = 9.418 \text{ N}$$

$$\bar{z}_1 = 6 \text{ cm}$$

Peso y Centroide: Elemento ②

$$\rho_1 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad r_2 = 2 \text{ cm}$$

$$V_2 = \pi \cdot (2 \text{ cm})^2 \cdot 12 \text{ cm}$$

$$V_2 = 150.796 \text{ cm}^3$$

$$w_2 = \rho_1 \cdot g \cdot V_2 = 1.479 \text{ N}$$

$$\bar{z}_2 = 6 \text{ cm}$$

Peso y Centroide: Elemento ③

$$\rho_3 = \rho = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad r_3 = 2 \text{ cm} \quad V_3 = \pi \cdot (2 \text{ cm})^2 \cdot 12 \text{ cm} = 150.796 \text{ cm}^3$$

$$w_3 = \rho_3 \cdot g \cdot V_3 = 1.183 \text{ N}$$

$$\bar{z}_3 = 6 \text{ cm}$$

	$w_i(\text{N})$	$\bar{z}_i(\text{m})$	$w_i \cdot \bar{z}_i(\text{N} \cdot \text{m})$
①	9.42	0.06	0.565
②	-1.48	0.06	-0.09
③	1.18	0.06	0.07
	9.12		0.55

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot w_i}{\sum w_i} = 6 \text{ cm}$$

Determinar las coordenadas del siguiente cuerpo conformado por tres materiales, considerando con densidad superficial $\rho_1 = 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$, $\rho_2 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ y $\rho_3 = 1500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$

Paso 1: Identificación de elementos ①, ② y ③, figura 4.153 (b) luego calculamos la masa y centroide de cada elemento.

$$A_1 = 10 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}$$

$$A_2 = 10 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}$$

$$A_3 = 10 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}$$

$$A_1 = 40 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 40 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 80 \text{ cm}^2$$

$$m_1 = \rho_1 \cdot A_1 = 8 \text{ kg}$$

$$m_2 = \rho_2 \cdot A_2 = 4 \text{ kg}$$

$$m_3 = \rho_3 \cdot A_3 = 12 \text{ kg}$$

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_1 = 5 \text{ cm} & \bar{x}_2 = 5 \text{ cm} & \bar{x}_3 = 5 \text{ cm} \\ \bar{y}_1 = 2 \text{ cm} & \bar{y}_2 = 6 \text{ cm} & \bar{y}_3 = 12 \text{ cm} \end{array}$$

	m_i (kg)	\bar{y}_i (m)	$m_i \cdot \bar{y}_i$
①	8.00	0.02	0.160
②	4.00	0.06	0.24
③	12.00	0.12	1.44
	24.00		1.84

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot m_i}{\sum m_i} = 5 \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot m_i}{\sum m_i} = 7.667 \text{ cm}$$

EJEMPLO RESUELTO 4.1.8.2

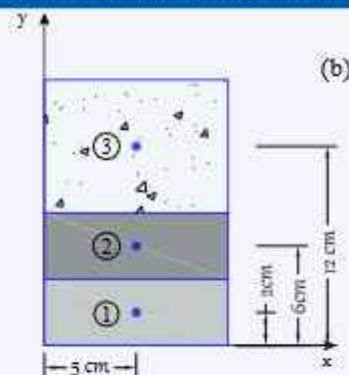


Figura 4.153

Determinar el centro de gravedad de la siguiente figura, $\rho_1 = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$, $\rho_2 = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ y $\rho_3 = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$

Paso 1: Identificación de elementos ①, ② y ③, figura 4.154 (a) luego calculamos la masa y centroide de cada elemento.

$$\begin{array}{lll} A_1 = 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} & A_2 = 4 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} \cdot 0.5 & L_3 = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2} \\ A_1 = 8 \text{ m}^2 & A_2 = 6 \text{ m}^2 & L_3 = 3.606 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} m_1 = A_1 \cdot \rho_1 & m_2 = A_2 \cdot \rho_2 & m_3 = L_3 \cdot \rho_3 \\ m_1 = 4000 \text{ kg} & m_2 = 2400 \text{ kg} & m_3 = 360.555 \text{ kg} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_1 = 1 \text{ m} & \bar{x}_2 = 0 \text{ m} & \bar{x}_3 = 1 \text{ m} \\ \bar{z}_1 = 2 \text{ m} & \bar{y}_2 = 1 \text{ m} & \bar{y}_3 = 1.5 \text{ m} \\ \bar{y}_1 = 0 \text{ m} & \bar{z}_2 = \frac{4}{3} \text{ m} & \bar{z}_3 = 0 \text{ m} \end{array}$$

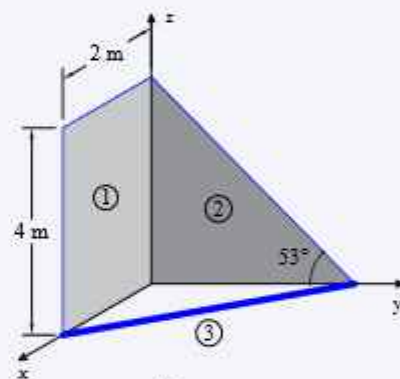


Figura 4.154

Elemento	m_i (kg)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	\bar{z}_i (m)	$m_i \cdot \bar{x}_i$ (kg · m)	$m_i \cdot \bar{y}_i$ (kg · m)	$m_i \cdot \bar{z}_i$ (kg · m)
①	4000.00	1.00	0.00	2.00	4000.00	0.00	8000.00
②	2400.00	0.00	1.00	1.33	0.00	2400.00	3200.00
③	360.56	1.00	1.50	0.00	360.56	540.83	0.00
Σ	6760.56				4360.56	2940.83	11200.00

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot m_i}{\sum m_i} = 0.645 \text{ m}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \cdot m_i}{\sum m_i} = 0.435 \text{ m}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot m_i}{\sum m_i} = 1.657 \text{ m}$$

4.1.9. CENTRO DE GRAVEDAD: MASA - EJERCICIOS PROPUESTOS

15 Determinar el centro de gravedad de las siguientes figuras

Ejercicios

4.115

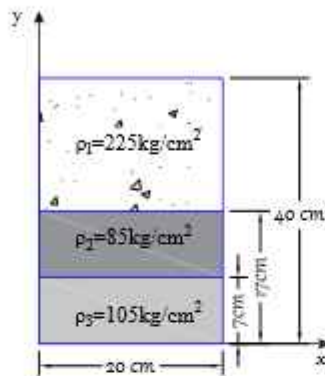


Figura 4.155

4.116

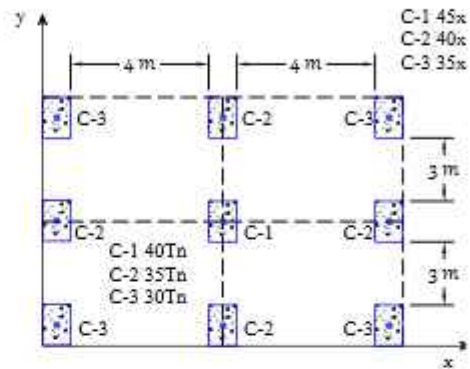


Figura 4.156

4.117

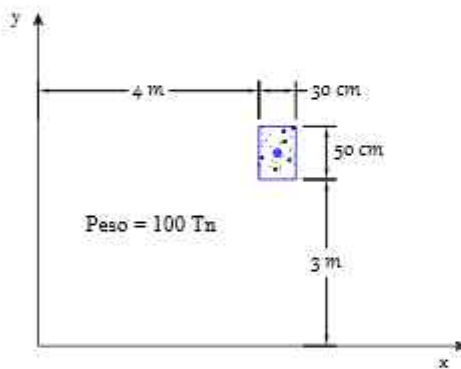


Figura 4.157

4.118

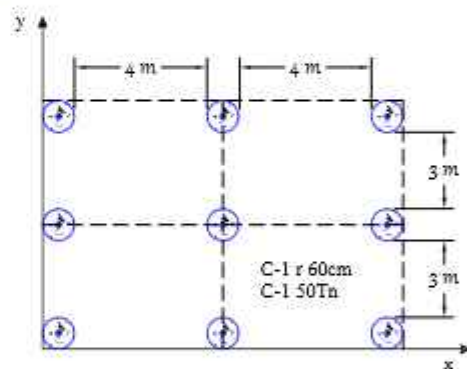


Figura 4.158

4.119

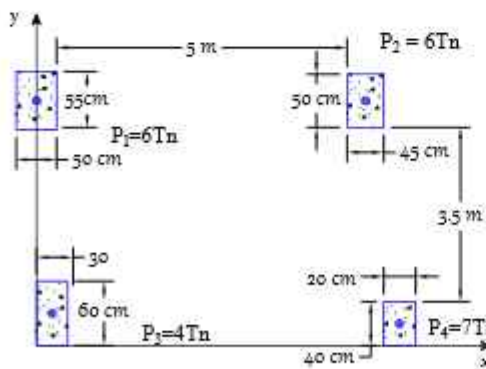


Figura 4.159

4.120

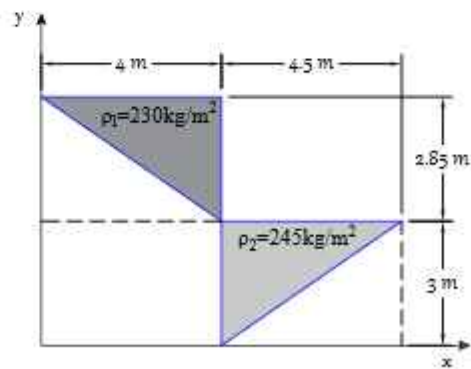


Figura 4.160

Determinar el centro de gravedad de las siguientes figuras

4.121

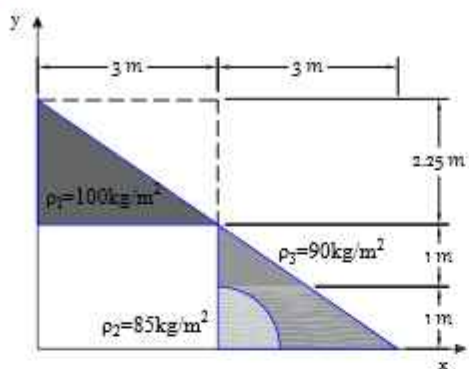


Figura 4.161

4.122

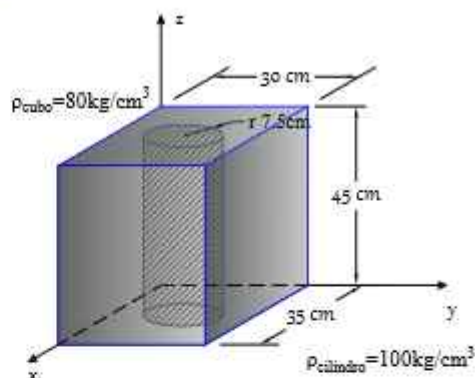


Figura 4.162

4.123

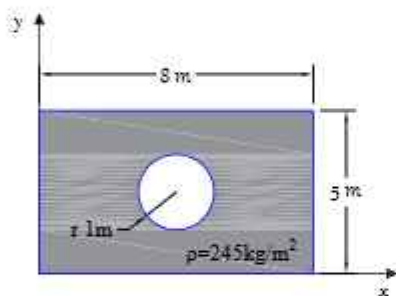


Figura 4.163

4.124

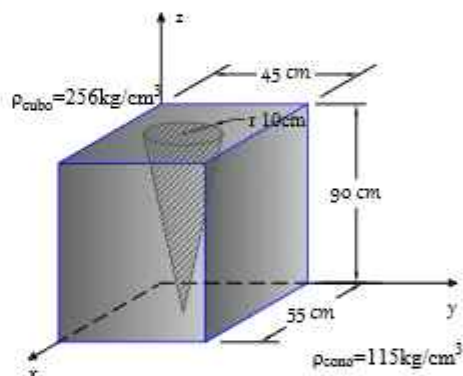


Figura 4.164

4.125

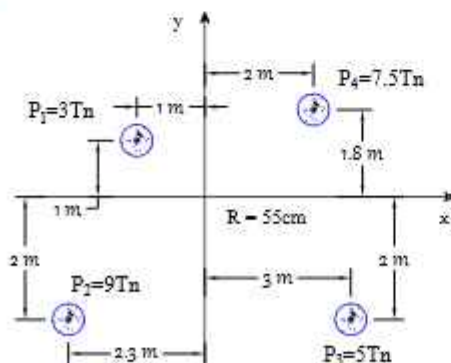


Figura 4.165

4.126

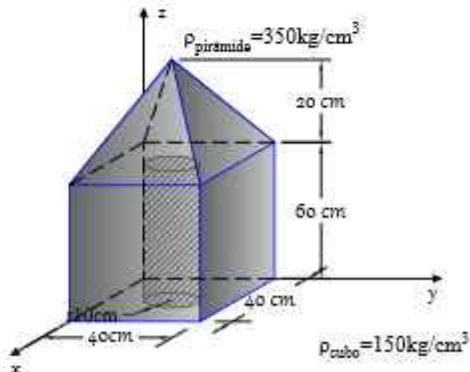


Figura 4.166

Determinar el centro de gravedad de las siguientes figuras

4.127

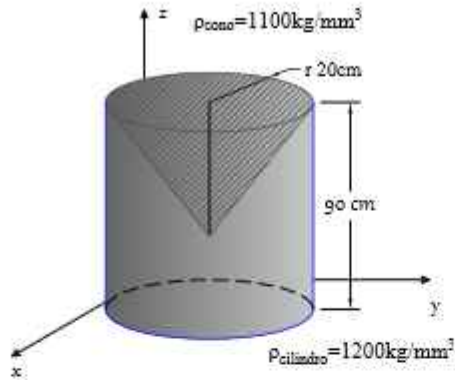


Figura 4.167

4.128

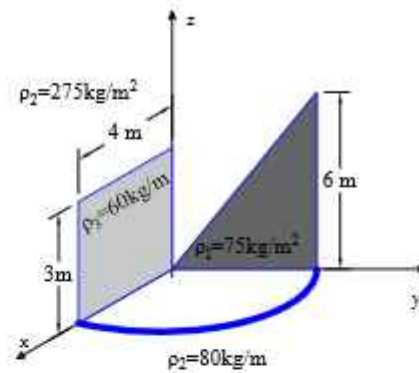


Figura 4.168

4.129

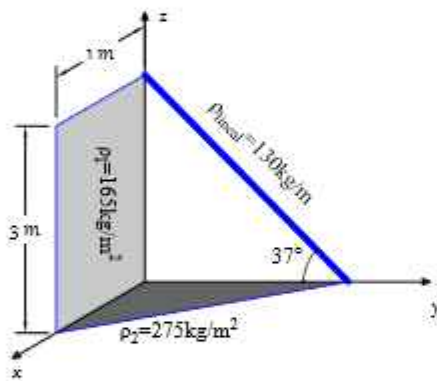


Figura 4.169

4.130

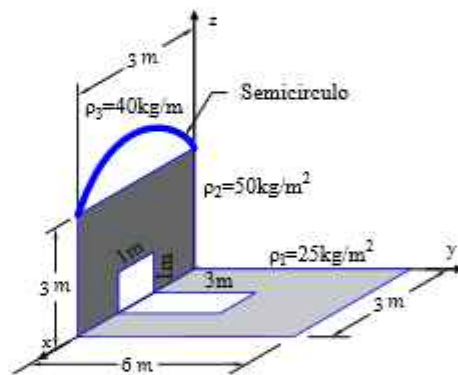


Figura 4.170

4.131

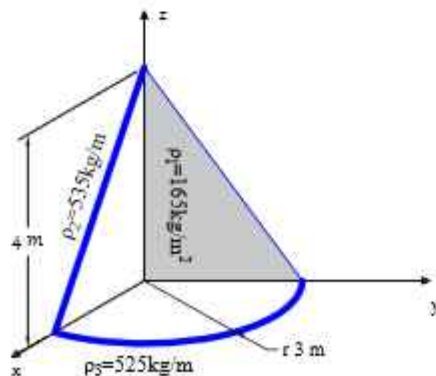


Figura 4.171

4.132

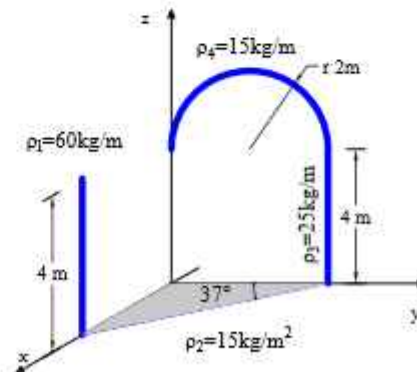


Figura 4.172

Determinar el centro de gravedad de las siguientes figuras

4.133

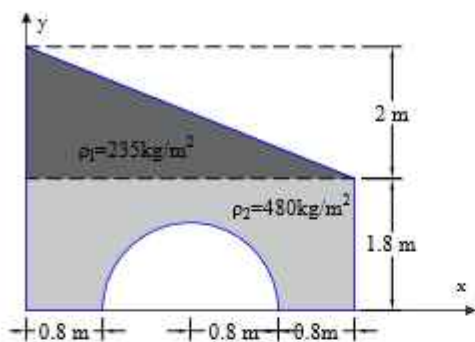


Figura 4.173

4.134

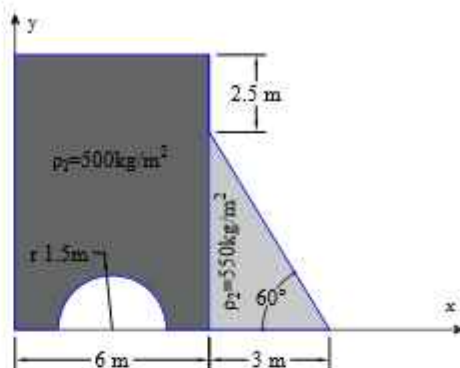


Figura 4.174

4.135

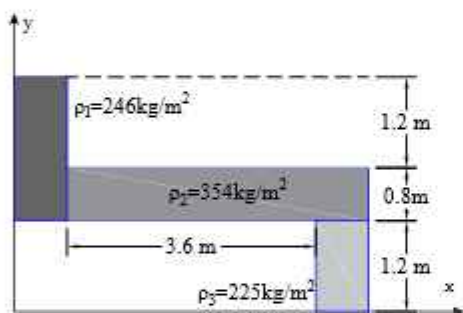


Figura 4.175

4.136

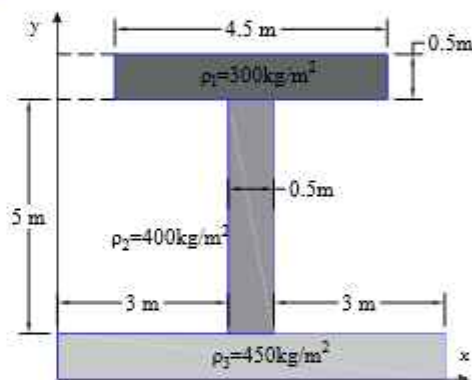


Figura 4.176

4.137

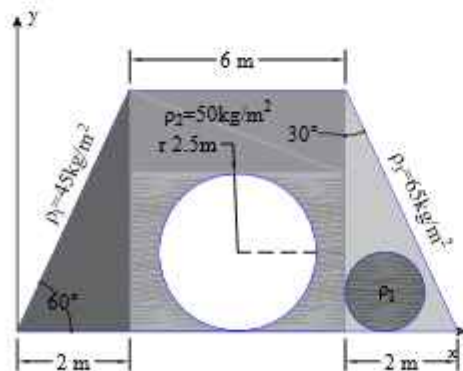


Figura 4.177

4.138

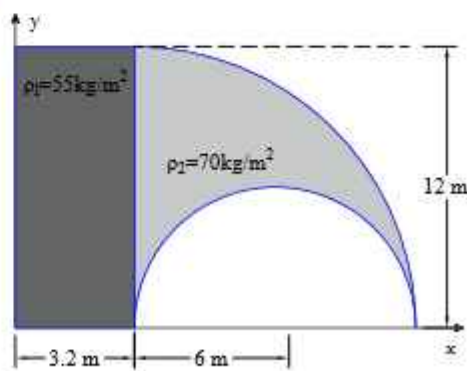


Figura 4.178

Determinar el centro de gravedad de las siguientes figuras

4.139

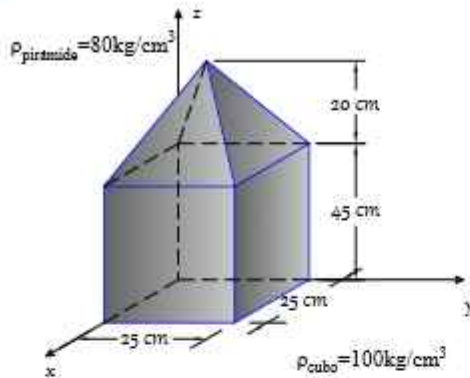


Figura 4.179

4.140

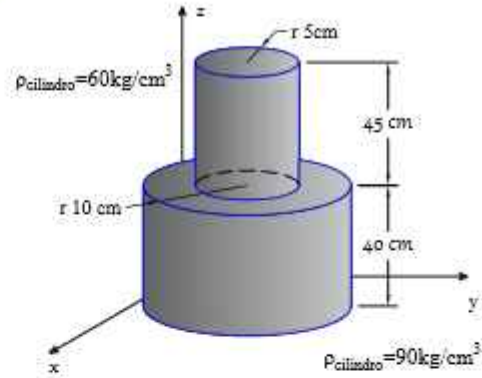


Figura 4.180

4.141

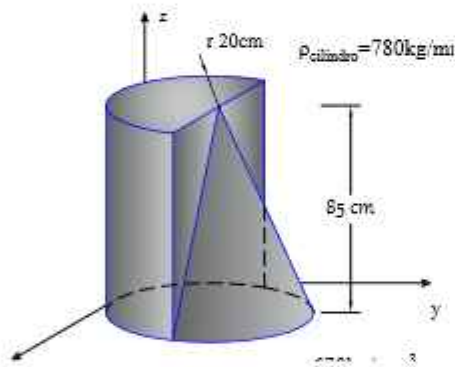


Figura 4.181

4.142

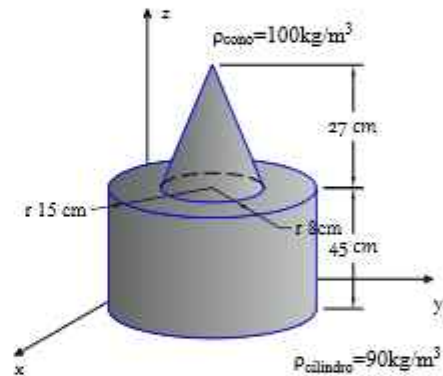


Figura 4.182

4.143

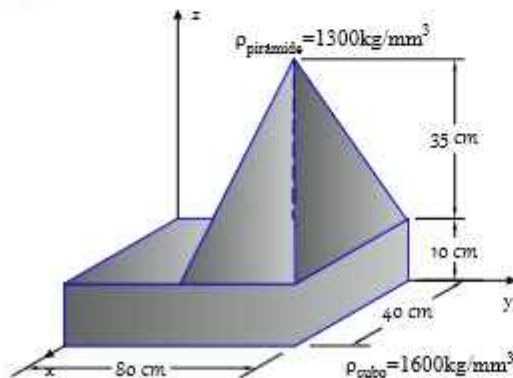


Figura 4.183

4.144

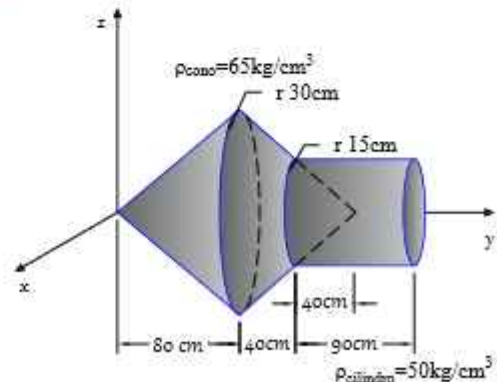


Figura 4.184

4.1.10. CENTRO DE GRAVEDAD: VOLUMEN - EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 4.1.10.1

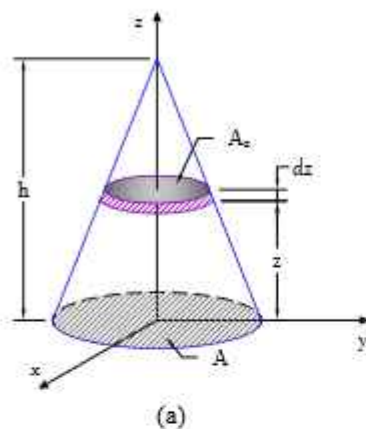


Figura 4.185

Determinar el centro de gravedad del siguiente cono.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figura 1.185 (a).

$$dV = A \cdot dz \quad \frac{A_z}{A} = \frac{(h-z)^2}{h^2} \quad \bar{z} = z$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto al eje z

$$z_c = \frac{\int \bar{z} dV}{\int dV} = \frac{\int_0^h z \cdot A_z dz}{\int_0^h A_z dz} = \frac{\int_0^h z \cdot \frac{A \cdot (h-z)^2}{h^2} dz}{\int_0^h \frac{A \cdot (h-z)^2}{h^2} dz} = \frac{h}{4}$$

Determinar el centro de gravedad de la siguiente pirámide.

Paso ①: Determinación del elemento diferencial a partir de la figuras 1.186 (b) y (c).

$$dV = y \cdot x \cdot dz \quad \frac{y}{a} = \frac{h-z}{h} \quad y = \frac{a}{h} (h-z)$$

$$\bar{z} = z \quad \frac{x}{b} = \frac{h-z}{h} \quad x = \frac{b}{h} (h-z)$$

Paso ②: Determinación del centro de gravedad con respecto al eje z

$$z_c = \frac{\int \bar{z} dV}{\int dV} = \frac{\int_0^h z \cdot y \cdot x dz}{\int_0^h y \cdot x dz} = \frac{\int_0^h z \cdot \frac{a}{h} (h-z) \cdot \frac{b}{h} (h-z) dz}{\int_0^h \frac{a}{h} (h-z) \cdot \frac{b}{h} (h-z) dz} = \frac{h}{4}$$

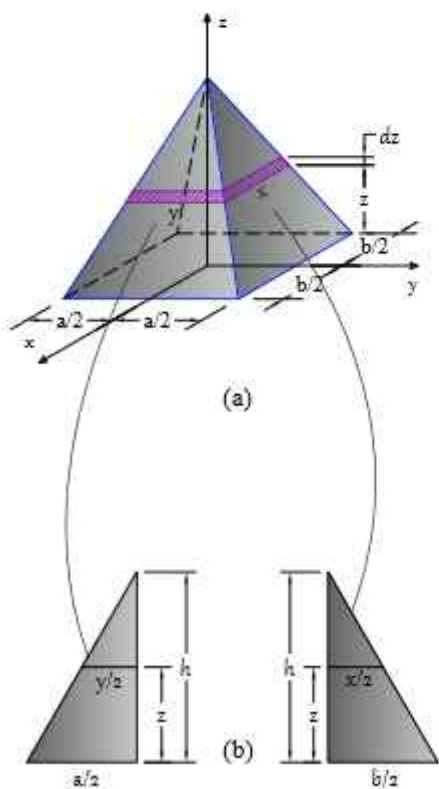
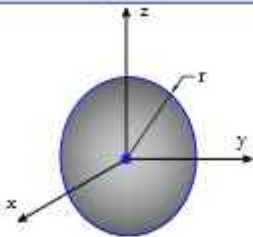
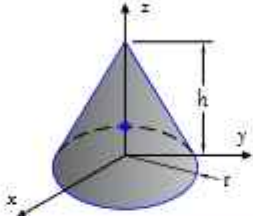
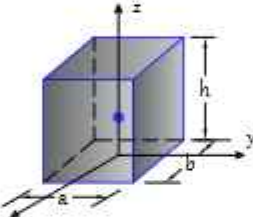
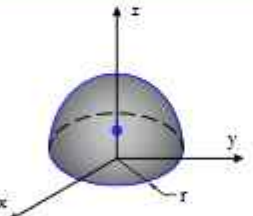
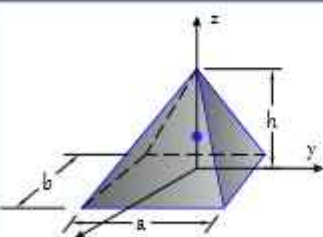
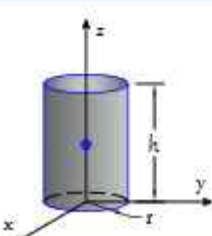


Figura 4.186

Tabla de Resumen de centros de gravedad de figuras conocidas

Forma	Figura	Volumen	x	y	z
<i>Esfera</i>		$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3$	0	0	0
<i>Cono</i>		$\frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot r^2$	0	0	$\frac{h}{4}$
<i>Prisma</i>		$a \cdot b \cdot h$	0	0	$\frac{h}{2}$
<i>Semi-Esfera</i>		$\frac{2}{3} \pi \cdot r^3$	0	0	$\frac{3r}{8}$
<i>Pirámide</i>		$\frac{a \cdot b \cdot h}{3}$	0	0	$\frac{h}{4}$
<i>Cilindro</i>		$\pi \cdot r^2 \cdot h$	0	0	$\frac{h}{2}$

EJEMPLO RESUELTO 4.1.10.2

Determine el centro de gravedad de la figura 1.187

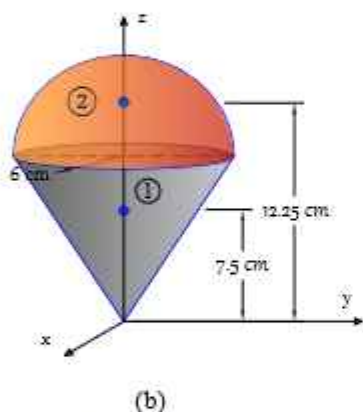
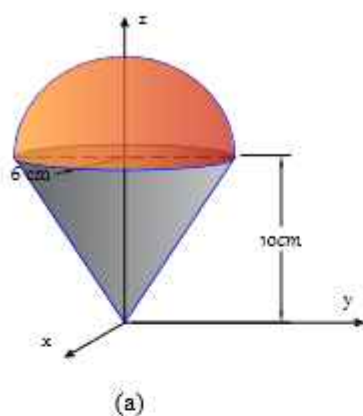


Figura 4.187

Paso 1: Identificación de elementos ① y ②, figura 1.187 (b) luego calculamos el volumen, y centroide de cada elemento

Volumen y Centroide: Elemento ①

$$h_1 := 10 \text{ cm} \quad r_1 := 6 \text{ cm}$$

$$V_1 := \frac{1}{3} \pi \cdot h_1 \cdot r_1^2 = 376.991 \text{ cm}^3$$

$$\bar{x}_1 := 0 \quad \bar{y}_1 := 0 \quad \bar{z}_1 := 10 \text{ cm} - \frac{h_1}{4} = 7.5 \text{ cm}$$

Área y Centroide: Elemento ②

$$r_2 := 6 \text{ cm}$$

$$V_2 := \frac{2}{3} \pi \cdot r_2^3 = 452.389 \text{ cm}^3$$

$$\bar{x}_2 := 0 \quad \bar{y}_2 := 0 \quad \bar{z}_2 := 10 \text{ cm} + \frac{3 r_2}{8} = 12.25 \text{ cm}$$

	V_i	\bar{z}_i	$V_i \cdot \bar{z}_i$
①	376.99	7.5	2827.43
②	452.39	12.25	5541.77
	829.38		8369.20

$$z_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot V_i}{\sum V_i} = 10.091 \text{ cm}$$

Determine el centro de gravedad de la figura 1.188

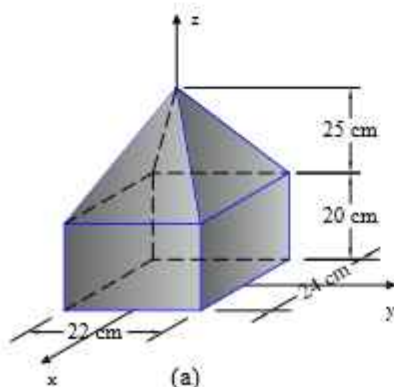
Paso 1: Identificación de elementos ① y ②, figura 1.188 (b) luego calculamos el volumen, y centroide de cada elemento

Volumen y Centroide: Elemento ①

$$h_1 := 20 \text{ cm} \quad b_1 := 22 \text{ cm} \quad a_1 := 24 \text{ cm}$$

$$V_1 := b_1 \cdot a_1 \cdot h_1 = 10560 \text{ cm}^3$$

$$\bar{x}_1 := 0 \quad \bar{y}_1 := 0 \quad \bar{z}_1 := \frac{h_1}{2} = 10 \text{ cm}$$



(a)

CONTINUACIÓN

Área y Centroide: Elemento ②

$$h_2 := 25 \text{ cm} \quad b_2 := 22 \text{ cm} \quad a_2 := 24 \text{ cm} \quad V_2 := \frac{a_2 \cdot b_2 \cdot h_2}{3} = 4400 \text{ cm}^3$$

$$\bar{x}_2 := 0 \quad \bar{y}_2 := 0 \quad \bar{z}_2 := 20 \text{ cm} + \frac{h_2}{4} = 26.25 \text{ cm}$$

	V_i	\bar{z}_i	$V_i \cdot \bar{z}_i$
①	10560	10	105600
②	4400	26.25	115500
	14960		221100

$$z_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot V_i}{\sum V_i} = 14.779 \text{ cm}$$

Determine el centro de gravedad de la figura 1.189

Paso 1: Identificación de elementos ① y ②, figura 1.189 (b) luego calculamos el volumen, y centroide de cada elemento

Volumen y Centroide: Elemento ①

$$h_1 := 60 \text{ cm} \quad r_1 := 30 \text{ cm} \quad V_1 := \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 = 169646.003 \text{ cm}^3$$

$$\bar{x}_1 := 0 \quad \bar{y}_1 := 0 \quad \bar{z}_1 := \frac{h_1}{2} = 30 \text{ cm}$$

Área y Centroide: Elemento ②

$$r_2 := 30 \text{ cm} \quad V_2 := \frac{2}{3} \pi \cdot r_2^3 = 56548.668 \text{ cm}^3$$

$$\bar{x}_2 := 0 \quad \bar{y}_2 := 0 \quad \bar{z}_2 := 60 \text{ cm} + \frac{3 r_2}{8} = 71.25 \text{ cm}$$

Área y Centroide: Elemento ③

$$h_3 := 60 \text{ cm} \quad r_3 := 30 \text{ cm} \quad V_3 := \frac{1}{3} \pi \cdot h_3 \cdot r_3^2 = 56548.668 \text{ cm}^3$$

$$\bar{x}_3 := 0 \quad \bar{y}_3 := 0 \quad \bar{z}_3 := 60 \text{ cm} - \frac{h_3}{4} = 45 \text{ cm}$$

	V_i	\bar{z}_i	$V_i \cdot \bar{z}_i$
①	169646	30	5089380
②	56549	71.25	4029093
③	-56549	45	-2544690
	169646		6573783

$$z_c := \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \cdot V_i}{\sum V_i} = 38.75 \text{ cm}$$

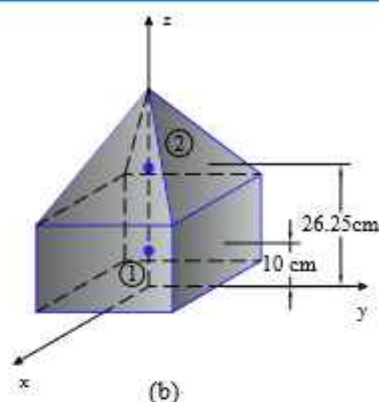


Figura 4.188

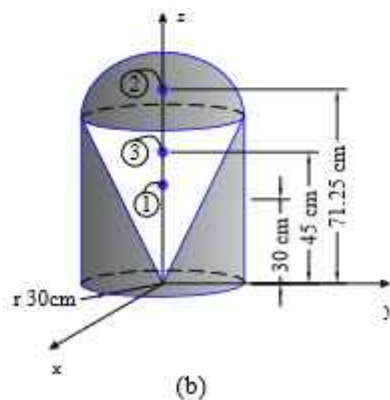
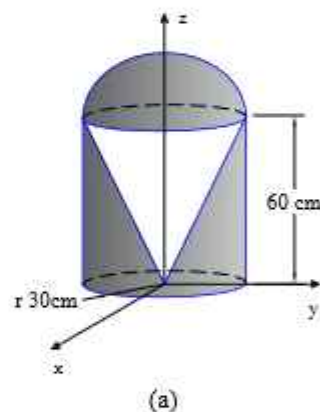


Figura 4.189

4.1.11. CENTRO DE GRAVEDAD: VOLUMEN - EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicios

16 Determinar el volumen y las coordenadas del centro de gravedad x , y e z de las siguientes figuras.

4.145

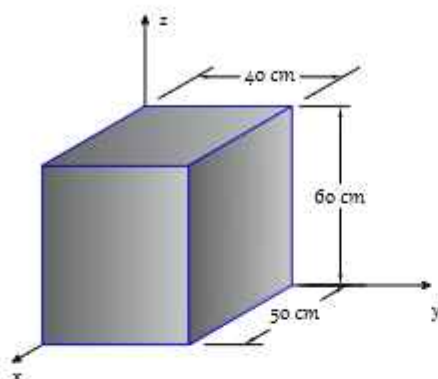


Figura 4.190

4.146

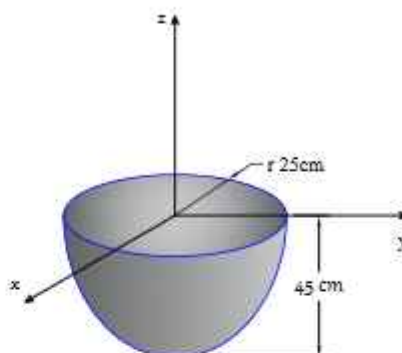


Figura 4.191

4.147

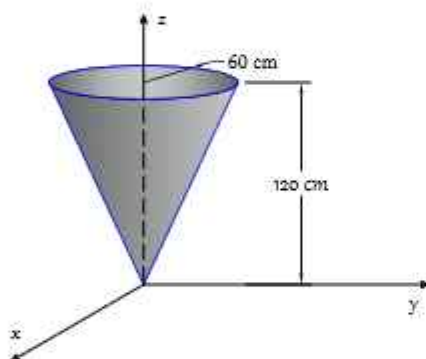


Figura 4.192

4.148

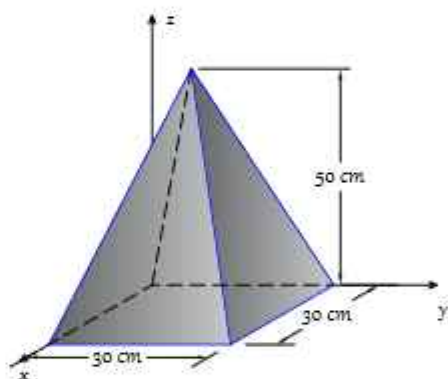


Figura 4.193

4.149

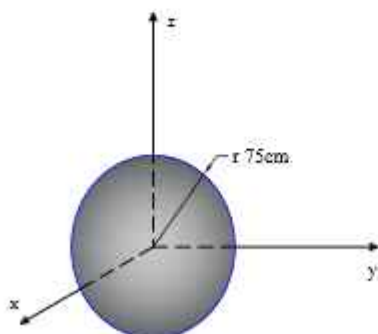


Figura 4.194

4.150

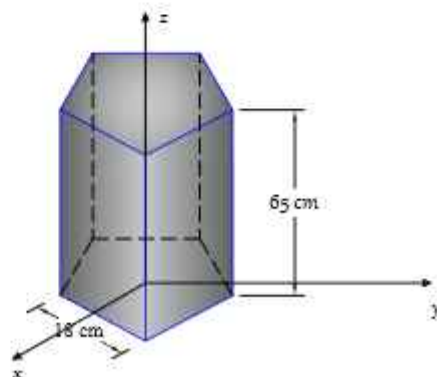


Figura 4.195

Determinar el volumen y las coordenadas del centro de gravedad x , y e z de las siguientes figuras.

4.151

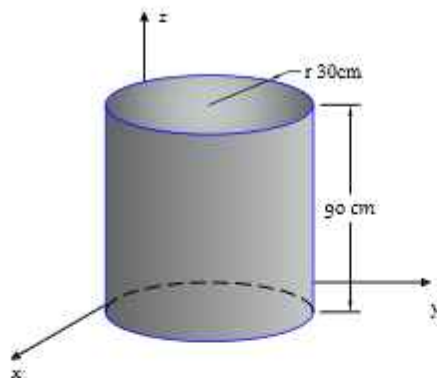


Figura 4.196

4.152

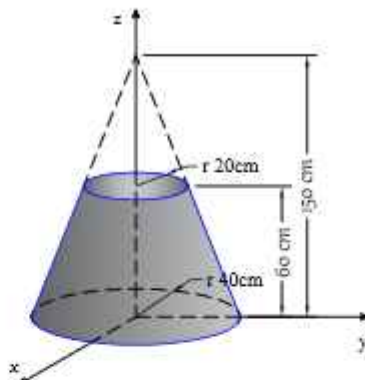


Figura 4.197

4.153

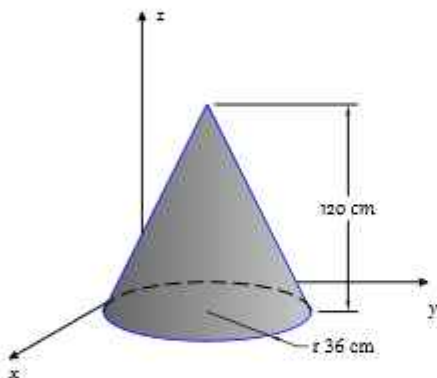


Figura 4.198

4.154

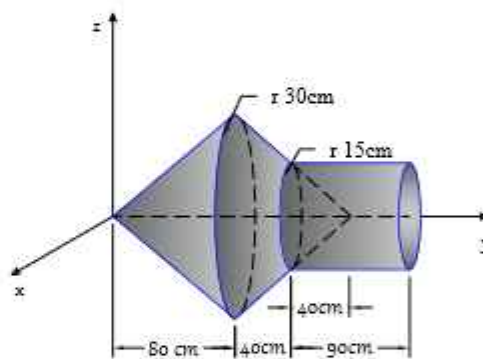


Figura 4.199

4.155

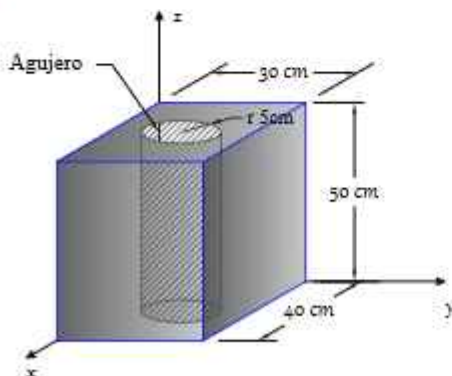


Figura 4.200

4.156

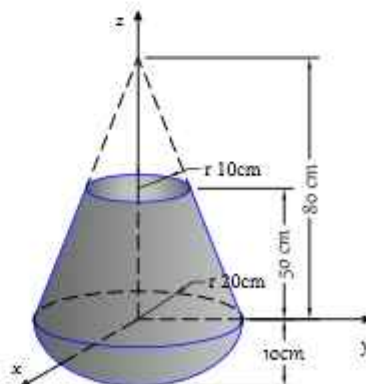


Figura 4.201

Determinar el volumen y las coordenadas del centro de gravedad x , y e z de las siguientes figuras.

4.157

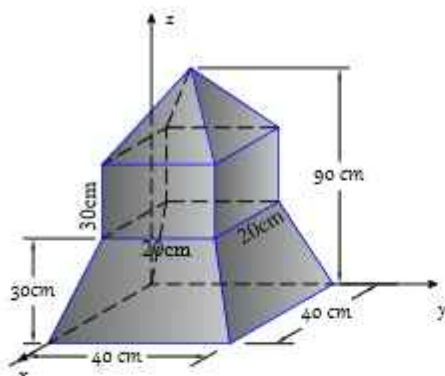


Figura 4.202

4.158

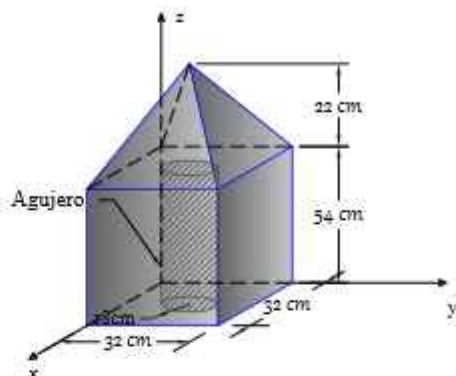


Figura 4.203

4.159

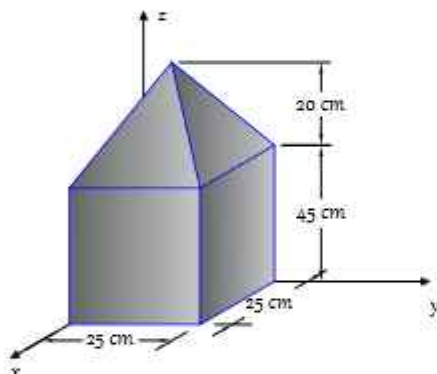


Figura 4.204

4.160

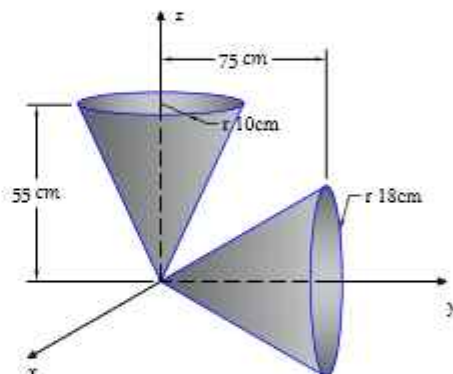


Figura 4.205

4.161

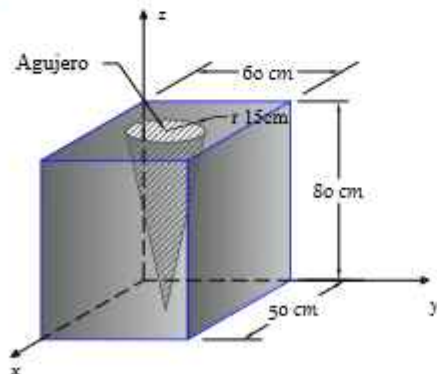


Figura 4.206

4.162

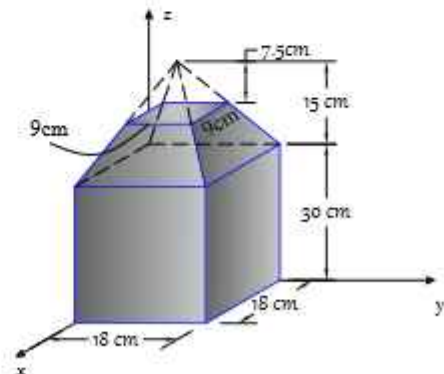


Figura 4.207

Determinar el volumen y las coordenadas del centro de gravedad x , y e z de las siguientes figuras.

4.163

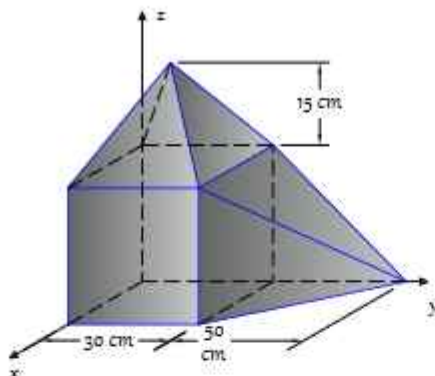


Figura 4.208

4.164

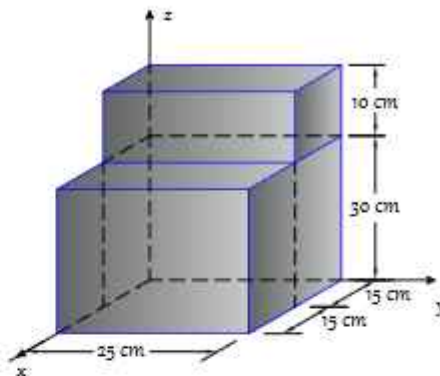


Figura 4.209

4.165

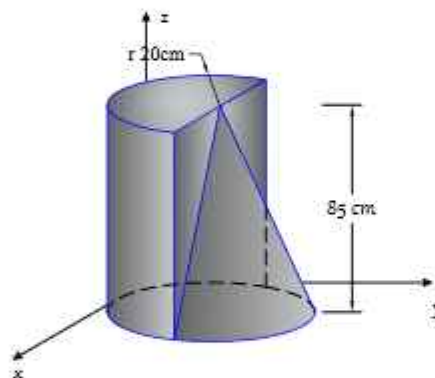


Figura 4.210

4.166

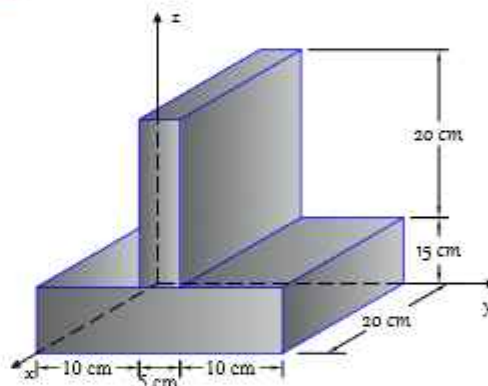


Figura 4.211

4.167

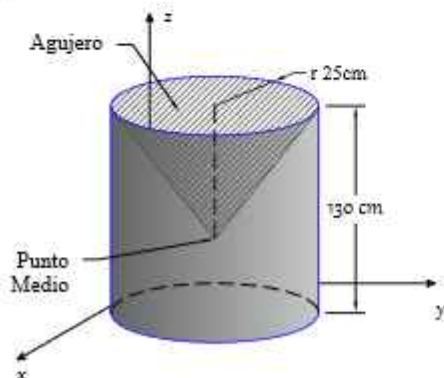


Figura 4.212

4.168

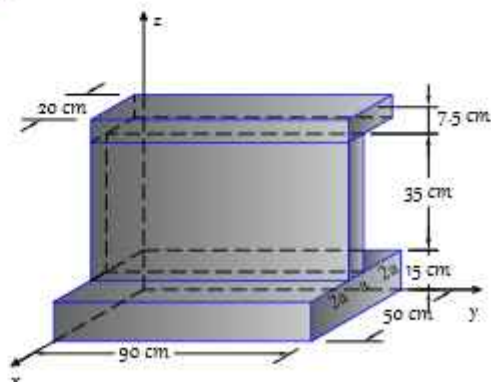


Figura 4.213

Determinar el volumen y las coordenadas del centro de gravedad x , y e z de las siguientes figuras.

4.169

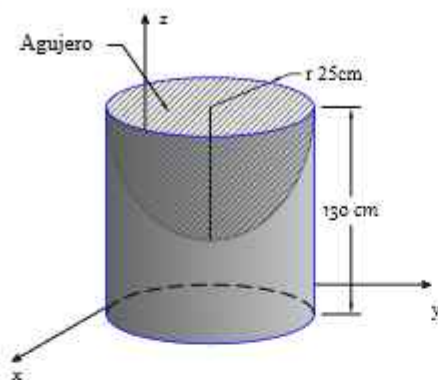


Figura 4.214

4.170

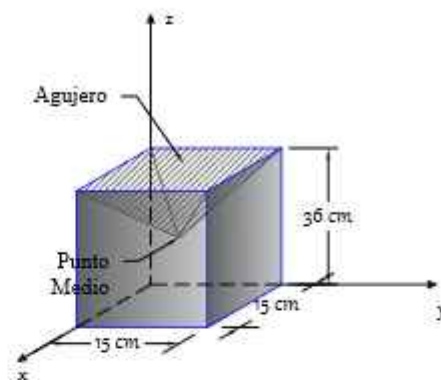


Figura 4.215

4.171

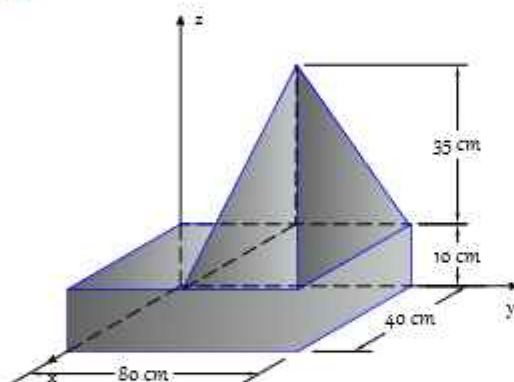


Figura 4.216

4.172

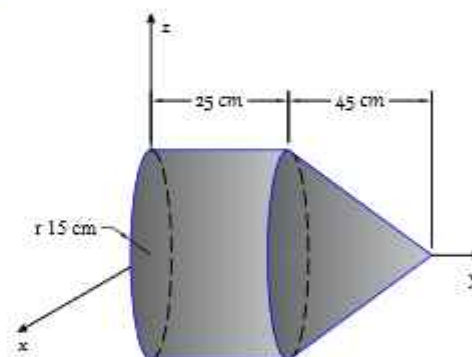


Figura 4.217

4.173

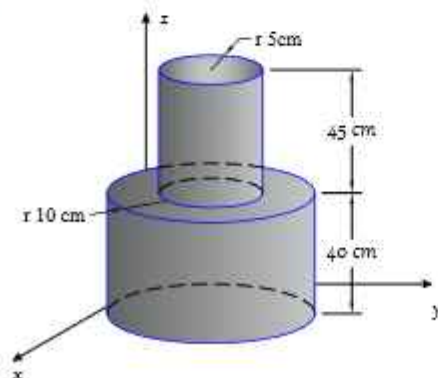


Figura 4.218

4.174

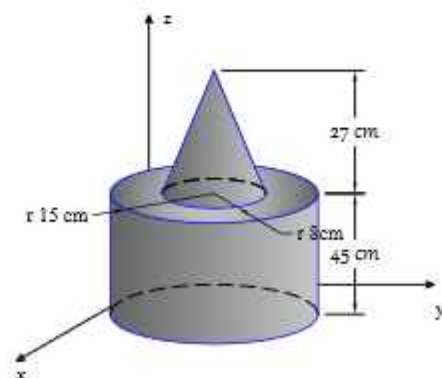


Figura 4.219

4.1.12. PAPPUS GULDIS - EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 4.1.12.1

Determine el área y volumen usando el teorema de Pappus Guildis de la figura 4.220

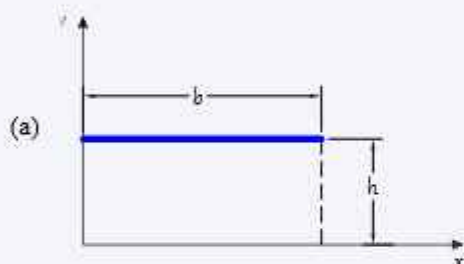
Rotación respecto al eje "x":

Determinación de Área, figura 4.220 (a).

$$A = (L) (2 \pi \cdot \bar{y}) \quad L = b \quad \bar{y} = h$$

$$A = b \cdot (2 \pi \cdot h)$$

$$A = 2 \pi \cdot h \cdot b$$

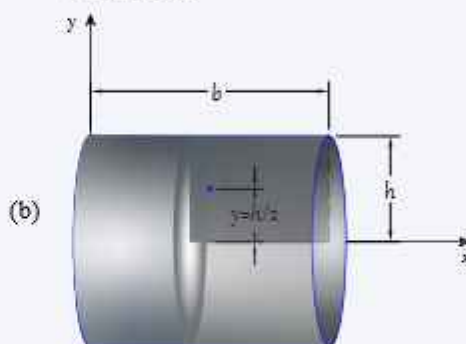


Determinación de Volumen, figura 4.220 (b).

$$V = A \cdot (2 \pi \cdot \bar{y}) \quad A = b \cdot h \quad \bar{y} = \frac{h}{2}$$

$$V = b \cdot h \cdot \left(2 \pi \cdot \frac{h}{2} \right)$$

$$V = \pi \cdot b \cdot h^2$$



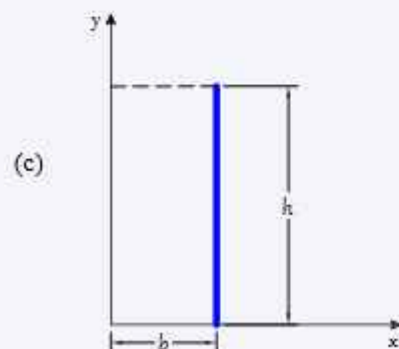
Rotación respecto al eje "y":

Determinación de Área, figura 4.220 (c).

$$A = (L) (2 \pi \cdot \bar{x}) \quad L = h \quad \bar{x} = b$$

$$A = h \cdot (2 \pi \cdot b)$$

$$A = 2 \pi \cdot h \cdot b$$



Determinación de Volumen, figura 4.220 (d).

$$V = A \cdot (2 \pi \cdot \bar{x}) \quad A = b \cdot h \quad \bar{x} = \frac{b}{2}$$

$$V = b \cdot h \cdot \left(2 \pi \cdot \frac{b}{2} \right)$$

$$V = \pi \cdot h \cdot b^2$$

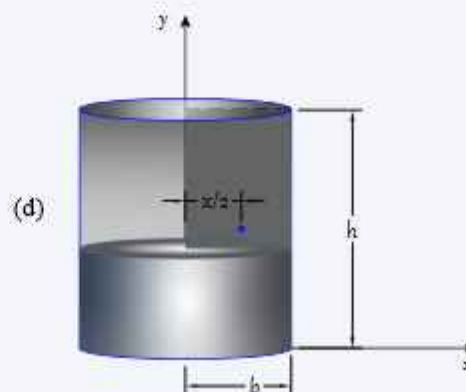


Figura 4.220

EJEMPLO RESUELTO 4.1.12.2

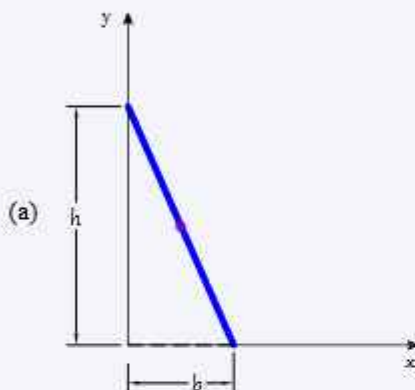
Determine el área y volumen usando el teorema de Pappus Guildis de la figura 4.221

Rotación respecto al eje "y": $L = \sqrt{h^2 + b^2}$

Determinación de Área, figura 4.221 (a).

$$A = (L) (2 \pi \cdot \bar{x}) \quad x = \frac{\sqrt{h^2 + b^2}}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}$$

$$A = \sqrt{h^2 + b^2} \cdot \left(2 \pi \cdot \frac{b}{2}\right) = \pi \cdot b \cdot \sqrt{h^2 + b^2}$$



Determinación de Volumen, figura 4.221 (b).

$$V = A \cdot (2 \pi \cdot \bar{x}) \quad A = \frac{b \cdot h}{2} \quad \bar{x} = \frac{b}{3}$$

$$V = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(2 \pi \cdot \frac{b}{3}\right) = \frac{\pi \cdot h \cdot b^2}{3}$$

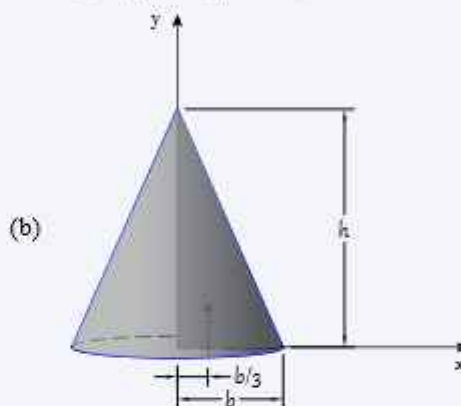


Figura 4.221

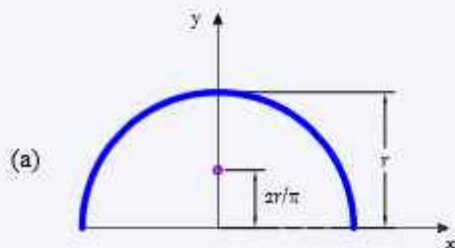
Determine el área y volumen usando el teorema de Pappus Guildis de la figura 4.222

Rotación respecto al eje "x":

Determinación de Área, figura 4.222 (a).

$$A = (L) (2 \pi \cdot \bar{y}) \quad \bar{y} = \frac{2r}{\pi} \quad L = \pi \cdot r$$

$$A = \pi \cdot r \cdot \left(2 \pi \cdot \frac{2r}{\pi}\right) = 4 \pi \cdot r^2$$



Determinación de Volumen, figura 4.222 (b).

$$V = A \cdot (2 \pi \cdot \bar{y}) \quad A = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot \left(2 \pi \cdot \frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{4 \pi \cdot r^3}{3}$$

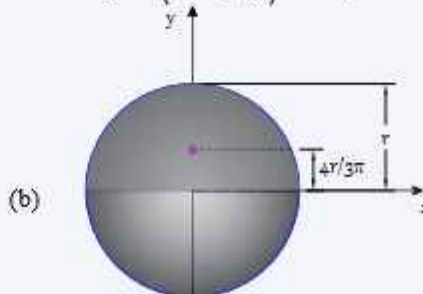


Figura 4.222

EJEMPLO RESUELTO 4.1.12.3

Determine el área y volumen usando el teorema de Pappus Guildis de la figura 4.223

Rotación respecto al eje "x":

Determinación de Área, figura 4.223 (a).

$$A = (L) (2 \pi \cdot \bar{y}) \quad y = h \quad L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (2 \pi \cdot h) = 4 \pi^2 \cdot r \cdot h$$

Determinación de Volumen, figura 4.223 (b).

$$V = A \cdot (2 \pi \cdot \bar{y}) \quad A = \pi \cdot r^2 \quad \bar{y} = h$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot (2 \pi \cdot h) = 2 \cdot h \cdot \pi^2 \cdot r^2$$

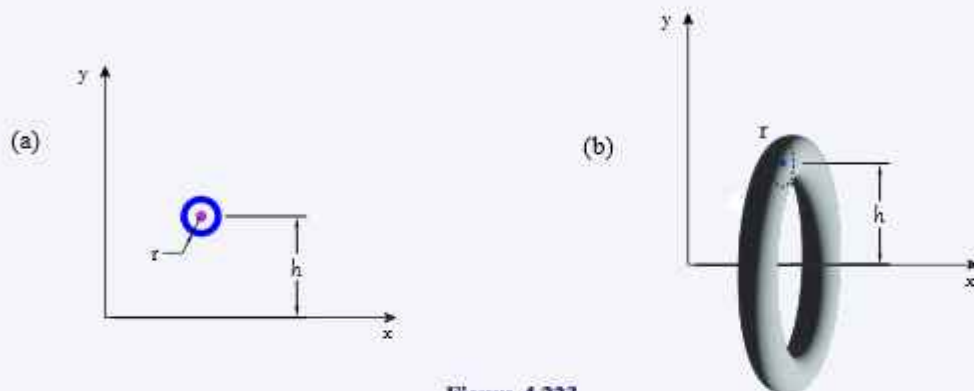


Figura 4.223

Determine el área y volumen usando el teorema de Pappus Guildis de la figura compuesta 4.224

Rotación respecto al eje "y", para determinar el área, según la figura 4.224 (b).

$$L := \sqrt{(8 \text{ m})^2 + (2 \text{ m})^2} = 8.246 \text{ m}$$

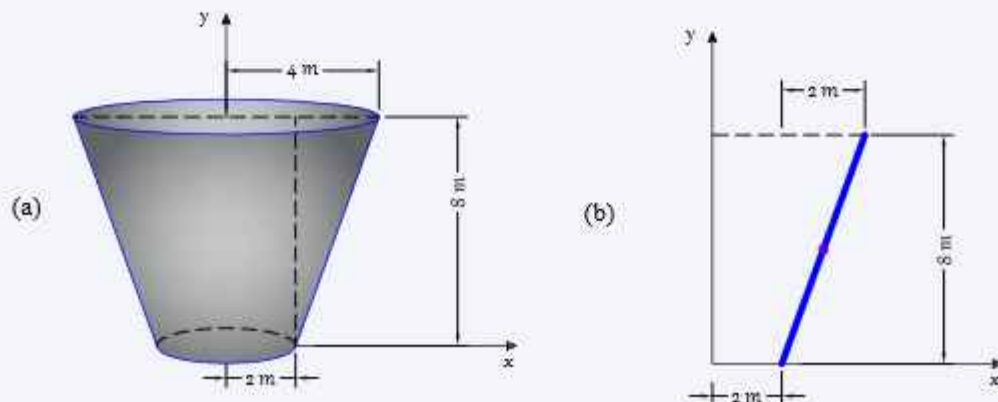
$$\bar{x} = 2 \text{ m} + \frac{L}{2} \cdot \sin(\theta)$$

$$\bar{x} = 2 \text{ m} + \frac{L}{2} \cdot \frac{2 \text{ m}}{L} = 3 \text{ m}$$

$$A = (L) (2 \pi \cdot \bar{x})$$

$$A = 8.246 \text{ m} \cdot (2 \pi \cdot 3 \text{ m})$$

$$A = 155.433 \text{ m}^2$$



EJEMPLO RESUELTO 4.1.12.3

Determinación del volumen, según la figura 4.224 (c) y (d)

$$\begin{array}{llll}
 b_1 := 2 \text{ m} & h_1 := 8 \text{ m} & b_2 := 8 \text{ m} & h_2 := 2 \text{ m} \\
 A_1 := b_1 \cdot h_1 = 16 \text{ m}^2 & \bar{x}_1 := 1 \text{ m} & A_2 := 0.5 \cdot b_2 \cdot h_2 = 8 \text{ m}^2 & \bar{x}_2 := 2 \text{ m} + \frac{h_2}{3} = 2.667 \text{ m}
 \end{array}$$

Cuadro de resumen:

	A_i	\bar{x}_i	$A_i \cdot \bar{x}_i$
①	16	1	16
②	8	2.67	21.33
	<u>24</u>		<u>37.33</u>

$$\bar{x}_c := \frac{37.33 \text{ m}^3}{24 \text{ m}^2} = 1.555417 \text{ m}$$

$$V = A \cdot (2 \pi \cdot \bar{x}_c) = 24 \text{ m}^2 \cdot (2 \pi \cdot 1.555 \text{ m})$$

$$V = 234.551 \text{ m}^3$$

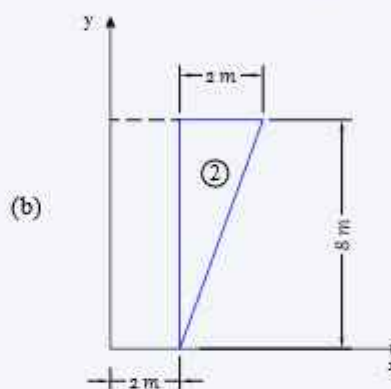
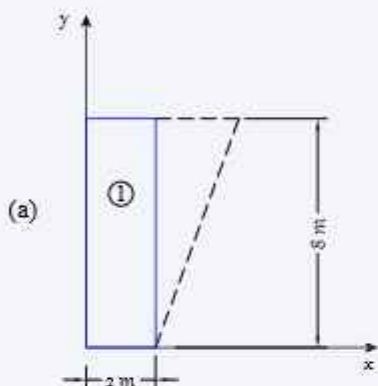
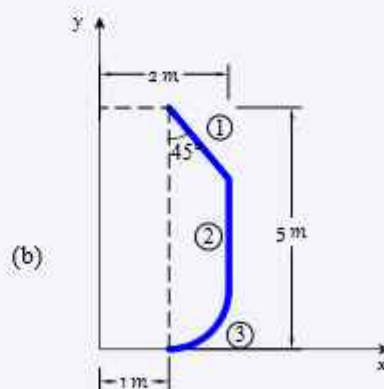
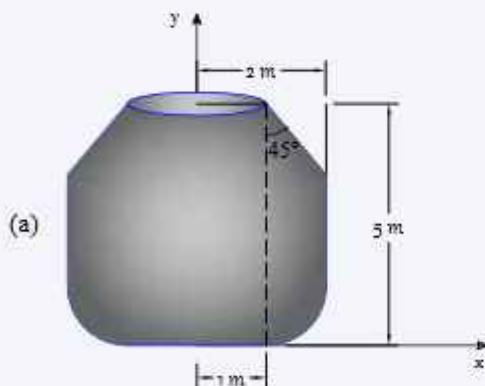


Figura 4.224

Determine el área y volumen usando el teorema de Pappus Guildis de la figura compuesta 4.225



$$\begin{array}{lll}
 L_1 := \sqrt{2} \text{ m} & L_2 := 3 \text{ m} & r := 1 \text{ m} \\
 \bar{x}_1 := 1 \text{ m} + \frac{L_1}{2} \cdot \sin(45^\circ) & \bar{x}_2 := 2 \text{ m} & L_3 := \frac{\pi \cdot r}{2} = 1.571 \text{ m} \\
 \bar{x}_1 = 1.5 \text{ m} & & \bar{x}_3 := 1 \text{ m} + \frac{2 \cdot r}{\pi} = 1.637 \text{ m}
 \end{array}$$

CONTINUACIÓN

Cuadro de resumen

	L_i	\bar{x}_i	$L_i \cdot \bar{x}_i$
①	1.41	1.50	2.12
②	3.00	2.00	6.00
③	1.57	1.64	2.57
	<u>5.99</u>		<u>10.69</u>

$$A = (L) (2 \pi \cdot \bar{x}_c)$$

$$A = 5.985 \text{ m} \cdot (2 \pi \cdot 1.786 \text{ m})$$

$$A = 67.162 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{x}_i}{\sum L_i}$$

$$\bar{x}_c = \frac{10.692 \text{ m}^2}{5.985 \text{ m}} = 1.786 \text{ m}$$

Determinación del volumen según la figura 4.225

(c).

$$b_1 = 1 \text{ m} \quad h_1 = 5 \text{ m}$$

$$b_2 = 1 \text{ m} \quad h_2 = 1 \text{ m}$$

$$A_1 = b_1 \cdot h_1 = 5 \text{ m}^2$$

$$A_2 = b_2 \cdot h_2 \cdot 0.5 = 0.5 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_1 = 0.5 \cdot b_1 = 0.5 \text{ m}$$

$$\bar{x}_2 = 1 \text{ m} + \frac{h_2}{3} = 1.333 \text{ m}$$

$$b_3 = 1 \text{ m} \quad h_3 = 3 \text{ m}$$

$$r = 1 \text{ m}$$

$$A_3 = b_3 \cdot h_3 = 3 \text{ m}^2$$

$$A_4 = \pi \cdot \frac{r^2}{4} = 0.785 \text{ m}^2$$

$$\bar{x}_3 = 1 \text{ m} + b_3 \cdot 0.5 = 1.5 \text{ m}$$

$$\bar{x}_4 = 1 \text{ m} + \frac{4 \cdot r}{3 \pi} = 1.424 \text{ m}$$

Cuadro de resumen

	L_i	\bar{x}_i	$L_i \cdot \bar{x}_i$
①	5.00	0.50	2.50
②	0.50	1.33	0.67
③	3.00	1.50	4.50
④	0.79	1.42	1.12
	<u>9.29</u>		<u>8.79</u>

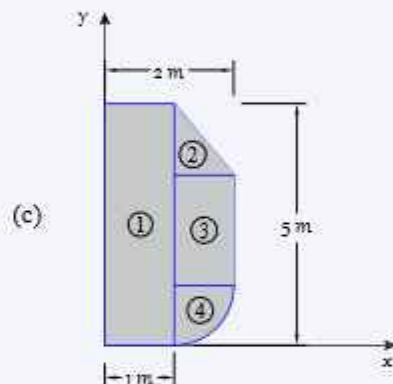


Figura 4.225

$$\bar{x}_c = \frac{\sum A_i \cdot \bar{x}_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{x}_c = \frac{8.785 \text{ m}^3}{9.285 \text{ m}^2} = 0.946 \text{ m}$$

$$V = A \cdot (2 \pi \cdot \bar{x}_c)$$

$$V = 9.285 \text{ m}^2 \cdot (2 \pi \cdot 0.946 \text{ m})$$

$$V = 55.189 \text{ m}^3$$

EJEMPLO RESUELTO 4.1.12.4

Determine el área y volumen usando el teorema de Pappus Guildis de la figura compuesta 4.226. Dato $r = 2\text{ m}$

Determinación de área, figura 4.226 (b)

$$L_1 := \frac{\pi}{2} \cdot r = 3.142\text{ m} \quad L_2 := 2\text{ m} \quad L_3 := 4\text{ m}$$

$$\bar{x}_1 := 2\text{ m} + \frac{2 \cdot r}{\pi} = 3.273\text{ m} \quad \bar{x}_2 := 2\text{ m} + 1\text{ m} \quad \bar{x}_3 := 2\text{ m}$$

	L_i	\bar{x}_i	$L_i \cdot \bar{x}_i$
①	3.14	3.27	10.28
②	2.00	3.00	6.00
③	4.00	2.00	8.00
④	-2.00	1.00	-2.00
	<u>7.14</u>		<u>22.28</u>

$$\bar{x}_c = \frac{\sum L_i \cdot \bar{x}_i}{\sum L_i} \quad \bar{x}_c := \frac{22.283\text{ m}^2}{7.142\text{ m}} \quad \bar{x}_c = 3.12\text{ m}$$

$$A = (L) (2 \pi \cdot \bar{x}_c) \quad A = 7.142\text{ m} \cdot (2 \pi \cdot 3.12\text{ m}) \quad A = 140.008\text{ m}^2$$

Determinación de volumen, figura 4.226 (c)

$$b_1 := 2\text{ m} \quad h_1 := 6\text{ m} \quad r := 2\text{ m} \\ A_1 := b_1 \cdot h_1 = 12\text{ m}^2 \quad A_2 := \pi \cdot \frac{r^2}{4} = 3.142\text{ m}^2$$

$$\bar{x}_1 := 0.5 \cdot b_1 = 1\text{ m} \quad \bar{x}_2 := 2\text{ m} + \frac{4 \cdot r}{3 \pi} = 2.849\text{ m}$$

$$b_3 := 1\text{ m} \quad h_3 := 2\text{ m} \quad A_3 := b_3 \cdot h_3 = 2\text{ m}^2 \quad \bar{x}_3 := b_3 \cdot 0.5 = 0.5\text{ m}$$

	L_i	\bar{x}_i	$L_i \cdot \bar{x}_i$
①	12.00	1.00	12.00
②	3.14	2.85	8.95
③	-2.00	0.50	-1.00
	<u>13.14</u>		<u>19.95</u>

$$\bar{x}_c = \frac{\sum A_i \cdot \bar{x}_i}{\sum A_i} \quad \bar{x}_c := \frac{19.95\text{ m}^3}{13.142\text{ m}^2} \quad \bar{x}_c = 1.518\text{ m}$$

$$V = A \cdot (2 \pi \cdot \bar{x}_c) \quad V := 13.142\text{ m}^2 \cdot (2 \pi \cdot 1.518\text{ m}) \quad V = 125.347\text{ m}^3$$

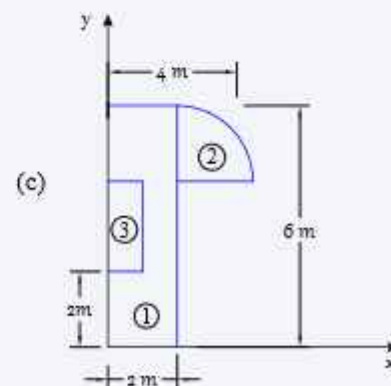
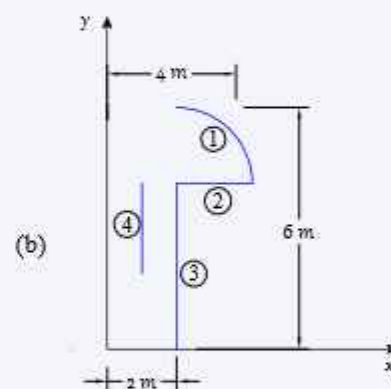
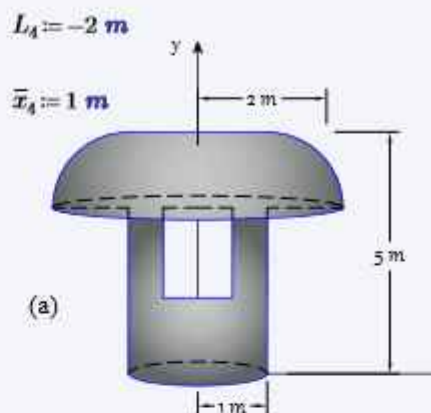


Figura 4.226

4.1.13. PAPPUS GULDIS - EJERCICIOS PROPUESTOS

17 Determinar el área de las siguientes figuras, por el primer teorema

Ejercicios

4.175

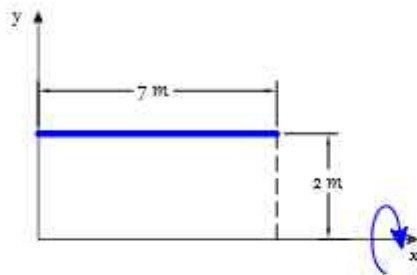


Figura 4.227

4.176

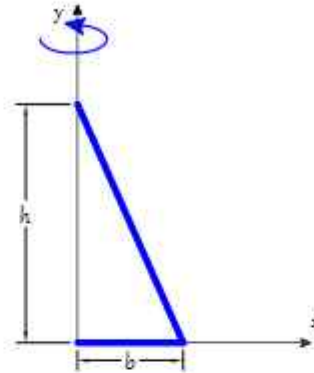


Figura 4.228

4.177

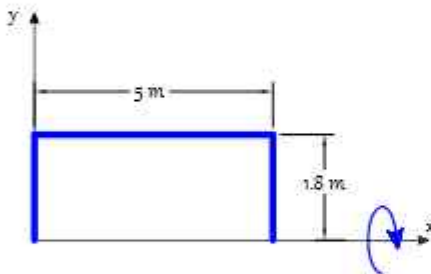


Figura 4.229

4.178

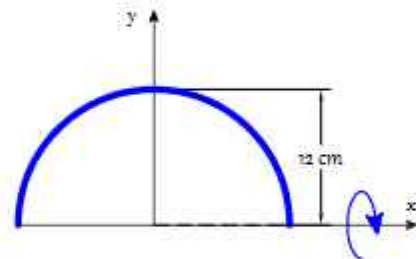


Figura 4.230

4.179

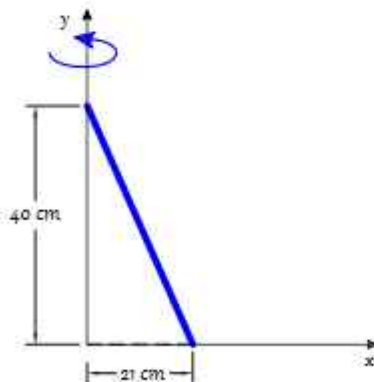


Figura 4.231

4.180

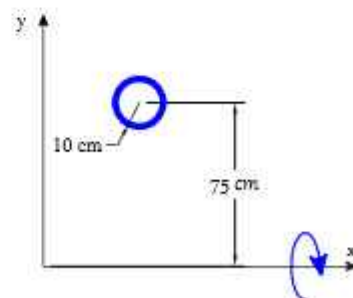


Figura 4.232

Determinar el volumen de las siguientes figuras

4.181

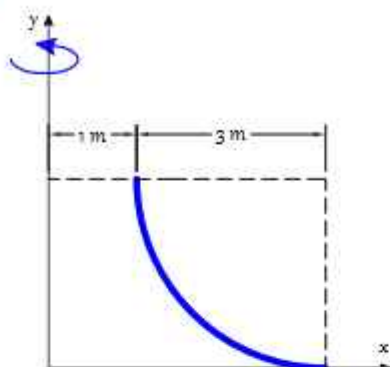


Figura 4.233

4.182

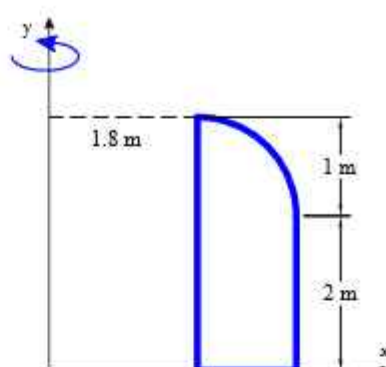


Figura 4.234

4.183

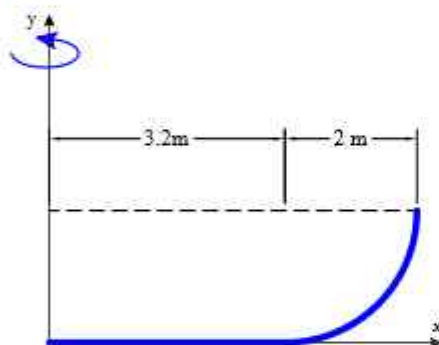


Figura 4.235

4.184

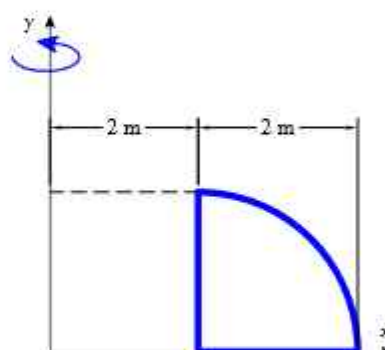


Figura 4.236

4.185

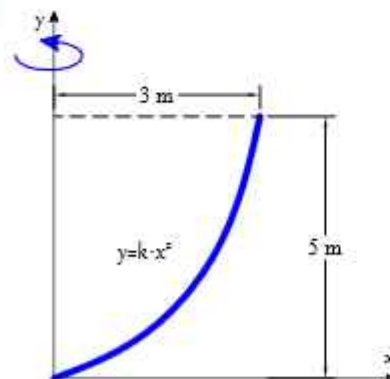


Figura 4.237

4.186

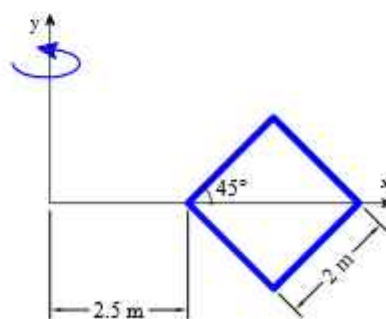


Figura 4.238

Determinar el volumen de las siguientes figuras

4.187

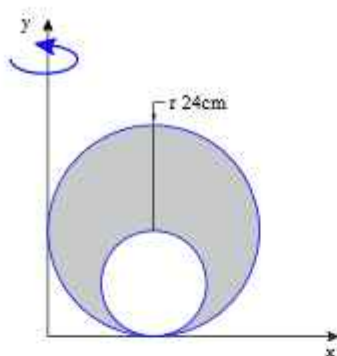


Figura 4.239

4.188

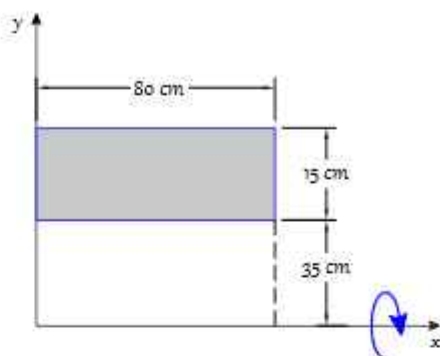


Figura 4.240

4.189

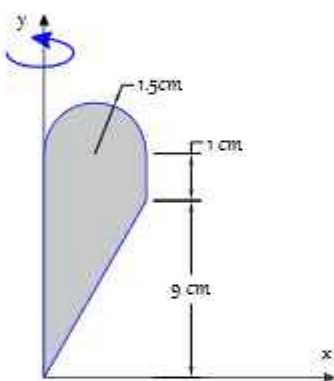


Figura 4.241

4.190

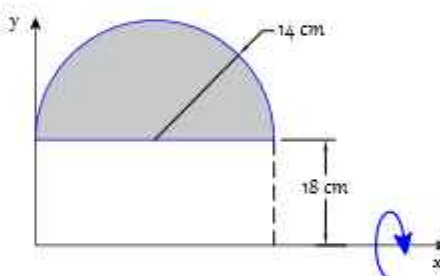


Figura 4.242

4.191

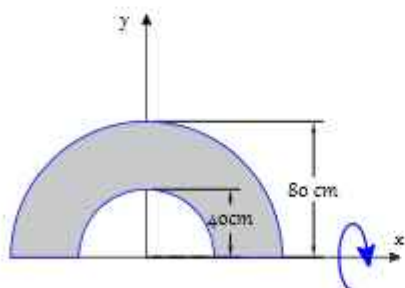


Figura 4.243

4.192

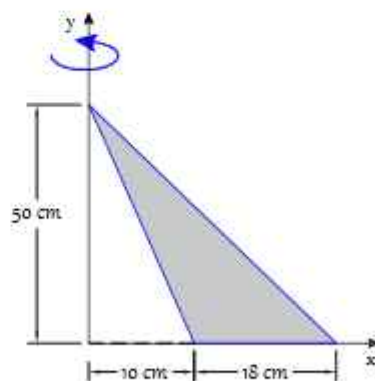


Figura 4.244

Determinar el volumen de las siguientes figuras

4.193

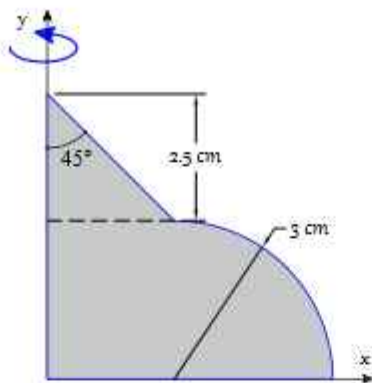


Figura 4.245

4.194

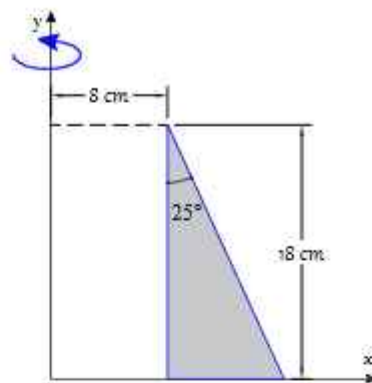


Figura 4.246

4.195

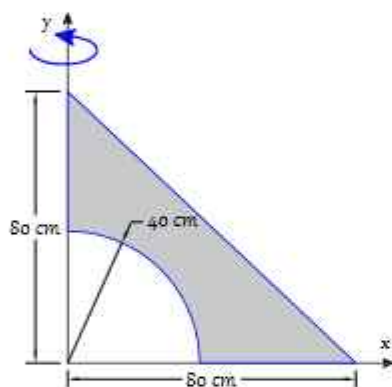


Figura 4.247

4.196

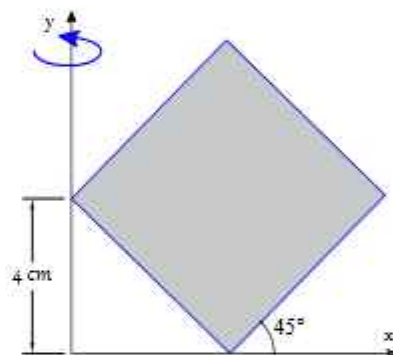


Figura 4.248

4.197

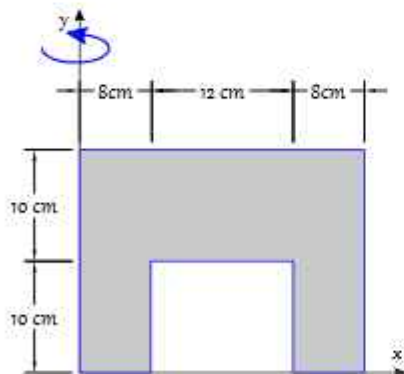


Figura 4.249

4.198

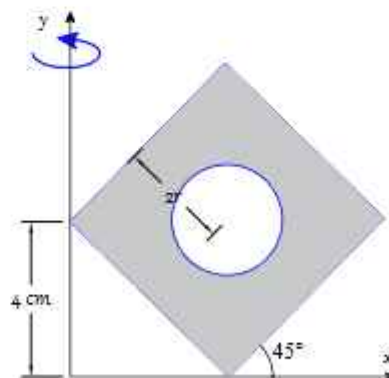


Figura 4.250

Determinar el volumen de las siguientes figuras

4.199

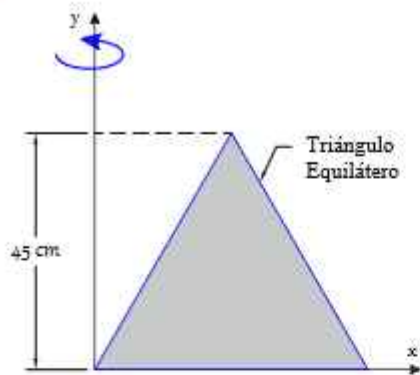


Figura 4.251

4.200

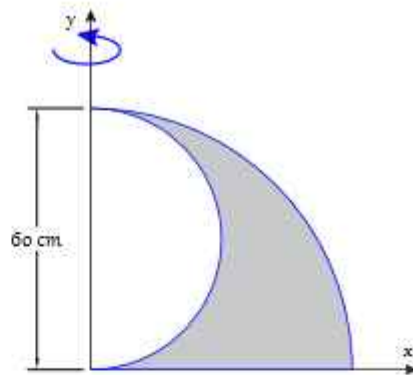


Figura 4.252

4.201

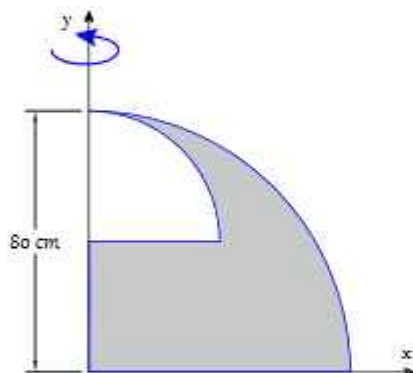


Figura 4.253

4.202

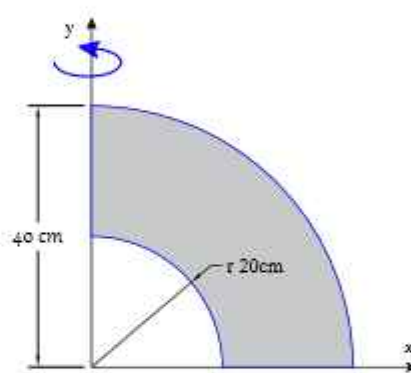


Figura 4.254

4.203

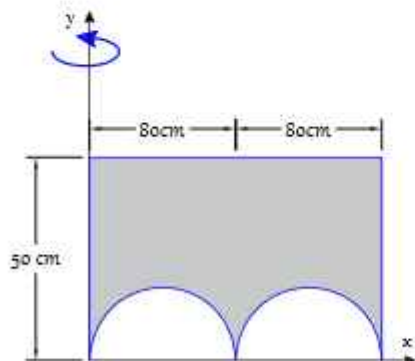


Figura 4.255

4.204

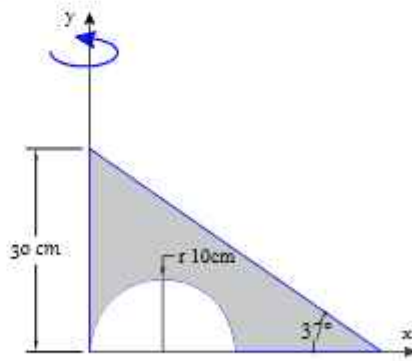


Figura 4.256

Determinar el volumen de las siguientes figuras

4.205

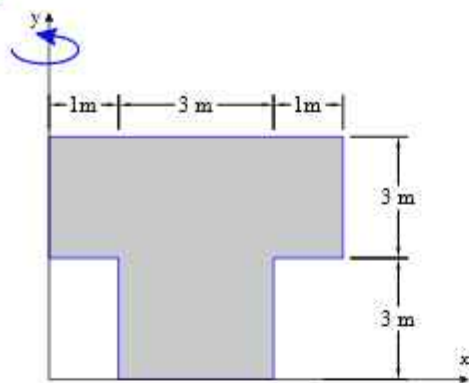


Figura 4.257

4.206

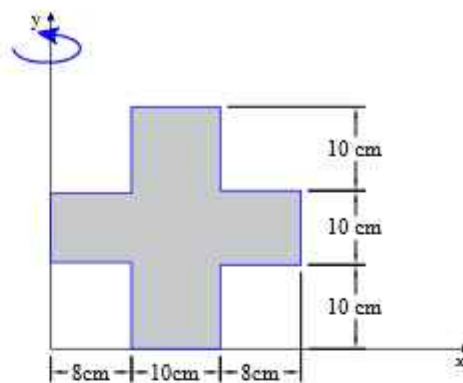


Figura 4.258

4.207

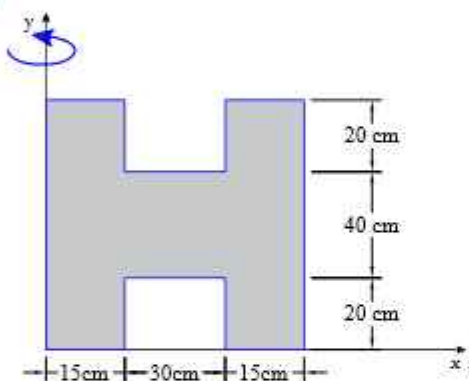


Figura 4.259

4.208

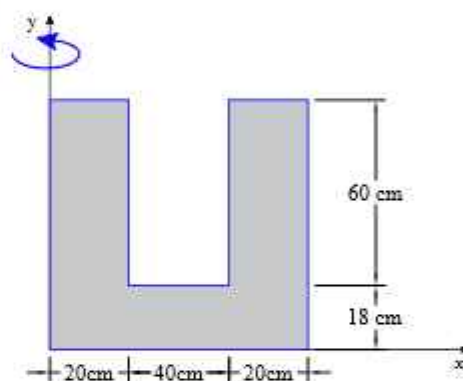


Figura 4.260

4.209

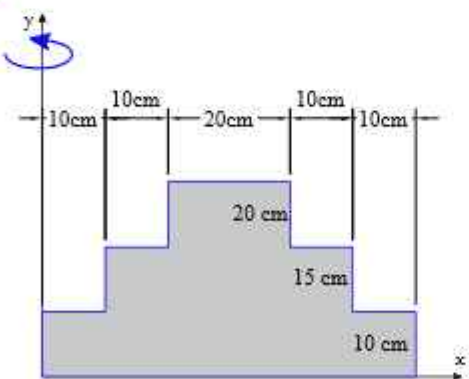


Figura 4.261

4.210

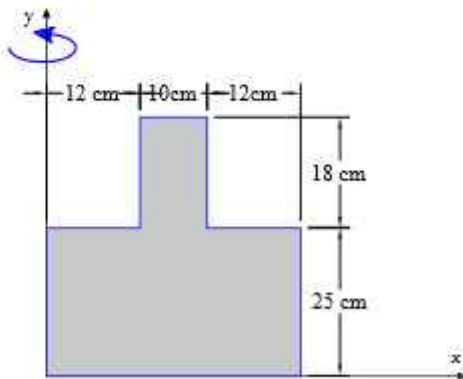


Figura 4.262

MOMENTOS DE INERCIA 5



5

MOMENTOS DE INERCIA

5.1. MOMENTO DE INERCIA

El momento de inercia, también conocido como el “segundo momento de área” o momento de inercia de área, es una propiedad fundamental en la estática y la mecánica que describe la resistencia de un objeto bidimensional a cambiar su estado de movimiento rotacional alrededor de un eje. Este concepto se basa en la distribución de área alrededor del eje de rotación y es fundamental en el análisis de objetos planos en equilibrio.

para demostrar el segundo momento de área, los esfuerzos internos en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas, entonces:

Fuerza resultante

$$F_R = \int k \cdot y \, dA$$
$$dF = k \cdot y \, dA$$

Momento respecto a x

$$dM = y \cdot dF_R$$
$$dM = k \cdot y^2 \, dA$$

$$M = k \int y^2 \, dA$$

Segundo momento de área.

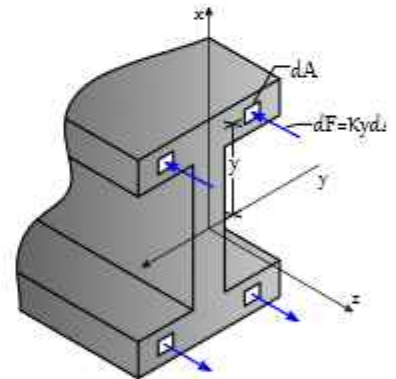


Figura 5.1: Fuerza concentrada un área

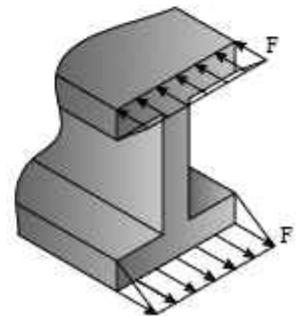


Figura 5.2: Fuerza distribuida en una viga

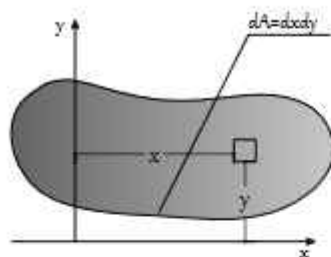


Figura 5.3: figura4

5.1.1. Momento de inercia de un área

El momento de inercia se representa comúnmente con la letra I y se calcula utilizando la siguiente fórmula general para una figura bidimensional:

$$dI_x = x^2 \cdot dA$$

$$dI_y = y^2 \cdot dA$$

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

Donde:

- I : es el momento de inercia con respecto al eje de rotación.
- \int representa la integral, que se utiliza para sumar infinitesimalmente todas las contribuciones de área alrededor del eje.
- r es la distancia desde el elemento de área dA al eje de rotación.
- dA es un elemento de área infinitesimal dentro de la región.

Esta fórmula permite calcular el momento de inercia de una figura bidimensional con respecto a un eje específico. El resultado es una medida de la resistencia del objeto a cambiar su movimiento rotacional alrededor del eje. Cuanto mayor sea el momento de inercia, más difícil será cambiar la velocidad angular de rotación del objeto. En la práctica, el momento de inercia se utiliza para analizar vigas, placas y otros objetos planos en situaciones de estática. Ayuda a determinar cómo estas estructuras responden a fuerzas y momentos aplicados, y es esencial en el diseño y análisis de estructuras y sistemas mecánicos.

El momento de inercia es una herramienta clave para ingenieros y físicos en la resolución de problemas relacionados con el equilibrio y el comportamiento de objetos en rotación en el plano bidimensional.

5.1.2. Momento polar de inercia

Para los problemas relacionados con la rotación de placas (segundo momento de "dA" con respecto al polo "O", se denomina momento de inercia polar). Los esfuerzos internos en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas.

$$I_p = \int r^2 dA$$

También podemos obtener a partir de los momentos rectangulares de inercia I_x, I_y

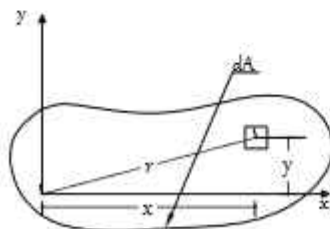


Figura 5.4: figura4

$$I_p = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y$$

5.1.3. Radio de giro de un área

El radio de giro de un área, también conocido como “radio de giro de masa” o “radio de giro de inercia”, es una propiedad que describe cómo la masa o la distribución de área de una figura bidimensional se relaciona con su capacidad para girar en torno a un eje específico. El radio de giro se calcula a partir del momento de inercia y es una medida de cuán lejos se encuentra la masa promedio o el centro de gravedad de un objeto desde el eje de rotación.

En términos generales, el radio de giro (R) se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$I_x = r_x^2 A$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$I_y = r_y^2 A$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Donde:

- r : es el radio de giro.
- I : es el momento de inercia del área con respecto al eje de rotación.
- A : es el área de la figura bidimensional.

El radio de giro se expresa en unidades de longitud (como metros o centímetros) y es una medida que cuantifica cómo la masa o la distribución de área se concentra en relación con el eje de rotación. Un radio de giro menor indica que la mayor parte de la masa o el área está más cerca del eje de rotación, lo que hace que el objeto sea más fácil de girar. Por otro lado, un radio de giro mayor significa que la masa o el área se encuentra más lejos del eje de rotación, lo que dificulta el giro del objeto.

Polar:

$$I_p = r_o^2 A \quad r_o = \sqrt{\frac{I_p}{A}}$$

$$r_o = r_x^2 + r_y^2$$

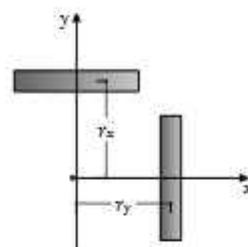


Figura 5.5: figura4

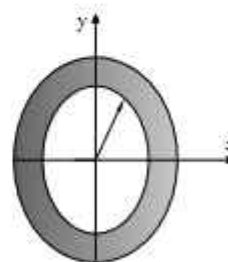


Figura 5.6: figura de polar

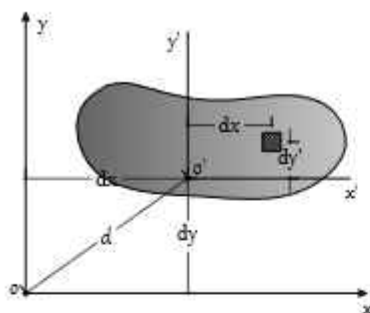


Figura 5.7: figura4

5.1.4. Teorema de los ejes paralelos o Teorema de Steiner

Los esfuerzos internos en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas.

$$I_x = \int (y' + dy)^2 dA$$

$$I_x = \int_A (y' + dy)^2 dA$$

$$= \int_A y'^2 dA + 2dy \int_A y' dA + dy^2 \int_A dA$$

Simplificando: $I_x = I_{x'} + Ady^2 \Rightarrow I_p = I_o + Ad^2$
 $I_y = I_{y'} + Adx^2$

5.1.5. Momento de inercia de áreas compuestas

Para una serie de áreas compuestas o partees simples conectadas

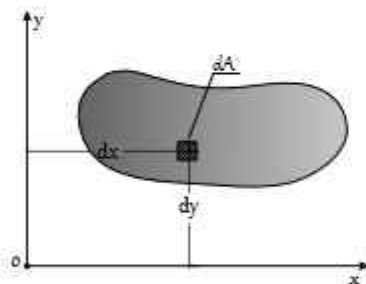


Figura 5.8: figura4

5.1.6. Producto de inercia para un área y rotación de ejes

momento de inercia para un área es diferente para cada eje con respecto al cual se calcula: Los esfuerzos internos en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas.

producto de inercia para un elemento de arco "dA"

$$I_x = \int_A (xy) dA$$

Los esfuerzos internos en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas.

$$I_{xy} = \int_A (x' + dx)(y' + dy) dA$$

$$I_{xy} = \int_A x'y' dA + dx \int_A y' dA + dy \int_A x' dA + dx dy \int_A dA$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + A dx dy$$

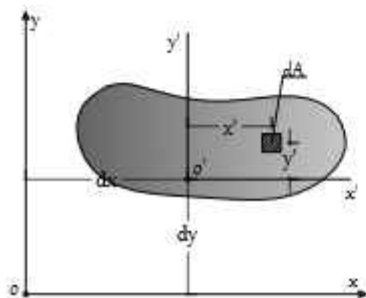


Figura 5.9: figura4

5.1.7. Momentos de inercia para un área con rotación en los ejes

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y \cdot \cos\theta - x \cdot \sin\theta)^2 dA$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA = \int (y \cdot \sin\theta + x \cdot \cos\theta)^2 dA$$

Identidad Trigonométrica: $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$; $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

Además: $\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\theta$; $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = \int (y \sin\theta + x \cos\theta)(y \cos\theta - x \sin\theta) dA$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Momento de Inercia polar: $I_P = I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$

Ángulo para que $I_{x'}$ y $I_{y'}$ sea máximo: $\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

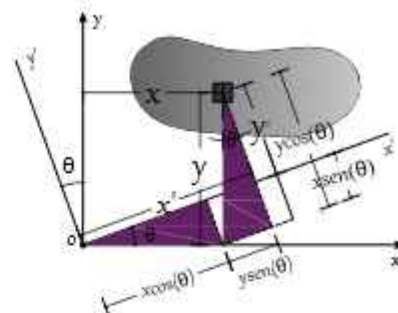


Figura 5.10: figura4

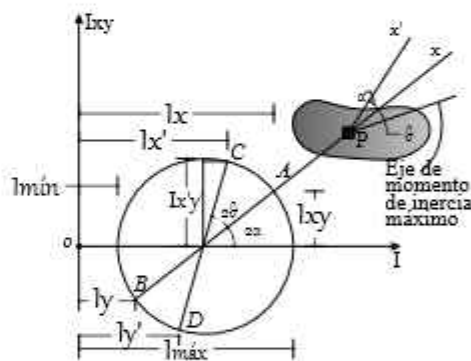


Figura 5.11: figura4

a

5.1.8. EJERCICIOS RESUELTOS SIMPLE

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.1

Determine el momento y producto de inercia de la siguiente figura sombreada

Paso ①: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje x figura 5.12 (b).

$$dA = b \cdot dy \quad x_c = \frac{x}{2} \quad y_c = y$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_x , y producto de inercia I_{xy} , por integración y teorema de ejes paralelos respectivamente

Por integración

$$I_x = \int_0^h y^2 dA$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot b dy$$

$$I_x = \frac{b \cdot y^3}{3}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Teorema de ejes paralelos

$$dI_{xy} = d \overline{I_{xy}'} + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$dI_{xy} = 0 + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$dI_{xy} = b \cdot dy \cdot \frac{x}{2} \cdot y$$

$$I_{xy} = \int_0^h \frac{b^2}{2} y dy \rightarrow I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

Paso ③: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje y figura 6.12 (c).

$$dA = h \cdot dx \quad y_c = \frac{y}{2} \quad x_c = x$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_y , y producto de inercia I_{xy} , por integración y teorema de ejes paralelos respectivamente

Por integración

$$I_y = \int_0^b x^2 dA$$

$$I_y = h \cdot \int_0^b x^2 dx$$

$$I_y = h \cdot \frac{x^3}{3}$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{3}$$

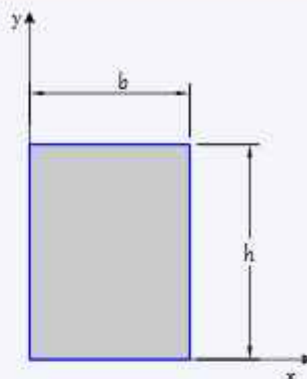
Teorema de ejes paralelos

$$dI_{xy} = d \overline{I_{xy}'} + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

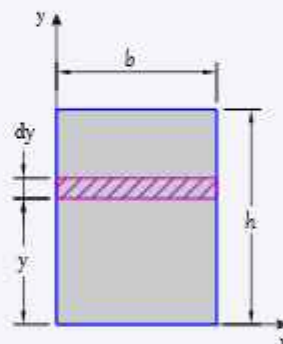
$$dI_{xy} = 0 + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$dI_{xy} = h \cdot dx \cdot x \cdot \frac{y}{2}$$

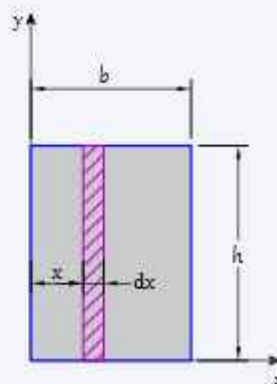
$$I_{xy} = \int_0^b \frac{h^2}{2} x dx \rightarrow I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$



(a)



(b)



(c)

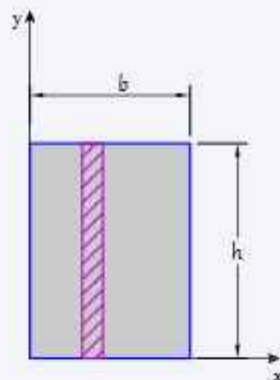
Figura 5.12

CONTINUACIÓN

Alternativamente se puede calcular el momento de inercia, centro de gravedad y área de un elemento por doble integración, de la siguiente forma.

$$M_0 = \iint y' dA \quad M_{0x} = \iint y' dy dx$$

$$M_0 = \int_0^b \int_0^h 1 dy dx \rightarrow M_0 = b \cdot h \quad A = b \cdot h$$



(a)

Primer momento de área con respecto al eje x, calculamos y_c

$$M_{1x} = \iint y dA \quad M_{1x} = \iint y dy dx \quad M_{1x} = \int_0^b \int_0^h y dy dx \rightarrow M_{1x} = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

$$y_c = \frac{M_{1x}}{M_0} = \frac{\frac{b \cdot h^2}{2}}{b \cdot h} = \frac{h}{2}$$

Primer momento de área con respecto al eje y, calculamos x_c

$$M_{1y} = \iint x dA \quad M_{1y} = \iint x dy dx \quad M_{1y} = \int_0^b \int_0^h x dy dx \rightarrow M_{1y} = \frac{b^2 \cdot h}{2}$$

$$x_c = \frac{M_{1y}}{M_0} = \frac{\frac{b^2 \cdot h}{2}}{b \cdot h} = \frac{b}{2}$$

Segundo momento de área: Momento de Inercia respecto a x

$$I_x = \iint y^2 dA \quad I_x = \iint y^2 dy dx \quad I_x = \int_0^b \int_0^h y^2 dy dx \rightarrow I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Segundo momento de área: Momento de Inercia respecto a y

$$I_y = \iint x^2 dA \quad I_y = \iint x^2 dy dx \quad I_y = \int_0^b \int_0^h x^2 dy dx \rightarrow I_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$$

También se puede determinar el producto de inercia, de la siguiente forma

$$I_{xy} = \iint x \cdot y dA \quad I_{xy} = \iint x \cdot y dy dx \quad I_{xy} = \int_0^b \int_0^h x \cdot y dy dx \rightarrow I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.2

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura usando el teorema de ejes paralelos

$$dI_x = \bar{I}_x' + dA \cdot y_c^2 \quad dI_y = \bar{I}_y' + dA \cdot x_c^2$$

Paso ①: Tomamos el diferencial de área paralelo al eje y , el centroide del diferencial y el momento de inercia centroidal del diferencial; figura 5.13 (b)

$$dA = y \cdot dx \quad y_c = \frac{h}{2} \quad \bar{I}_x' = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{dx \cdot y^3}{12}$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_x , por el teorema de ejes paralelos

$$dI_x = \bar{I}_x' + dA \cdot y_c^2$$

$$dI_x = \frac{dx \cdot y^3}{12} + y \cdot dx \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{y^3 \cdot dx}{12} + \frac{h^2 \cdot y \cdot dx}{4} \quad \text{Como } y = h$$

$$dI_x = \frac{1}{3} h^3 dx$$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^b \frac{h^3}{3} dx \quad I_x = \int_0^b \frac{h^3}{3} dx \rightarrow I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Paso ③: Tomamos el diferencial de área paralelo al eje x , el centroide del diferencial y el momento de inercia centroidal del diferencial; figura 5.13 (c)

$$dA = b \cdot dy \quad x_c = \frac{b}{2} \quad \bar{I}_y' = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{b^3 \cdot dy}{12}$$

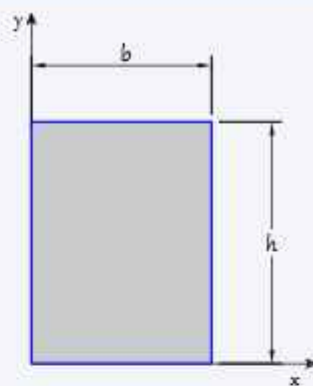
Paso ②: Determinación del momento de inercia I_y , por el teorema de ejes paralelos

$$dI_y = \bar{I}_y' + dA \cdot x_c^2$$

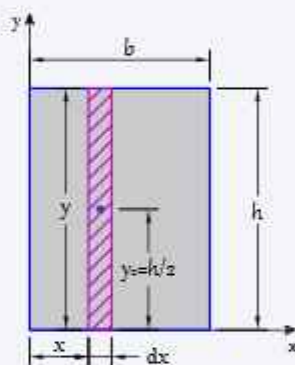
$$dI_y = \frac{dy \cdot b^3}{12} + b \cdot dy \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{b^3 \cdot dy}{12} + \frac{b^3 \cdot dy}{4} \quad \text{como } x = b$$

$$dI_y = \frac{b^3}{3} dy$$

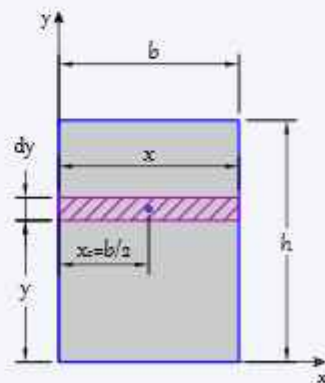
$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \frac{b^3}{3} dy \quad I_y = \int_0^h \frac{b^3}{3} dy \rightarrow I_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$$



(a)



(b)

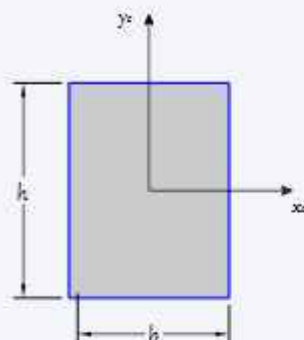


(c)

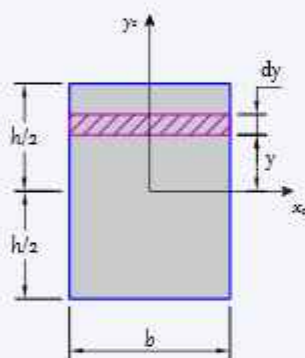
Figura 5.13

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.3

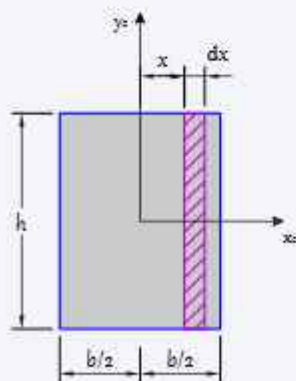
Determine el momento y producto de inercia centroidal de la siguiente figura sombreada



(a)



(b)



(c)

Paso ①: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje x figura 5.14 (b).

$$dA = b \cdot dy$$

$$y_c = \frac{h}{2} \quad (\text{Del rectángulo respecto al origen})$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia \bar{I}_x'

Por integración

$$\bar{I}_x' = \int y^2 dA$$

$$\bar{I}_x' = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dA$$

$$\bar{I}_x' = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \, dy = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Teorema de ejes paralelos

$$I_x = \bar{I}_x' + A \cdot y_c^2$$

$$\bar{I}_x' = I_x - b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\bar{I}_x' = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Paso ③: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje y, según la figura 5.14 (c).

$$dA = h \cdot dx$$

$$y_c = \frac{b}{2} \quad (\text{Del rectángulo respecto al origen})$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia \bar{I}_y'

Por integración

$$\bar{I}_y' = \int x^2 dA$$

$$\bar{I}_y' = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dA$$

$$\bar{I}_y' = h \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \, dx = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Teorema de ejes paralelos

$$I_y = \bar{I}_y' + A \cdot x_c^2$$

$$\bar{I}_y' = I_y - b \cdot h \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\bar{I}_y' = \frac{h \cdot b^3}{3} - \frac{h \cdot b^3}{4} = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

Paso ⑤: Producto de inercia

$$\bar{I}_{xy} = 0$$

Por simetría

Figura 5.14

Determine el momento y producto de inercia de la siguiente figura sombreada

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.4

Paso ①: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje x figura 5.15 (b).

$$dA = x \cdot dy \quad x = \frac{b}{h}(h-y) \quad x_c = \frac{x}{2} \quad y_c = y$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_x , y producto de inercia I_{xy} , por integración y teorema de ejes paralelos respectivamente

Por integración

Teorema de ejes paralelos

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot x \, dy = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h}(h-y) \, dy$$

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{xy} + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$I_x = \int_0^h b \cdot y^2 - \frac{b \cdot y^3}{h} \, dy$$

$$dI_{xy} = 0 + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$I_x = \frac{b \cdot y^3}{3} - \frac{b \cdot y^4}{4h}$$

$$dI_{xy} = x \cdot dy \cdot \frac{x}{2} \cdot y$$

$$I_{xy} = \int_0^h \left(\frac{b}{h}(h-y)\right)^2 \cdot \frac{y}{2} \, dy = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Paso ③: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje y figura 5.15 (c).

$$dA = y \cdot dx \quad y = \frac{h}{b}(b-x) \quad y_c = \frac{y}{2} \quad x_c = x$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_y , y producto de inercia I_{xy} , por integración y teorema de ejes paralelos respectivamente

Por integración

Teorema de ejes paralelos

$$I_y = \int_0^b x^2 \cdot y \, dx = \int_0^b x^2 \cdot \frac{h}{b}(b-x) \, dx$$

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{xy} + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$I_y = \int_0^b h \cdot x^2 - \frac{h \cdot x^3}{b} \, dx$$

$$dI_{xy} = 0 + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

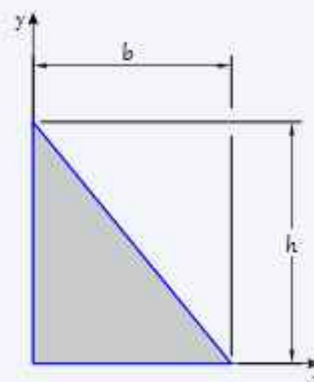
$$I_y = \frac{h \cdot x^3}{3} - \frac{h \cdot x^4}{4b}$$

$$dI_{xy} = y \cdot dx \cdot x \cdot \frac{y}{2}$$

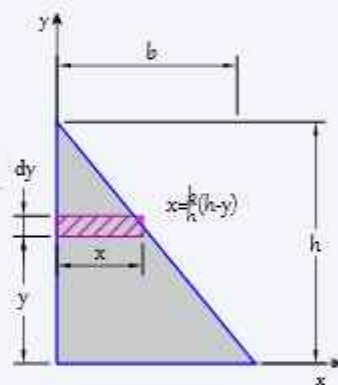
$$I_{xy} = \int_0^b \left(\frac{h}{b}(b-x)\right)^2 \cdot \frac{x}{2} \, dx$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

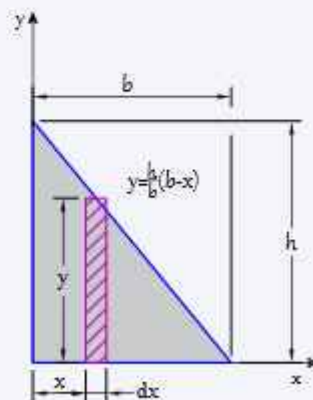
$$I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.15

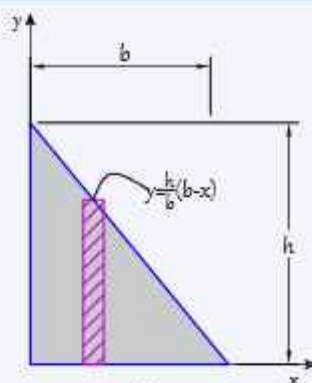
CONTINUACIÓN

Alternativamente se puede calcular el momento de inercia de un elemento por doble integración, así como el área de la siguiente forma.

$$M_0 = \iint y' dA \quad M_{0x} = \iint y' dy dx$$

$$M_0 = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} 1 dy dx \rightarrow M_0 = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



(a)

Primer momento de área con respecto al eje x, calculamos y_c

$$M_{1x} = \iint y dA \quad M_{1x} = \iint y dy dx \quad M_{1x} = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} y dy dx \rightarrow M_{1x} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$y_c = \frac{M_{1x}}{M_0} = \frac{\frac{b \cdot h^2}{6}}{\frac{b \cdot h}{2}} = \frac{h}{3}$$

Primer momento de área con respecto al eje y, calculamos x_c

$$M_{1y} = \iint x dA \quad M_{1y} = \iint x dy dx \quad M_{1y} = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} x dy dx \rightarrow M_{1y} = \frac{b^2 \cdot h}{6}$$

$$x_c = \frac{M_{1y}}{M_0} = \frac{\frac{b^2 \cdot h}{6}}{\frac{b \cdot h}{2}} = \frac{b}{3}$$

Segundo momento de área: Momento de Inercia respecto a x

$$I_x = \iint y^2 dA \quad I_x = \iint y^2 dy dx \quad I_x = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} y^2 dy dx \rightarrow I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Segundo momento de área: Momento de Inercia respecto a y

$$I_y = \iint x^2 dA \quad I_y = \iint x^2 dy dx \quad I_y = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} x^2 dy dx \rightarrow I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

También se puede determinar el producto de inercia, de la siguiente forma

$$I_{xy} = \iint x \cdot y dA \quad I_{xy} = \iint x \cdot y dy dx \quad I_{xy} = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}(b-x)} x \cdot y dy dx \rightarrow I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.5

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura usando el teorema de ejes paralelos

$$dI_x = \bar{I}_x' + dA \cdot y_c^2 \qquad dI_y = \bar{I}_y' + dA \cdot x_c^2$$

Paso ①: Tomamos el diferencial de área paralelo al eje y , el centroide del diferencial y el momento de inercia centroidal del diferencial; figura 5.16 (b)

$$dA = y \cdot dx \qquad y = \frac{h}{b} (b - x) \qquad y_c = \frac{y}{2} \qquad \bar{I}_x' = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{dx \cdot y^3}{12}$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_x , por el teorema de ejes paralelos

$$dI_x = \frac{dx \cdot y^3}{12} + y \cdot dx \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{h^3 \cdot (b - x)^3}{3 \cdot b^3} dx$$

$$I_x = \int_0^b \frac{h^3 \cdot (b - x)^3}{3 \cdot b^3} dx$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Paso ③: Tomamos el diferencial de área paralelo al eje x , el centroide del diferencial y el momento de inercia centroidal del diferencial; figura 5.16 (c)

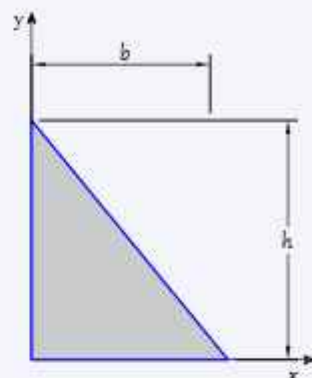
$$dA = x \cdot dy \qquad x = \frac{b}{h} (h - y) \qquad x_c = \frac{x}{2} \qquad \bar{I}_y' = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{b^3 \cdot dy}{12}$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_y , por el teorema de ejes paralelos

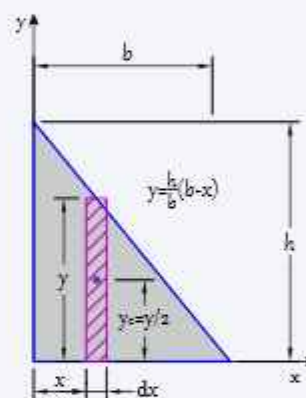
$$dI_y = \frac{dy \cdot x^3}{12} + x \cdot dy \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{b^3 \cdot (h - y)^3}{3 \cdot h^3} dy$$

$$I_y = \int_0^h \frac{b^3 \cdot (h - y)^3}{3 \cdot h^3} dy$$

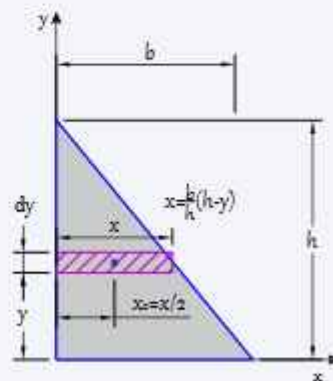
$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$



(a)



(b)

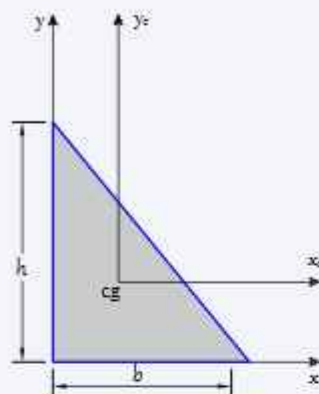


(c)

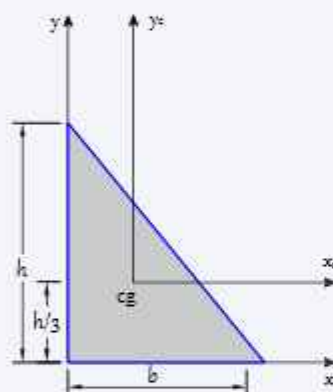
Figura 5.16

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.6

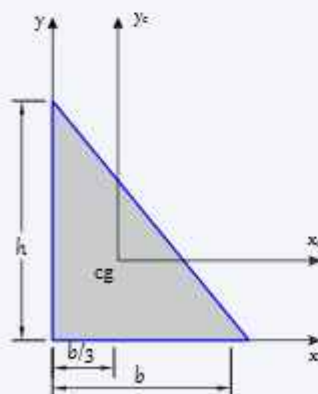
Determine el momento y producto de inercia centroidal de la siguiente figura sombreada



(a)



(b)



(c)

$$I_x = \bar{I}_x' + A \cdot y_c^2 \quad I_y = \bar{I}_y' + A \cdot x_c^2$$

Paso ①: Para determinar el momento de inercia usaremos el teorema de ejes paralelos para lo cual necesitamos el área y centroide del elemento figura 5.17 (b).

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad y_c = \frac{h}{3} \quad A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_{xc}

$$I_x = \bar{I}_x' + A \cdot y_c^2 \quad \bar{I}_x' = I_x - A \cdot y_c^2$$

$$\bar{I}_x' = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{18}$$

$$\bar{I}_x' = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

Paso ③: Para determinar el momento de inercia usaremos el teorema de ejes paralelos para lo cual necesitamos el área y centroide del elemento figura 5.17 (c).

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad x_c = \frac{b}{3} \quad A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_{yc}

$$I_y = \bar{I}_y' + A \cdot x_c^2 \quad \bar{I}_y' = I_y - A \cdot x_c^2$$

$$\bar{I}_y' = \frac{h \cdot b^3}{12} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{h \cdot b^3}{12} - \frac{h \cdot b^3}{18}$$

$$\bar{I}_y' = \frac{h \cdot b^3}{36}$$

Paso ⑤: Producto de inercia centroidal

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy}' + A \cdot x_c \cdot y_c \quad I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$

$$\bar{I}_{xy}' = I_{xy} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3}$$

$$\bar{I}_{xy}' = \frac{b^2 \cdot h^2}{24} - \frac{b^2 \cdot h^2}{18} \rightarrow \bar{I}_{xy}' = -\frac{(b^2 \cdot h^2)}{72}$$

Figura 5.17

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.7

Determine el momento y producto de inercia de la siguiente figura sombreada

Paso ①: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje x figura 5.18 (b).

$$dA = (b-x) \cdot dy \quad x = \frac{b}{h} y \quad x_c = \frac{b+x}{2} \quad y_c = y$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_x , y producto de inercia I_{xy} , por integración y teorema de ejes paralelos

Por integración

Teorema de ejes paralelos

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot (b-x) dy = \int_0^h y^2 \cdot \left(b - \frac{b}{h} y\right) dy$$

$$dI_{xy} = d \bar{I}_{xy} + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$dI_{xy} = 0 + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$I_x = \int_0^h b \cdot y^2 - \frac{b}{h} \cdot y^3 dy$$

$$dI_{xy} = (b-x) \cdot dy \cdot \frac{b+x}{2} \cdot y$$

$$I_x = \frac{b \cdot y^3}{3} - \frac{b \cdot y^4}{4h}$$

$$I_{xy} = \int_0^h \left(\frac{b^2 - \left(\frac{b}{h} y\right)^2}{2} \right) \cdot y dy$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{8}$$

Paso ③: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje y y figura 5.18 (c).

$$dA = y \cdot dx \quad y = \frac{h}{b} x \quad y_c = \frac{y}{2} \quad x_c = x$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_y , y producto de inercia I_{xy} , por integración y teorema de ejes paralelos

Por integración

Teorema de ejes paralelos

$$I_y = \int_0^b x^2 \cdot y dx = \int_0^b x^2 \cdot \frac{h}{b} x dx$$

$$dI_{xy} = d \bar{I}_{xy} + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$dI_{xy} = 0 + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$I_y = \int_0^b \frac{h}{b} \cdot x^3 dx$$

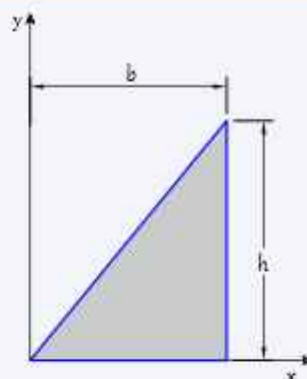
$$dI_{xy} = y \cdot dx \cdot x \cdot \frac{y}{2}$$

$$I_y = \frac{h \cdot x^4}{4b}$$

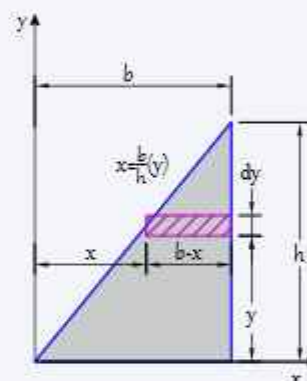
$$I_{xy} = \int_0^b \left(\frac{h}{b} x \right)^2 \cdot \frac{x}{2} dx$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{4}$$

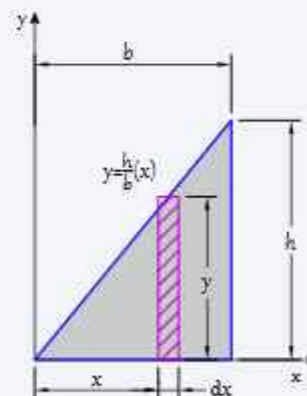
$$I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{8}$$



(a)



(b)



(c)

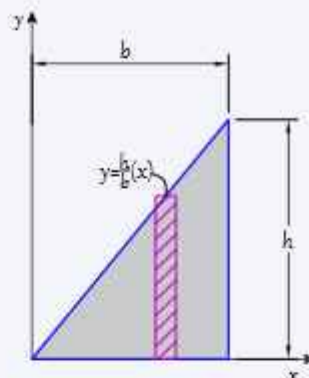
Figura 5.18

CONTINUACIÓN

Alternativamente se puede calcular el momento de inercia de un elemento por doble integración, así como el área de la sgte forma.

$$M_0 = \iint y' dA \qquad M_{0x} = \iint y' dy dx$$

$$M_0 = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} 1 dy dx \rightarrow M_0 = \frac{b \cdot h}{2} \qquad A = \frac{b \cdot h}{2}$$



(a)

Primer momento de área con respecto al eje x, calculamos y_c

$$M_{1x} = \iint y dA \qquad M_{1x} = \iint y dy dx \qquad M_{1x} = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} y dy dx \rightarrow M_{1x} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$y_c = \frac{M_{1x}}{M_0} = \frac{\frac{b \cdot h^2}{6}}{\frac{b \cdot h}{2}} = \frac{h}{3}$$

Primer momento de área con respecto al eje y, calculamos x_c

$$M_{1y} = \iint x dA \qquad M_{1y} = \iint x dy dx \qquad M_{1y} = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} x dy dx \rightarrow M_{1y} = \frac{b^2 \cdot h}{3}$$

$$x_c = \frac{M_{1y}}{M_0} = \frac{\frac{b^2 \cdot h}{3}}{\frac{b \cdot h}{2}} = \frac{2 \cdot b}{3}$$

Segundo momento de área: Momento de Inercia respecto a x

$$I_x = \iint y^2 dA \qquad I_x = \iint y^2 dy dx \qquad I_x = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} y^2 dy dx \rightarrow I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Segundo momento de área: Momento de Inercia respecto a y

$$I_y = \iint x^2 dA \qquad I_y = \iint x^2 dy dx \qquad I_y = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} x^2 dy dx \rightarrow I_y = \frac{b^3 \cdot h}{4}$$

También se puede determinar el producto de inercia, de la siguiente forma

$$I_{xy} = \iint x \cdot y dA \qquad I_{xy} = \iint x \cdot y dy dx \qquad I_{xy} = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} x \cdot y dy dx \rightarrow I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{8}$$

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.8

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura usando el teorema de ejes paralelos

$$dI_x = \bar{I}_x' + dA \cdot y_c^2 \qquad dI_y = \bar{I}_y' + dA \cdot x_c^2$$

Paso ①: Tomamos el diferencial paralelo al eje y , y determinamos el diferencial de área, el centroide del diferencial y el momento de inercia centroidal del diferencial; figura 5.19 (b).

$$dA = y \cdot dx \qquad y = \frac{h}{b}(x) \qquad y_c = \frac{y}{2} \qquad \bar{I}_x' = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{dx \cdot y^3}{12}$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_x , por el teorema de ejes paralelos

$$dI_x = \frac{dx \cdot y^3}{12} + y \cdot dx \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{h^3 \cdot x^3}{3 \cdot b^3} dx$$

$$I_x = \int_0^b \frac{h^3 \cdot x^3}{3 \cdot b^3} dx$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Paso ③: Tomamos el diferencial paralelo al eje x , y determinamos el diferencial de área, el centroide del diferencial y el momento de inercia centroidal del diferencial; figura 5.19 (c).

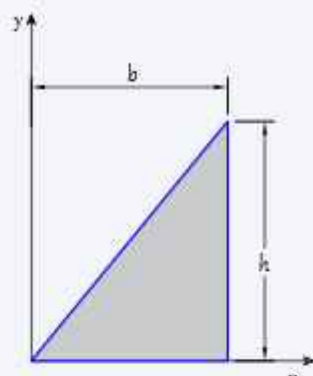
$$dA = (b-x) \cdot dy \qquad x = \frac{b}{h}(y) \qquad x_c = \frac{x+b}{2} \qquad \bar{I}_y' = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{b^3 \cdot dy}{12}$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_y , por el teorema de ejes paralelos

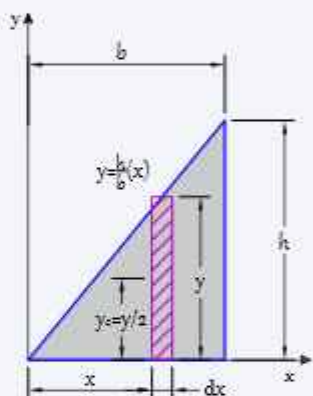
$$dI_y = \frac{dy \cdot (b-x)^3}{12} + (b-x) \cdot dy \cdot \left(\frac{x+b}{2}\right)^2$$

$$I_y = \int_0^h \frac{b^3 \cdot y^3}{3 \cdot h^3} + \frac{b^3}{3} dy$$

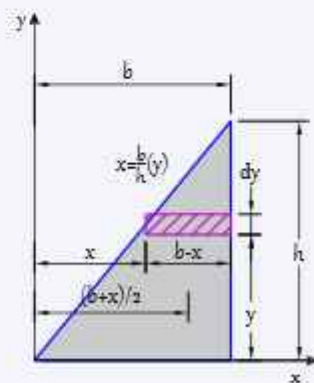
$$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{4}$$



(a)



(b)

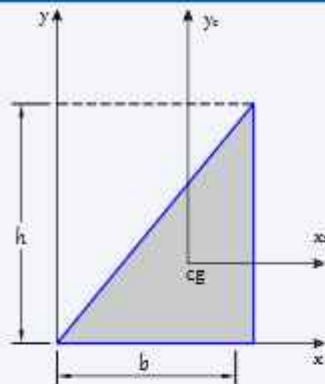


(c)

Figura 5.19

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.9

Determine el momento y producto de inercia centroidal de la siguiente figura sombreada



(a)

$$I_x = \bar{I}_x' + A \cdot y_c^2$$

$$I_y = \bar{I}_y' + A \cdot x_c^2$$

Paso ①: Para determinar el momento de inercia usaremos el teorema de ejes paralelos para lo cual necesitamos el área y centroide del elemento figura 5.20 (b).

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$y_c = \frac{h}{3}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

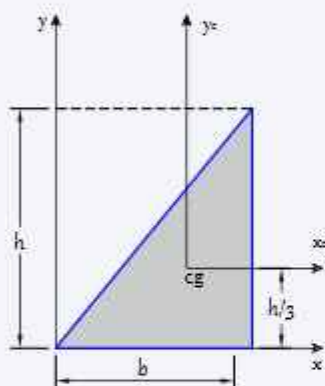
Paso ②: Determinación del momento de inercia I_x'

$$I_x = \bar{I}_x' + A \cdot y_c^2$$

$$\bar{I}_x' = I_x - A \cdot y_c^2$$

$$\bar{I}_x' = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{18}$$

$$\bar{I}_x' = \frac{b \cdot h^3}{36}$$



(b)

Paso ③: Para determinar el momento de inercia usaremos el teorema de ejes paralelos para lo cual necesitamos el área y centroide del elemento figura 5.20 (c).

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$x_c = \frac{2 \cdot b}{3}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

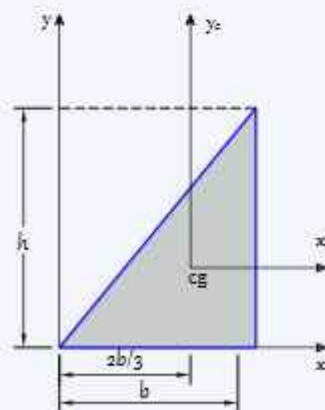
Paso ④: Determinación del momento de inercia I_y'

$$I_y = \bar{I}_y' + A \cdot x_c^2$$

$$\bar{I}_y' = I_y - A \cdot x_c^2$$

$$\bar{I}_y' = \frac{h \cdot b^3}{12} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{2b}{3}\right)^2 = \frac{h \cdot b^3}{12} - \frac{h \cdot b^3}{18}$$

$$\bar{I}_y' = \frac{h \cdot b^3}{36}$$



(c)

Paso ⑤: Producto de inercia centroidal

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy}' + A \cdot x_c \cdot y_c$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 \cdot h^2}{8}$$

$$\bar{I}_{xy}' = I_{xy} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{2 \cdot b}{3} \cdot \frac{h}{3}$$

$$\bar{I}_{xy}' = \frac{b^2 \cdot h^2}{8} - \frac{2 \cdot b^2 \cdot h^2}{18} \rightarrow \bar{I}_{xy}' = \frac{b^2 \cdot h^2}{72}$$

Figura 5.20

Determine el momento y producto de inercia de la siguiente figura sombreada

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.10

Paso ①: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje x figura 5.21 (b).

$$dA = (2x) \cdot dy \quad x = \frac{b}{2h}(h-y) \quad x_c = 0 \quad y_c = y$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_x , y producto de inercia I_{xy} , por integración y teorema de ejes paralelos

Por integración

Teorema de ejes paralelos

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot 2x \, dy = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h}(h-y) \, dy$$

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{xy}' + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$I_x = \int_0^h b \cdot y^2 - \frac{b}{h} \cdot y^3 \, dy$$

$$dI_{xy} = 0 + dA \cdot 0 \cdot y_c$$

$$I_x = \frac{b \cdot y^3}{3} - \frac{b \cdot y^4}{4h}$$

$$I_{xy} = 0$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Paso ③: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje y figura 5.21 (c).

$$dA = y \cdot dx \quad y = \frac{2h}{b} \left(\frac{b}{2} - x \right) \quad y_c = \frac{y}{2} \quad x_c = x$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_y , y producto de inercia I_{xy} , por integración y teorema de ejes paralelos

Por integración

Teorema de ejes paralelos

$$I_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \cdot y \, dx = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \cdot \frac{2h}{b} \left(\frac{b}{2} - x \right) dx$$

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{xy}' + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

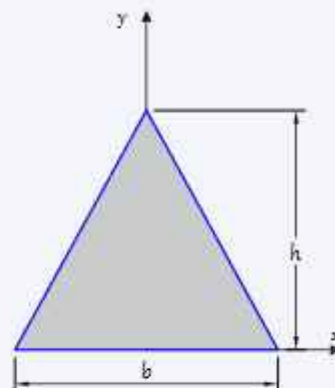
$$dI_{xy} = 0 + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$I_y = 2 \left(\int_0^{\frac{b}{2}} x^2 \cdot \frac{2h}{b} \left(\frac{b}{2} - x \right) dx \right)$$

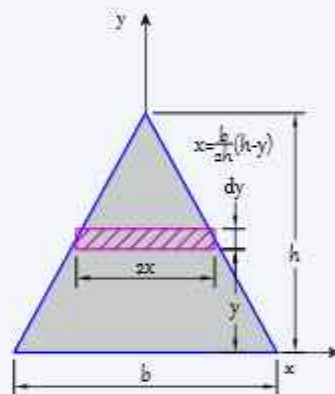
$$I_{xy} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{2h}{b} \left(\frac{b}{2} - x \right) \right)^2 \cdot \frac{x}{2} dx$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$$

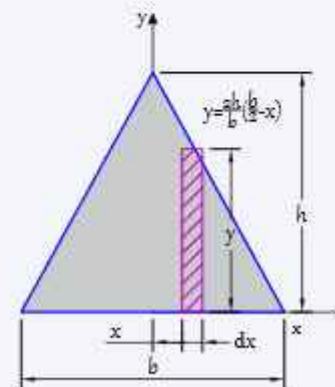
$$I_{xy} = 0$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.21

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.11

Determine el momento y producto de inercia centroidal de la siguiente figura sombreada

$$I_x = \bar{I}_x' + A \cdot y_c^2 \quad I_y = \bar{I}_y' + A \cdot x_c^2$$

Paso ①: Para determinar el momento de inercia usaremos el teorema de ejes paralelos para lo cual necesitamos el área y centroide del elemento figura 5.22 (b).

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad y_c = \frac{h}{3} \quad A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_{xc}

$$I_x = \bar{I}_x' + A \cdot y_c^2 \quad \bar{I}_x' = I_x - A \cdot y_c^2$$

$$\bar{I}_x' = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{18} \quad I_{xc} = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

Paso ③: Para determinar el momento de inercia usaremos el teorema de ejes paralelos para lo cual necesitamos el área y centroide del elemento figura 5.22 (c).

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{48} \quad x_c = 0 \quad A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_{yc}

$$I_y = \bar{I}_y' + A \cdot x_c^2 \quad \bar{I}_y' = I_y - A \cdot x_c^2$$

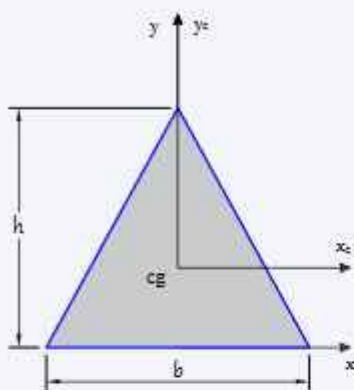
$$\bar{I}_y' = \frac{h \cdot b^3}{48} - 0 = \frac{h \cdot b^3}{48} - 0 \quad \bar{I}_y' = \frac{h \cdot b^3}{48}$$

Paso ⑤: Producto de inercia centroidal

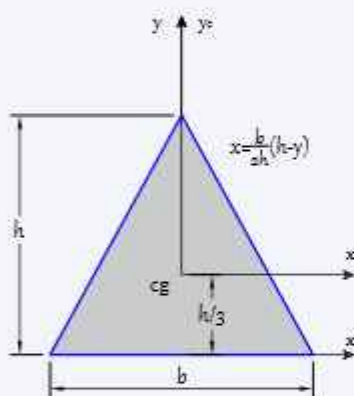
$$I_{xy} = \bar{I}_{xy}' + A \cdot x_c \cdot y_c \quad I_{xy} = 0$$

$$\bar{I}_{xy}' = 0 - \frac{b \cdot h}{4} \cdot 0 \cdot \frac{h}{3}$$

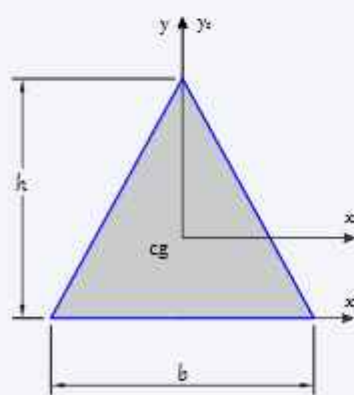
$$\bar{I}_{xy}' = 0$$



(a)



(b)



(c)

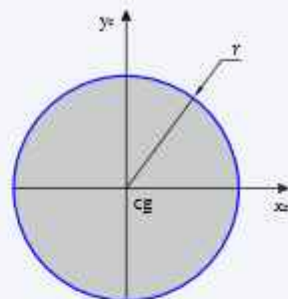
Figura 5.22

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.12

Determine el momento y producto de inercia centroidal de la siguiente figura sombreada

Paso ①: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje x figura 5.23 (b).

$$dA = 2x \cdot dy \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad x = \sqrt{r^2 - y^2} \quad x_c = 0 \quad (\text{Del círculo respecto al origen})$$



(a)

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_{yc}

Por integración

Teorema de ejes paralelos

$$\bar{I}'_x = \int y^2 dA$$

$$\bar{I}'_x = \int y^2 dA = \int y^2 \cdot 2x dy$$

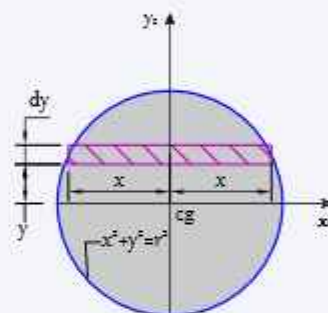
$$dI_{xy} = d\bar{I}'_{xy} + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$\bar{I}'_x = 2 \cdot \int_{-r}^r y^2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$dI_{xy} = 0 + dA \cdot 0 \cdot y_c$$

$$\bar{I}'_x = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$



(b)

Paso ③: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje y, según la figura 5.23 (c).

$$dA = 2y \cdot dx \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad y_c = 0 \quad (\text{Del círculo respecto al origen})$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_{yc}

Por integración

Teorema de ejes paralelos

$$\bar{I}'_y = \int x^2 dA$$

$$\bar{I}'_y = \int x^2 dA = \int x^2 \cdot 2y dx$$

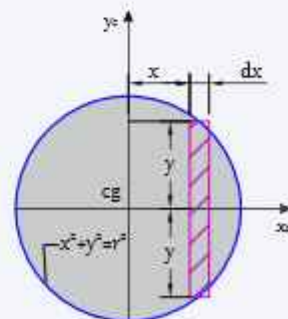
$$dI_{xy} = d\bar{I}'_{xy} + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$\bar{I}'_y = 2 \cdot \int_{-r}^r x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$dI_{xy} = 0 + dA \cdot x_c \cdot 0$$

$$\bar{I}'_y = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$

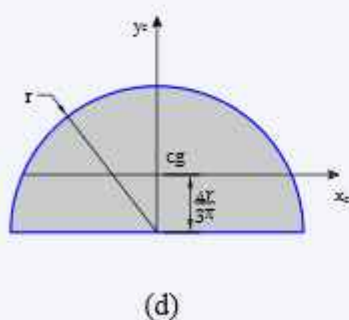
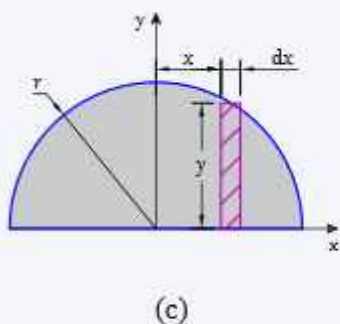
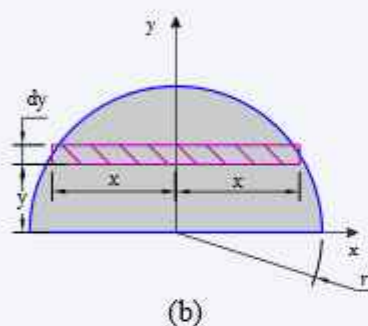
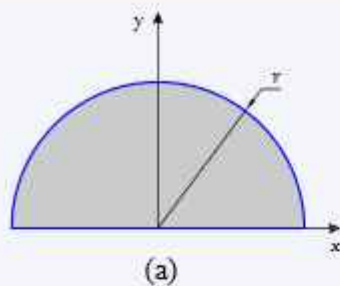


(c)

Figura 5.23

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.13

Determine el momento de inercia y momento de inercia centroidal de la siguiente figura sombreada



Paso ①: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje x figura 5.24 (b).

$$dA = 2x \cdot dy \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad x = \sqrt{r^2 - y^2} \quad y_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \quad (\text{Del el Semicirculo})$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_x y I_x'

Por integración

Teorema de ejes paralelos

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = \bar{I}_x' + A \cdot y_c^2$$

$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 \cdot 2x dy$$

$$\bar{I}_x' = \frac{\pi \cdot r^4}{8} - \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \right)^2$$

$$I_x = 2 \cdot \int_0^r y^2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$\bar{I}_x' = \frac{\pi \cdot r^4}{8} - \frac{8 \cdot r^4}{9 \cdot \pi}$$

$$I_x = \frac{\pi \cdot r^4}{8}$$

$$\bar{I}_x' = 0.11 r^4$$

Paso ③: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje y, según la figura 5.24 (c).

$$dA = y \cdot dx \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad x_c = 0 \quad (\text{Del semicirculo respecto al origen})$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_y y I_y'

Por integración

Teorema de ejes paralelos

$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2 \cdot y dx$$

$$I_y = \bar{I}_y' + A \cdot x_c^2$$

$$I_y = \int_{-r}^r x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$\bar{I}_y' = \frac{\pi \cdot r^4}{8} - 0$$

$$I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{8}$$

$$\bar{I}_y' = \frac{\pi \cdot r^4}{8}$$

Paso ⑤: Producto de inercia

$$x_c = 0 \quad (\text{Del diferencial})$$

$$x_c = 0 \quad y_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \quad (\text{Del Semicirculo})$$

$$dI_{xy}' = 0 \quad (\text{Simetría})$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy}' + A \cdot x_c \cdot y_c$$

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{xy}' + dA \cdot x_c \cdot y_c$$

$$I_{xy} = 0$$

$$\bar{I}_{xy}' = 0 - \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot 0 \cdot \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} = 0$$

Figura 5.24

EJEMPLO RESUELTO 5.1.8.14

Determine el momento de inercia y momento de inercia centroidal de la siguiente figura sombreada

Paso ①: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje y figura 5.25 (b).

$$dA = x \cdot dy \quad x = \sqrt{r^2 - y^2} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad y_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \quad (\text{Del elemento})$$

Paso ②: Determinación del momento de inercia I_x y I_x'

Por integración

$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 \cdot x dy$$

$$I_x = \int_0^r y^2 \cdot \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

$$I_x = \frac{\pi \cdot r^4}{16}$$

Teorema de ejes paralelos

$$I_x = \bar{I}_x' + A \cdot y_c^2$$

$$\bar{I}_x' = \frac{\pi \cdot r^4}{16} - \frac{\pi \cdot r^2}{4} \cdot \left(\frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}\right)^2$$

$$\bar{I}_x' = \frac{r^4 \cdot \pi}{16} - \frac{4 \cdot r^4}{9 \cdot \pi}$$

$$\bar{I}_x' = 0.055 r^4$$

Paso ③: Elección del elemento diferencial de área paralelo al eje x , según la figura 5.25 (c).

$$dA = y \cdot dx \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad x_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \quad (\text{Del elemento})$$

Paso ④: Determinación del momento de inercia I_y y I_y'

Por integración

$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2 \cdot y dx$$

$$I_y = \int_0^r x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{16}$$

Teorema de ejes paralelos

$$I_y = \bar{I}_y' + A \cdot x_c^2$$

$$\bar{I}_y' = \frac{\pi \cdot r^4}{16} - \frac{\pi \cdot r^2}{4} \cdot \left(\frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}\right)^2$$

$$\bar{I}_y' = 0.055 r^4$$

Paso ⑤: Producto de inercia

Por integración

$$dA = x \cdot dy \quad x_c = \frac{x}{2} \quad y_c = y$$

$$dI_{xy} = d \bar{I}_{xy}' + x \cdot dy \cdot \frac{x}{2} \cdot y$$

$$I_{xy} = \int_0^r \left(\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{2}\right)^2 \cdot y dy$$

$$I_{xy} = \frac{r^4}{8}$$

Teorema de ejes paralelos

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy}' + A \cdot x_c \cdot y_c$$

$$\bar{I}_{xy}' = \frac{r^4}{8} - \frac{\pi \cdot r^2}{4} \cdot \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$\bar{I}_{xy}' = \left(-\frac{4}{9 \cdot \pi} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\bar{I}_{xy}' = -0.016 r^4$$

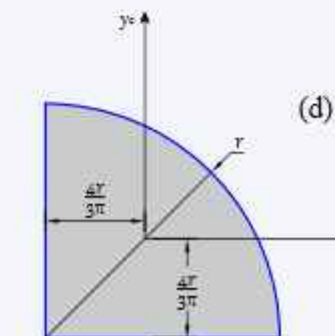
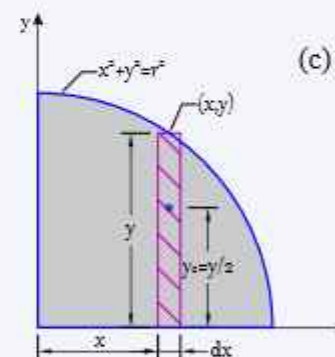
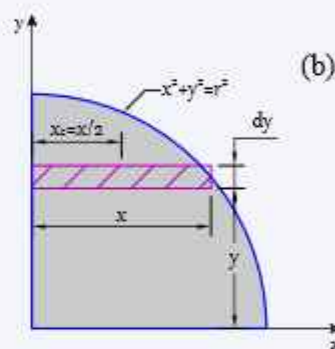
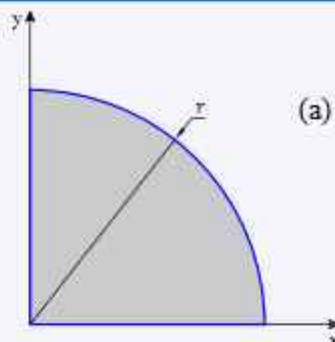
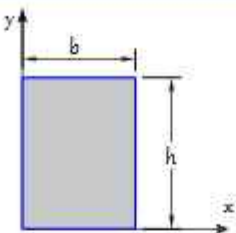
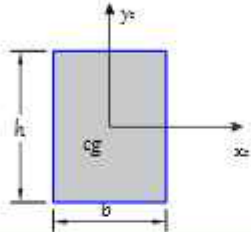
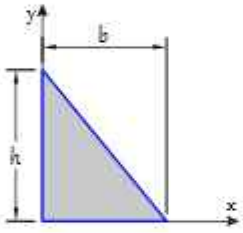
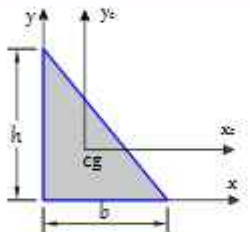
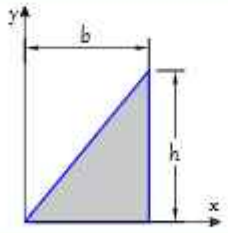
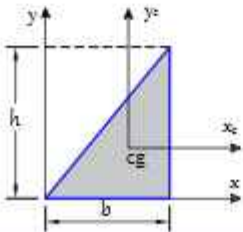


Figura 5.25

Momentos de inercia de figuras más conocidas

Forma	Figura	I_x	I_y	I_{xy}
Rectángulo		$\frac{b \cdot h^3}{3}$	$\frac{h \cdot b^3}{3}$	$\frac{h^2 \cdot b^2}{4}$
Rectángulo (Centroide)		$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{h \cdot b^3}{12}$	—
Triángulo Rectángulo		$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{h \cdot b^3}{12}$	$\frac{h^2 \cdot b^2}{24}$
Triángulo Rectángulo (Centroide)		$\frac{b \cdot h^3}{36}$	$\frac{h \cdot b^3}{36}$	$\frac{h^2 \cdot b^2}{72}$
Triángulo Rectángulo		$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{h \cdot b^3}{4}$	$\frac{h^2 \cdot b^2}{8}$
Triángulo Rectángulo (Centroide)		$\frac{b \cdot h^3}{36}$	$\frac{h \cdot b^3}{36}$	$\frac{h^2 \cdot b^2}{72}$

Forma	Figura	I_x	I_y	I_{xy}
Triángulo		$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{h \cdot b^3}{48}$	0
		$I_{x_c} = \frac{b \cdot h^3}{36}$	$I_{y_c} = \frac{h \cdot b^3}{48}$	$I_{xyc} = 0$
Círculo (Centroide)		$\frac{\pi \cdot r^4}{4}$	$\frac{\pi \cdot r^4}{4}$	0
Semicírculo		$\frac{\pi \cdot r^4}{8}$	$\frac{\pi \cdot r^4}{8}$	0
Semicírculo (Centroide)		$0.11 r^4$	$\frac{\pi \cdot r^4}{8}$	0
Cuarto de círculo		$\frac{\pi \cdot r^4}{16}$	$\frac{\pi \cdot r^4}{16}$	$\frac{r^4}{8}$
Cuarto de círculo (Centroide)		$0.055 \cdot r^4$	$0.055 \cdot r^4$	$-0.016 r^4$

5.1.9. EJERCICIOS PROPUESTOS

18 Determinar el momento de inercia del área sombreada mostrada en la figura, respecto a los ejes x e y

Ejercicios

5.1

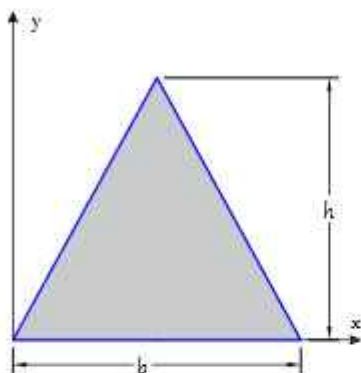


Figura 5.26

5.2

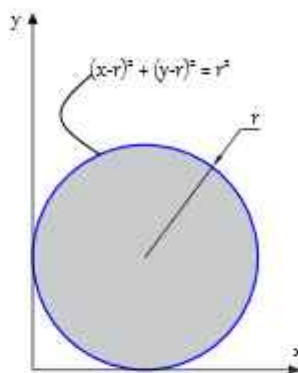


Figura 5.27

5.3

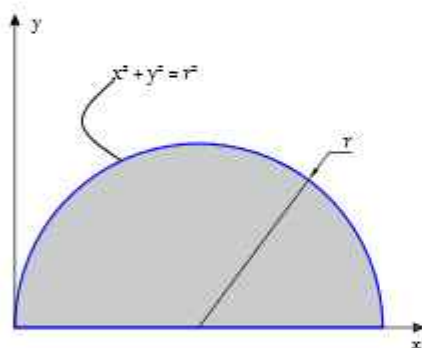


Figura 5.28

5.4

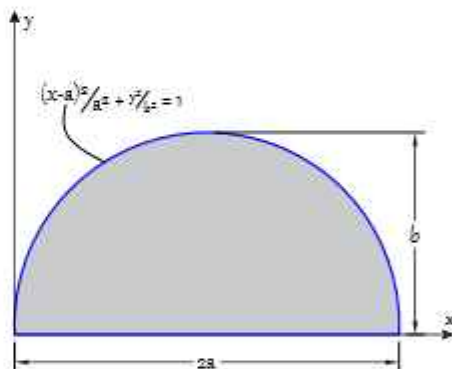


Figura 5.29

5.5

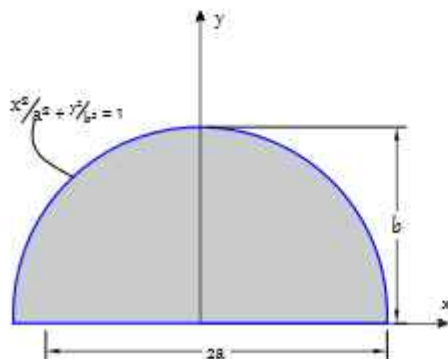


Figura 5.30

5.6

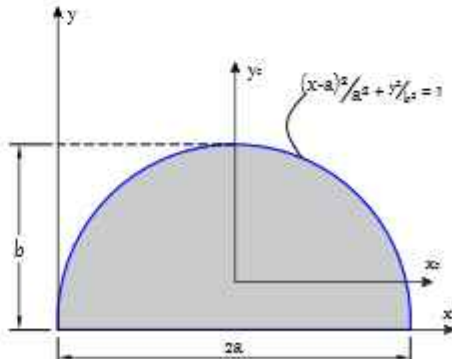


Figura 5.31

Determinar el momento de inercia del área sombreada mostrada en la figura, respecto a los ejes x e y

5.7

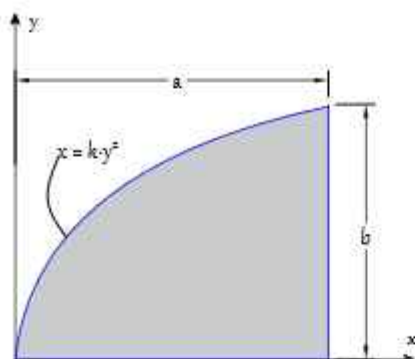


Figura 5.32

5.8

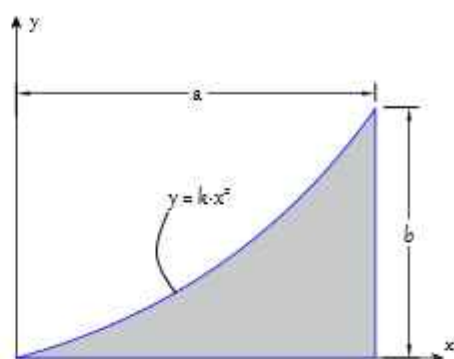


Figura 5.33

5.9

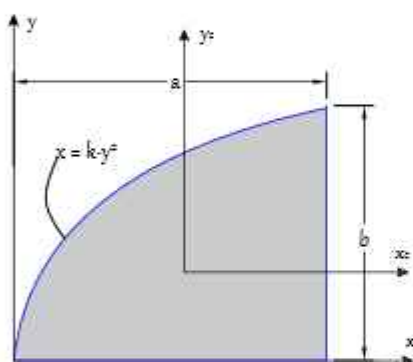


Figura 5.34

5.10

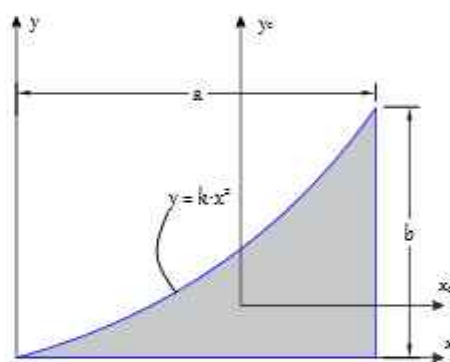


Figura 5.35

5.11

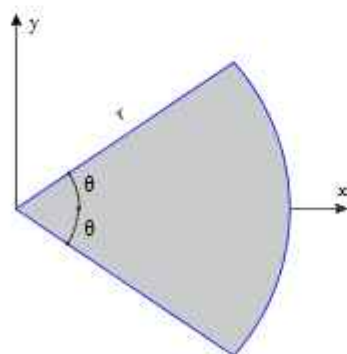


Figura 5.36

5.12

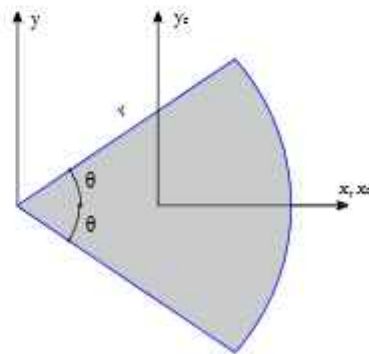


Figura 5.37

Determinar el momento de inercia del área sombreada mostrada en la figura, respecto a los ejes x e y

5.13

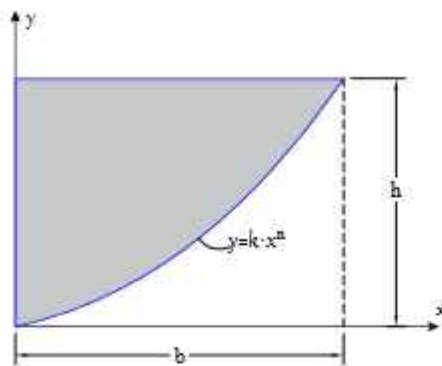


Figura 5.38

5.14

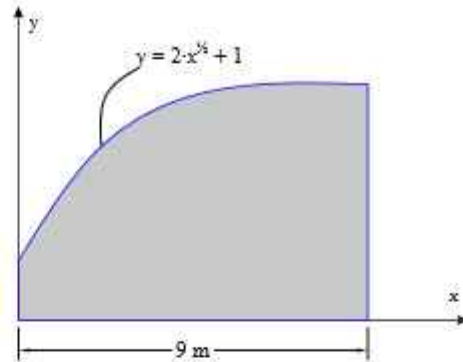


Figura 5.39

5.15

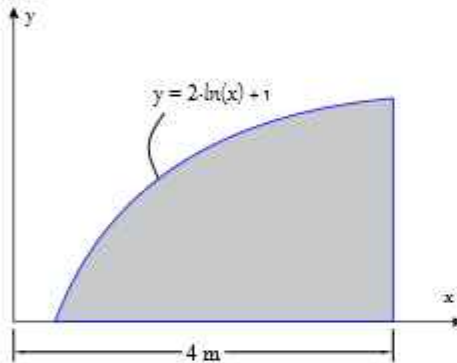


Figura 5.40

5.16

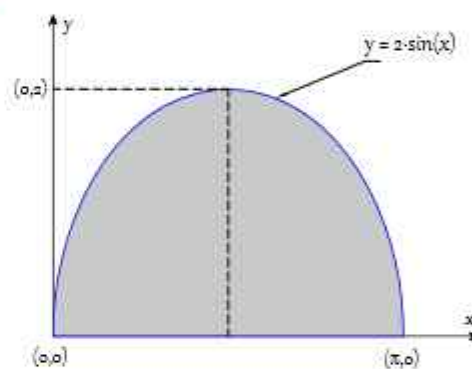


Figura 5.41

5.17

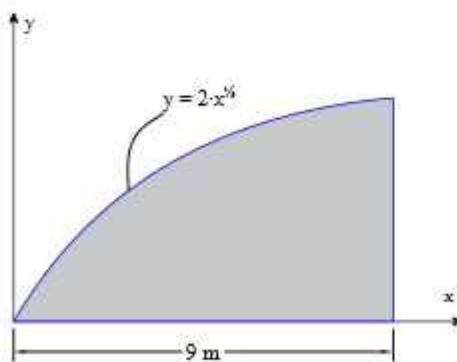


Figura 5.42

5.18

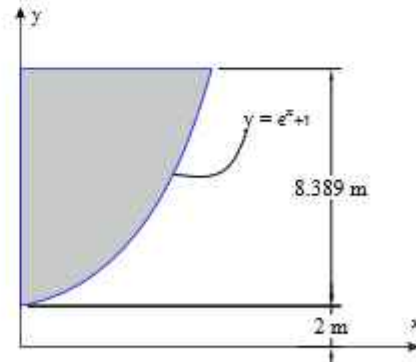


Figura 5.43

Determinar el momento de inercia del área sombreada mostrada en la figura, respecto a los ejes x e y

5.19

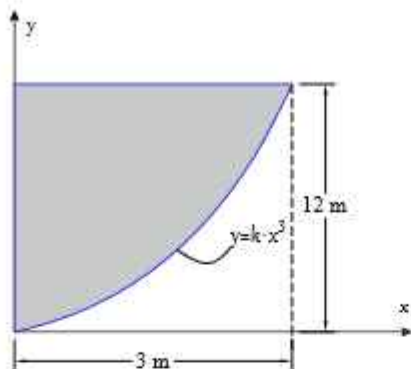


Figura 5.44

5.20

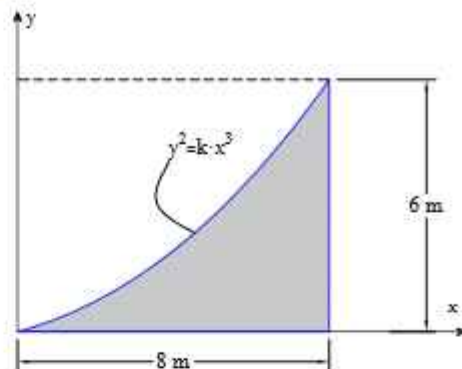


Figura 5.45

5.21

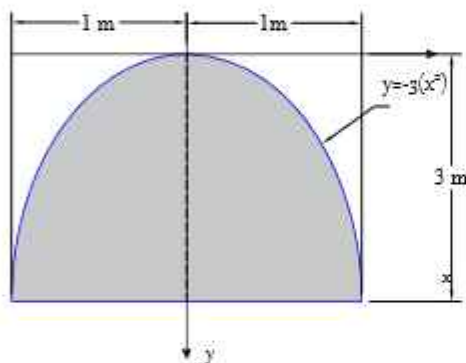


Figura 5.46

5.22

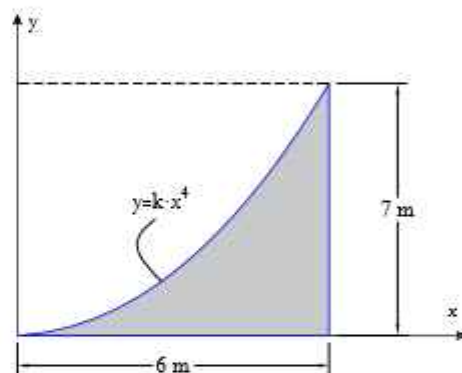


Figura 5.47

5.23

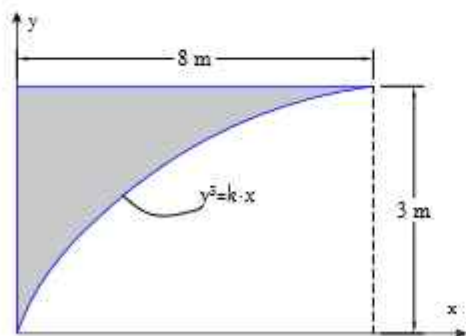


Figura 5.48

5.24

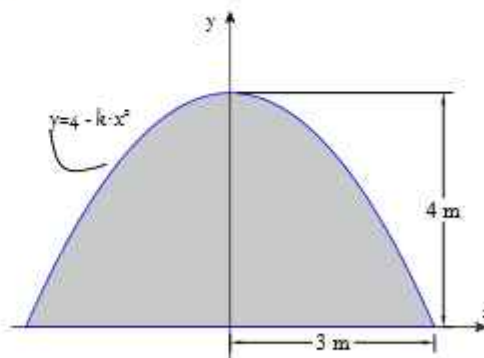


Figura 5.49

Determinar el momento de inercia del área sombreada mostrada en la figura, respecto a los ejes x e y

5.25

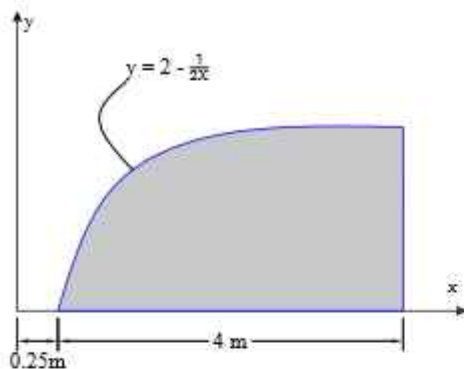


Figura 5.50

5.26

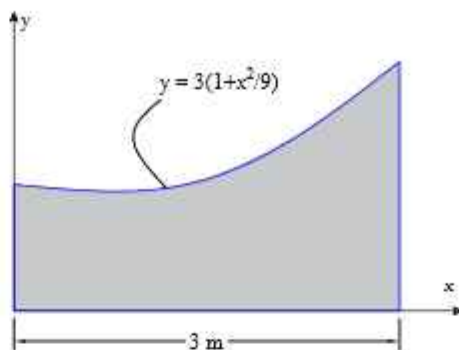


Figura 5.51

5.27

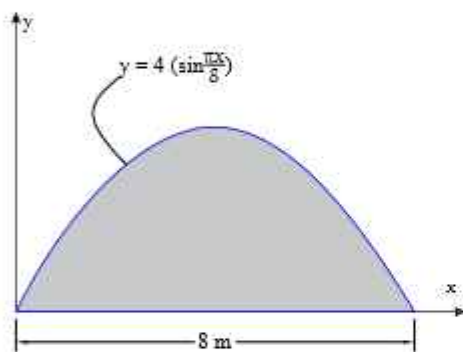


Figura 5.52

5.28

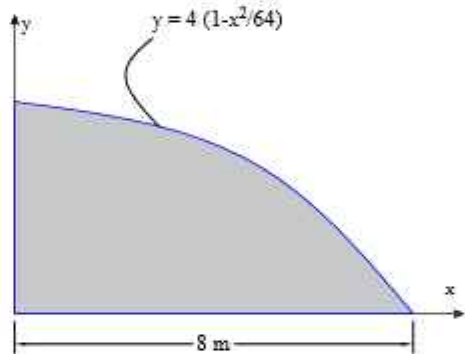


Figura 5.53

5.29

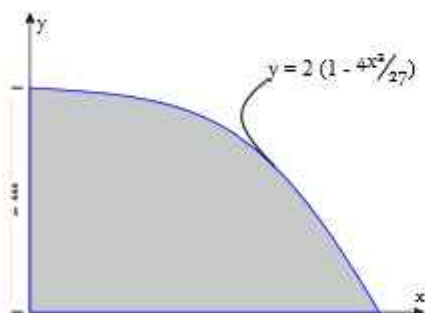


Figura 5.54

5.30

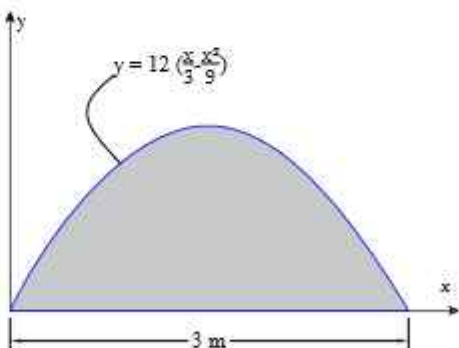


Figura 5.55

Determinar el momento de inercia del área sombreada mostrada en la figura, respecto a los ejes x e y

5.31

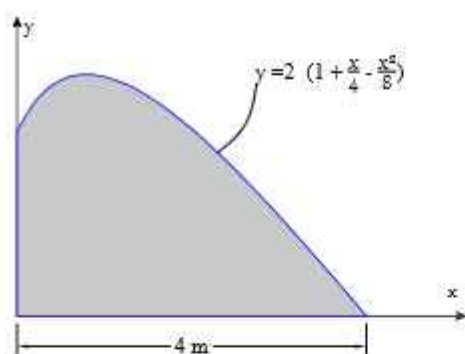


Figura 5.56

5.32

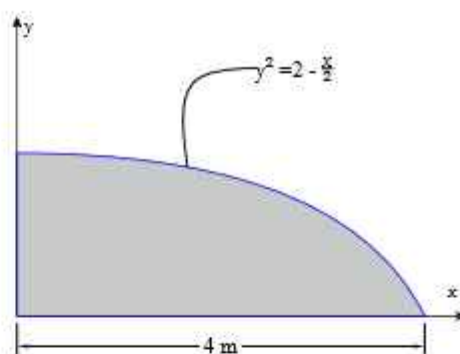


Figura 5.57

5.33

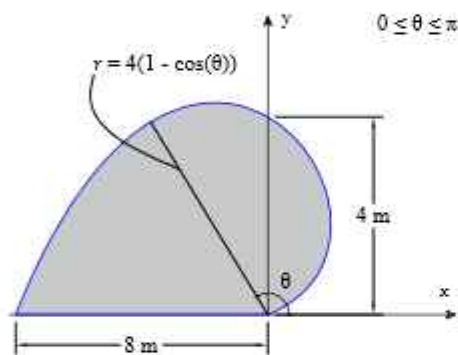


Figura 5.58

5.34

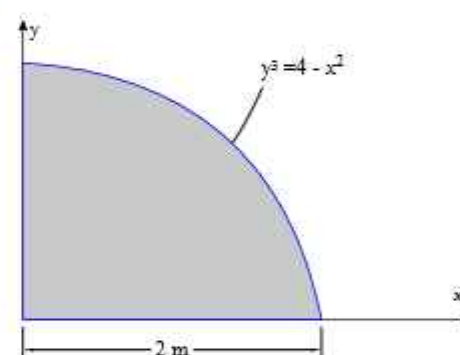


Figura 5.59

5.35

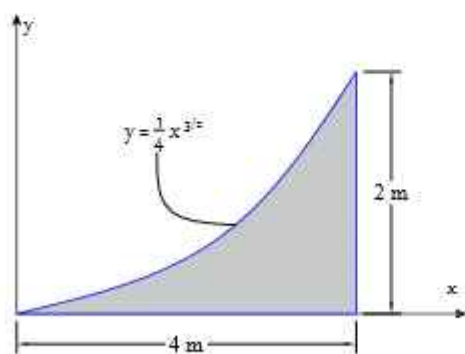


Figura 5.60

5.36

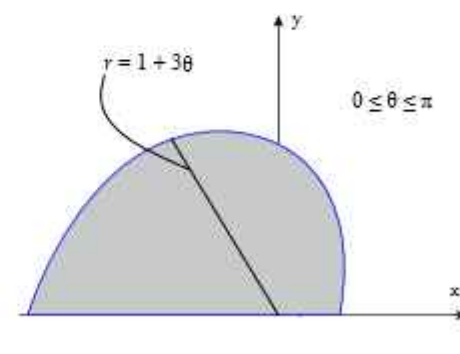
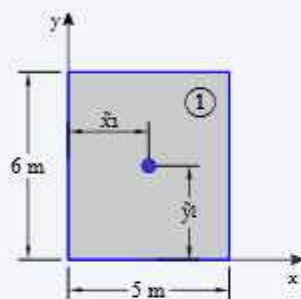


Figura 5.61

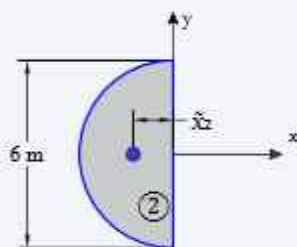
5.1.10. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 5.1.10.1

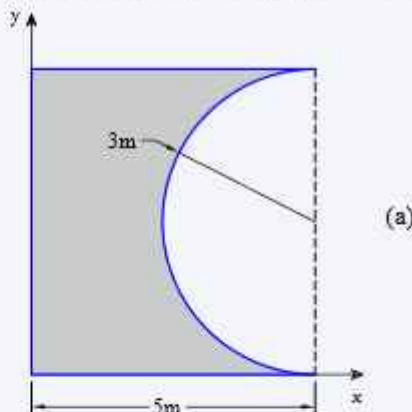
Determinar el momento de inercia de la siguiente figura mostrada



(b)



(c)



(a)

Paso 1: Identificación de elementos ① y ② según las figuras 5.62 (b) y (c), luego cálculo de momentos de inercia centroidales de cada elemento

Elemento ①

$$b_1 := 5 \text{ m} \quad h_1 := 6 \text{ m}$$

$$A_1 := b_1 \cdot h_1 = 30 \text{ m}^2$$

$$I_{x1} = \bar{I}'_{x1} + A_1 \cdot (\tilde{y}'_1)^2$$

$$\bar{I}'_{x1} := \frac{b_1 \cdot h_1^3}{3} - h_1 \cdot b_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = 90 \text{ m}^4$$

$$I_{y1} = \bar{I}'_{y1} + A_1 \cdot (\tilde{x}'_1)^2$$

$$\bar{I}'_{y1} := \frac{h_1 \cdot b_1^3}{3} - h_1 \cdot b_1 \cdot \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 = 62.5 \text{ m}^4$$

Elemento ②

$$r_2 := 3 \text{ m}$$

$$A_2 := \frac{\pi \cdot r_2^2}{2} = 14.137 \text{ m}^2$$

$$I_{x2} = \bar{I}'_{x2} + A_2 \cdot (\tilde{y}'_2)^2$$

$$\bar{I}'_{x2} := \frac{\pi \cdot r_2^4}{8} - \frac{\pi \cdot r_2^2}{2} \cdot (0 \text{ m})^2 = 31.809 \text{ m}^4$$

$$I_{y2} = \bar{I}'_{y2} + A_2 \cdot (\tilde{x}'_2)^2$$

$$\bar{I}'_{y2} := \frac{\pi \cdot r_2^4}{8} - \frac{\pi \cdot r_2^2}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot r_2}{3 \pi}\right)^2 = 8.89 \text{ m}^4$$

Paso 2: Tabla de resumen para el cálculo del momento de inercia de la figura compuesta

	\bar{I}'_{x_i} m^4	\bar{I}'_{y_i} m^4	A_i m^2	dy_i m	dx_i m	$A \cdot (dy_i)^2$ m^4	$A \cdot (dx_i)^2$ m^4	I_{x_i} m^4	I_{y_i} m^4
①	90.00	62.50	30.00	3.00	2.50	270.00	187.50	360.00	250.00
②	-31.81	-8.89	-14.14	3.00	3.73	-127.23	-196.35	-159.04	-205.24
			15.86					200.96	44.76

Paso 3: Determinación del momento de inercia de la figura compuesta

$$I_x = 200.957 \text{ m}^4$$

$$I_y = 44.762 \text{ m}^4$$

$$r_x := \sqrt{\frac{I_x}{A}} = 3.559 \text{ m}$$

$$r_y := \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 1.68 \text{ m}$$

CONTINUACIÓN

Paso 4: Determinación del momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura compuesta, figura 5.62 (d).

$$y_c := 3 \text{ m} \quad I_x = I_{x_c} + A \cdot (y_c)^2$$

$$I_{x_c} := I_x - 15.86 \text{ m}^2 \cdot (y_c)^2 \rightarrow 200.956871912017 \cdot \text{m}^4 - 142.74 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$I_{x_c} = 58.217 \text{ m}^4$$

$$x_c := 1.407 \text{ m}$$

$$I_{y_c} := I_y - 15.86 \text{ m}^2 \cdot (x_c)^2 \rightarrow 44.7622008535517 \cdot \text{m}^4 - 31.39723314 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y_c} = 13.365 \text{ m}^4$$

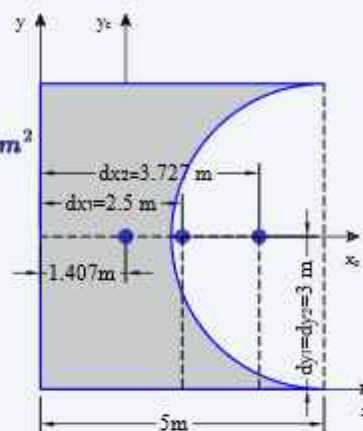
Paso 5: Determinación del producto de inercia de la figura compuesta

$$I_{xy} = I_{xy_c} + A \cdot x_i \cdot y_i \quad I_{xy_{c1}} := 0 \quad I_{xy_{c2}} := 0$$

	$I_{xy_{ci}}$ m^4	A_i m^2	dx_i m	dy_i m	I_{xy_i} m^4
①	0.00	30.00	2.50	3.00	225.00
②	0.00	-14.14	3.73	3.00	-158.06
		15.86			66.94

$$I_{xy} = \sum I_{xy_c} + \sum A_i \cdot x_i \cdot y_i$$

$$I_{xy} = 66.942 \text{ m}^4$$

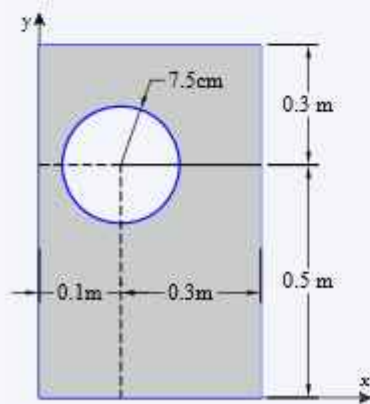


(d)

Figura 5.62

EJEMPLO RESUELTO 5.1.10.2

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura mostrada



(a)

Paso 1: Identificación de elementos ① y ② según la figuras 5.63 (b) y (c), luego calculo de momentos de inercia centroidales de cada elemento

Elemento ①

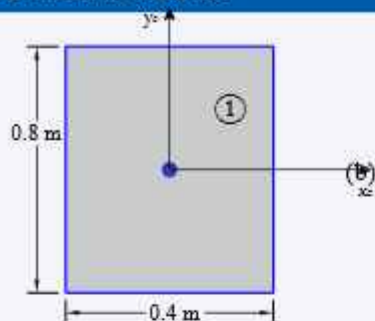
$$b_1 := 0.4 \text{ m}$$

$$h_1 := 0.8 \text{ m}$$

$$\bar{I}'_{x_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = 0.017 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}'_{y_1} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} = 0.0043 \text{ m}^4$$

CONTINUACIÓN



Elemento ②

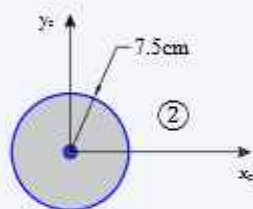
$$r_2 := 7.5 \text{ cm}$$

$$I_{x2} = \bar{I}x'_2 + A_2 \cdot (\bar{y}'_2)^2 \quad \bar{I}x'_2 := \frac{\pi \cdot r_2^4}{4} - \frac{\pi \cdot r_2^2}{2} \cdot (0 \text{ m})^2 = (2.485 \cdot 10^{-5}) \text{ m}^4$$

$$I_{y2} = \bar{I}y'_2 + A_2 \cdot (\bar{x}'_2)^2 \quad \bar{I}y'_2 := \frac{\pi \cdot r_2^4}{4} - \frac{\pi \cdot r_2^2}{2} \cdot (0 \text{ m})^2 = (2.485 \cdot 10^{-5}) \text{ m}^4$$

Paso 2: Tabla de resumen para el cálculo del momento de inercia de la figura compuesta

	$\bar{I}x'_i$ m^4	$\bar{I}y'_i$ m^4	A_i m^2	dy_i m	dxi m	$A \cdot (dy_i)^2$ m^4	$A \cdot (dxi)^2$ m^4	Ix_i m^4	Iy_i m^4
①	0.02	0.00	0.32	0.40	0.20	0.05	0.01	0.0683	0.0171
②	0.00	0.00	-0.02	0.50	0.10	-0.0044	-0.0002	-0.0044	-0.0002
			0.30					0.0638	0.0169



Paso 3: Determinación del momento de inercia y radio de giro de la figura compuesta

$$Ix = 0.0638 \text{ m}^4$$

$$Iy = 0.0169 \text{ m}^4$$

$$r_x := \sqrt{\frac{Ix}{A}} = 0.459 \text{ m}$$

$$r_y := \sqrt{\frac{Iy}{A}} = 0.236 \text{ m}$$

Paso 4: Determinación del momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura compuesta

$$y_c = 0.394 \text{ m}$$

$$Ix_c = Ix - A \cdot (y_c)^2 \xrightarrow{\text{float}, 3} 0.0638 \cdot \text{m}^4 - 0.0469 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$Ix_c = 0.0169 \text{ m}^4$$

$$x_c = 0.206 \text{ m}$$

$$Iy_c = Iy - A \cdot (x_c)^2 \xrightarrow{\text{float}, 3} 0.0169 \cdot \text{m}^4 - 0.0128 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$Iy_c = 0.0041 \text{ m}^4$$

Paso 5: Determinación del producto de inercia de la figura compuesta

	Ixy_{ci} m^4	A_i m^2	dxi m	dy_i m	Ixy_i m^4
①	0.00	0.3200	0.2000	0.4000	0.0256
②	0.00	-0.0177	0.1000	0.5000	-0.0009
		0.3023			0.0247
	$Ixy = Ixy_c + A \cdot x_i \cdot y_i$		$Ixy_{c1} = 0$		$Ixy_{c2} = 0$

$$Ixy = \sum Ixy_c + \sum A_i \cdot x_i \cdot y_i \quad Ixy = 0.0247 \text{ m}^4$$

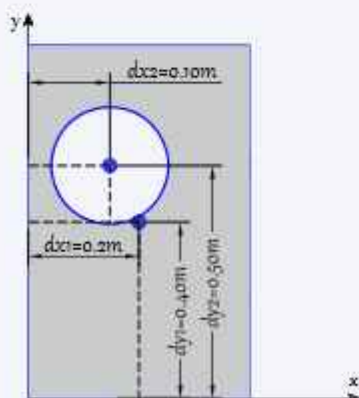
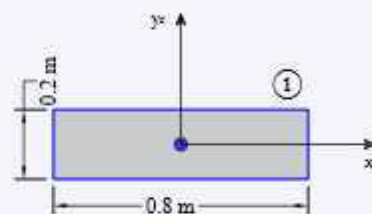
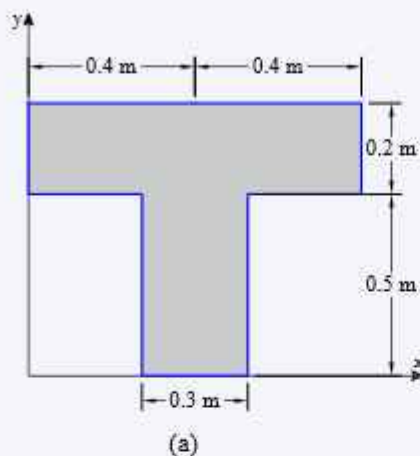


Figura 5.63

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura mostrada

EJEMPLO RESUELTO 5.1.10.3



Paso 1: Identificación de elementos ① y ② según la figura 5.64 (b) y (c), luego cálculo de momentos de inercia centroidales de cada elemento

Elemento ①

$$b_1 = 0.8 \text{ m}$$

$$h_1 = 0.2 \text{ m}$$

$$\bar{I}_{x'_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = (5.333 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^4$$

$$\bar{I}_{y'_1} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} = 0.0085 \text{ m}^4$$

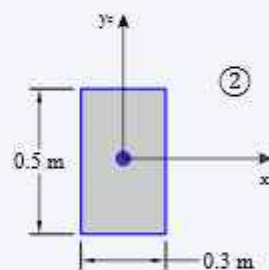
Elemento ②

$$b_2 = 0.3 \text{ m}$$

$$h_2 = 0.5 \text{ m}$$

$$\bar{I}_{x'_2} = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} = 0.003 \text{ m}^4$$

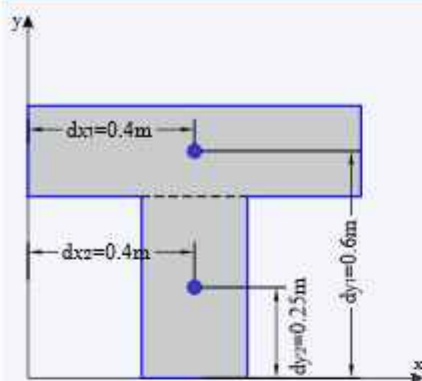
$$\bar{I}_{y'_2} = \frac{h_2 \cdot b_2^3}{12} = 0.0011 \text{ m}^4$$



Paso 2: Tabla de resumen para el cálculo del momento de inercia de la figura compuesta

	$\bar{I}_{x'_i}$ m^4	$\bar{I}_{y'_i}$ m^4	A_i m^2	dy_i m	dx_i m	$A \cdot (dy_i)^2$ m^4	$A \cdot (dx_i)^2$ m^4	I_{x_i} m^4	I_{y_i} m^4
①	0.001	0.009	0.160	0.600	0.400	0.058	0.026	0.058	0.034
②	0.003	0.001	0.150	0.250	0.400	0.009	0.024	0.012	0.025
			0.310					0.071	0.059

CONTINUACIÓN



(d)

Figura 5.64

Paso 3: Determinación del momento de inercia de la figura compuesta

$$I_x = 0.07063 \text{ m}^4 \quad I_y = 0.059258 \text{ m}^4$$

Paso 4: Determinación del momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura compuesta

$$y_c = 0.430645 \text{ m} \quad I_x = I_x + A \cdot (y_c)^2$$

$$I_{x_c} = I_x - A \cdot (y_c)^2 \rightarrow 0.0706333333333333 \cdot \text{m}^4 - 0.05749108596775 \cdot \text{m}^4$$

$$I_{x_c} = 0.013142 \text{ m}^4$$

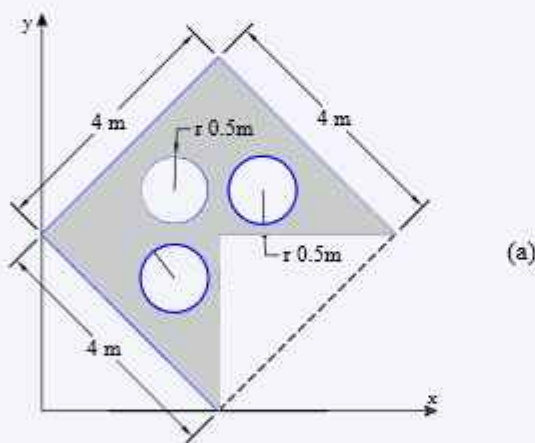
$$x_c = 0.4 \text{ m}$$

$$I_{y_c} = I_y - A \cdot (x_c)^2 \rightarrow 0.0592583333333333 \cdot \text{m}^4 - 0.0496 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y_c} = 0.009658 \text{ m}^4$$

EJEMPLO RESUELTO 5.1.10.4

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura mostrada



(a)

Paso 1: Identificación de elementos ①, ②, ③, ④, ⑤ y ⑥ según las figuras 5.65 (b), (c), (d), (e) y (f), luego cálculo de momentos de inercia centroidales de cada elemento

Elemento ①

$$b_1 = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

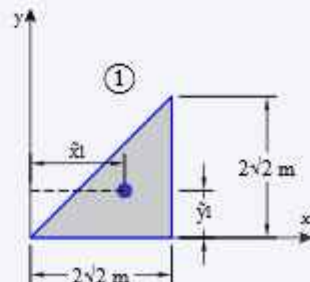
$$h_1 = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

$$I_{x_1} = \bar{I}x'_1 + A_1 \cdot (\tilde{y}_1)^2$$

$$\bar{I}x'_1 = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} - \frac{h_1 \cdot b_1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} h_1\right)^2 = 1.778 \text{ m}^4$$

$$I_{y_1} = \bar{I}y'_1 + A_1 \cdot (\tilde{x}_1)^2$$

$$\bar{I}y'_1 = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{4} - \frac{h_1 \cdot b_1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} b_1\right)^2 = 1.778 \text{ m}^4$$



(b)

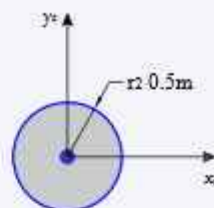
CONTINUACIÓN

Elemento ②

$r_2 := 0.5 \text{ m}$

$$\bar{I}'_{x_2} := \frac{\pi \cdot r_2^4}{4} = 0.049 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}'_{y_2} := \frac{\pi \cdot r_2^4}{4} = 0.049 \text{ m}^4$$



②

Elemento ③

$b_3 := 2\sqrt{2} \text{ m}$

$h_3 := 2\sqrt{2} \text{ m}$

$I_{x_3} = \bar{I}'_{x_3} + A_3 \cdot (\tilde{y}_3)^2$

$$\bar{I}'_{x_3} := \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} - \frac{h_3 \cdot b_3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} h_3\right)^2 = 1.778 \text{ m}^4$$

(c)

$I_{y_3} = \bar{I}'_{y_3} + A_3 \cdot (\tilde{x}_3)^2$

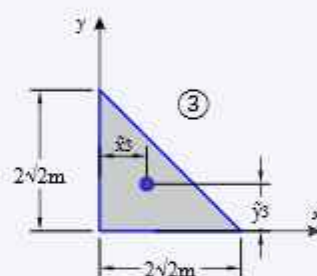
$$\bar{I}'_{y_3} := \frac{h_3 \cdot b_3^3}{12} - \frac{h_3 \cdot b_3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} b_3\right)^2 = 1.778 \text{ m}^4$$

Elemento ④

$r_4 := 0.5 \text{ m}$

$$\bar{I}'_{x_4} := \frac{\pi \cdot r_4^4}{4} = 0.049 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}'_{y_4} := \frac{\pi \cdot r_4^4}{4} = 0.049 \text{ m}^4$$



(d)

Elemento ⑤

$b_5 := 2\sqrt{2} \text{ m}$

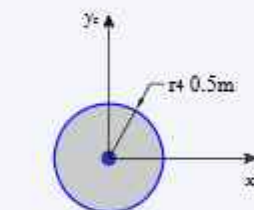
$h_5 := 2\sqrt{2} \text{ m}$

$I_{x_5} = \bar{I}'_{x_5} + A_5 \cdot (\tilde{y}_5)^2$

$$\bar{I}'_{x_5} := \frac{b_5 \cdot h_5^3}{12} - \frac{h_5 \cdot b_5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} h_5\right)^2 = 1.778 \text{ m}^4$$

$I_{y_5} = \bar{I}'_{y_5} + A_5 \cdot (\tilde{x}_5)^2$

$$\bar{I}'_{y_5} := \frac{h_5 \cdot b_5^3}{12} - \frac{h_5 \cdot b_5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} b_5\right)^2 = 1.778 \text{ m}^4$$



④

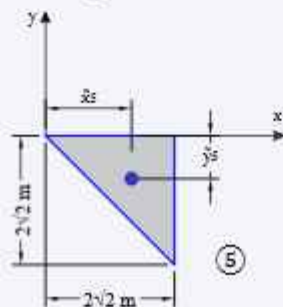
Elemento ⑥

$r_6 := 0.5 \text{ m}$

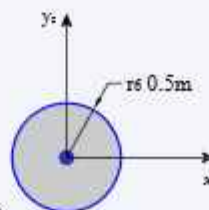
$$\bar{I}'_{x_6} := \frac{\pi \cdot r_6^4}{4} = 0.049 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}'_{y_6} := \frac{\pi \cdot r_6^4}{4} = 0.049 \text{ m}^4$$

(e)



(f)



⑥

(g)

CONTINUACIÓN

Paso 2: Tabla de resumen para el cálculo del momento de inercia de la figura

	$\bar{I}x'_i$ m^4	$\bar{I}y'_i$ m^4	A_i m^2	dy_i m	dx_i m	$A \cdot (dy_i)^2$ m^4	$A \cdot (dx_i)^2$ m^4	Ix_i m^4	Iy_i m^4
①	1.78	1.78	4.00	3.77	1.89	56.89	14.22	58.67	16.00
②	-0.05	-0.05	-0.79	3.71	1.94	-10.82	-2.97	-10.87	-3.02
③	1.777778	1.777778	4	3.771236	3.771236	56.89	56.89	58.67	58.67
④	-0.04909	-0.04909	-0.7854	3.712311	3.712311	-10.82	-10.82	-10.87	-10.87
⑤	1.777778	1.777778	4	1.885618	1.885618	14.22	14.22	16.00	16.00
⑥	-0.04909	-0.04909	-0.7854	1.944544	1.944544	-2.97	-2.97	-3.02	-3.02
			9.64					108.57	73.76

Paso 3: Determinación del momento de inercia de la figura compuesta

$$I_x = 108.568747 \text{ m}^4 \quad I_y = 73.756062 \text{ m}^4$$

Paso 4: Determinación del momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura compuesta

$$y_c = 3.147496 \text{ m} \quad I_x = I_{x_c} + A \cdot (y_c)^2$$

$$I_{x_c} = I_x - A \cdot (y_c)^2 \xrightarrow{\text{float}, 3} 109.0 \cdot \text{m}^4 - 95.5 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$I_{x_c} = 13.5 \text{ m}^4$$

$$x_c = 2.509359 \text{ m}$$

$$I_{y_c} = I_y - A \cdot (x_c)^2 \xrightarrow{\text{float}, 3} 73.8 \cdot \text{m}^4 - 60.7 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y_c} = 13.1 \text{ m}^4$$

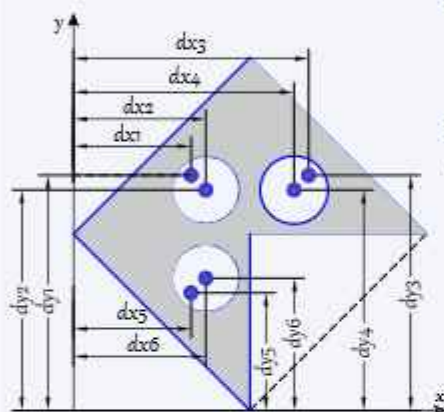


Figura 5.65

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura mostrada

EJEMPLO RESUELTO 5.1.10.5

Paso 1: Identificación de elementos ① y ② según las figuras 5.66 (b) y (c), luego cálculo de momentos de inercia centroidales de cada elemento

Elemento ①

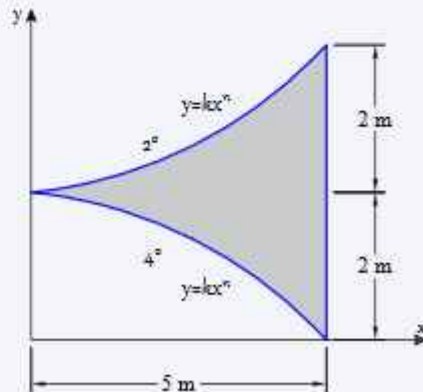
$$b_1 = 5 \text{ m} \quad h_1 = 2 \text{ m} \quad n_1 = 2$$

$$I_{x1} = \bar{I}x'_1 + A_1 \cdot (\tilde{y}_1)^2$$

$$\bar{I}x'_1 = b_1 \cdot h_1^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{n_1}{3n_1 + 1} \right) - \frac{b_1 \cdot h_1}{n_1 + 1} \cdot \left(\frac{n_1 + 1}{4n_1 + 2} \cdot h_1 \right)^2 = 0.705 \text{ m}^4$$

$$I_{y1} = \bar{I}y'_1 + A_1 \cdot (\tilde{x}_1)^2$$

$$\bar{I}y'_1 = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{n_1 + 3} - \frac{b_1 \cdot h_1}{n_1 + 1} \cdot \left(\frac{n_1 + 1}{n_1 + 2} \cdot b_1 \right)^2 = 3.125 \text{ m}^4$$



(a)

CONTINUACIÓN

Elemento ②

$$b_2 := 5 \text{ m} \quad h_2 := 2 \text{ m} \quad n_2 := 4$$

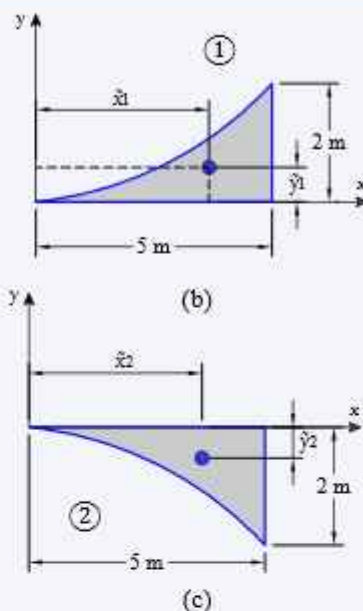
$$I_{x2} = \bar{I}'_{x2} + A_2 \cdot (\bar{y}'_2)^2$$

$$\bar{I}'_{x2} := b_2 \cdot h_2^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{n_2}{3 n_2 + 1} \right) - \frac{b_2 \cdot h_2}{n_2 + 1} \cdot \left(\frac{n_2 + 1}{4 n_2 + 2} h_2 \right)^2 = 0.408 \text{ m}^4$$

$$I_{y2} = \bar{I}'_{y2} + A_2 \cdot (\bar{x}'_2)^2$$

$$\bar{I}'_{y2} := \frac{h_2 \cdot b_2^3}{n_2 + 3} - \frac{b_2 \cdot h_2}{n_2 + 1} \cdot \left(\frac{n_2 + 1}{n_2 + 2} b_2 \right)^2 = 0.992 \text{ m}^4$$

Paso 2: Tabla de resumen para el cálculo del momento de inercia de la figura compuesta



	\bar{I}'_i m^4	\bar{I}'_i m^4	A_i m^2	dy_i m	dxi m	$A \cdot (dy_i)^2$ m^4	$A \cdot (dxi)^2$ m^4	I_{xi} m^4	I_{yi} m^4
①	0.70	3.13	3.33	2.60	3.75	22.53	46.88	23.24	50.00
②	0.41	0.99	2.00	1.44	4.17	4.17	34.72	4.58	35.71
			5.33					27.82	85.71

Paso 3: Determinación del momento de inercia de la figura compuesta

$$I_x = 27.8193 \text{ m}^4 \quad I_y = 85.7143 \text{ m}^4$$

Paso 4: Determinación del momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura compuesta

$$y_c := 2.1665 \text{ m} \quad I_x = I_{x_c} + A \cdot (y_c)^2$$

$$I_{x_c} := I_x - A \cdot (y_c)^2 \xrightarrow{\text{float}, 3} 27.8 \cdot \text{m}^4 - 25.0 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$I_{x_c} = 2.8 \text{ m}^4$$

$$x_c := 3.906 \text{ m}$$

$$I_{y_c} := I_y - A \cdot (x_c)^2 \xrightarrow{\text{float}, 3} 85.7 \cdot \text{m}^4 - 81.4 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y_c} = 4.3 \text{ m}^4$$

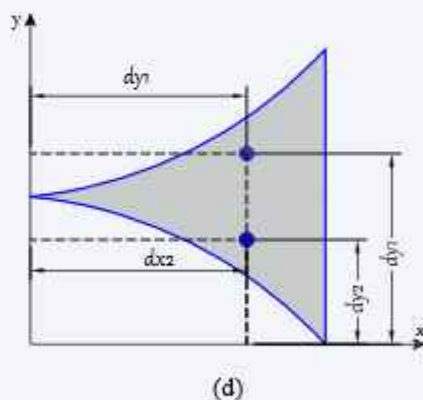


Figura 5.66

EJEMPLO RESUELTO 5.1.10.6

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura mostrada

Paso 1: Identificación de elementos ① y ② según la figuras 5.67 (b) y (c) luego calculo de momentos de inercia centroidales, considerando la rotación de ejes de cada elemento.

$$r_2 := 2 \text{ m} \cdot \tan(33^\circ) = 1.299 \text{ m}$$

Elemento ① $b_1 := 4 \text{ m}$ $h_1 := 4 \text{ m}$

$$I'_{x'c1} := \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = 21.333 \text{ m}^4$$

$$I'_{y'c1} := \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} = 21.3333 \text{ m}^4$$

$$I'_{x'y'c1} := 0 \text{ m}^4$$

$$\alpha := 33^\circ$$

$$\bar{I}_{x_1} := \left(\frac{I'_{x'c1} + I'_{y'c1}}{2} \right) + \left(\frac{I'_{x'c1} - I'_{y'c1}}{2} \right) \cdot \cos(2\alpha) - I'_{x'y'c1} \cdot \sin(2\alpha)$$

$$\bar{I}_{x_1} = 21.333 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}_{y_1} := \left(\frac{I'_{x'c1} + I'_{y'c1}}{2} \right) - \left(\frac{I'_{x'c1} - I'_{y'c1}}{2} \right) \cdot \cos(2\alpha) - I'_{x'y'c1} \cdot \sin(2\alpha)$$

$$\bar{I}_{y_1} = 21.333 \text{ m}^4$$

Elemento ② $r_2 = 1.299 \text{ m}$

$$I'_{x'c2} := \frac{\pi \cdot r_2^4}{8} - \frac{\pi \cdot r_2^2}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot r_2}{3\pi} \right)^2 = 0.3123 \text{ m}^4 \quad \text{ok}$$

$$I'_{y'c2} := \frac{\pi \cdot r_2^4}{8} = 1.1175 \text{ m}^4 \quad \text{ok}$$

$$I'_{x'y'c2} := 0 \text{ m}^4$$

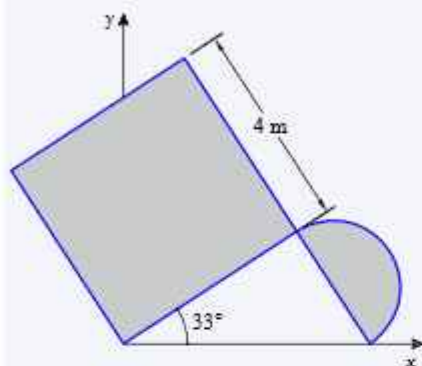
$$\alpha := -57 \text{ deg}$$

$$\bar{I}_{x_2} := \left(\frac{I'_{x'c2} + I'_{y'c2}}{2} \right) + \left(\frac{I'_{x'c2} - I'_{y'c2}}{2} \right) \cdot \cos(2\alpha) - I'_{x'y'c2} \cdot \sin(2\alpha) = 0.879$$

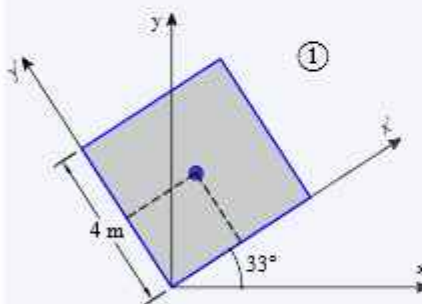
$$\bar{I}_{x_2} = 0.879 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}_{y_2} := \left(\frac{I'_{x'c2} + I'_{y'c2}}{2} \right) - \left(\frac{I'_{x'c2} - I'_{y'c2}}{2} \right) \cdot \cos(2\alpha) - I'_{x'y'c2} \cdot \sin(2\alpha) = 0.551$$

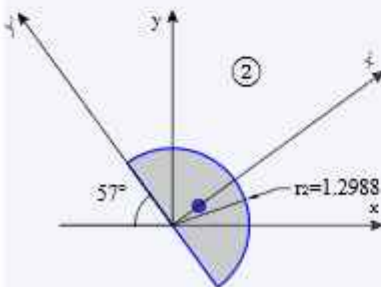
$$\bar{I}_{y_2} = 0.551 \text{ m}^4$$



(a)



(b)



(c)

CONTINUACIÓN

Paso 2: Tabla de resumen para el cálculo del momento de inercia de la figura compuesta

	Ix_i m^4	Iy_i m^4	A_i m^2	d_{yi} m	d_{xi} m	$A \cdot (d_{yi})^2$ m^4	$A \cdot (d_{xi})^2$ m^4	Ix_i m^4	Iy_i m^4
①	21.33	21.33	16.00	2.77	0.59	122.47	5.53	143.80	26.87
②	0.88	0.55	2.65	1.39	4.52	5.12	54.24	5.99	54.79
			18.65					149.79	81.66

Paso 3: Determinación del momento de inercia de la figura compuesta

$$Ix = 149.7949 \text{ m}^4 \quad Iy = 81.659 \text{ m}^4$$

Paso 4: Determinación del momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura compuesta

$$y_c = 2.5710 \text{ m} \quad I_x = Ix_c + A \cdot (y_c)^2$$

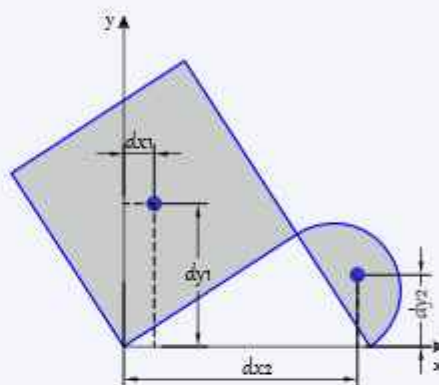
$$Ix_c = Ix - A \cdot (y_c)^2 \xrightarrow{\text{float}, 4} 149.8 \cdot m^4 - 123.3 \cdot m^2 \cdot m^2$$

$$Ix_c = 26.5 \text{ m}^4$$

$$x_c = 1.1473 \text{ m}$$

$$Iy_c = Iy - A \cdot (x_c)^2 \xrightarrow{\text{float}, 4} 81.66 \cdot m^4 - 24.55 \cdot m^2 \cdot m^2$$

$$Iy_c = 57.11 \text{ m}^4$$

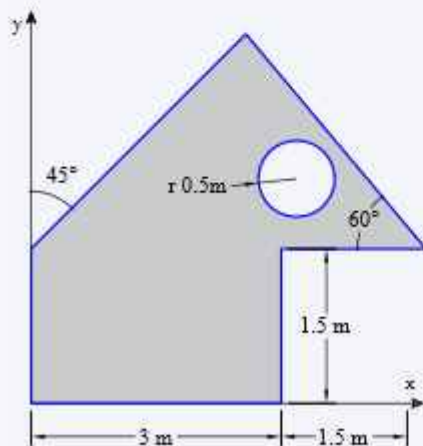


(d)

Figura 5.67

EJEMPLO RESUELTO 5.1.10.7

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura mostrada



(a)

Paso 1: Identificación de elementos ①, ②, ③ y ④ según las figuras 5.68 (b), (c), (d) y (e) respectivamente, luego cálculo de momentos de inercia centroidales de cada elemento

$$a = \frac{4.5 \text{ m}}{\left(1 + \frac{1}{\tan(60^\circ)}\right)} = 2.853 \text{ m}$$

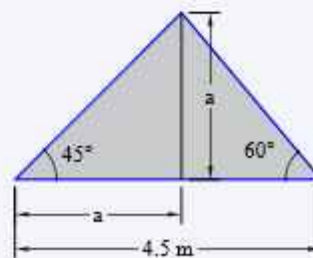
Elemento ①

$$b_1 = a = 2.853 \text{ m}$$

$$h_1 = a = 2.853 \text{ m}$$

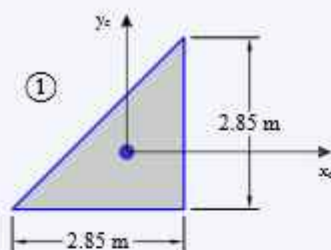
$$\bar{I}x'_1 = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{36} = 1.84 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}y'_1 = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{36} = 1.8401 \text{ m}^4$$

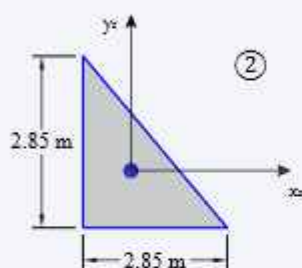


(b)

CONTINUACIÓN



(c)



(d)

Elemento ②

$$b_2 := 4.5 \text{ m} - b_1 = 1.647 \text{ m}$$

$$h_2 := h_1 = 2.853 \text{ m}$$

$$\bar{I}'_{x_2} := \frac{b_2 \cdot h_2^3}{36} = 1.062 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}'_{y_2} := \frac{h_2 \cdot b_2^3}{36} = 0.3541 \text{ m}^4$$

Elemento ③

$$r_3 := 0.5 \text{ m}$$

$$\bar{I}'_{x_3} := \frac{\pi \cdot r_3^4}{4} = 0.049 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}'_{y_3} := \frac{\pi \cdot r_3^4}{4} = 0.049 \text{ m}^4$$

Elemento ④

$$h_4 := 1.5 \text{ m}$$

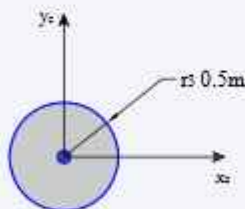
$$b_4 := 3 \text{ m}$$

$$\bar{I}'_{x_4} := \frac{b_4 \cdot h_4^3}{12} = 0.844 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}'_{y_4} := \frac{h_4 \cdot b_4^3}{12} = 3.375 \text{ m}^4$$

Paso 2: Tabla de resumen para el cálculo del momento de inercia de la figura compuesta

	$I_{x_{ci}}$ m^4	$I_{y_{ci}}$ m^4	A_i m^2	dy_i m	dx_i m	$A \cdot (dy_i)^2$ m^4	$A \cdot (dx_i)^2$ m^4	I_{x_i} m^4	I_{y_i} m^4
①	1.84	1.84	4.07	2.45	1.90	24.45	14.72	26.29	16.56
②	1.06	0.35	2.35	2.45	3.40	14.11	27.19	15.18	27.55
③	-0.05	-0.05	-0.79	2.63	3.16	-5.42	-7.83	-5.47	-7.88
④	0.84	3.38	4.50	0.75	1.50	2.53	10.13	3.38	13.50
			10.13					39.37	49.73



(e)

Paso 3: Determinación del momento de inercia de la figura compuesta

$$I_x = 39.3708 \text{ m}^4 \quad I_y = 49.729 \text{ m}^4$$

Paso 4: Determinación del momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura compuesta

$$y_c := 1.6821 \text{ m} \quad I_x = I_{x_c} + A \cdot (y_c)^2$$

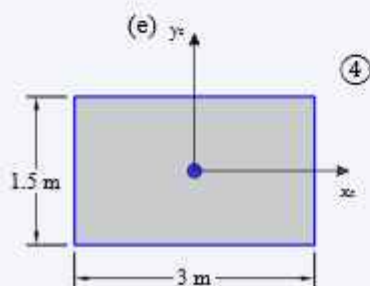
$$I_{x_c} = I_x - A \cdot (y_c)^2 \xrightarrow{\text{float}, 3} 39.4 \cdot \text{m}^4 - 28.7 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$I_{x_c} = 10.7 \text{ m}^4$$

$$x_c := 1.974 \text{ m}$$

$$I_{y_c} = I_y - A \cdot (x_c)^2 \xrightarrow{\text{float}, 3} 49.7 \cdot \text{m}^4 - 39.5 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

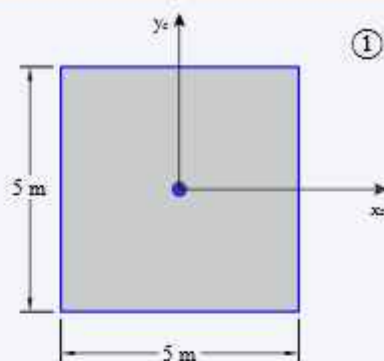
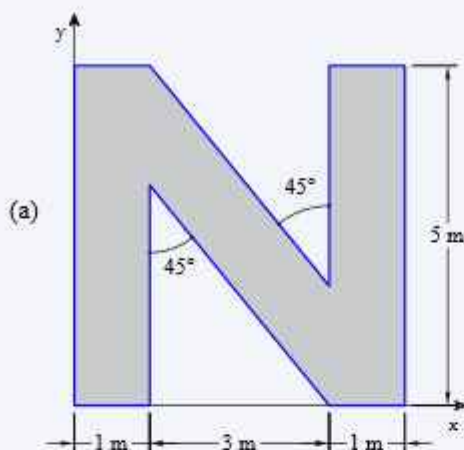
$$I_{y_c} = 10.2 \text{ m}^4$$



(f) Figura 5.68

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura mostrada

EJEMPLO RESUELTO 5.1.10.8



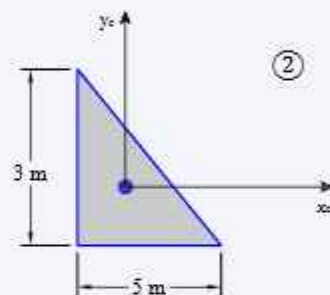
Paso 1: Identificación de elementos ①, ② y ③ según las figuras 5.69 (b), (c) y (d), luego cálculo de momentos de inercia centroidales de cada elemento

Elemento ① $b_1 = 5 \text{ m}$

$h_1 = 5 \text{ m}$

$$\bar{I}'_{x_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = 52.083 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}'_{y_1} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} = 52.0833 \text{ m}^4$$



(c)

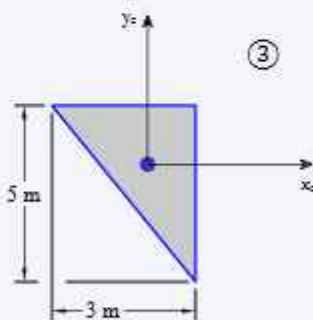
Elemento ②

$b_2 = 3 \text{ m}$

$h_2 = 3 \text{ m}$

$$\bar{I}'_{x_2} = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{36} = 2.25 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}'_{y_2} = \frac{h_2 \cdot b_2^3}{36} = 2.25 \text{ m}^4$$



(d)

Elemento ③

$b_3 = 3 \text{ m}$

$h_3 = 3 \text{ m}$

$$\bar{I}'_{x_3} = \frac{b_3 \cdot h_3^3}{36} = 2.25 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}'_{y_3} = \frac{h_3 \cdot b_3^3}{36} = 2.25 \text{ m}^4$$

Paso 2: Tabla de resumen para el cálculo del momento de inercia de la figura compuesta

	$I_{x_{ci}}$ m^4	$I_{y_{ci}}$ m^4	A_i m^2	dy_i m	dx_i m	$A \cdot (dy_i)^2$ m^4	$A \cdot (dx_i)^2$ m^4	I_{x_i} m^4	I_{y_i} m^4
①	52.08	52.08	25.00	2.50	2.50	156.25	156.25	208.33	208.33
②	-2.25	-2.25	-4.50	1.00	2.00	-4.50	-18.00	-6.75	-20.25
③	-2.25	-2.25	-4.50	4.00	3.00	-72.00	-40.50	-74.25	-42.75
			16.00					127.33	145.33

CONTINUACIÓN

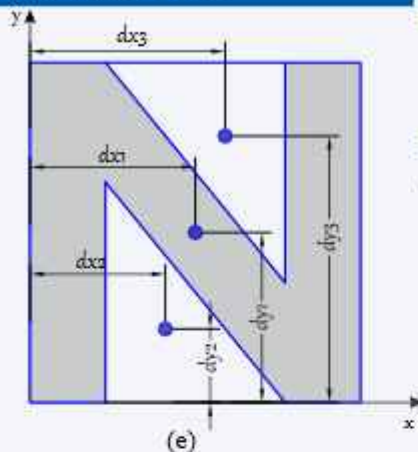


Figura 5.69

Paso 3: Determinación del momento de inercia de la figura compuesta

$$I_x = 127.3333 \text{ m}^4 \quad I_y = 145.3333 \text{ m}^4$$

Paso 4: Determinación del momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura compuesta

$$y_c = 2.5 \text{ m} \quad I_x = I_{x_c} + A \cdot (y_c)^2$$

$$I_{x_c} = I_x - A \cdot (y_c)^2 \rightarrow 127.333333333333 \cdot \text{m}^4 - 100.0 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$I_{x_c} = 27.33333 \text{ m}^4$$

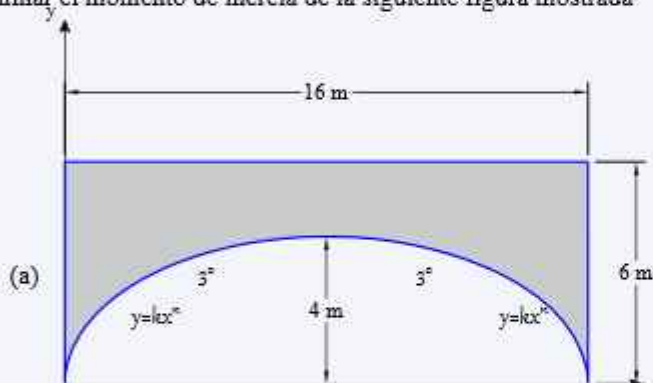
$$x_c = 2.5 \text{ m}$$

$$I_{y_c} = I_y - A \cdot (x_c)^2 \rightarrow 145.333333333333 \cdot \text{m}^4 - 100.0 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2$$

$$I_{y_c} = 45.33333 \text{ m}^4$$

Determinar el momento de inercia de la siguiente figura mostrada

EJEMPLO RESUELTO 5.1.10.9



Paso 1: Identificación de elementos ①, ② y ③ según la figura 5.70 (b), (c) y (d) luego cálculo de momentos de inercia centroidales de cada elemento

Elemento ①

$$b_1 = 16 \text{ m}$$

$$h_1 = 2 \text{ m}$$

$$\bar{I}_{x'_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = 10.667 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}_{y'_1} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} = 682.6667 \text{ m}^4$$

Elemento ②

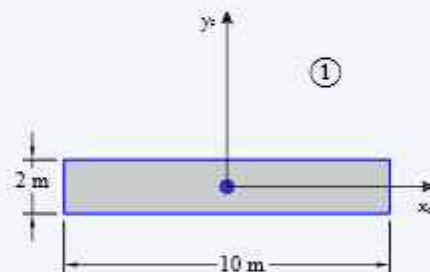
$$b_2 = 8 \text{ m}$$

$$h_2 = 4 \text{ m}$$

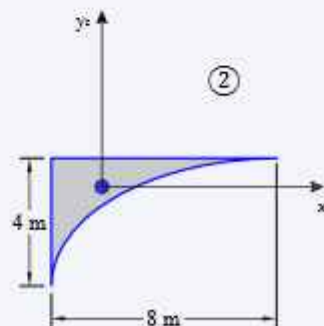
$$n_2 = 3$$

$$\bar{I}_{x'_2} = b_2 \cdot h_2^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{n_2}{3n_2 + 1} \right) - \frac{b_2 \cdot h_2}{n_2 + 1} \cdot \left(\frac{h_2 \cdot (n_2 + 1)}{2(2n_2 + 1)} \right)^2 = 6.618 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}_{y'_2} = \frac{h_2 \cdot b_2^3}{n_2 + 3} - \frac{b_2 \cdot h_2}{n_2 + 1} \cdot \left(\frac{b_2 \cdot (n_2 + 1)}{(n_2 + 2)} \right)^2 = 13.653 \text{ m}^4$$



(b)



(c)

CONTINUACIÓN

Elemento ③

$$b_3 := 8 \text{ m}$$

$$h_3 := 4 \text{ m}$$

$$n_3 := 3$$

$$\bar{I}x'_3 := b_3 \cdot h_3^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{n_3}{3 n_3 + 1} \right) - \frac{b_3 \cdot h_3}{n_3 + 1} \cdot \left(\frac{h_3 \cdot (n_3 + 1)}{2 (2 n_3 + 1)} \right)^2$$

$$\bar{I}x'_3 = 6.618 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}y'_3 := \frac{h_3 \cdot b_3^3}{n_3 + 3} - \frac{b_3 \cdot h_3}{n_3 + 1} \cdot \left(\frac{b_3 \cdot (n_3 + 1)}{(n_3 + 2)} \right)^2 = 13.653 \text{ m}^4$$

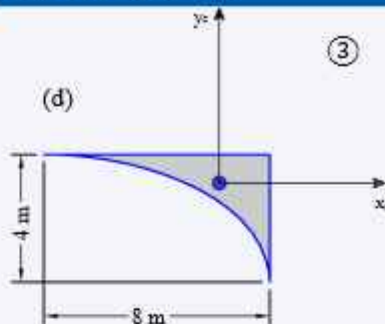


Figura 5.70

	Ix_{ci} m^4	Iy_{ci} m^4	A_i m^2	dy_i m	dx_i m	$A \cdot (dy_i)^2$ m^4	$A \cdot (dx_i)^2$ m^4	Ix_i m^4	Iy_i m^4
①	10.67	682.67	32.00	5.00	8.00	800.00	2048.00	810.67	2730.67
②	6.62	13.65	8.00	2.86	1.60	65.31	20.48	71.92	34.13
③	6.62	13.65	8.00	2.86	14.40	65.31	1658.88	71.92	1672.53
			48.00					954.51	4437.33

Paso 3: Determinación del momento de inercia de la figura compuesta

$$Ix = 954.5143 \text{ m}^4$$

$$Iy = 4437.3333 \text{ m}^4$$

Paso 4: Determinación del momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura compuesta

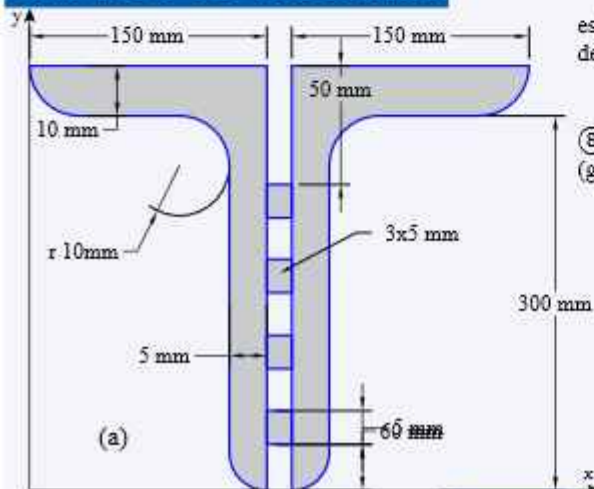
$$y_c := 4.2857 \text{ m}$$

$$Ix_c := Ix - A \cdot (y_c)^2 \rightarrow 954.514285714286 \cdot m^4 - 881.62677552 \cdot m^2 \cdot m^2 = 72.888 \text{ m}^4$$

$$x_c := 8 \text{ m}$$

$$Iy_c := Iy - A \cdot (x_c)^2 \rightarrow 4437.33333333333 \cdot m^4 - 3072.0 \cdot m^2 \cdot m^2 = 1365.333 \text{ m}^4$$

EJEMPLO RESUELTO 5.1.10.10



Determine, por el método de los nodos, la fuerza en los miembros, y establezca si están en tensión o compresión, los elementos del sistema de armaduras

Paso 1: Identificación de elementos ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨, ⑩, ⑪, ⑫, ⑬, ⑭, ⑮ y ⑯, figuras 5.71 (b), (c), (d), (e), (f), (g) y (h), luego del momento de inercia centroidal de cada elemento

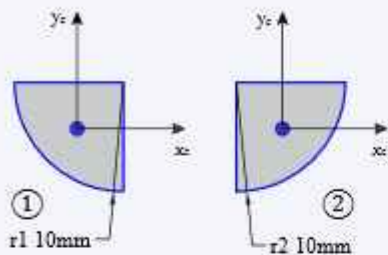
Elemento ①

$$r_1 := 10 \text{ mm}$$

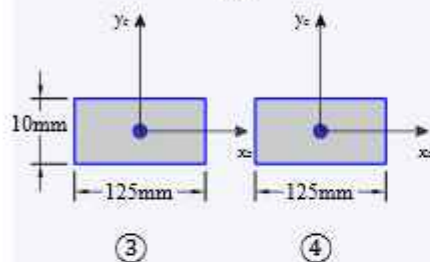
$$\bar{I}x'_1 := \frac{\pi \cdot r_1^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_1^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_1}{3 \pi} \right)^2 = 548.785 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}y'_1 := \frac{\pi \cdot r_1^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_1^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_1}{3 \pi} \right)^2 = 548.785 \text{ mm}^4$$

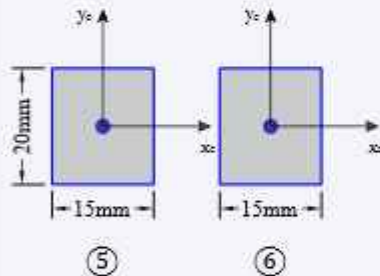
CONTINUACIÓN



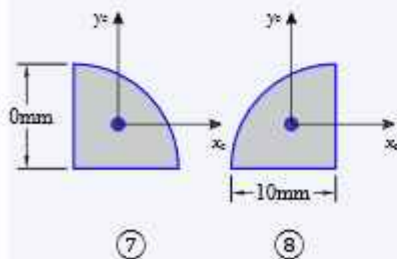
(b)



(c)



(d)



(e)

Elemento ② $r_2 = 10 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_2} = \frac{\pi \cdot r_2^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_2^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_2}{3 \pi} \right)^2 = 548.785 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_2} = \frac{\pi \cdot r_2^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_2^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_2}{3 \pi} \right)^2 = 548.785 \text{ mm}^4$$

Elemento ③ $b_3 = 125 \text{ mm}$ $h_3 = 10 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_3} = \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} = 10416.667 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_3} = \frac{h_3 \cdot b_3^3}{12} = 1627604.1667 \text{ mm}^4$$

Elemento ④ $b_4 = 125 \text{ mm}$ $h_4 = 10 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_4} = \frac{b_4 \cdot h_4^3}{12} = 10416.667 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_4} = \frac{h_4 \cdot b_4^3}{12} = 1627604.1667 \text{ mm}^4$$

Elemento ⑤ $b_5 = 15 \text{ mm}$ $h_5 = 20 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_5} = \frac{b_5 \cdot h_5^3}{12} = 10000 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_5} = \frac{h_5 \cdot b_5^3}{12} = 5625 \text{ mm}^4$$

Elemento ⑥ $b_6 = 15 \text{ mm}$ $h_6 = 20 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_6} = \frac{b_6 \cdot h_6^3}{12} = 10000 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_6} = \frac{h_6 \cdot b_6^3}{12} = 5625 \text{ mm}^4$$

Elemento ⑦ $r_7 = 10 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_7} = \frac{\pi \cdot r_7^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_7^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_7}{3 \pi} \right)^2 = 548.785 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_7} = \frac{\pi \cdot r_7^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_7^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_7}{3 \pi} \right)^2 = 548.785 \text{ mm}^4$$

EJEMPLO RESUELTO 5.8

Elemento ⑧ $r_8 := 10 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_8} := \frac{\pi \cdot r_8^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_8^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_8}{3 \pi} \right)^2 = 548.785 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_8} := \frac{\pi \cdot r_8^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_8^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_8}{3 \pi} \right)^2 = 548.785 \text{ mm}^4$$

Elemento ⑨ $b_9 := 5 \text{ mm}$ $h_9 := 285 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_9} := \frac{b_9 \cdot h_9^3}{12} = 9645468.75 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_9} := \frac{h_9 \cdot b_9^3}{12} = 2968.75 \text{ mm}^4$$

Elemento ⑩ $b_{10} := 5 \text{ mm}$ $h_{10} := 285 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_{10}} := \frac{b_{10} \cdot h_{10}^3}{12} = 9645468.75 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_{10}} := \frac{h_{10} \cdot b_{10}^3}{12} = 2968.75 \text{ mm}^4$$

Elemento ⑪ $r_{11} := 5 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_{11}} := \frac{\pi \cdot r_{11}^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_{11}^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_{11}}{3 \pi} \right)^2 = 34.299 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_{11}} := \frac{\pi \cdot r_{11}^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_{11}^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_{11}}{3 \pi} \right)^2 = 34.299 \text{ mm}^4$$

Elemento ⑫ $r_{12} := 5 \text{ mm}$

$$\bar{I}'_{x_{12}} := \frac{\pi \cdot r_{12}^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_{12}^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_{12}}{3 \pi} \right)^2 = 34.299 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_{12}} := \frac{\pi \cdot r_{12}^4}{16} - \frac{\pi \cdot r_{12}^2}{4} \cdot \left(\frac{4 r_{12}}{3 \pi} \right)^2 = 34.299 \text{ mm}^4$$

Elemento ⑬, ⑭, ⑮ y ⑯ $h_{13} := 5 \text{ mm}$ $b_{13} := 3 \text{ mm}$

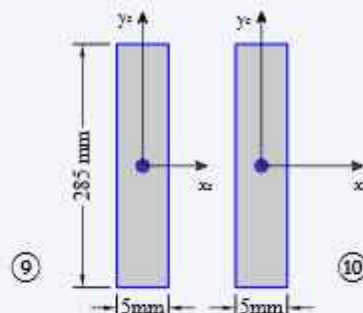
$$\bar{I}'_{x_{13}} := \frac{b_{13} \cdot h_{13}^3}{12} = 31.25 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}'_{y_{13}} := \frac{h_{13} \cdot b_{13}^3}{12} = 11.25 \text{ mm}^4$$

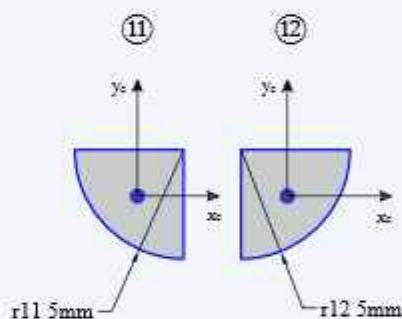
$$\bar{I}'_{x_{14}} := \bar{I}'_{x_{13}} \quad \bar{I}'_{y_{14}} := \bar{I}'_{y_{13}}$$

$$\bar{I}'_{x_{15}} := \bar{I}'_{x_{13}} \quad \bar{I}'_{y_{15}} := \bar{I}'_{y_{13}}$$

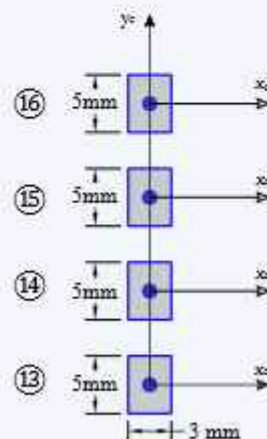
$$\bar{I}'_{x_{16}} := \bar{I}'_{x_{13}} \quad \bar{I}'_{y_{16}} := \bar{I}'_{y_{13}}$$



(f)



(g)

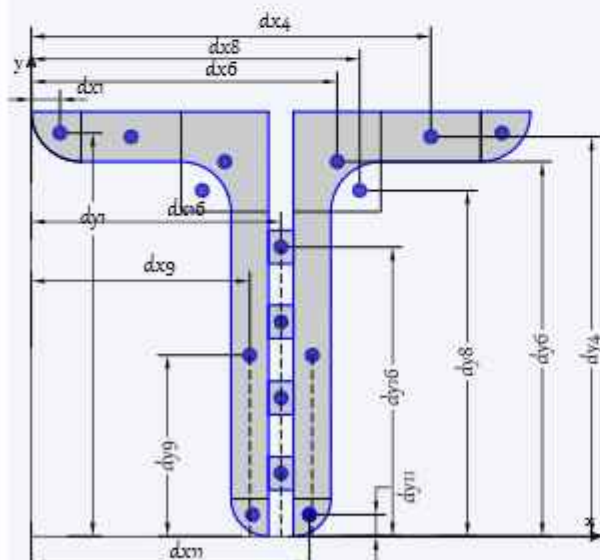


(h)

CONTINUACIÓN

Paso 2: Tabla de resumen para el cálculo del momento de inercia de la figura compuesta

	Ix'_i mm^4	Iy'_i mm^4	A_i mm^2	dy_i mm	dx_i mm	$A \cdot (dy_i)^2$ mm^4	$A \cdot (dx_i)^2$ mm^4	Ix_i mm^4	Iy_i mm^4
①	548.784803	548.784803	78.5398163	305.755868	5.75586818	7342424.39	2602.02557	7342973.18	3150.81038
②	548.784803	548.784803	78.5398163	305.755868	297.244132	7342424.39	6939312.74	7342973.18	6939861.52
③	10416.6667	1627604.17	1250	305	72.5	116281250	6570312.5	116291667	8197916.67
④	10416.6667	1627604.17	1250	305	230.5	116281250	66412812.5	116291667	68040416.7
⑤	10000	5625	300	300	142.5	27000000	6091875	27010000	6097500
⑥	10000	5625	300	300	160.5	27000000	7728075	27010000	7733700
⑦	-548.7848	-548.7848	-78.539816	294.244132	139.244132	-6799946.6	-1522802.9	-6800495.4	-1523351.6
⑧	-548.7848	-548.7848	-78.539816	294.244132	163.755868	-6799946.6	-2106122.5	-6800495.4	-2106671.3
⑨	9645468.75	2968.75	1425	147.5	147.5	31002656.3	31002656.3	40648125	31005625
⑩	9645468.75	2968.75	1425	147.5	155.5	31002656.3	34456856.3	40648125	34459825
⑪	34.2990502	34.2990502	19.6349541	2.87793409	147.877934	162.626598	429374.886	196.925648	429409.185
⑫	34.2990502	34.2990502	19.6349541	2.87793409	155.122066	162.626598	472473.06	196.925648	472507.359
⑬	31.25	11.25	15	62.5	151.5	58593.75	344283.75	58625	344295
⑭	31.25	11.25	15	127.5	151.5	243843.75	344283.75	243875	344295
⑮	31.25	11.25	15	192.5	151.5	555843.75	344283.75	555875	344295
⑯	31.25	11.25	15	257.5	151.5	994593.75	344283.75	994625	344295
			6049.27					370837933	161127069



(i)

Figura 5.71

Paso 3: Determinación del momento de inercia de la figura compuesta

$$Ix = 370837932.776784 \text{ mm}^4$$

$$Iy = 161127069.289431 \text{ mm}^4$$

Paso 4: Determinación del momento de inercia con respecto a su eje centroidal de la figura compuesta

$$y_c := 227.200356 \text{ mm} \quad I_x = Ix_c + A \cdot (y_c)^2$$

$$Ix_c := Ix - A \cdot (y_c)^2$$

$$Ix_c = 58574609.43086 \text{ mm}^4$$

$$x_c := 151.5 \text{ mm} \quad I_y = Iy_c + A \cdot (x_c)^2$$

$$Iy_c := Iy - A \cdot (x_c)^2$$

$$Iy_c = 22282714.03964 \text{ mm}^4$$

5.1.11. EJERCICIOS PROPUESTOS

19 Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

Ejercicios

5.37

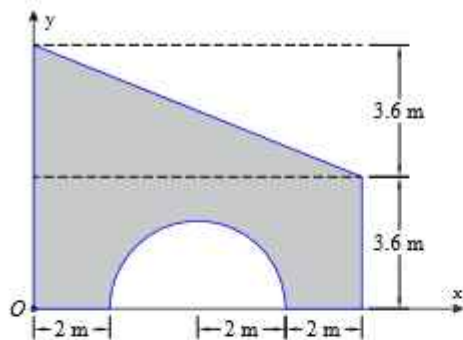


Figura 5.72

5.38

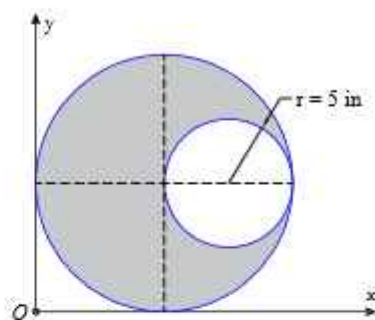


Figura 5.73

5.39

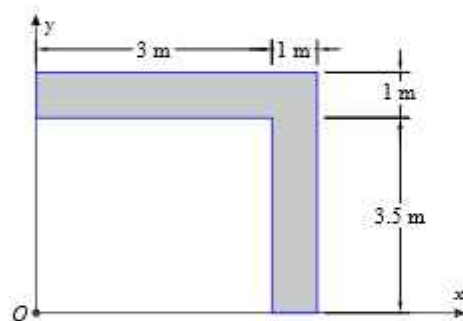


Figura 5.74

5.40

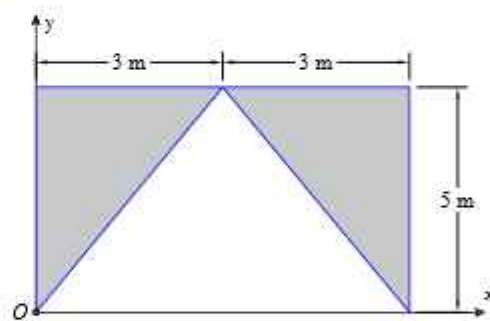


Figura 5.75

5.41

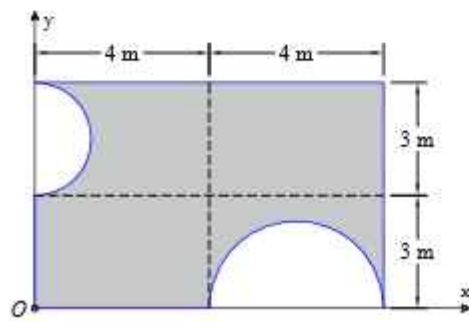


Figura 5.76

5.42

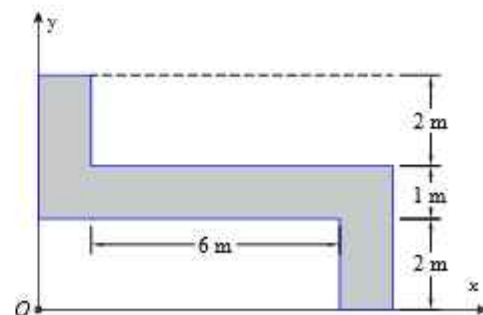


Figura 5.77

Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

5.43

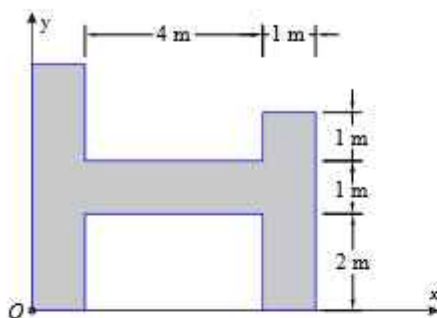


Figura 5.78

5.44

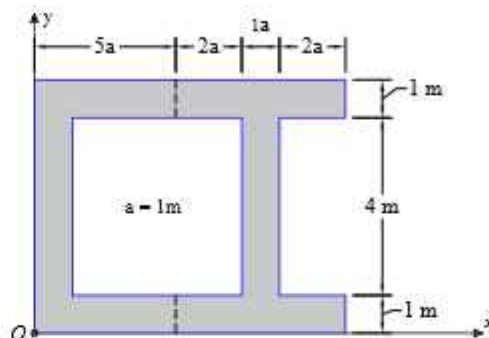


Figura 5.79

5.45

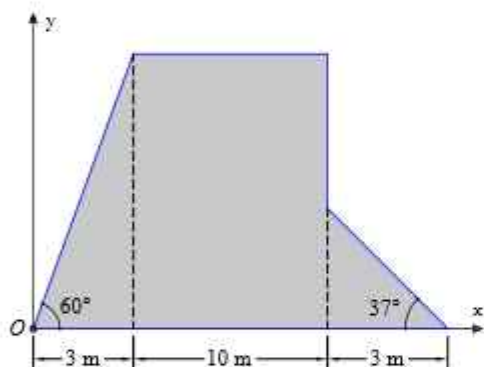


Figura 5.80

5.46

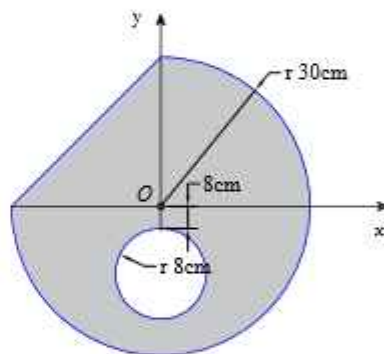


Figura 5.81

5.47

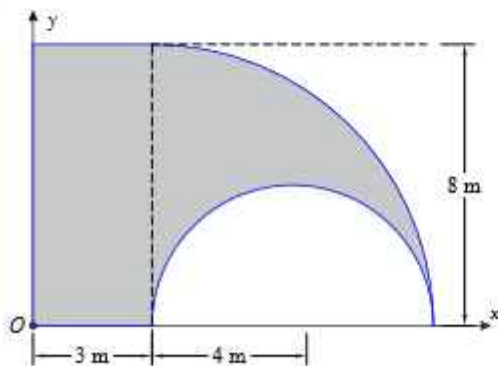


Figura 5.82

5.48

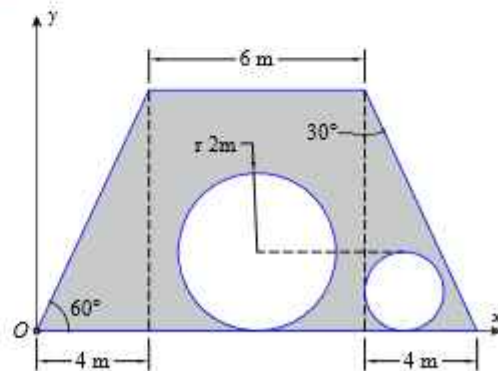


Figura 5.83

Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

5.49

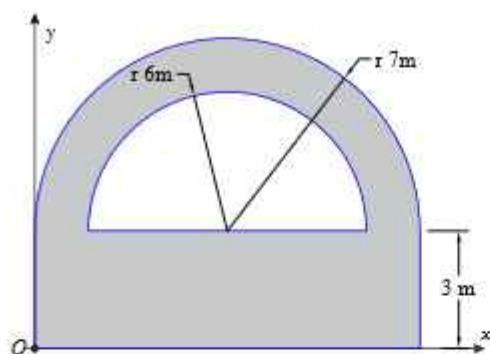


Figura 5.84

5.50

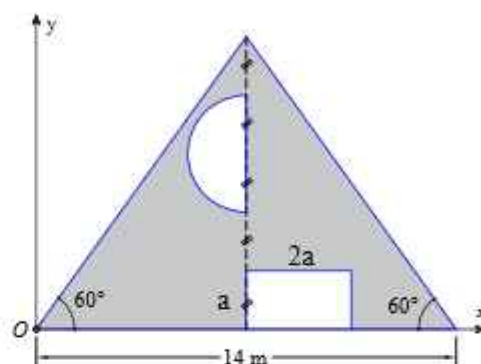


Figura 5.85

5.51

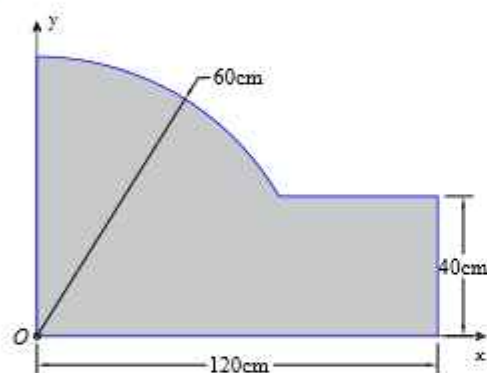


Figura 5.86

5.52

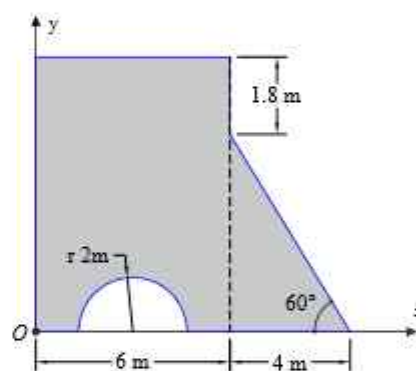


Figura 5.87

5.53

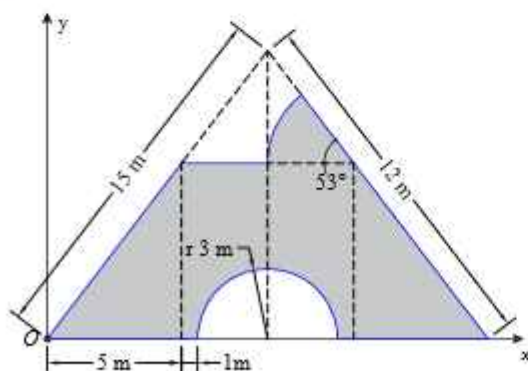


Figura 5.88

5.54

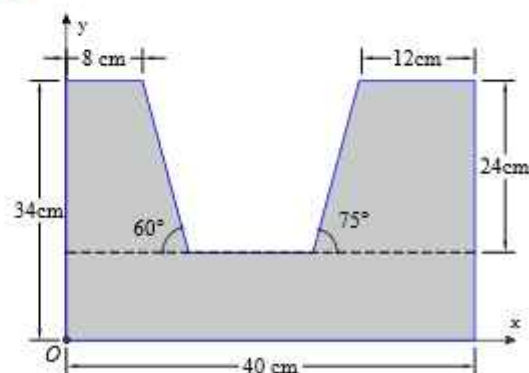


Figura 5.89

Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

5.55

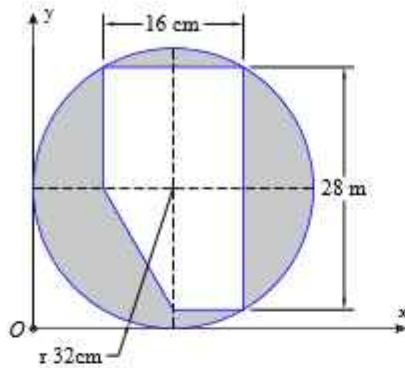


Figura 5.90

5.56

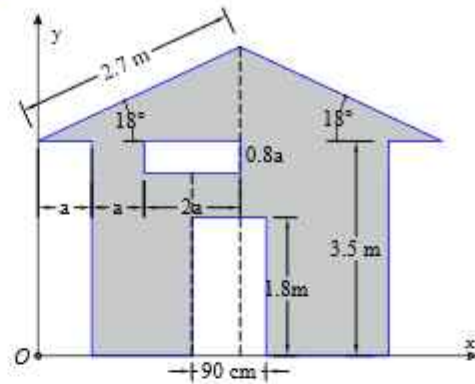


Figura 5.91

5.57

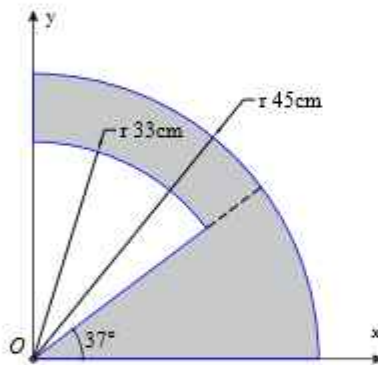


Figura 5.92

5.58

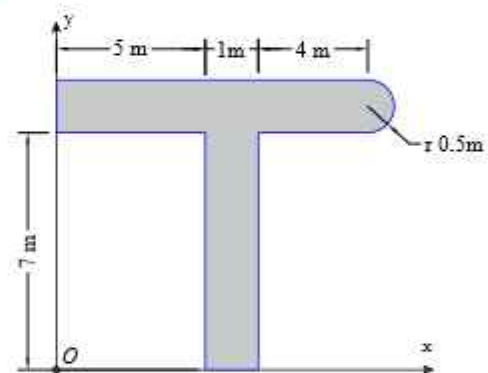


Figura 5.93

5.59

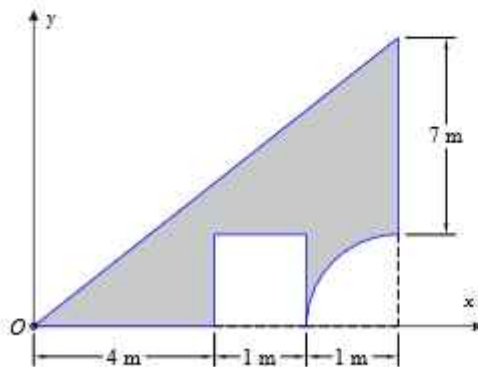


Figura 5.94

5.60

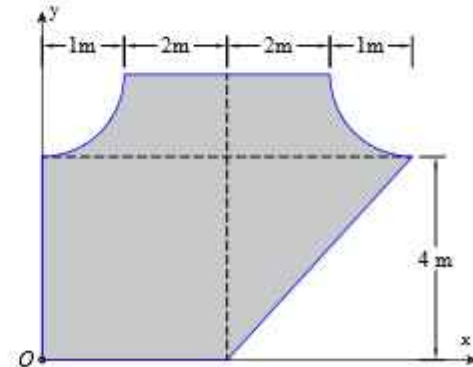


Figura 5.95

Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

5.61

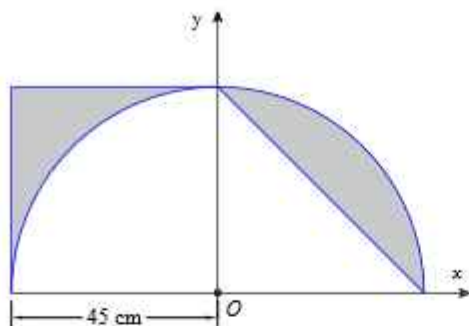


Figura 5.96

5.62

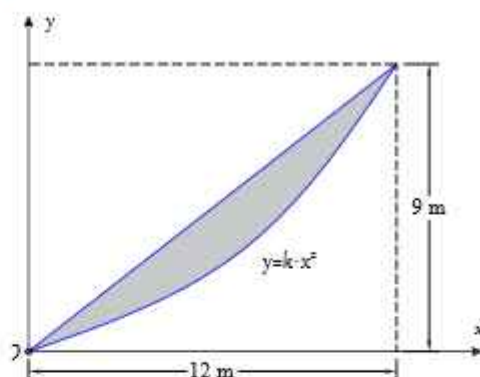


Figura 5.97

5.63

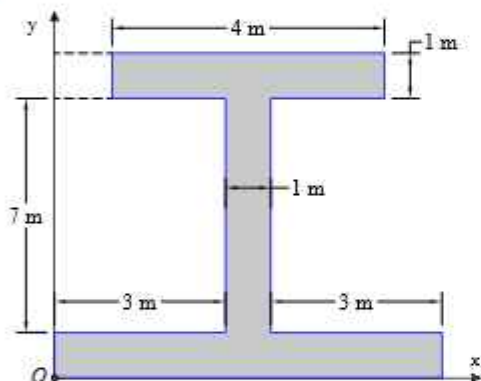


Figura 5.98

5.64

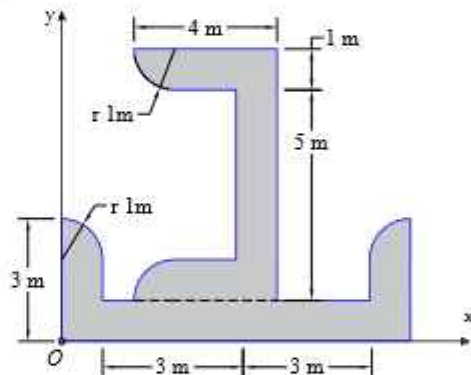


Figura 5.99

5.65

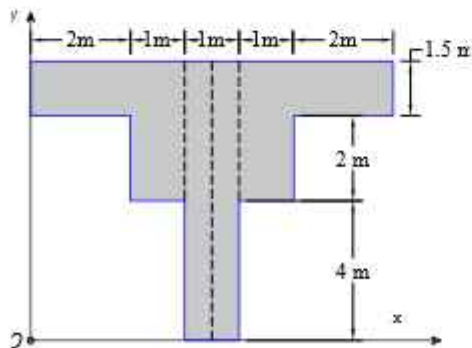


Figura 5.100

5.66

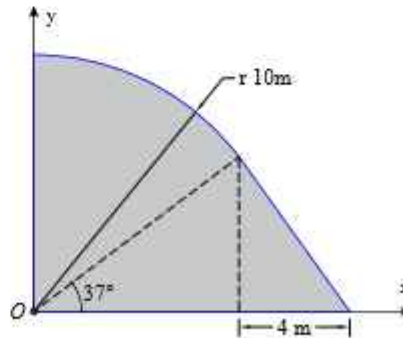


Figura 5.101

Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

5.67

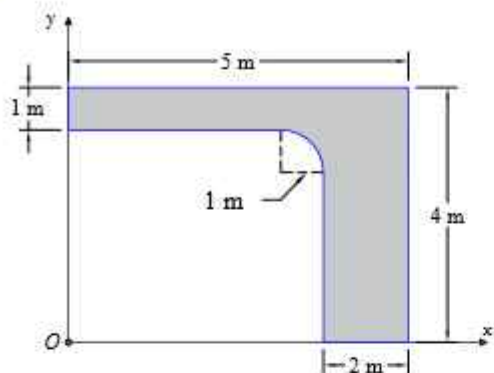


Figura 5.102

5.68

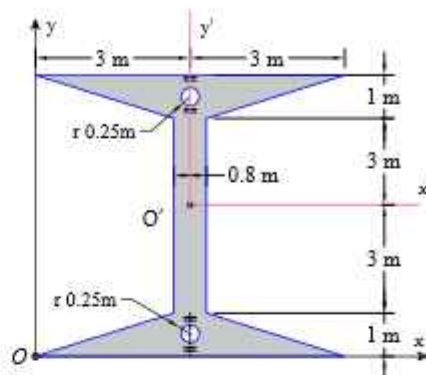


Figura 5.103

5.69

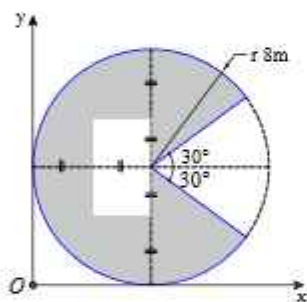


Figura 5.104

5.70

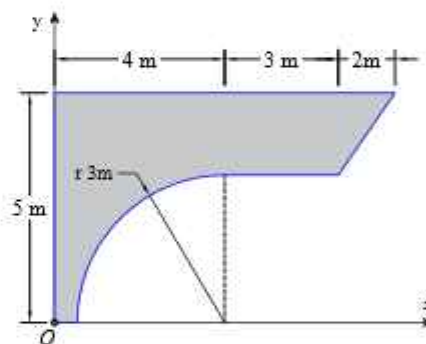


Figura 5.105

5.71

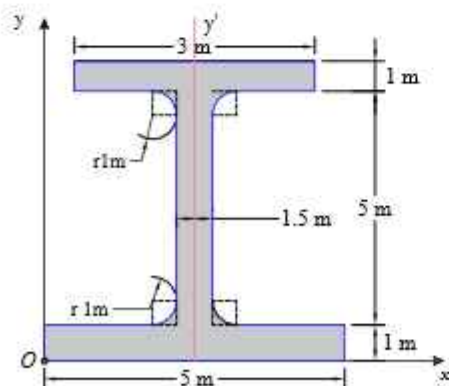


Figura 5.106

5.72

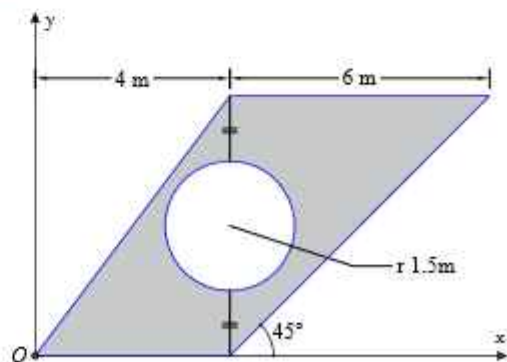


Figura 5.107

Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

5.73

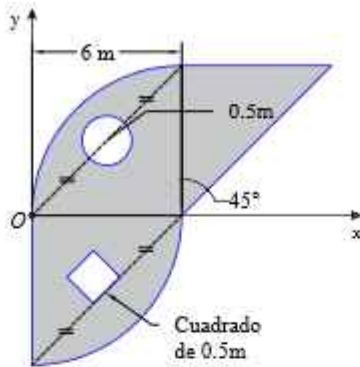


Figura 5.108

5.74

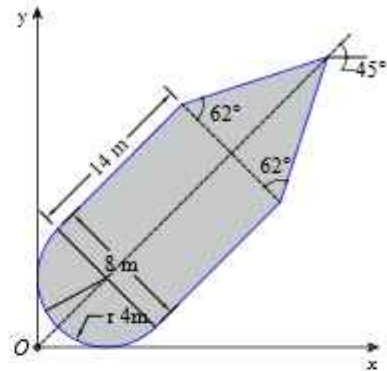


Figura 5.109

5.75

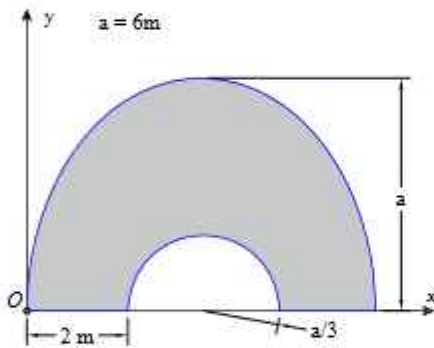


Figura 5.110

5.76

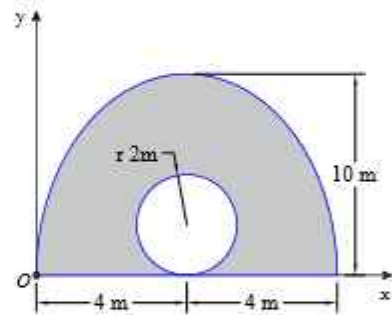


Figura 5.111

5.77

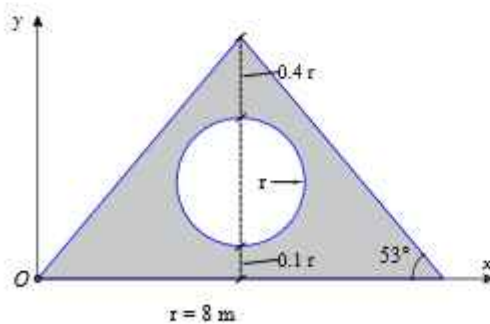


Figura 5.112

5.78

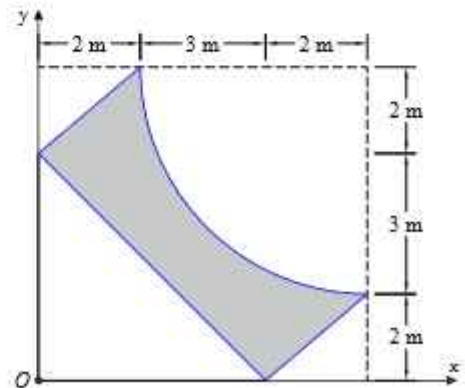


Figura 5.113

Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

5.79

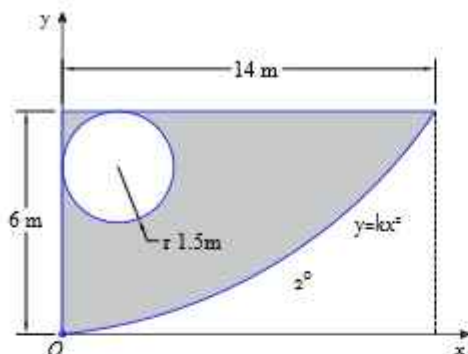


Figura 5.114

5.80

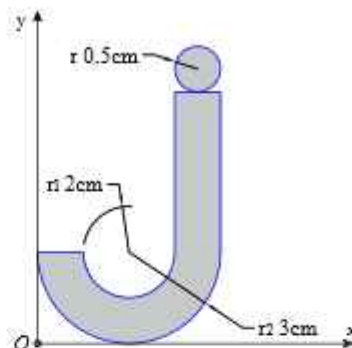


Figura 5.115

5.81

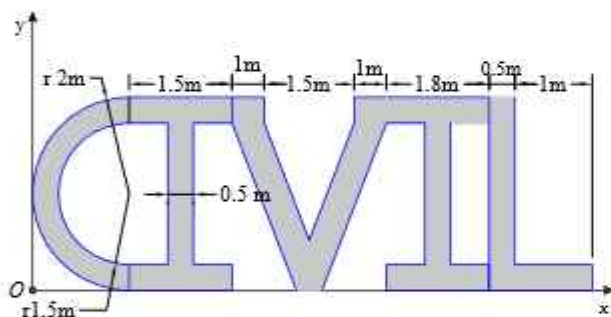


Figura 5.116

5.82

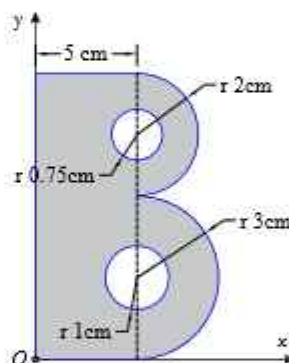


Figura 5.117

5.83

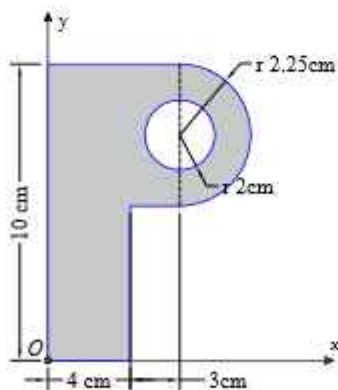


Figura 5.118

5.84

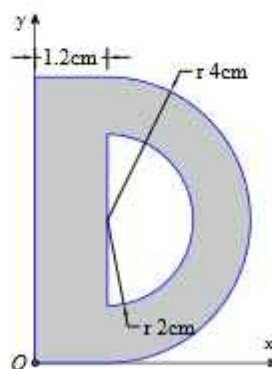


Figura 5.119

Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

5.85

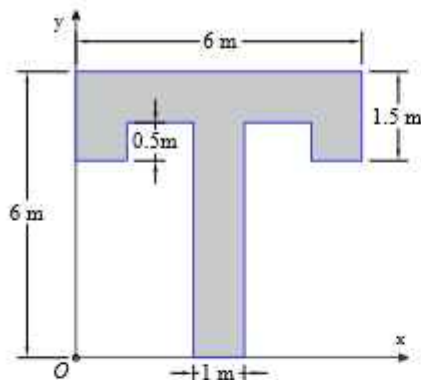


Figura 5.120

5.86

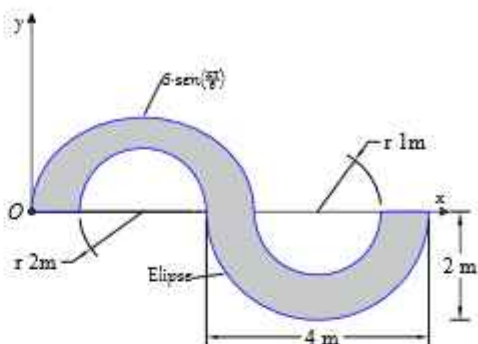


Figura 5.121

5.87

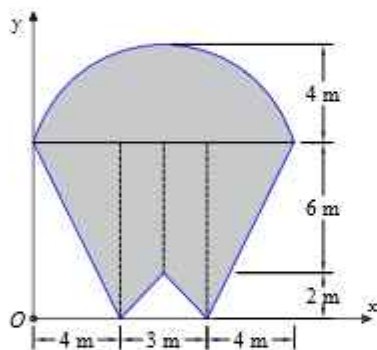


Figura 5.122

5.88

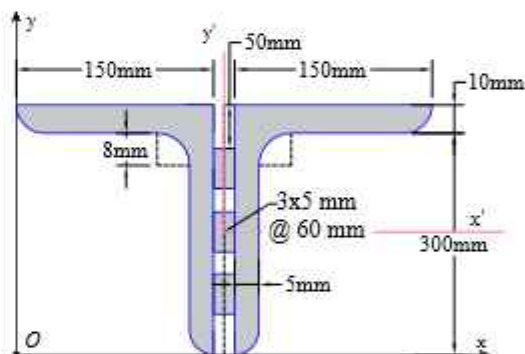


Figura 5.123

5.89

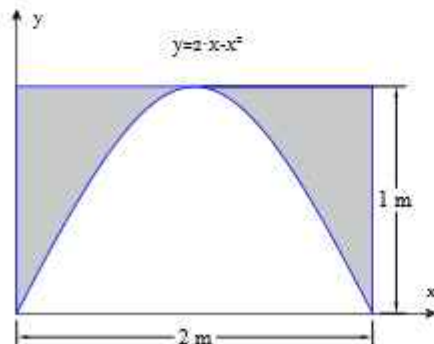


Figura 5.124

5.90

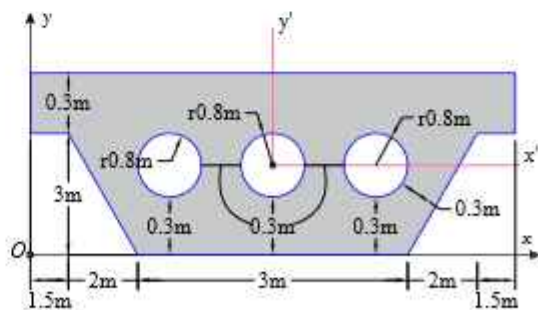


Figura 5.125

Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

5.91

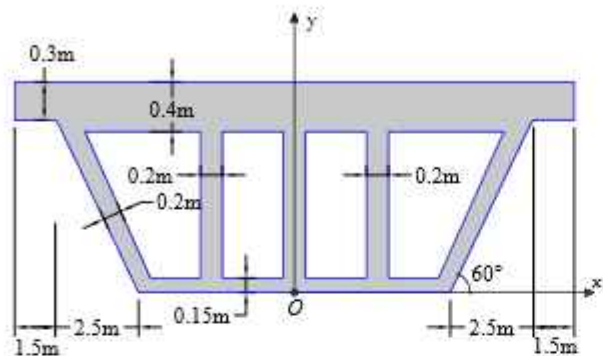


Figura 5.126

5.92

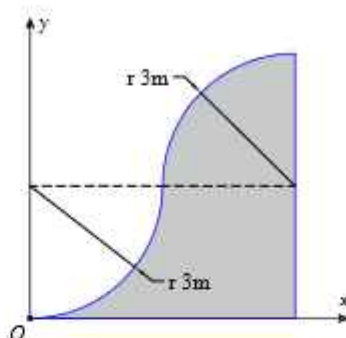


Figura 5.127

5.93

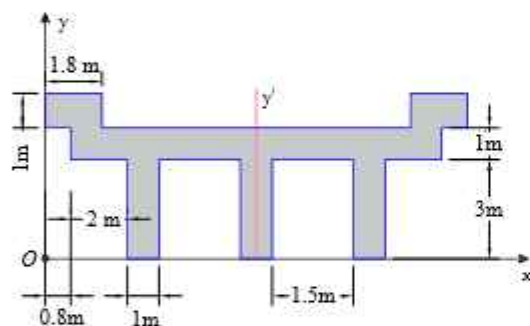


Figura 5.128

5.94

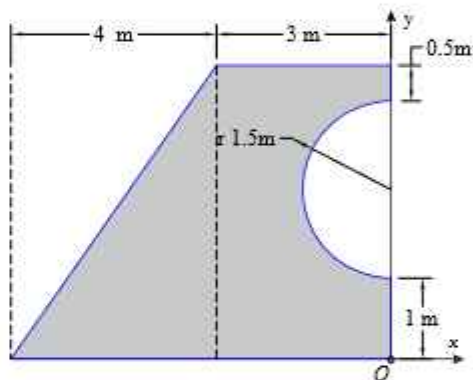


Figura 5.129

5.95

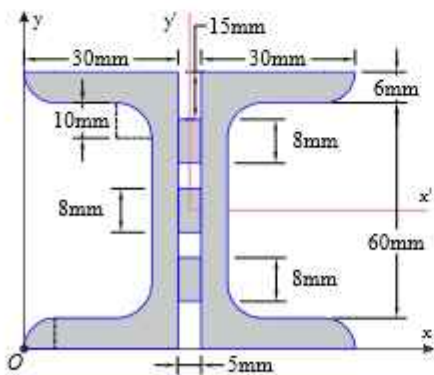


Figura 5.130

5.96

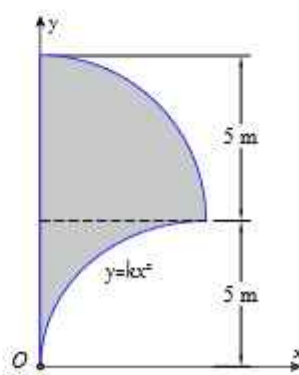


Figura 5.131

Determine el momento de inercia del área sombreada de las siguientes figuras, respecto a los ejes x e y .

5.97

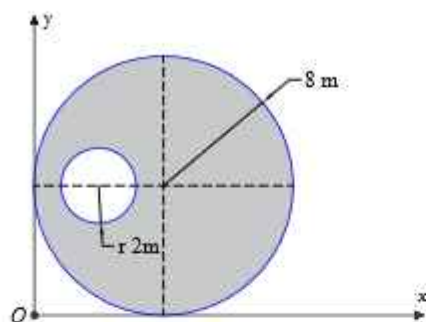


Figura 5.132

5.98

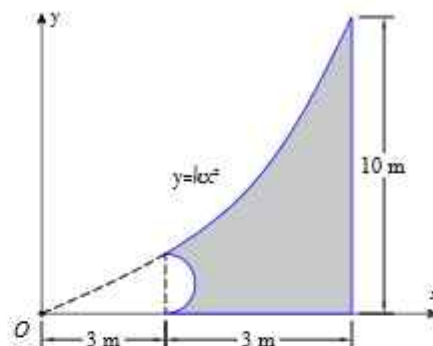


Figura 5.133

5.99

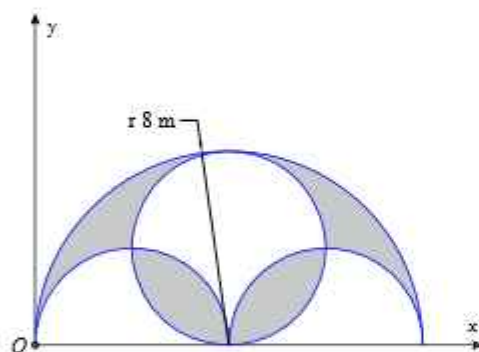


Figura 5.134

5.100

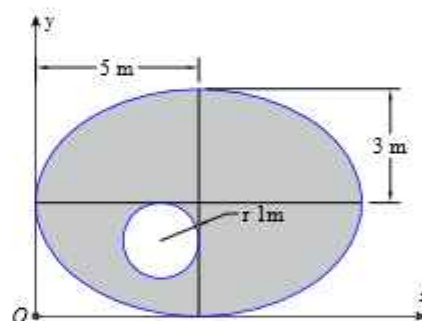


Figura 5.135

5.101

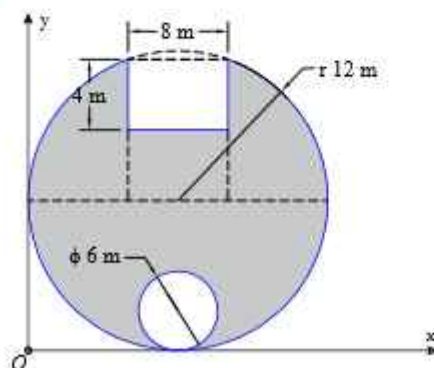


Figura 5.136

5.102

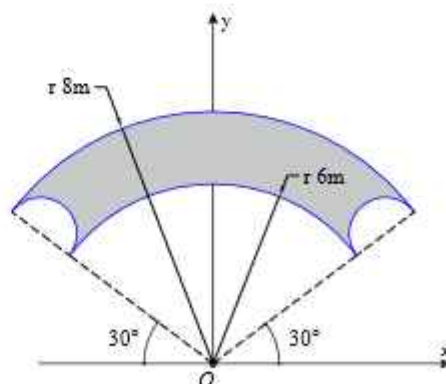


Figura 5.137

FUERZAS INTERNAS 6



6

FUERZAS INTERNAS

6.1. FUERZAS INTERNAS

Las “fuerzas internas” en un cuerpo rígido se refieren a las fuerzas y momentos que se desarrollan dentro de un cuerpo debido a la acción de las fuerzas externas y las restricciones impuestas a ese cuerpo. Estas fuerzas internas actúan en el interior de la estructura o cuerpo rígido y son el resultado de las interacciones entre las partículas o elementos que componen el cuerpo. **Las fuerzas externas** son las que actúan directamente sobre la superficie del cuerpo y se aplican desde el exterior, como las fuerzas aplicadas, las cargas y las reacciones en los apoyos. Estas fuerzas son relativamente fáciles de identificar y analizar. Por otro lado, **las fuerzas internas** no son directamente observables desde fuera del cuerpo y requieren un análisis más detallado. Estas fuerzas internas se desarrollan en respuesta a las fuerzas externas y las restricciones impuestas a la estructura. Las fuerzas internas incluyen:

- Fuerzas Axiales (N):** Son fuerzas que actúan a lo largo del eje de una estructura, ya sea de compresión (empujando hacia adentro) o de tensión (estirando hacia afuera).
- Fuerzas Cortantes (V):** Son fuerzas que actúan tangencialmente a través de una sección transversal de un elemento, causando que las partes de la estructura se deslicen entre sí.
- Momentos Internos (M):** Son momentos que provocan torsión o flexión en un elemento. Los momentos internos son responsables de la deformación y la flexión de una estructura.

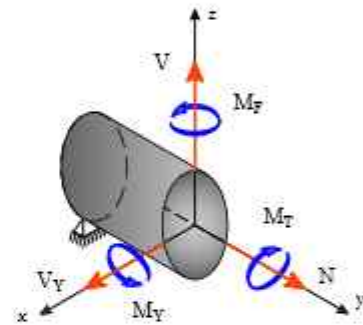


Figura 6.1:
Componentes rectangulares
de fuerzas internas en un
cuerpo rígido

6.1.1. RELACIÓN ENTRE CARGA-FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE

La relación entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector en una viga o una estructura sometida a flexión es fundamental para el análisis de dichas estructuras. Aquí te proporciono la relación y las ecuaciones que representan estas expresiones:

- **Carga (P):** La carga se refiere a la magnitud de la fuerza aplicada en un punto específico de la estructura. La carga puede ser una fuerza concentrada o una carga distribuida a lo largo de la longitud de la viga.
- **Fuerza Cortante (V):** La fuerza cortante es la fuerza que actúa perpendicularmente a la longitud de la viga y tiende a cortar la viga en una sección transversal dada.
- **Momento Flector (M):** El momento flector es el momento que tiende a hacer que la viga gire o se doble alrededor de su eje longitudinal. El momento flector puede ser positivo (curvatura en el sentido horario) o negativo (curvatura en el sentido antihorario).

Relación entre Carga, Fuerza Cortante y Momento Flector:

La relación entre carga, fuerza cortante (V) y momento flector (M) en una viga sometida a flexión se establece a través de las ecuaciones fundamentales de equilibrio y las relaciones de carga, fuerza cortante y momento flector en diferentes secciones de la viga. La relación general se expresa de la siguiente manera:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Donde:

- V es la fuerza cortante en un punto a lo largo de la viga.
- M es el momento flector en ese mismo punto.
- $\frac{dM}{dx}$ es la tasa de cambio del momento flector con respecto a la posición a lo largo de la viga.

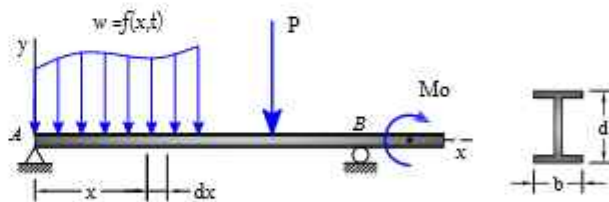
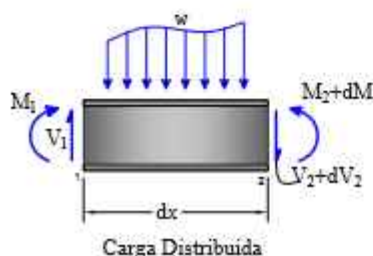
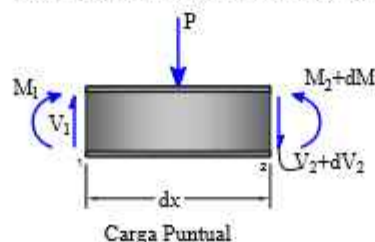


Figura 6.2: Viga sometida a cargas externas, donde dx es la diferencial de análisis para determinar las fuerzas internas en la viga



Análisis del tramo en estudio: considerando cada variación de carga.



Esta ecuación refleja cómo la fuerza cortante es la derivada del momento flector con respecto a la posición a lo largo de la viga. Esta relación es fundamental para el análisis de vigas y estructuras sometidas a flexión, ya que permite determinar cómo la carga aplicada y su distribución a lo largo de la viga generan fuerzas cortantes y momentos flectores en diferentes secciones de la estructura.

En resumen, la relación entre carga, fuerza cortante y momento flector en una estructura sometida a flexión se expresa a través de la ecuación $V = \frac{dM}{dx}$, que relaciona la tasa de cambio del momento flector con la fuerza cortante en la viga. Esta relación es fundamental en el análisis y diseño de estructuras en flexión.

Se puede facilitar trazar los diagramas de la cortante y momento flexionante al usar las relaciones diferenciales básicas que existe entre las cargas, las fuerzas cortantes y momentos flectores:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 / \quad V - w \cdot dx - (V + dv) &= 0 \\ dv &= w \cdot dx \\ \frac{dv}{dx} &= w \end{aligned}$$

Donde dv/dx pendiente del diagrama de fuerza cortante.

Pendiente del diagrama de fuerza cortante en un punto = Intensidad de la carga distribuida en ese punto

Ademas, se cumple:

$$V = \int w dx$$

Cambio en la cortante entre los puntos A y B = Área debajo del diagrama de cargas distribuidas entre los puntos A y B.

$$\begin{aligned} -M + w \cdot x \cdot \frac{dx}{2} - (v + dv) \cdot dx + (M + dM) &= 0 \\ dM &= V dx \\ \frac{dM}{dx} &= V \end{aligned}$$

Ademas, se cumple:

Pendiente del diagrama de momento flexionante en el punto = Cortante en ese punto.

$$\frac{dM}{dx} = \int v dx$$

Además, se cumple:

Cambio en el momento flexionante entre los puntos = Área debajo del diagrama de la cortante entre dos puntos.

Procedimiento de Análisis para Determinar las Fuerzas Internas:

El procedimiento de análisis para determinar las fuerzas internas en una estructura, como una viga o un marco, generalmente implica seguir estos pasos:

- a) **Dibujo de la Estructura:** Comienza por dibujar un esquema claro de la estructura que deseas analizar, identificando las ubicaciones y magnitudes de todas las cargas aplicadas y las condiciones de apoyo. Esto incluye fuerzas concentradas, momentos aplicados y cargas distribuidas.
- b) **Selección de Sección:** Elige una sección específica de la estructura en la que desees analizar las fuerzas internas. Esta sección debe ser lo suficientemente pequeña como para considerarla como un cuerpo rígido. Puedes seleccionar múltiples secciones a lo largo de la estructura si es necesario.
- c) **Diagrama de Cuerpo Libre:** Dibuja un diagrama de cuerpo libre de la sección elegida. Esto implica representar todas las fuerzas y momentos actuando en la sección, incluyendo las cargas aplicadas, las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas desconocidas (fuerza cortante y momento flector).
- d) **Aplicación de Equilibrio:** Utiliza las ecuaciones de equilibrio (suma de fuerzas en x, suma de fuerzas en y y suma de momentos) para resolver el sistema de ecuaciones y encontrar las fuerzas internas desconocidas. Esto implica:
 - Sumar las fuerzas en dirección horizontal y vertical igual a cero.
 - Sumar los momentos alrededor de un punto igual a cero (generalmente al punto donde sea más conveniente).
- e) **Definición de Signos:** Establece un sistema de signos consistente para las fuerzas internas (fuerza cortante y momento flector) a lo largo de la sección. Por lo general, se adopta una convención de signos positivos para simplificar el análisis.
- f) **Cálculo de Fuerza Cortante y Momento Flector:** Utiliza las ecuaciones de equilibrio para calcular la fuerza cortante y el momento flector en la sección seleccionada. Estos valores son las fuerzas internas que actúan en la estructura en ese punto.

- g) **Repetir para Otras Secciones:** Si es necesario analizar varias secciones a lo largo de la estructura, repite los pasos 3 a 6 para cada sección, teniendo en cuenta las cargas y condiciones de apoyo específicas en cada una.
- g) **Dibujar Diagramas de Fuerza Interna:** Una vez que hayas calculado las fuerzas internas en todas las secciones relevantes, puedes dibujar diagramas de fuerza interna que muestren cómo varían la fuerza cortante y el momento flector a lo largo de la estructura.
- g) **Interpretación de Resultados:** Examina los diagramas de fuerza interna para comprender cómo se distribuyen las fuerzas cortantes y los momentos flexores en la estructura y cómo afectan su comportamiento.

6.1.2. DIAGRAMAS DE FUERZA AXIAL, CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR PARA PÓRTICOS SIMPLES

El análisis-Determinación de las fuerzas internas conlleva a mismo procedimiento que para vigas. Entonces, el procedimiento en mención determina las fuerzas axiales, cortante y momentos flexores para estructuras en el plano estáticamente determinados.

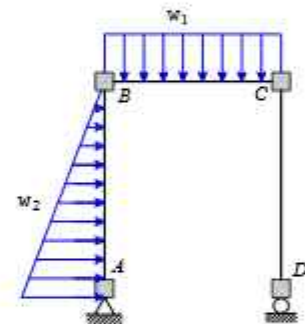
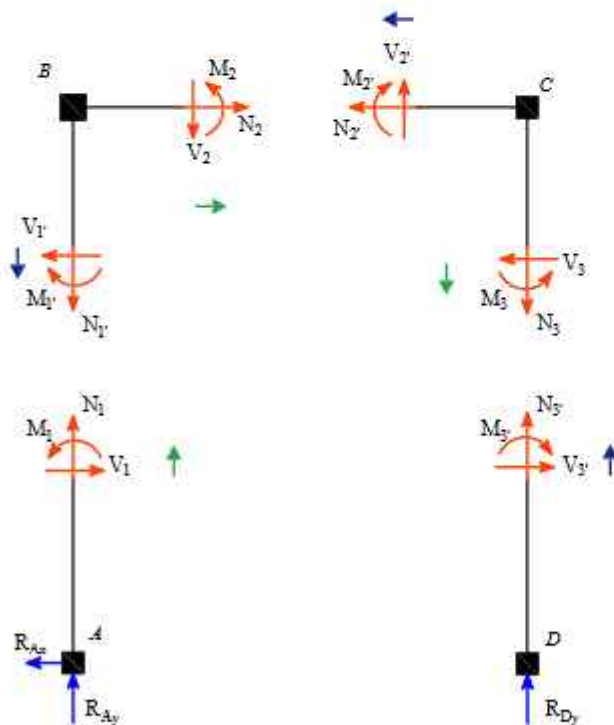
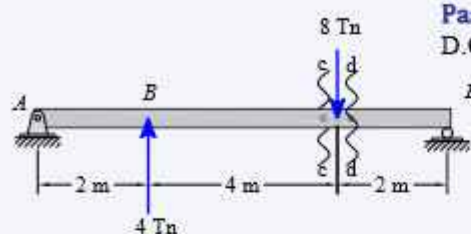


Figura 6.3: Pórtico discretizado en sus componentes de fuerzas internas para todos sus elementos del pórtico

6.1.3. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 6.1.3.1

Determinar la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante sobre los puntos C y D de la viga que se muestra en la figura.



(a)

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.4 (b).

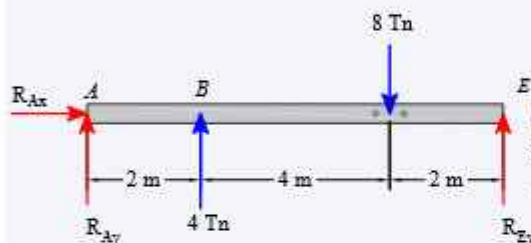
$$\Rightarrow \sum M_A = 0; \quad 4 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} - 8 \text{ Tn} \cdot 6 \text{ m} + R_{Ey} \cdot 8 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ey} = \frac{-4 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} + 8 \text{ Tn} \cdot 6 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 5 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} + 0 = 0 \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + 4 \text{ Tn} + R_{Ey} - 8 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} = 8 \text{ Tn} - R_{Ey} - 4 \text{ Tn} = -1 \text{ Tn}$$



(b)

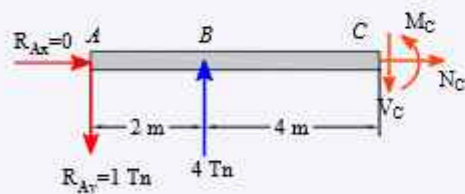
Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Segmento AC**, usando el D.C.L. de la figura 6.4 (c).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_C + R_{Ax} = 0 \quad N_C = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -R_{Ay} - V_C + 4 \text{ Tn} = 0$$

$$V_C = 4 \text{ Tn} - R_{Ay} = 3 \text{ Tn}$$



(c)

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0; \quad R_{Ay}(6 \text{ m}) - 4 \text{ Tn}(4 \text{ m}) + M_C = 0$$

$$M_C = -R_{Ay} \cdot (6 \text{ m}) + 4 \text{ Tn} \cdot (4 \text{ m}) = 10 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- **Segmento AD**, usando el D.C.L. de la figura 6.4 (d).

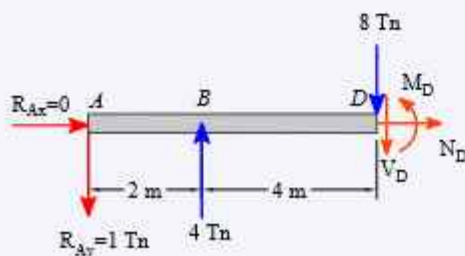
$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_D + R_{Ax} = 0 \quad N_D = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -R_{Ay} - 8 \text{ Tn} - V_D + 4 \text{ Tn} = 0$$

$$V_D = -R_{Ay} - 8 \text{ Tn} + 4 \text{ Tn} = -5 \text{ Tn}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0; \quad R_{Ay} \cdot (6 \text{ m}) - 4 \text{ Tn}(4 \text{ m}) + M_D = 0$$

$$M_D = -R_{Ay} \cdot (6 \text{ m}) + 4 \text{ Tn} \cdot (4 \text{ m}) = 10 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



(d)

CONTINUACIÓN

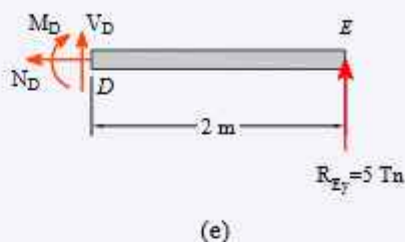
- Segmento ED, usando el D.C.L. de la figura 6.4 (e).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_D = 0 \quad N_D := 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{E_y} + V_D = 0 \quad V_D := -R_{E_y} = -5 \text{ Tn}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0; \quad R_{E_y} \cdot (2 \text{ m}) - M_D = 0$$

$$M_D := R_{E_y} \cdot (2 \text{ m}) = 10 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



- Segmento EC, usando el D.C.L. de la figura 6.4 (f).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_D = 0 \quad N_D := 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{E_y} + V_D - 8 \text{ Tn} = 0 \quad V_D := -R_{E_y} + 8 \text{ Tn} = 3 \text{ Tn}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0; \quad R_{E_y} \cdot (2 \text{ m}) - M_D = 0$$

$$M_C := R_{E_y} \cdot (2 \text{ m}) = 10 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

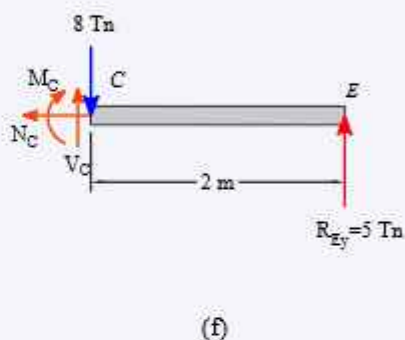
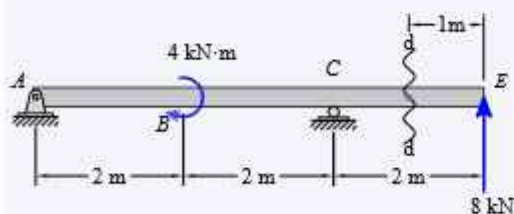


Figura 6.4

EJEMPLO RESUELTO 6.1.3.2

Determinar la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante sobre el punto D de la viga que se muestra en la figura.

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.5 (b).



(a)

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad 8 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} + R_{C_y} \cdot 4 \text{ m} - 4 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0$$

$$R_{C_y} := \frac{-8 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} + 4 \text{ kN} \cdot \text{m}}{4 \text{ m}} = -11 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{A_x} + 0 = 0$$

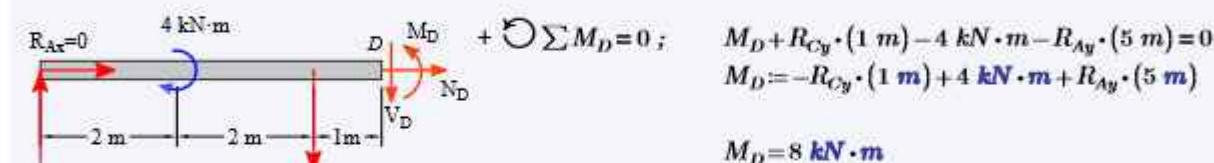
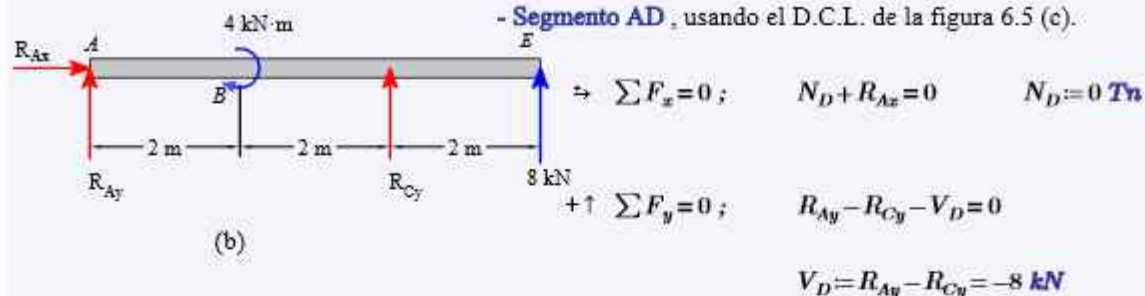
$$R_{A_x} := 0 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{A_y} + 8 \text{ kN} - R_{C_y} = 0$$

$$R_{A_y} := -8 \text{ kN} + R_{C_y} = 3 \text{ kN}$$

CONTINUACIÓN

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio



- Segmento ED, usando el D.C.L. de la figura 6.5 (d).

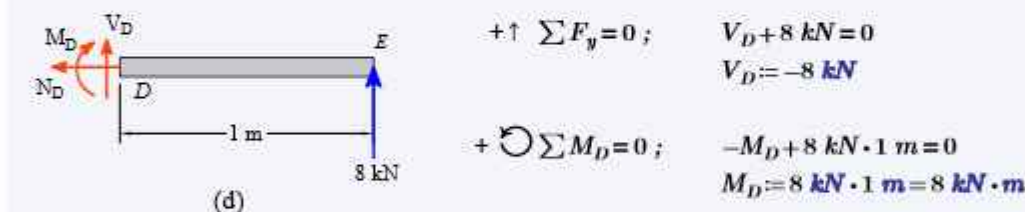


Figura 6.5

EJEMPLO RESUELTO 6.1.3.3

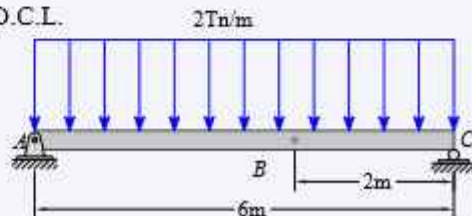
Determinar la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante sobre el punto B de la viga que se muestra en la figura.

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.6 (b).

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad -2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} + 6 \text{ m} \cdot R_{Cy} = 0$$

$$R_{Cy} = \frac{2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m} \cdot 3 \text{ m}}{6 \text{ m}} = 6 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$



(a)

CONTINUACIÓN

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Ay} + R_{Cy} - 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ay} := -R_{Cy} + 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m}$$

$$R_{Ay} = 6 \text{ Tn}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Segmento AB**, usando el D.C.L. de la figura 6.6 (c).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad N_B + R_{Ax} = 0$$

$$N_B := -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad -V_B - 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} + R_{Ay} = 0$$

$$V_B := -2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} + R_{Ay}$$

$$V_B = -2 \text{ Tn}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 ; \quad M_B + 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} - R_{Ay} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$M_B := -2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} + R_{Ay} \cdot 4 \text{ m}$$

$$M_B = 8 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- **Segmento CB**, usando el D.C.L. de la figura 6.6 (d).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad -N_B = 0 \quad N_B := 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad V_B - 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 2 \text{ m} + R_{Cy} = 0$$

$$V_B := 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 2 \text{ m} - R_{Cy}$$

$$V_B = -2 \text{ Tn}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 ; \quad -M_B - 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + R_{Cy} \cdot 2 \text{ m}$$

$$M_B := -2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + R_{Cy} \cdot 2 \text{ m}$$

$$M_B = 8 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} N_B \\ V_B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

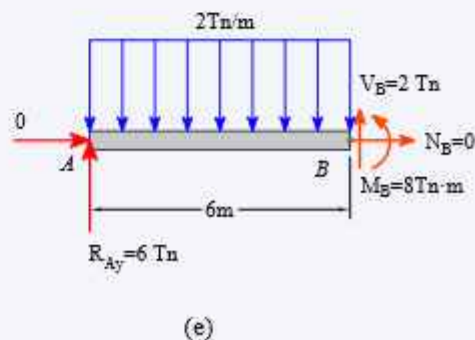
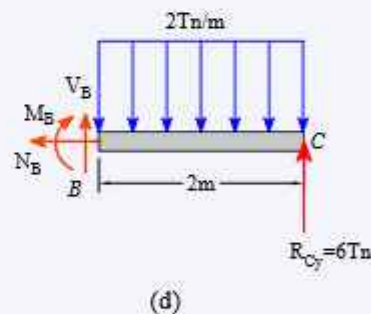
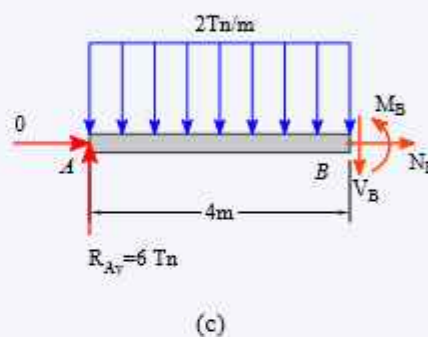
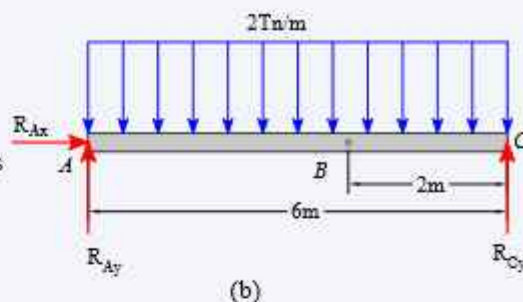
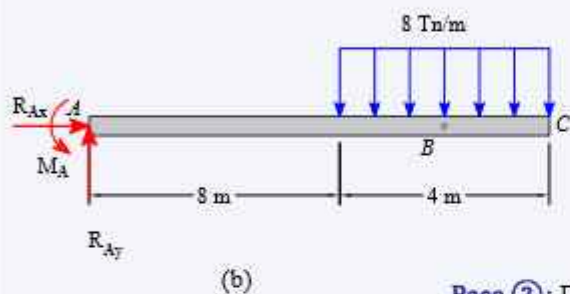
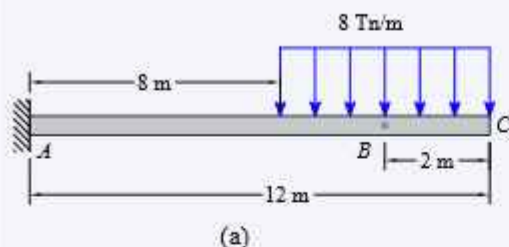


Figura 6.6

EJEMPLO RESUELTO 6.1.3.4

Determinar la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante sobre el punto B de la viga que se muestra en la figura.



Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.7 (b).

$$w := 8 \frac{\text{Tn}}{\text{m}}$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_A = 0 ; \quad M_A - w \cdot 4 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 0$$

$$M_A = w \cdot 4 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 320 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad R_{Ax} + 0 = 0$$

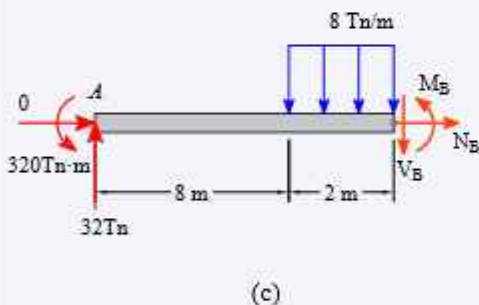
$$R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Ay} - w \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ay} = w \cdot 4 \text{ m} = 32 \text{ Tn}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Segmento AB**, usando el D.C.L. de la figura 6.7 (c).



$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B = 0 \text{ Tn}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Ay} - V_B - w \cdot 2 \text{ m} = 0$$

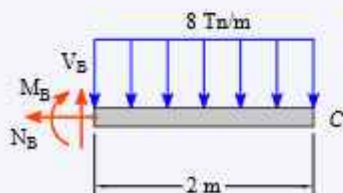
$$V_B = R_{Ay} - w \cdot 2 \text{ m} = 16 \text{ Tn}$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0 ; \quad M_B + M_A - R_{Ay} \cdot 10 \text{ m} + w \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$$

$$M_B = -M_A + R_{Ay} \cdot 10 \text{ m} - w \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$$

$$M_B = -16 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- **Segmento CB**, usando el D.C.L. de la figura 6.7 (d).



$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad N_B = 0 \quad N_B = 0 \text{ Tn}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 ; \quad V_B - w \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$V_B = w \cdot 2 \text{ m} = 16 \text{ Tn}$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0 ; \quad -M_B - w \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 0$$

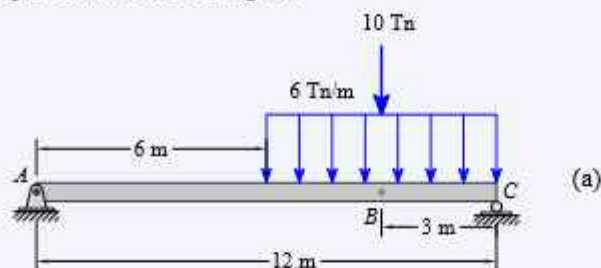
$$M_B = -w \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$$

$$M_B = -16 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Figura 6.7

EJEMPLO RESUELTO 6.1.3.5

Determinar la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante sobre el punto B de la viga que se muestra en la figura.



Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.8 (b).

$$w = 6 \frac{\text{Tn}}{\text{m}}$$

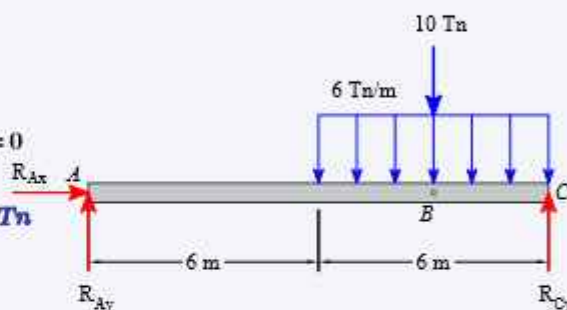
$$\oplus \sum M_A = 0; \quad R_{Cy}(12 \text{ m}) - w \cdot 6 \text{ m} \cdot 9 \text{ m} - 10 \text{ Tn} \cdot 9 \text{ m} = 0$$

$$R_{Cy} := \frac{w \cdot 6 \text{ m} \cdot 9 \text{ m} + 10 \text{ Tn} \cdot 9 \text{ m}}{12 \text{ m}} = 34.5 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} + 0 = 0 \quad R_{Ax} := 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Cy} - w \cdot 6 \text{ m} - 10 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} := -R_{Cy} + w \cdot 6 \text{ m} + 10 \text{ Tn} = 11.5 \text{ Tn}$$



(b)

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Segmento AB**, usando el D.C.L. de la figura 6.8 (c), antes de la fuerza F

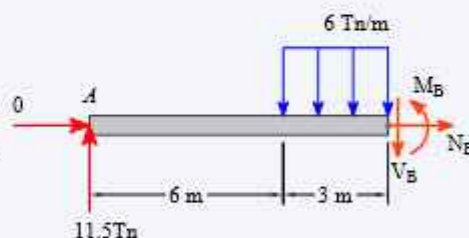
$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B := 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - V_B - w \cdot 3 \text{ m} = 0$$

$$V_B := R_{Ay} - w \cdot 3 \text{ m} = -6.5 \text{ Tn}$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad M_B - R_{Ay} \cdot 9 \text{ m} + w \cdot 3 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} = 0$$

$$M_B := R_{Ay} \cdot 9 \text{ m} - w \cdot 3 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} = 76.5 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



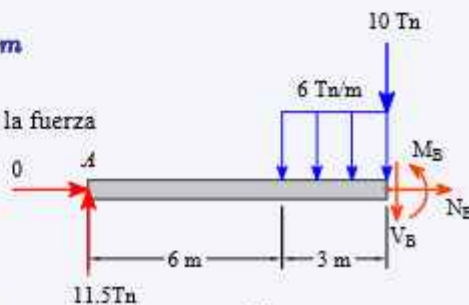
(c)

- **Segmento AB**, usando el D.C.L. de la figura 6.8 (d), después de la fuerza F

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B = 0 \quad N_D := 0 \text{ Tn}$$

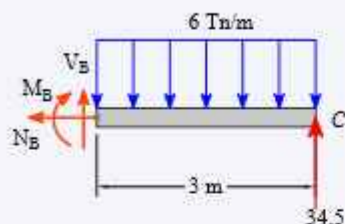
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - V_B - w \cdot 3 \text{ m} - 10 \text{ Tn} = 0$$

$$V_B := R_{Ay} - w \cdot 3 \text{ m} - 10 \text{ Tn} = -16.5 \text{ Tn}$$



(d)

CONTINUACIÓN



(e)

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad M_B - R_{Ay} \cdot 9 \text{ m} + w \cdot 3 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} = 0$$

$$M_B = R_{Ay} \cdot 9 \text{ m} - w \cdot 3 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} = 76.5 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- Segmento CB, usando el D.C.L. de la figura 6.8 (e), antes de la fuerza F

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B = 0 \quad N_D = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Cy} + V_B - w \cdot 3 \text{ m} = 0$$

$$V_B = -R_{Cy} + w \cdot 3 \text{ m} = -16.5 \text{ Tn}$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad -M_B + R_{Cy} \cdot 3 \text{ m} - w \cdot 3 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} = 0$$

$$M_B = R_{Cy} \cdot 3 \text{ m} - w \cdot 3 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} = 76.5 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- Segmento CB, usando el D.C.L. de la figura 6.8 (f), después de la fuerza F

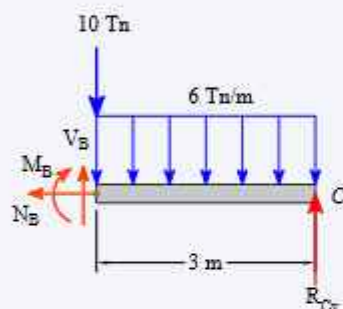
$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B = 0 \quad N_D = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Cy} + V_B - w \cdot 3 \text{ m} - 10 \text{ Tn} = 0$$

$$V_B = -R_{Cy} + w \cdot 3 \text{ m} + 10 \text{ Tn} = -6.5 \text{ Tn}$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad -M_B + R_{Cy} \cdot 3 \text{ m} - w \cdot 3 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} = 0$$

$$M_B = R_{Cy} \cdot 3 \text{ m} - w \cdot 3 \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m} = 76.5 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



(f)

Figura 6.8

EJEMPLO RESUELTO 6.1.3.6

Determinar la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante sobre el punto B de la viga que se muestra en la figura.

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.9 (b).

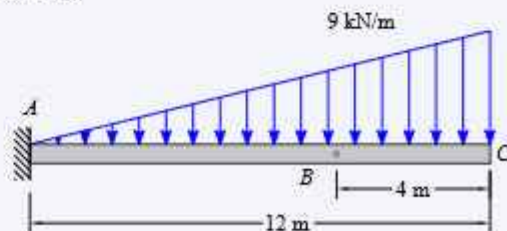
$$w = 9 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad M_A - \frac{w \cdot 12 \text{ m}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \text{ m} = 0$$

$$M_A = \frac{w \cdot 12 \text{ m}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \text{ m} = 432 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} + 0 = 0$$

$$R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$



(a)

CONTINUACIÓN

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Ay} - \frac{w \cdot 12 \text{ m}}{2} = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{w \cdot 12 \text{ m}}{2} = 54 \text{ kN}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Segmento AB**, usando el D.C.L. de la figura 6.9 (c).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B = 0 \text{ Tn}$$

$$\frac{w}{12} = \frac{w_n}{8} \quad w_n = \frac{w \cdot 8}{12} = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Ay} - V_B - w \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$V_B = R_{Ay} - \frac{w_n \cdot 8 \text{ m}}{2} = 30 \text{ kN}$$

$$\oplus \sum M_B = 0 ; \quad M_B + M_A - R_{Ay} \cdot 8 \text{ m} + \frac{w_n \cdot 8 \text{ m}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \text{ m}$$

$$M_B = -M_A + R_{Ay} \cdot 8 \text{ m} - \frac{w_n \cdot 8 \text{ m}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \text{ m}$$

$$M_B = -64 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- **Segmento BC**, usando el D.C.L. de la figura 6.9 (d).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad N_B = 0 \quad N_B = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad V_B - w_n \cdot 4 \text{ m} - \frac{(w - w_n) \cdot 4 \text{ m}}{2} = 0$$

$$V_B = w_n \cdot 4 \text{ m} + \frac{(w - w_n) \cdot 4 \text{ m}}{2} = 30 \text{ kN}$$

$$\oplus \sum M_B = 0 ; \quad -M_B - w_n \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} - \frac{(w - w_n) \cdot 4 \text{ m}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$M_B = -w_n \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} - \frac{(w - w_n) \cdot 4 \text{ m}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \text{ m}$$

$$M_B = -64 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

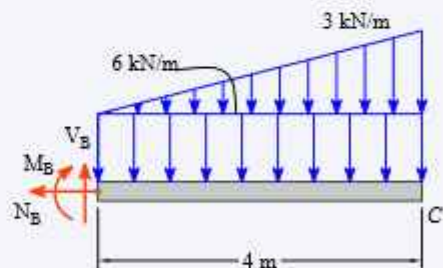
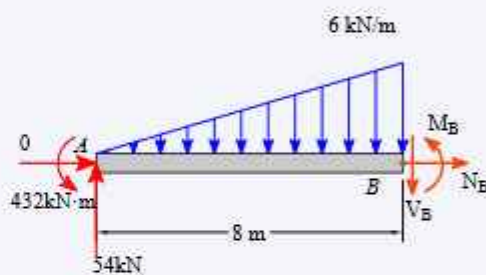
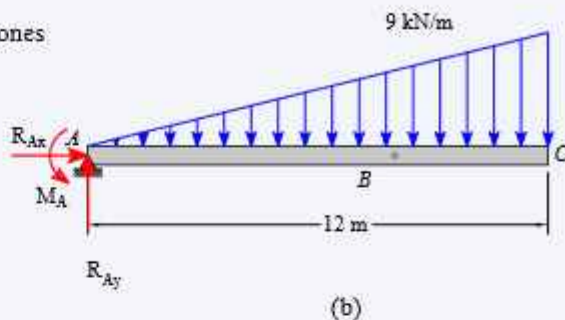
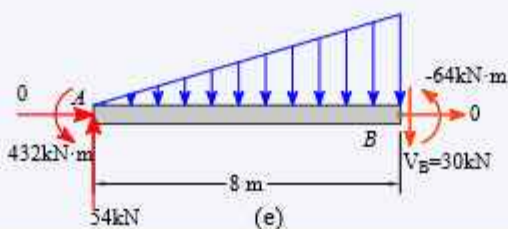
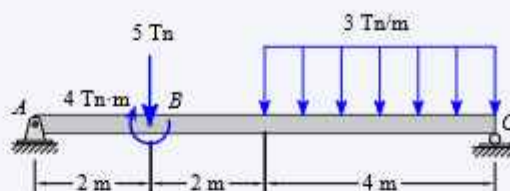


Figura 6.9



EJEMPLO RESULTO 6.1.3.7

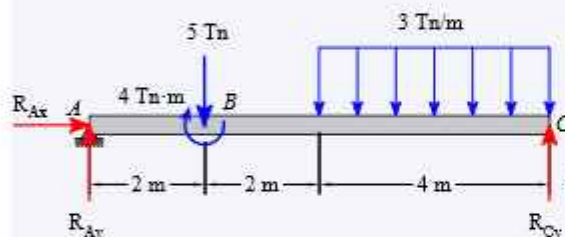
Determinar la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante sobre el punto B de la viga que se muestra en la figura.



(a)

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.10 (b).

$$\begin{aligned}
 + \circlearrowleft \sum M_A = 0; \\
 -5 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} - 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot (6 \text{ m}) + R_{Cy} \cdot 8 \text{ m} - 4 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 0 \\
 R_{Cy} := \frac{5 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} + 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot (6 \text{ m}) + 4 \text{ Tn} \cdot \text{m}}{8 \text{ m}} = 10.75 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} := 0 \text{ Tn}$$

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Cy} - 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} - 5 \text{ Tn} = 0 \\
 R_{Ay} := -R_{Cy} + 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} + 5 \text{ Tn} \\
 R_{Ay} = 6.25 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

(b)

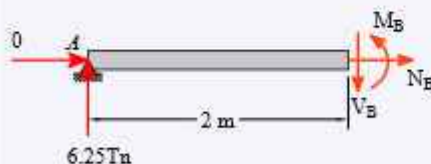
Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Segmento AB**, usando el D.C.L. de la figura 6.10 (c).

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \\
 N_B := -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0; \quad -V_B + R_{Ay} = 0 \\
 V_B := R_{Ay} = 6.25 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad M_B - R_{Ay} \cdot 2 \text{ m} = 0 \\
 M_B := R_{Ay} \cdot 2 \text{ m} = 12.5 \text{ Tn} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$



(c)

- **Segmento BC**, usando el D.C.L. de la figura 6.10 (d).

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \\
 N_B := -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}
 \end{aligned}$$

CONTINUACIÓN

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -V_B + R_{Ay} - 5 \text{ Tn} = 0$$

$$V_B := R_{Ay} - 5 \text{ Tn} = 1.25 \text{ Tn}$$

$$\oplus \sum M_B = 0; \quad M_B - R_{Ay} \cdot 2 \text{ m} - 4 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 0$$

$$M_B := R_{Ay} \cdot 2 \text{ m} + 4 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 16.5 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- Segmento CB, usando el D.C.L. de la figura 6.10 (e).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0$$

$$N_B := -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_B + R_{Cy} - 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$V_B := -R_{Cy} + 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} = 1.25 \text{ Tn}$$

$$\oplus \sum M_B = 0; \quad -M_B + R_{Cy} \cdot 6 \text{ m} - 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$M_B := R_{Cy} \cdot 6 \text{ m} - 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 16.5 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- Segmento CB, usando el D.C.L. de la figura 6.10 (f).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0$$

$$N_B := -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_B + R_{Cy} - 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} - 5 \text{ Tn} = 0$$

$$V_B := -R_{Cy} + 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} + 5 \text{ Tn} = 6.25 \text{ Tn}$$

$$\oplus \sum M_B = 0; \quad -M_B + R_{Cy} \cdot 6 \text{ m} - 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} - 4 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 0$$

$$M_B := R_{Cy} \cdot 6 \text{ m} - 3 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} - 4 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 12.5 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

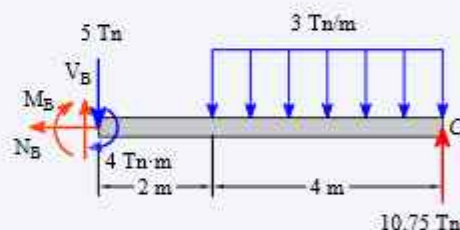
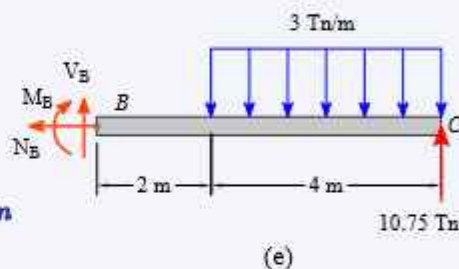
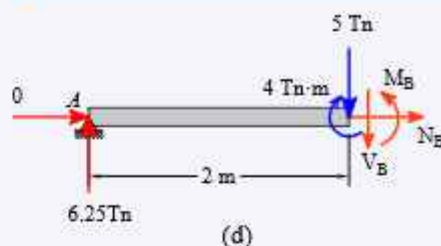
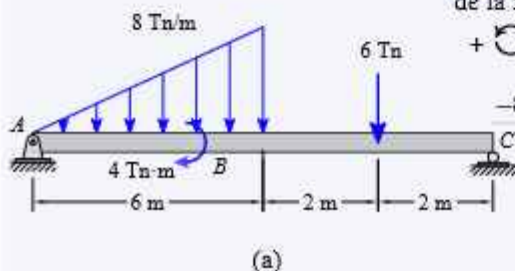


Figura 6.10

EJEMPLO RESULTO 6.1.3.8

Determinar la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante sobre el punto B de la viga que se muestra en la figura.

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.11 (b).



$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0;$$

$$-8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 \text{ m}\right) - 4 \text{ Tn} \cdot \text{m} - 6 \text{ Tn} \cdot 8 \text{ m} + R_{Cy} \cdot 10 \text{ m} = 0$$

$$R_{Cy} := \frac{8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 \text{ m}\right) + 4 \text{ Tn} \cdot \text{m} + 6 \text{ Tn} \cdot 8 \text{ m}}{10 \text{ m}}$$

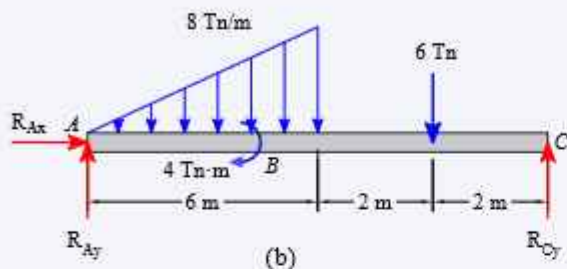
$$R_{Cy} = 14.8 \text{ Tn}$$

CONTINUACIÓN

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Cy} - \frac{8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m}}{2} - 6 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{Cy} + \frac{8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 6 \text{ m}}{2} + 6 \text{ Tn} = 15.2 \text{ Tn}$$



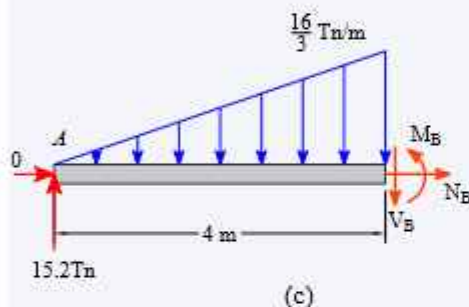
Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuación de equilibrio

- **Segmento AB**, usando el D.C.L. de la figura 6.11 (c), antes de la fuerza F

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B = -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -V_B + R_{Ay} - \frac{16}{6} \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$V_B = R_{Ay} - \frac{16}{6} \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} = 4.533 \text{ Tn}$$



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad -R_{Ay} \cdot 4 \text{ m} + \frac{16}{6} \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot \frac{4 \text{ m}}{3} + M_B = 0$$

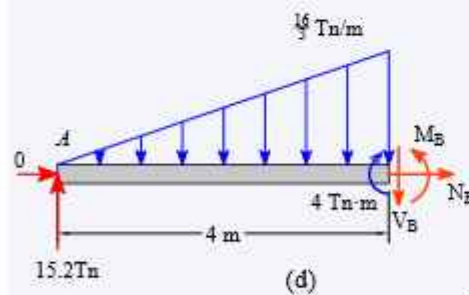
$$M_B = R_{Ay} \cdot 4 \text{ m} - \frac{16}{6} \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot \frac{4 \text{ m}}{3} = 46.578 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- **Segmento AB**, usando el D.C.L. de la figura 6.11 (d), después de la fuerza F

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B = -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -V_B + R_{Ay} - \frac{16}{6} \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$V_B = R_{Ay} - \frac{16}{6} \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} = 4.533 \text{ Tn}$$



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad -R_{Ay} \cdot 4 \text{ m} + \frac{16}{6} \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot \frac{4 \text{ m}}{3} + M_B - 4 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 0$$

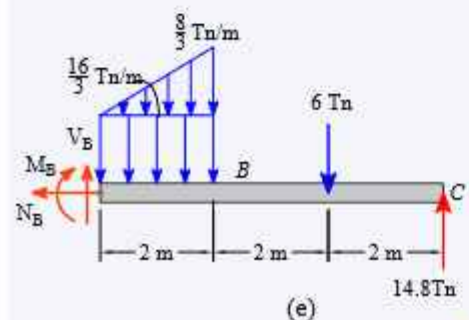
$$M_B = R_{Ay} \cdot 4 \text{ m} - \frac{16}{6} \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot \frac{4 \text{ m}}{3} + 4 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 50.578 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- **Segmento CB**, usando el D.C.L. de la figura 6.11 (e), antes de la fuerza F .

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B = -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_B + R_{Cy} - 6 \text{ Tn} - \frac{8}{6} \text{ Tn} \cdot 2 - \frac{16}{3} \text{ Tn} \cdot 2 = 0$$



CONTINUACIÓN

$$V_B = -R_{Cy} + 6 \text{ Tn} + \frac{8}{6} \text{ Tn} \cdot 2 + \frac{16}{3} \text{ Tn} \cdot 2 = 4.533 \text{ Tn}$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad -M_B + R_{Cy} \cdot 6 \text{ m} - 6 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} - \frac{8}{6} \text{ Tn} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \text{ m} - \frac{16}{3} \text{ Tn} \cdot 2 \cdot 1 \text{ m} = 0$$

$$M_B = R_{Cy} \cdot 6 \text{ m} - 6 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} - \frac{8}{6} \text{ Tn} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \text{ m} - \frac{16}{3} \text{ Tn} \cdot 2 \cdot 1 \text{ m} = 50.578 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

- Segmento CB, usando el D.C.L. de la figura 6.11 (f), después de la fuerza F:

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0$$

$$N_B = -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_B + R_{Cy} - 6 \text{ Tn} - \frac{8}{6} \text{ Tn} \cdot 2 - \frac{16}{3} \text{ Tn} \cdot 2 = 0$$

$$V_B = -R_{Cy} + 6 \text{ Tn} + \frac{8}{6} \text{ Tn} \cdot 2 + \frac{16}{3} \text{ Tn} \cdot 2 = 4.533 \text{ Tn}$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad -M_B + R_{Cy} \cdot 6 \text{ m} - 6 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} - \frac{8}{6} \text{ Tn} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \text{ m} - \frac{16}{3} \text{ Tn} \cdot 2 \cdot 1 \text{ m} - 4 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 0$$

$$M_B = R_{Cy} \cdot 6 \text{ m} - 6 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} - \frac{8}{6} \text{ Tn} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \text{ m} - \frac{16}{3} \text{ Tn} \cdot 2 \cdot 1 \text{ m} - 4 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 46.578 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

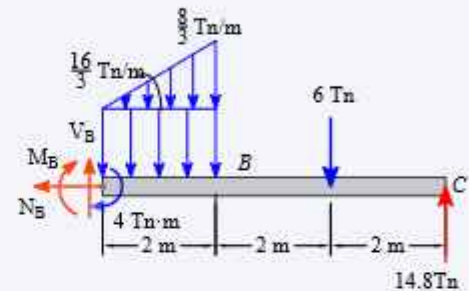
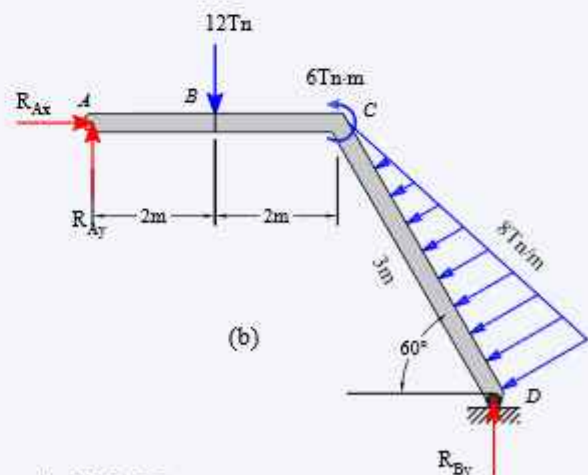
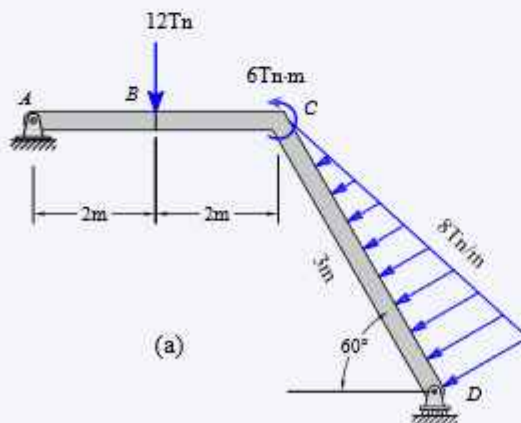


Figura 6.11

EJEMPLO RESULTO 6.1.3.9

Determinar la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante sobre el punto B de la viga que se muestra en la figura.



Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.12 (b).

$$+ \circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad -12 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} + 6 \text{ Tn} \cdot \text{m} - 12 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) \cdot 5 \text{ m} - 12 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) \cdot \sqrt{3} \text{ m} + R_{Dy} \cdot 5.5 \text{ m} = 0$$

CONTINUACIÓN

$$R_{Dy} = \frac{12 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} - 6 \text{ Tn} \cdot \text{m} + 12 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) \cdot 5 \text{ m} + 12 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) \cdot \sqrt{3} \text{ m}}{5.5 \text{ m}}$$

$$R_{Dy} = 12 \text{ Tn}$$

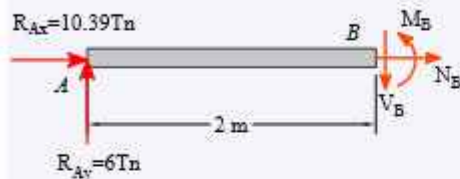
$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} - 12 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) = 0$$

$$R_{Ax} = 12 \text{ Tn} \cdot \cos(30^\circ) = 10.392 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - 12 \text{ Tn} - 12 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) + R_{Dy} = 0$$

$$R_{Ay} = 12 \text{ Tn} + 12 \text{ Tn} \cdot \sin(30^\circ) - R_{Dy}$$

$$R_{Ay} = 6 \text{ Tn}$$



(c)

Figura 6.12

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio.

- **Segmento AB**, usando el D.C.L. de la figura 6.12 (c), antes de la fuerza 12 Tn .

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0$$

$$N_B = -R_{Ax} = -10.392 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -V_B + R_{Ay} = 0$$

$$V_B = R_{Ay} = 6 \text{ Tn}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad -M_B + R_{Ay} \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$M_B = R_{Ay} \cdot 2 \text{ m} = 12 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en el punto B.

EJEMPLO RESUELTO 6.1.3.10

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. figura 6.13(b).13 (b).

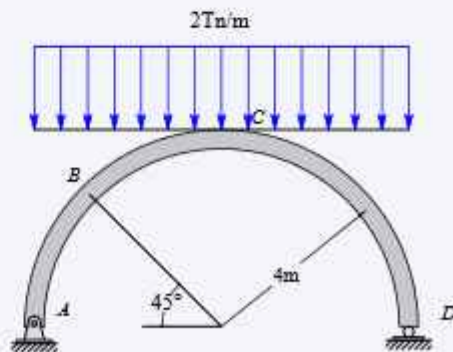
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad R_{Cy}(8 \text{ m}) - 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 8 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 0$$

$$R_{Cy} = \frac{2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 8 \text{ m} \cdot 4 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 8 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} + 0 = 0 \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Dy} - 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 8 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ay} = 2 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 8 \text{ m} - R_{Dy} = 8 \text{ Tn}$$



(a)

CONTINUACIÓN

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

figura 6.13(c).

- **Segmento AB**, usando el D.C.L. de la figura 6.13 (c),

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad N_B + 8 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ) = 0$$

$$N_B = -8 \text{ Tn} \cdot \cos(45^\circ)$$

$$N_B = -5.657 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad -V_B + 8 \sin(45^\circ) = 0$$

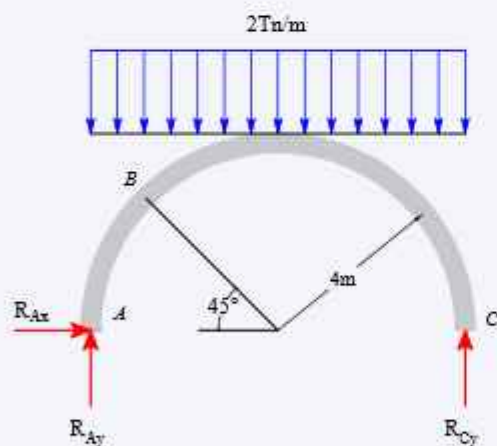
$$V_B = 8 \text{ Tn} \sin(45^\circ)$$

$$V_B = 5.657 \text{ Tn}$$

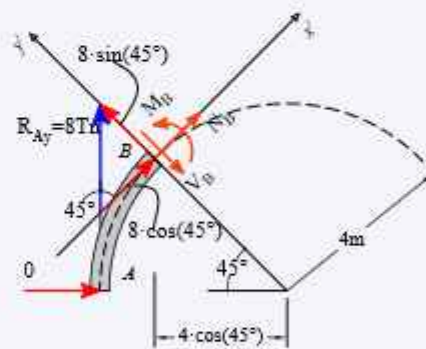
$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 ; \quad M_B - R_{Ay} \cdot (4 \text{ m} - 4 \text{ m} \cdot \cos(45^\circ)) = 0$$

$$M_B = R_{Ay} \cdot (4 \text{ m} - 4 \text{ m} \cdot \cos(45^\circ))$$

$$M_B = 9.373 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



(b)



(c)

Figura 6.13

6.1.4. EJERCICIOS PROPUESTOS

20 Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de la figura

Ejercicios

6.1

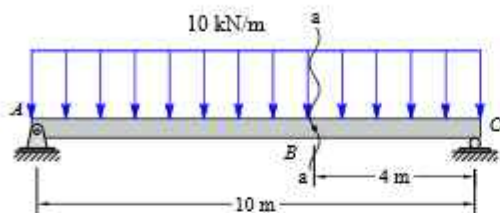


Figura 6.14

6.2

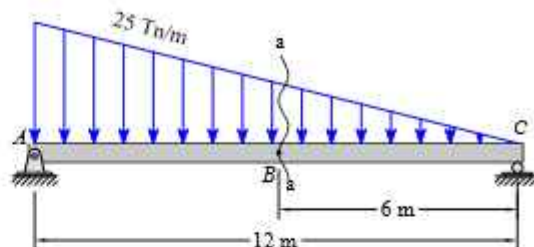


Figura 6.15

6.3

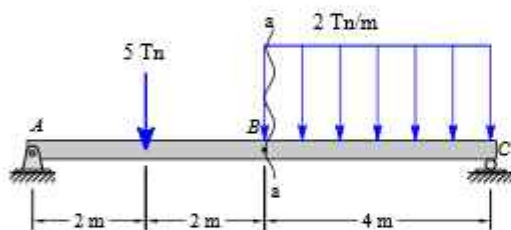


Figura 6.16

6.4

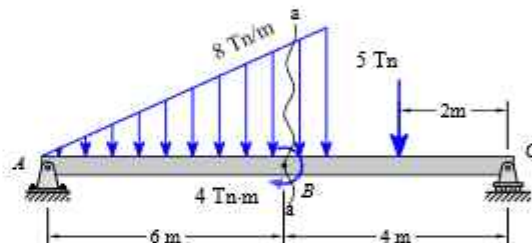


Figura 6.17

6.5

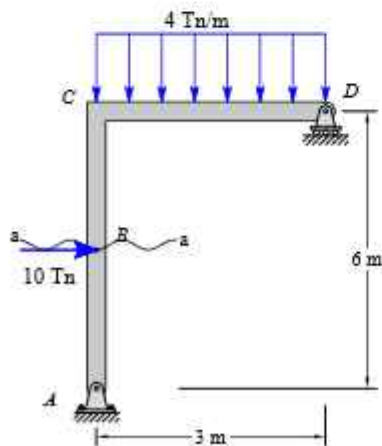


Figura 6.18

6.6

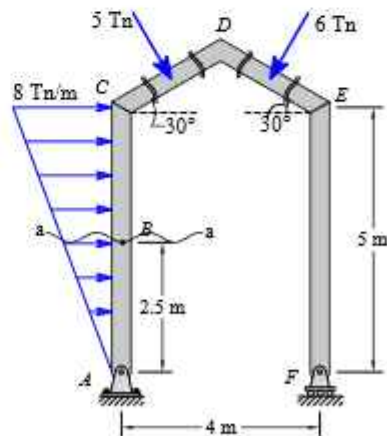


Figura 6.19

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.7

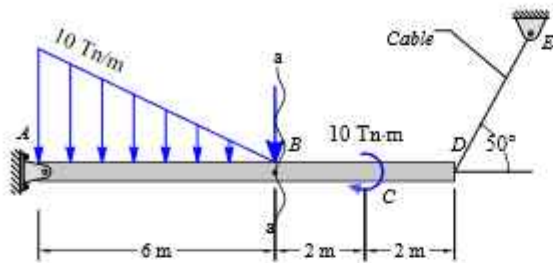


Figura 6.20

6.8

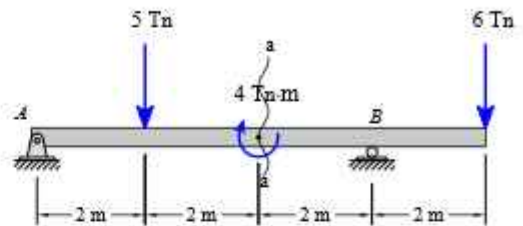


Figura 6.21

6.9

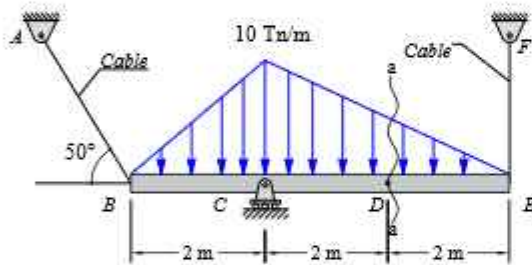


Figura 6.22

6.10

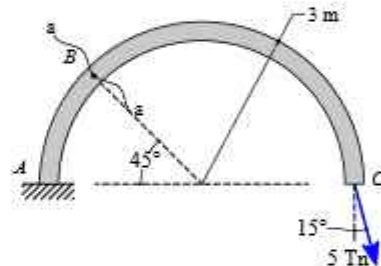


Figura 6.23

6.11

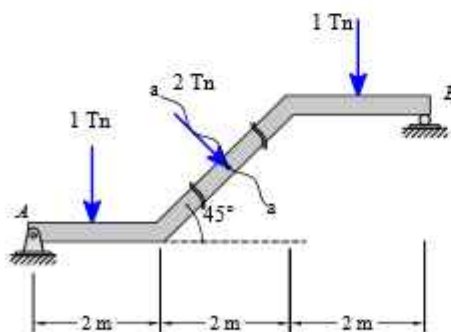


Figura 6.24

6.12

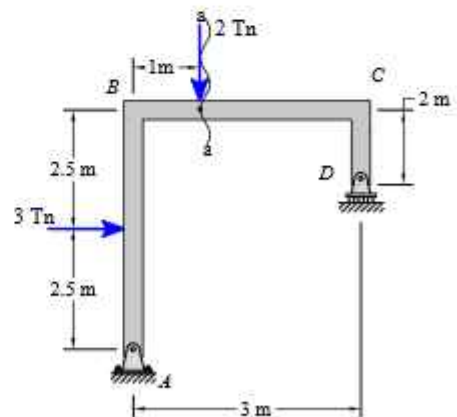


Figura 6.25

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.13

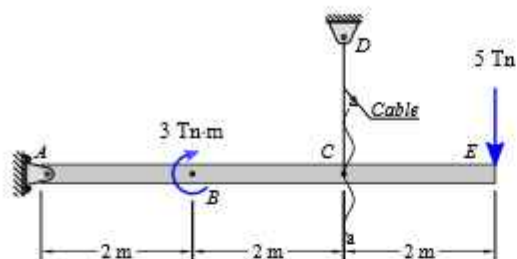


Figura 6.26

6.14

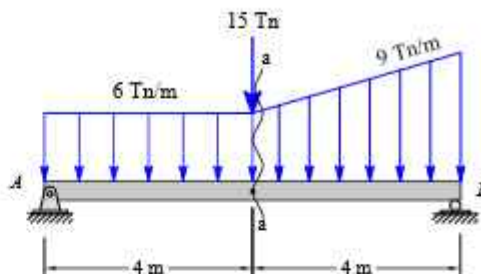


Figura 6.27

6.15

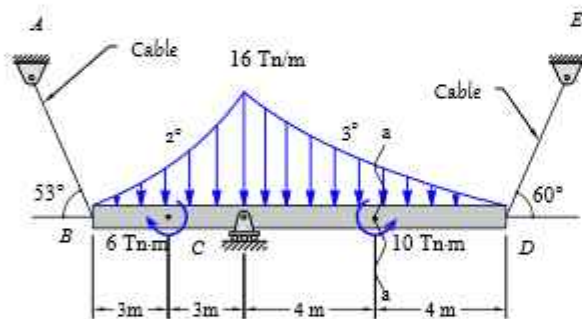


Figura 6.28

6.16

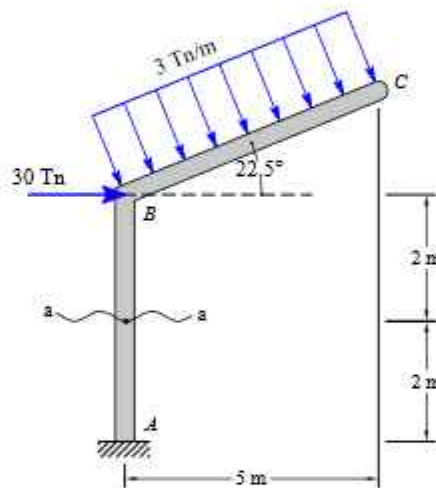


Figura 6.29

6.17

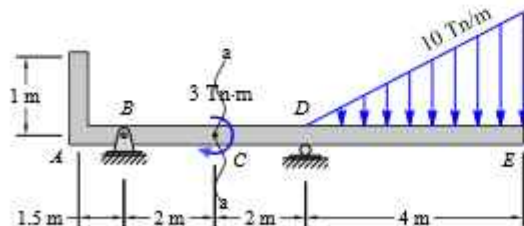


Figura 6.30

6.18

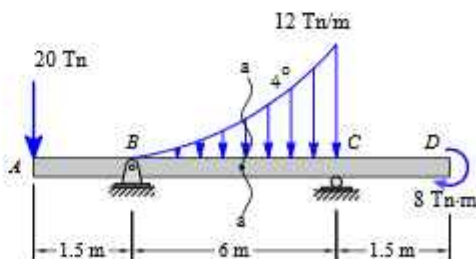


Figura 6.31

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras

de las siguientes figuras.

6.19

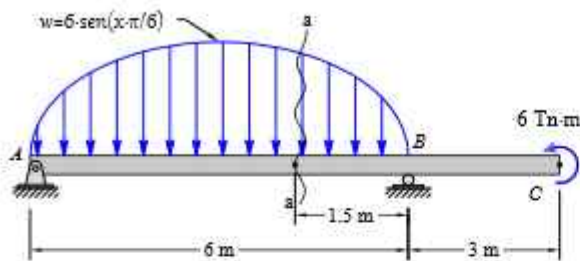


Figura 6.32

6.20

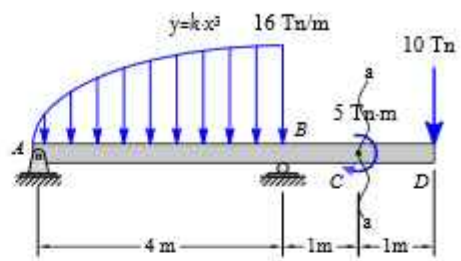


Figura 6.33

6.21

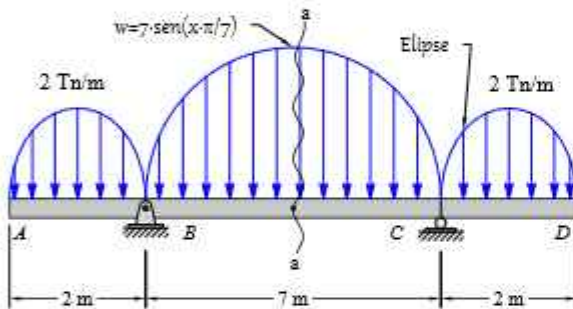


Figura 6.34

6.22

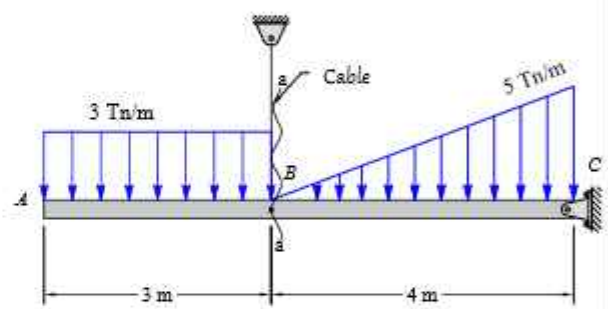


Figura 6.35

6.23

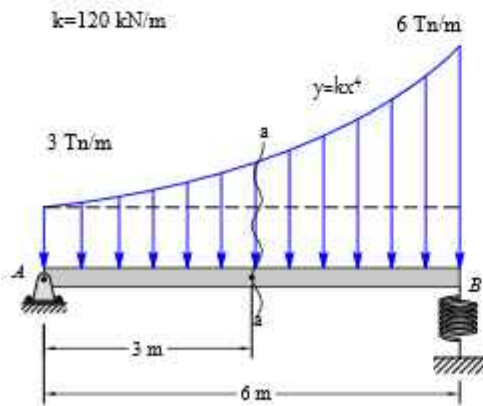


Figura 6.36

6.24

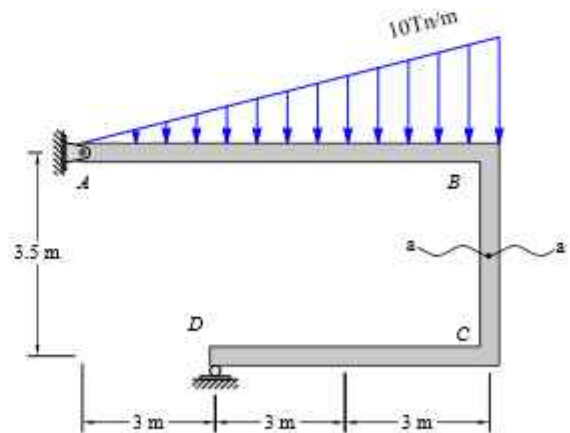


Figura 6.37

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B.

de las siguientes figuras.

6.25

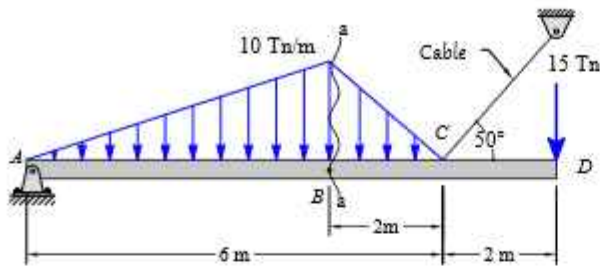


Figura 6.38

6.26

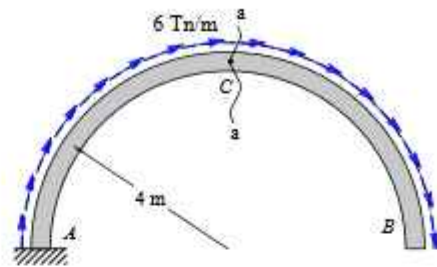


Figura 6.39

6.27

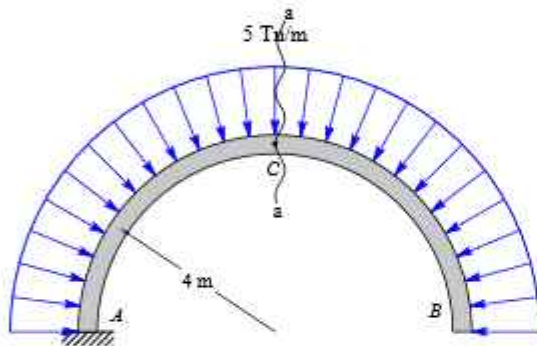


Figura 6.40

6.28

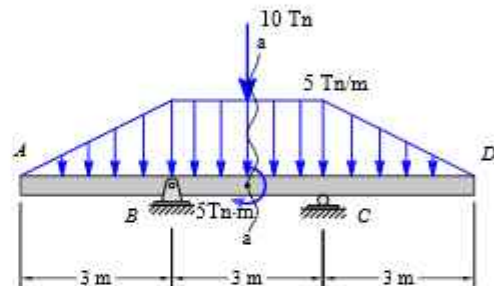


Figura 6.41

6.29

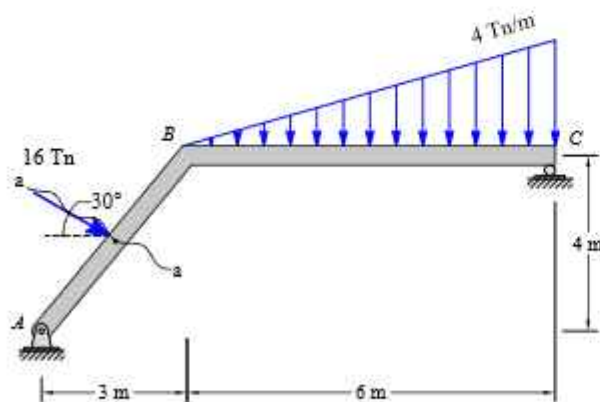


Figura 6.42

6.30

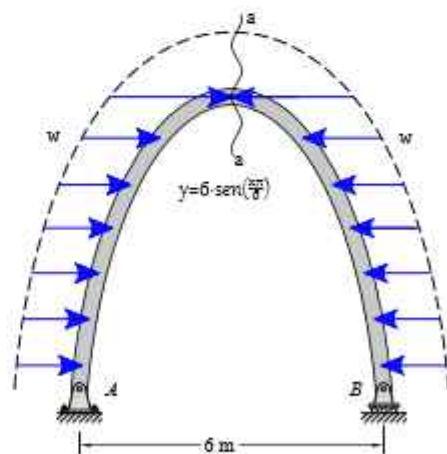


Figura 6.43

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.31

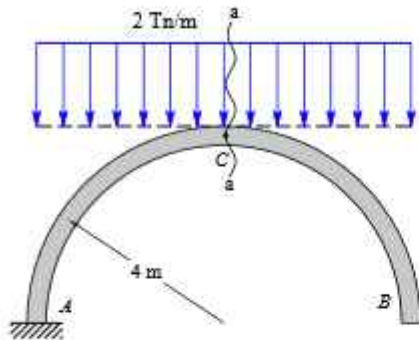


Figura 6.44

6.32

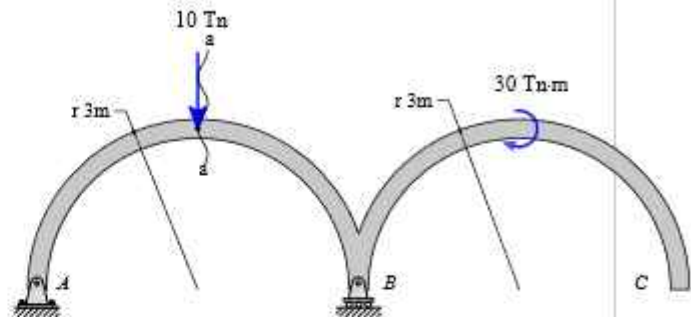


Figura 6.45

6.33

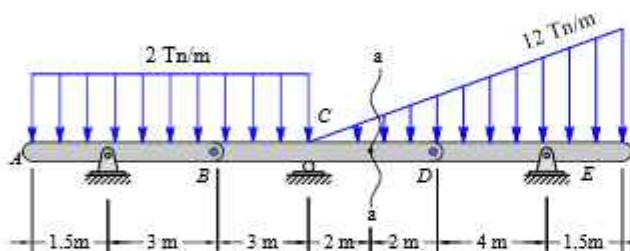


Figura 6.46

6.34

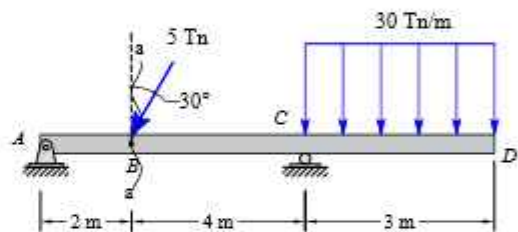


Figura 6.47

6.35

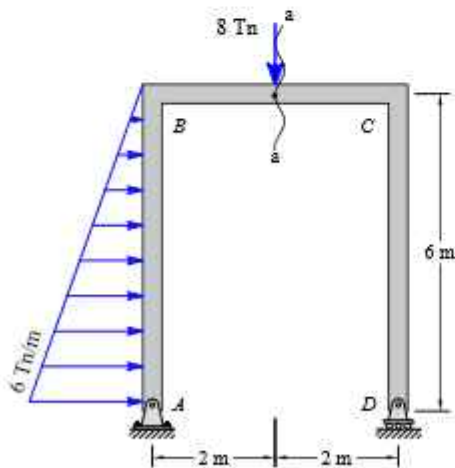


Figura 6.48

6.36

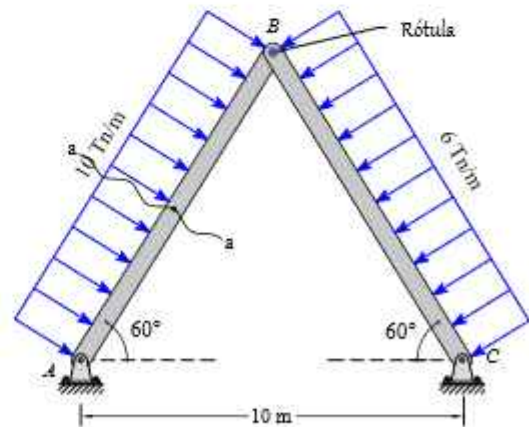


Figura 6.49

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.37

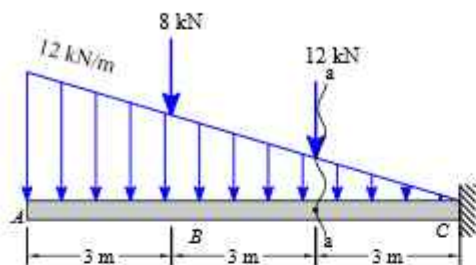


Figura 6.50

6.38

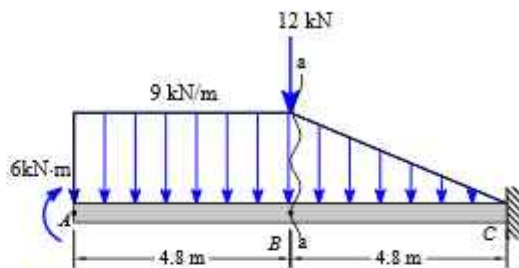


Figura 6.51

6.39

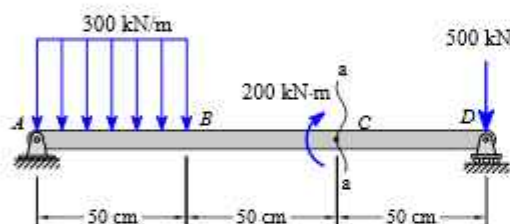


Figura 6.52

6.40

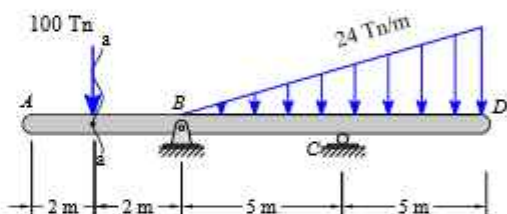


Figura 6.53

6.41

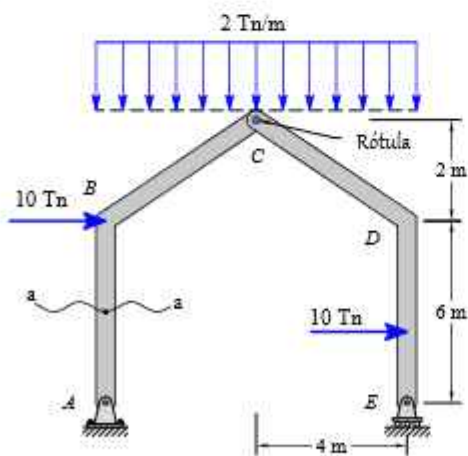


Figura 6.54

6.42

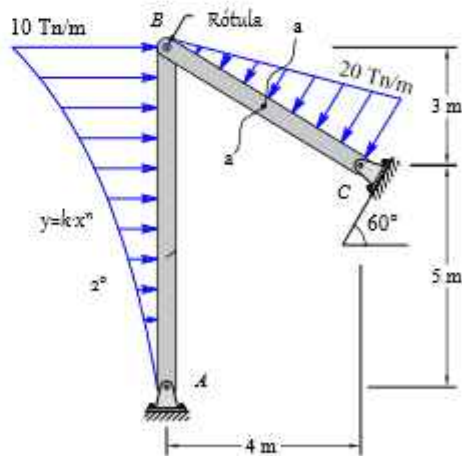


Figura 6.55

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.43

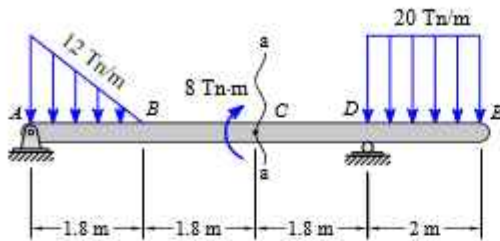


Figura 6.56

6.44

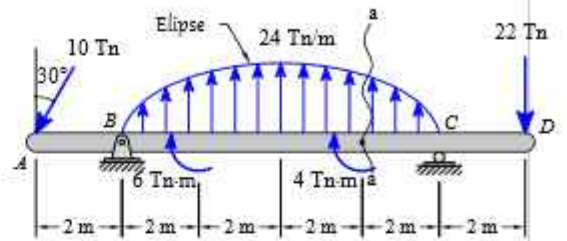


Figura 6.57

6.45

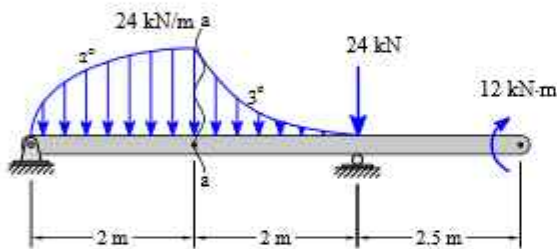


Figura 6.58

6.46

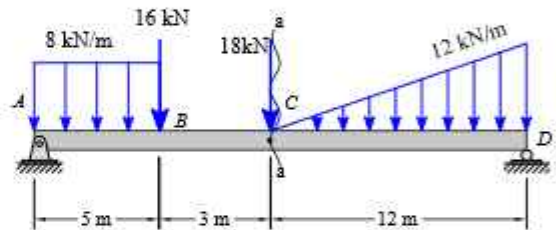


Figura 6.59

6.47

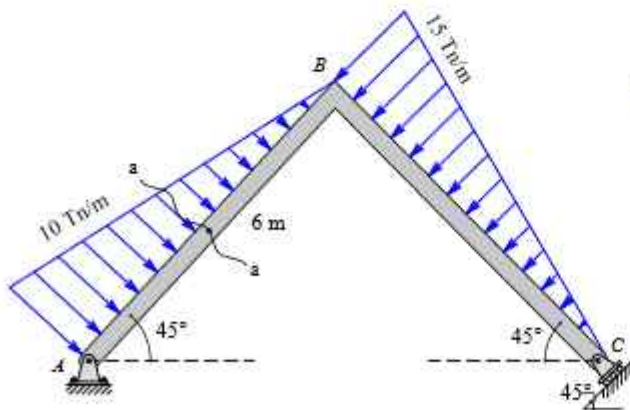


Figura 6.60

6.48

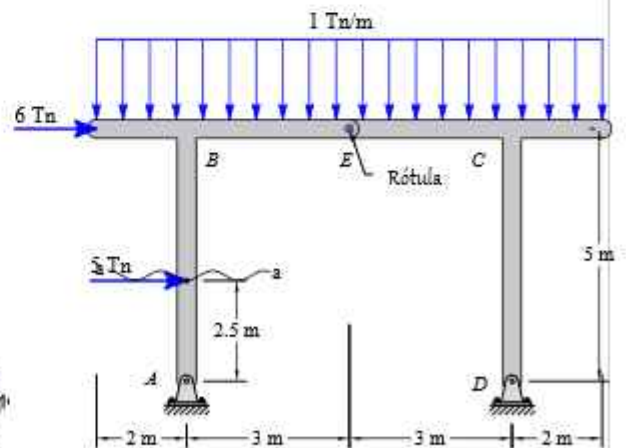


Figura 6.61

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.49

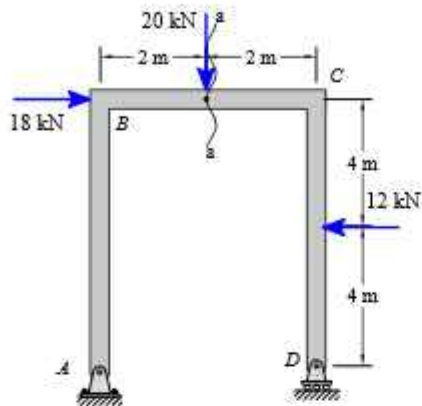


Figura 6.62

6.50

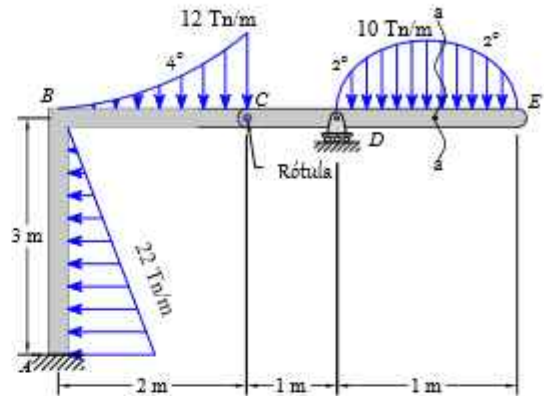


Figura 6.63

6.51

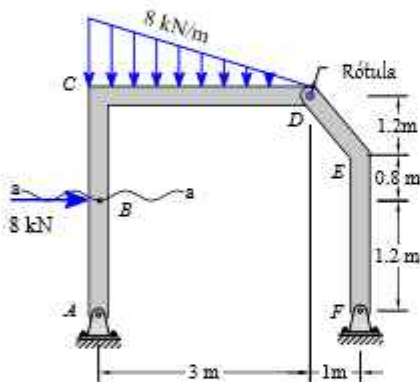


Figura 6.64

6.52

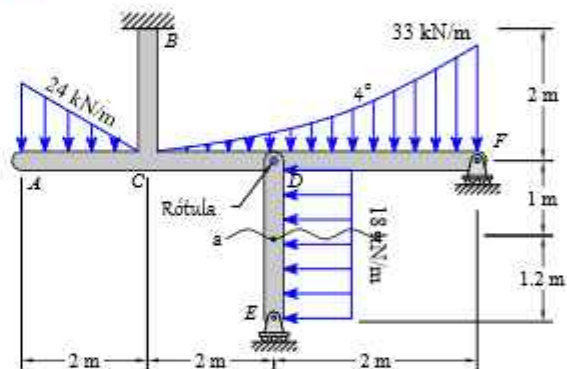


Figura 6.65

6.53

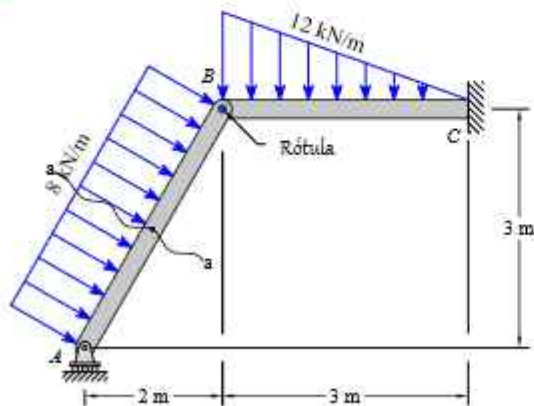


Figura 6.66

6.54

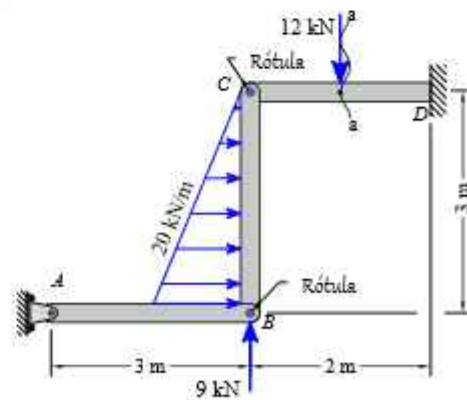


Figura 6.67

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.55

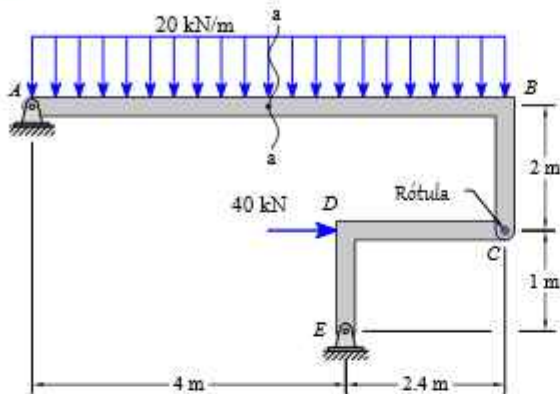


Figura 6.68

6.56

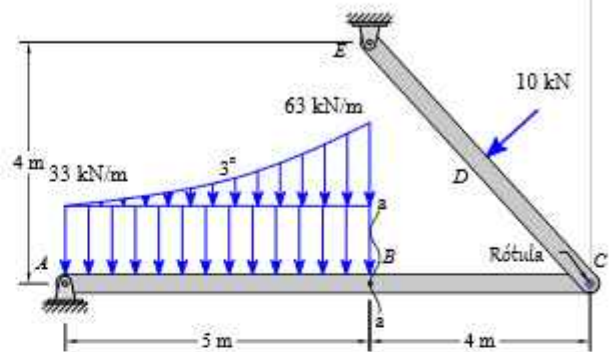


Figura 6.69

6.57

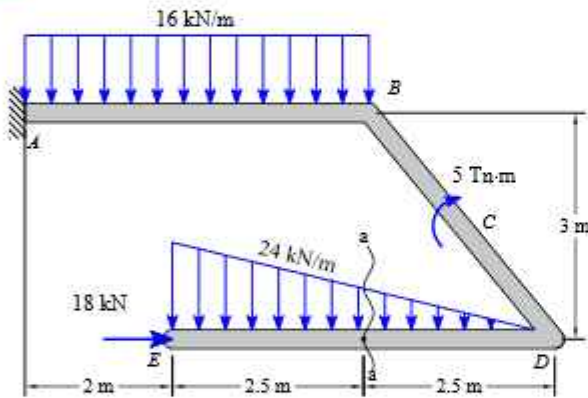


Figura 6.70

6.58

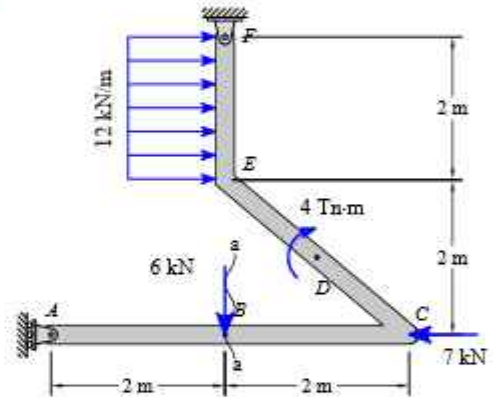


Figura 6.71

6.59

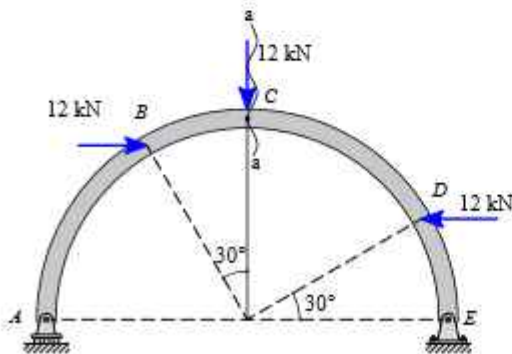


Figura 6.72

6.60

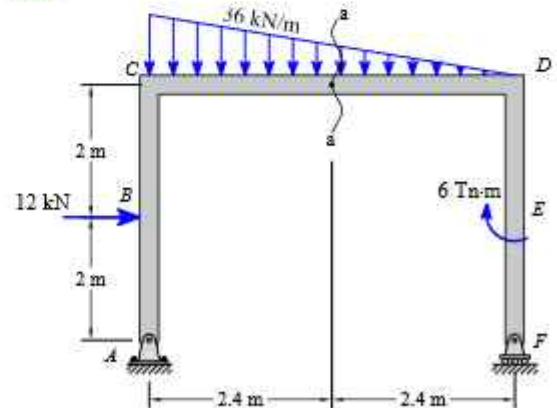


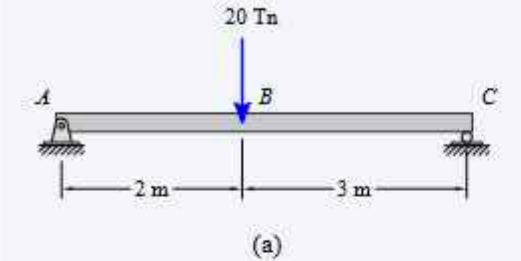
Figura 6.73

6.1.5. EJERCICIOS RESUELTOS COMPLEJO

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.1

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que produce la fuerza sobre la viga.

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.74 (b).



$$\Leftrightarrow \sum M_A = 0; \quad -20 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} + R_{Cy} \cdot 5 \text{ m} = 0$$

$$R_{Cy} := \frac{20 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 8 \text{ Tn}$$

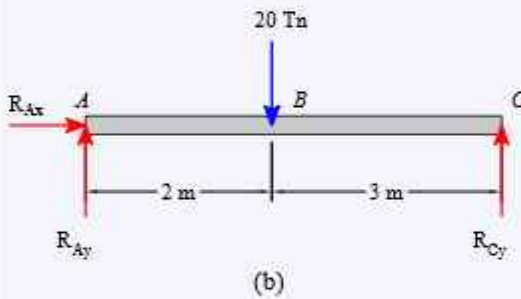
$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} := 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Cy} - 20 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Ay} := -(R_{Cy} - 20 \text{ Tn}) = 12 \text{ Tn}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

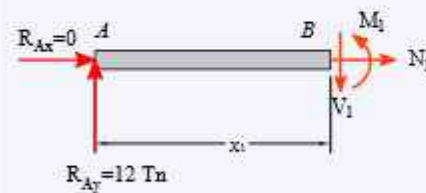
- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x_1 < 2 \text{ m}$, figura 6.74 (c).



$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B := -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_1(x_1) := R_{Ay} = 12 \text{ Tn}$$

$$\Leftrightarrow \sum M_B = 0; \quad M_1 - R_{Ay} \cdot x_1 = 0 \quad M_1(x_1) := R_{Ay} x_1$$



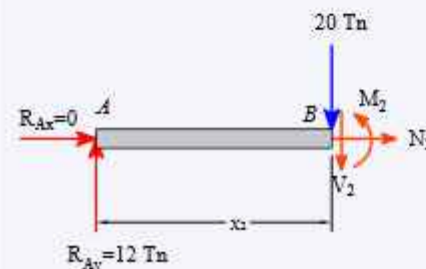
- **Fuerzas internas** en el tramo 2-2, $2 \text{ m} \leq x_2 < 5 \text{ m}$, figura 6.74 (d).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B := -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - 20 \text{ Tn} - V_2 = 0 \quad V_2(x_2) := R_{Ay} - 20 \text{ Tn}$$

$$\Leftrightarrow \sum M_B = 0; \quad -R_{Ay} \cdot x_2 + 20 \text{ Tn} \cdot (x_2 - 2 \text{ m}) + M_2 = 0$$

$$M_2(x_2) := R_{Ay} \cdot x_2 - 20 \text{ Tn} \cdot (x_2 - 2 \text{ m})$$



Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.74 (e).

$$x_1 := [0 \text{ m} \quad 1 \text{ m} \quad 2 \text{ m}]$$

$$V_1(x_1) := 12 \text{ Tn}$$

$$x_2 := [2 \text{ m} \quad 3 \text{ m} \quad 5 \text{ m}]$$

$$M_1(x_1) := R_{Ay} x_1$$

CONTINUACIÓN

$$V_2(x_2) := R_{Ay} - 20 \text{ Tn} \qquad M_2(x_2) := R_{Ay} \cdot x_2 - 20 \text{ Tn} \cdot (x_2 - 2 \text{ m})$$

Resumen de momentos en los dos tramos

$$\begin{aligned} V_1(x_1) &= 12 \text{ Tn} & V_2(x_2) &= -8 \text{ Tn} \\ M_1(x_1) &= [0 \quad 12 \quad 24] \text{ Tn} \cdot \text{m} & M_2(x_2) &= [24 \quad 16 \quad 0] \text{ Tn} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

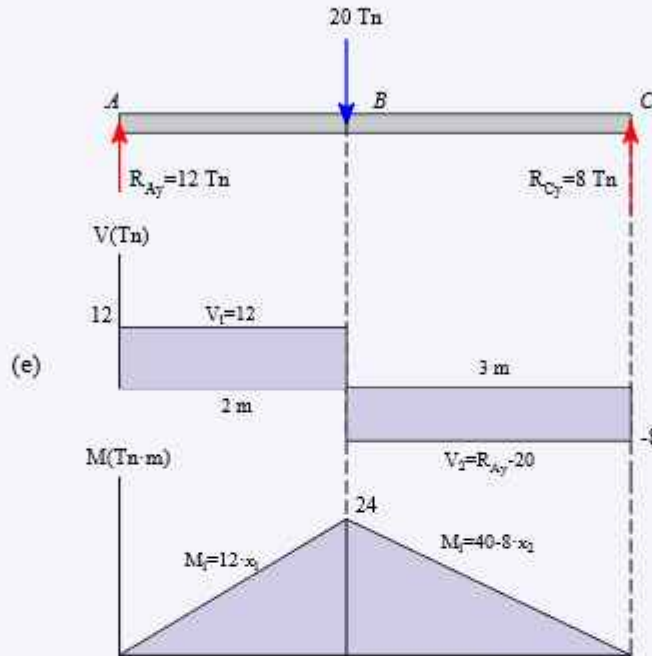


Figura 6.74

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.2

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que producen las fuerzas sobre la viga.

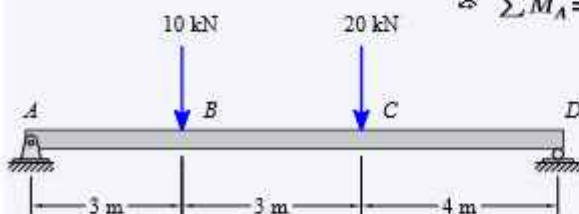
Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.75 (b).

$$\Leftrightarrow \sum M_A = 0; \quad -10 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} - 20 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} + R_{Dy} \cdot 10 \text{ m} = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{10 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + 20 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m}}{10 \text{ m}} \qquad R_{Dy} = 15 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 \text{ kN}$$

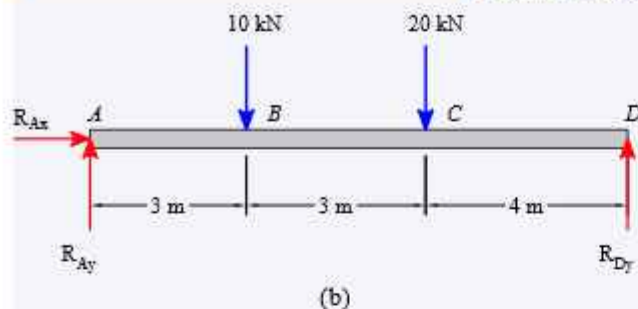
$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Dy} - 20 \text{ kN} - 10 \text{ kN} &= 0 \\ R_{Ay} &= -R_{Dy} + 20 \text{ kN} + 10 \text{ kN} = 15 \text{ kN} \end{aligned}$$



(a)

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

CONTINUACIÓN



- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x_1 < 3 \text{ m}$, figura 6.75 (c).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_1 + R_{Ax} = 0$$

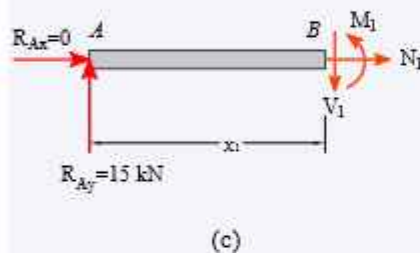
$$N_1 := -R_{Ax} = 0 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_1(x_1) := R_{Ay} = 15 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright \sum M_B = 0; \quad M_1 - R_{Ay} \cdot x_1 = 0$$

$$M_1(x_1) := R_{Ay} x_1$$

- **Fuerzas internas** en el tramo 2-2, $3 \text{ m} \leq x_2 < 6 \text{ m}$, figura 6.75 (d).



$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_2 + R_{Ax} = 0$$

$$N_2 := -R_{Ax} = 0 \text{ kN}$$

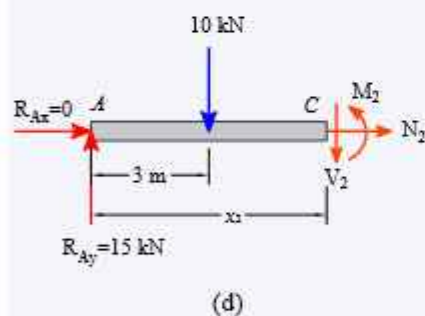
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - 10 \text{ kN} - V_2 = 0$$

$$V_2(x_2) := R_{Ay} - 10 \text{ kN} = 5 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright \sum M_C = 0; \quad -R_{Ay} \cdot x_2 + 10 \text{ kN} \cdot (x_2 - 3 \text{ m}) + M_2 = 0$$

$$M_2(x_2) := R_{Ay} \cdot x_2 - 10 \text{ kN} \cdot (x_2 - 3 \text{ m})$$

- **Fuerzas internas** en el tramo 3-3, $6 \text{ m} \leq x_3 < 10 \text{ m}$, figura 6.75 (e).



$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_3 + R_{Ax} = 0$$

$$N_3 := -R_{Ax} = 0 \text{ kN}$$

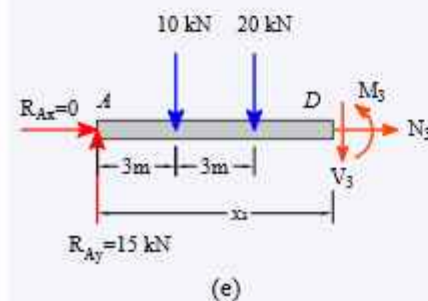
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - 10 \text{ kN} - 20 \text{ kN} - V_3 = 0$$

$$V_3(x_3) := R_{Ay} - 30 \text{ kN} = -15 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright \sum M_D = 0; \quad -R_{Ay} \cdot x_3 + 10 \text{ kN} \cdot (x_3 - 3 \text{ m}) + 20 \text{ kN} \cdot (x_3 - 6 \text{ m}) + M_3 = 0$$

$$M_3(x_3) := R_{Ay} \cdot x_3 - 10 \text{ kN} \cdot (x_3 - 3 \text{ m}) - 20 \text{ kN} \cdot (x_3 - 6 \text{ m})$$

Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.75 (f)



$$x_1 = [0 \text{ m} \quad 1.5 \text{ m} \quad 3 \text{ m}] \quad x_2 = [3 \text{ m} \quad 4 \text{ m} \quad 6 \text{ m}] \quad x_3 = [6 \text{ m} \quad 8 \text{ m} \quad 10 \text{ m}]$$

$$V_1(x_1) := 15 \text{ kN} \quad M_1(x_1) := R_{Ay} x_1$$

$$V_2(x_2) := 5 \text{ kN} \quad M_2(x_2) := R_{Ay} \cdot x_2 - 10 \text{ kN} \cdot (x_2 - 3 \text{ m})$$

$$V_3(x_3) := -15 \text{ kN} \quad M_3(x_3) := R_{Ay} \cdot x_3 - 10 \text{ kN} \cdot (x_3 - 3 \text{ m}) - 20 \text{ kN} \cdot (x_3 - 6 \text{ m})$$

CONTINUACIÓN

$$V_1(x_1) = 15 \text{ kN} \quad M_1(x_1) = [0 \quad 22.5 \quad 45] \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_2(x_2) = 5 \text{ kN} \quad M_2(x_2) = [45 \quad 50 \quad 60] \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_3(x_3) = -15 \text{ kN} \quad M_3(x_3) = [60 \quad 30 \quad 0] \text{ kN} \cdot \text{m}$$

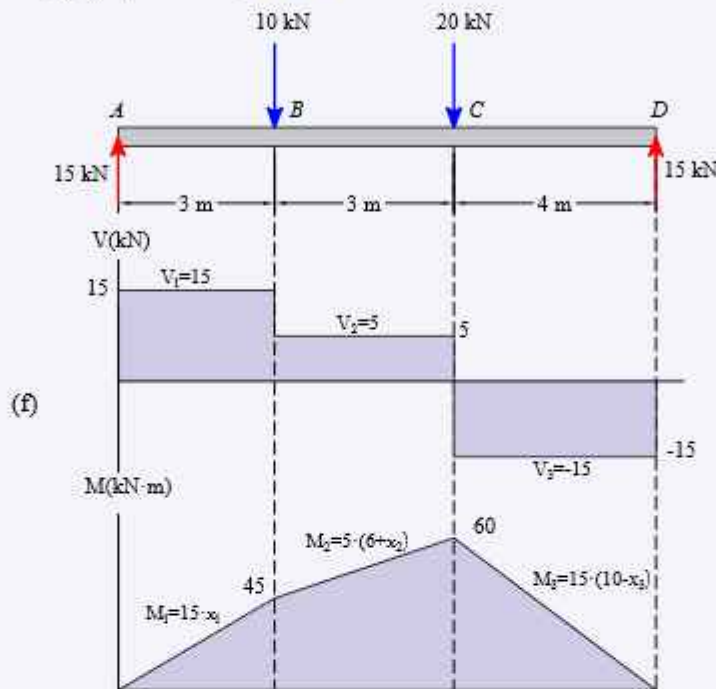
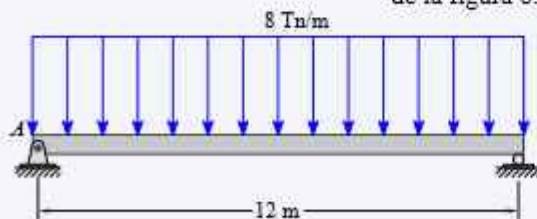


Figura 6.75

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.3

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que produce la fuerza sobre la viga.

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.76 (b).



(a)

$$\curvearrowright \sum M_A = 0 ;$$

$$-8 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot 12 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} + R_{By} \cdot 12 \text{ m} = 0$$

$$R_{By} = \frac{8 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot 12 \text{ m} \cdot 6 \text{ m}}{12 \text{ m}} \quad R_{By} = 48 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ;$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ;$$

$$R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

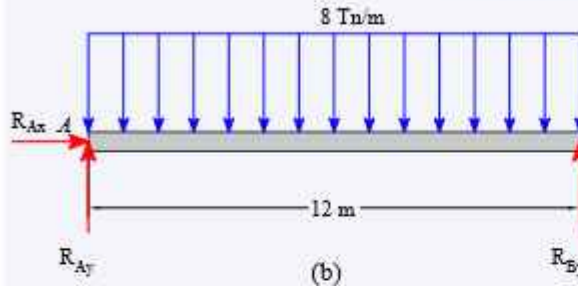
$$R_{Ay} + R_{By} - 8 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot 12 \text{ m} = 0$$

CONTINUACIÓN

$$R_{Ay} = -R_{By} + 8 \frac{Tn}{m} \cdot 12 \text{ m} \quad R_{Ay} = 48 \text{ Tn}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1 $0 \leq x < 12 \text{ m}$, figura 6.76 (c).

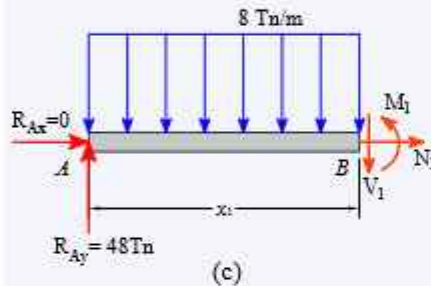


$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B := -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0; \quad -V - 8x + R_{Ay} = 0 \quad V(x) = -8 \frac{Tn}{m} x + R_{Ay}$$

$$\circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad M + 8 \frac{Tn}{m} \cdot x \cdot \frac{x}{2} - R_{Ay} \cdot x = 0$$

$$M(x) = -8 \frac{Tn}{m} \cdot x \cdot \frac{x}{2} + R_{Ay} \cdot x$$

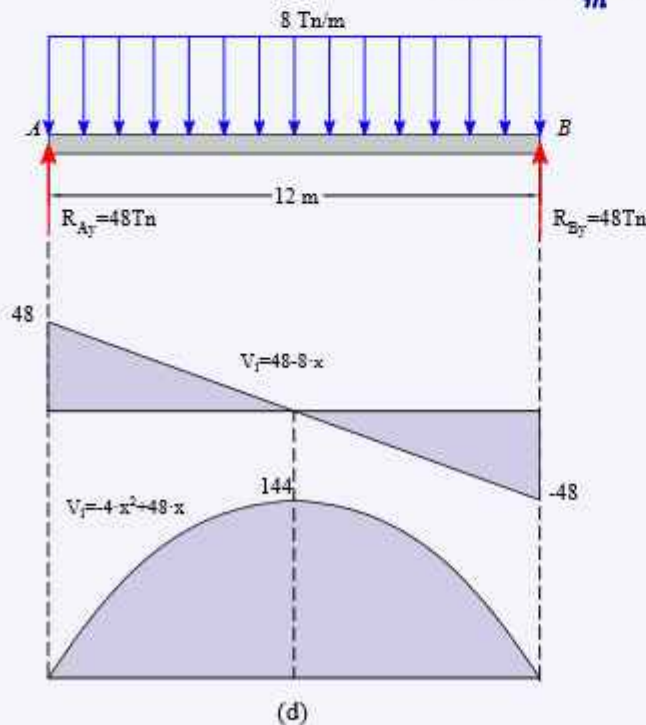


Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.76 (d).

El momento máximo se donde la cortante es igual a 0

$$V(x) = -8 \frac{Tn}{m} \cdot x + R_{Ay} = 0 \quad x := \frac{R_{Ay}}{8 \text{ Tn} \div m} = 6 \text{ m}$$

$$M(x) = -8 \frac{Tn}{m} \cdot x \cdot \frac{x}{2} + R_{Ay} \cdot x \quad M(6 \text{ m}) = 144 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



Resumen de cortantes en los dos tramos

$$x = [0 \text{ m} \quad 6 \text{ m} \quad 12 \text{ m}]$$

$$V(x) = -8 \frac{Tn}{m} \cdot x + R_{Ay}$$

$$M(x) = -8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \frac{x^2}{2} + R_{Ay} \cdot x$$

Resumen de momentos en los dos tramos

$$V(x) = [48 \quad 0 \quad -48] \text{ Tn}$$

$$M(x) = [0 \quad 144 \quad 0] \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Figura 6.76

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.4

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que produce la fuerza sobre la viga.

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.77 (b).

$$\Leftrightarrow \sum M_A = 0; \quad -4 \frac{Tn}{m} \cdot 8 m \cdot 4 m - 20 Tn \cdot 8 m + M_A = 0$$

$$M_A = 4 \frac{Tn}{m} \cdot 8 m \cdot 4 m + 20 Tn \cdot 8 m$$

$$M_A = 288 Tn \cdot m$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 Tn$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - 4 \frac{Tn}{m} \cdot 8 m - 20 Tn = 0$$

$$R_{Ay} = 4 \frac{Tn}{m} \cdot 8 m + 20 Tn$$

$$R_{Ay} = 52 Tn$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x < 8 m$, figura 6.77 (c).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B = -R_{Ax} = 0 Tn$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -V - 4 x + R_{Ay} = 0$$

$$V(x) = -4 \frac{Tn}{m} x + R_{Ay}$$

$$\Leftrightarrow \sum M_B = 0; \quad M + 4 \frac{Tn}{m} \cdot x \cdot \frac{x}{2} - R_{Ay} \cdot x - M_A = 0$$

$$M(x) = -2 \frac{Tn}{m} \cdot x^2 + R_{Ay} \cdot x - M_A$$

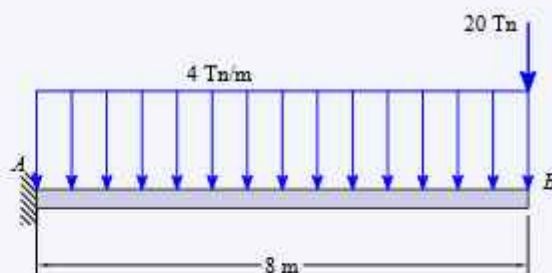
Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.77 (d).

$$x = 0 m, 1 m \dots 8 m$$

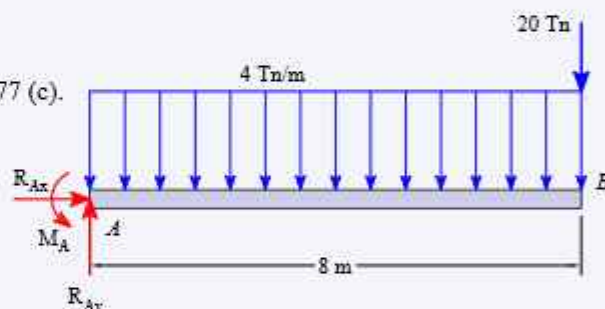
$$V(x) = -4 \frac{Tn}{m} x + R_{Ay}$$

Resumen de momentos en los dos tramos

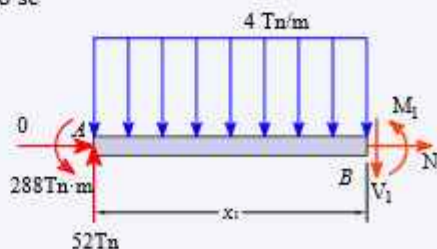
$$M(x) = -2 \frac{Tn}{m} \cdot x^2 + R_{Ay} \cdot x - M_A$$



(a)



(b)



(c)

CONTINUACIÓN

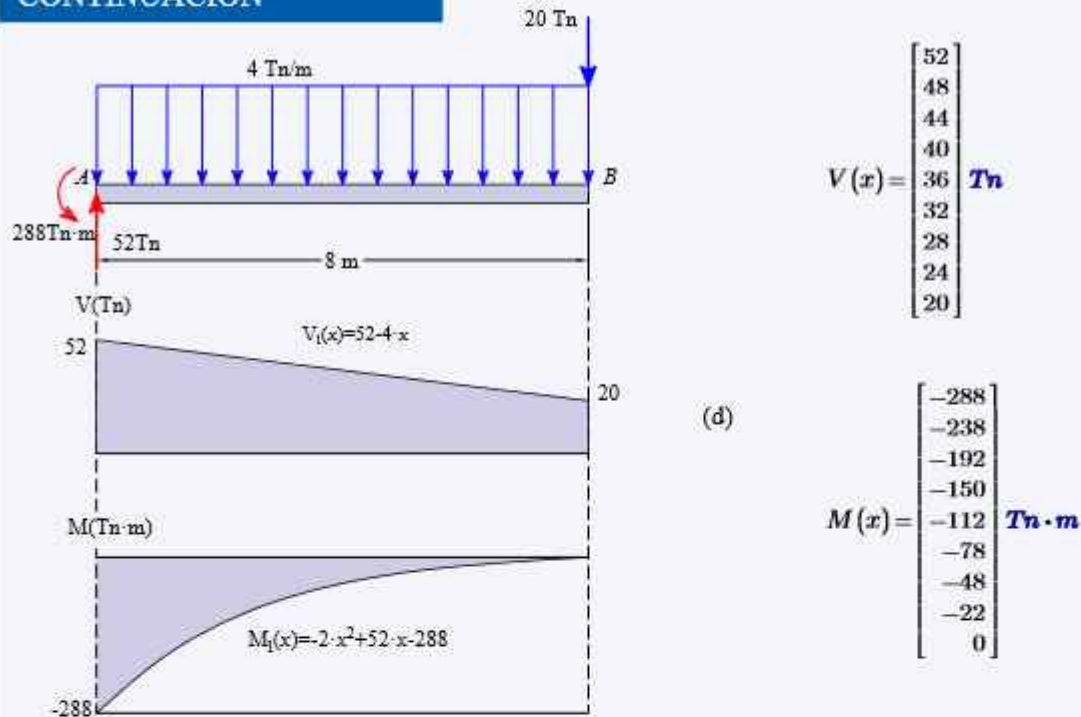
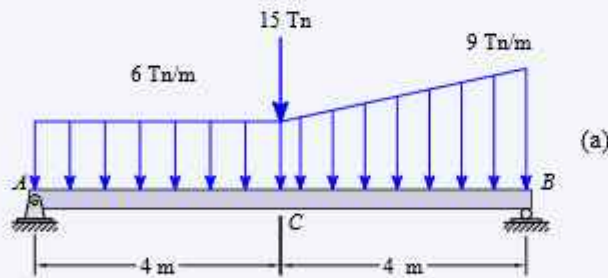


Figura 6.77

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que producen las fuerzas sobre la viga.

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.5



Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.78 (b).

$$\curvearrowright \sum M_A = 0;$$

$$-6 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot 8 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} - 15 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} - \frac{3 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m}}{2} \cdot \left(4 \text{ m} + \frac{2}{3} \cdot 4 \text{ m}\right) + R_{By} \cdot 8 \text{ m} = 0$$

$$R_{By} = \frac{6 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot 8 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} + 15 \text{ Tn} \cdot 4 \text{ m} + \frac{3 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m}}{2} \cdot \left(4 \text{ m} + \frac{2}{3} \cdot 4 \text{ m}\right)}{8 \text{ m}} = 36.5 \text{ Tn}$$

CONTINUACIÓN

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

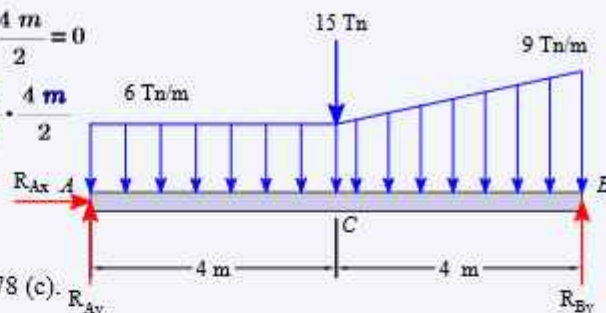
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} - 6 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot 8 \text{ m} - 15 \text{ Tn} - 3 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot \frac{4 \text{ m}}{2} = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{By} + 6 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot 8 \text{ m} + 15 \text{ Tn} + 3 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot \frac{4 \text{ m}}{2}$$

$$R_{Ay} = 32.5 \text{ Tn}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x_1 < 4 \text{ m}$, figura 6.78 (c).



(b)

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_1 + R_{Ax} = 0 \quad N_1 = -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_1(x_1) = R_{Ay} - 6 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot x_1$$

$$\curvearrowright \sum M_C = 0; \quad -M_1 - 6 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} + R_{Ay} \cdot x_1 = 0$$

$$M_1(x_1) = -3 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} x_1^2 + R_{Ay} \cdot x_1$$

- **Fuerzas internas** en el tramo 2-2, $4 \text{ m} \leq x_2 < 8 \text{ m}$, figura 6.79 (d).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_2 + R_{Ax} = 0 \quad N_2 = -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

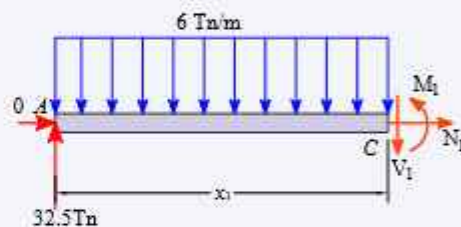
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - 6 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot x_2 - 15 \text{ Tn} - \frac{3}{4} (x_2 - 4) \frac{(x_2 - 4)}{2} - V_2 = 0$$

$$V_2(x_2) = R_{Ay} - 6 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot x_2 - 15 \text{ Tn} - \frac{3}{8} \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2} \cdot (x_2 - 4 \text{ m})^2$$

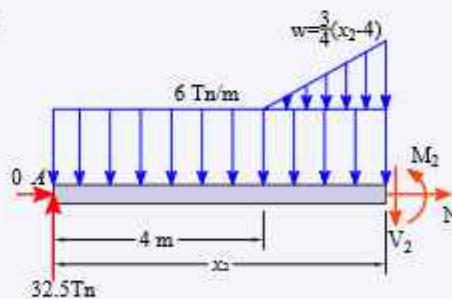
$$\curvearrowright \sum M_B = 0;$$

$$-R_{Ay} \cdot x_2 + 6 \cdot x_2 \left(\frac{x_2}{2} \right) + 15 (x_2 - 4) + \frac{3}{4} (x_2 - 4) \frac{(x_2 - 4)}{2} \left(\frac{1}{3} (x_2 - 4) \right) + M_2 = 0$$

$$M_2(x_2) = R_{Ay} \cdot x_2 - 3 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot x_2^2 - 15 \text{ Tn} (x_2 - 4 \text{ m}) - \frac{1}{8} \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2} (x_2 - 4 \text{ m})^3$$



(c)



(d)

Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.79 (e).

Resumen de cortantes en los dos tramos

$$x_1 := 0 \text{ m}, 1 \text{ m} \dots 4 \text{ m}$$

$$x_2 := 4 \text{ m}, 5 \text{ m} \dots 8 \text{ m}$$

$$V_1(x_1) = R_{Ay} - 6 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} \cdot x_1$$

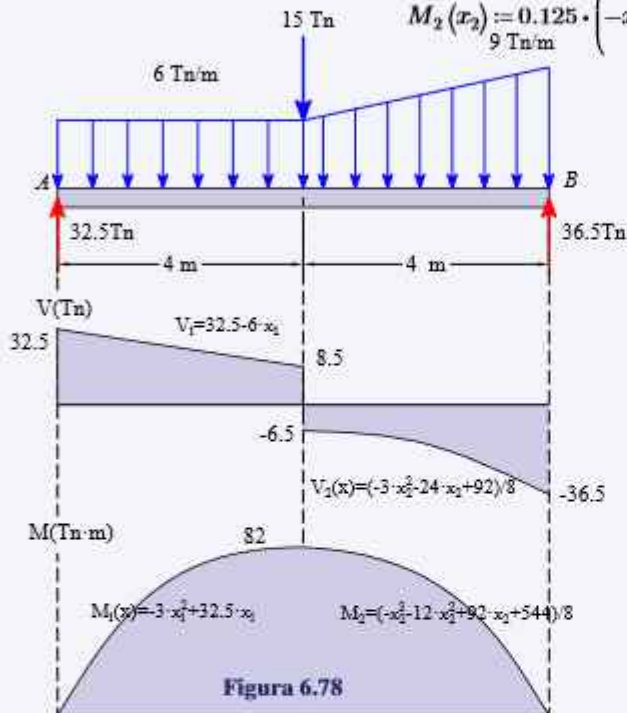
CONTINUACIÓN

$$V_2(x_2) := \frac{(-3 x_2^2 \cdot Tn - 24 x_2 \cdot Tn \cdot m + 92 Tn \cdot m^2)}{8 m^2}$$

Resumen de momentos en los dos tramos

$$(e) \quad M_1(x_1) := -3 \frac{Tn}{m} x_1^2 + R_{Ay} \cdot x_1$$

$$M_2(x_2) := 0.125 \cdot \left(-x_2^3 \frac{Tn}{m^2} - 12 x_2^2 \frac{Tn}{m} + 92 x_2 \cdot Tn + 544 Tn \cdot m \right)$$



$$V_1(x_1) = \begin{bmatrix} 32.5 \\ 26.5 \\ 20.5 \\ 14.5 \\ 8.5 \end{bmatrix} Tn \quad V_2(x_2) = \begin{bmatrix} -6.5 \\ -12.875 \\ -20 \\ -27.875 \\ -36.5 \end{bmatrix} Tn$$

$$M_1(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 29.5 \\ 53 \\ 70.5 \\ 82 \end{bmatrix} Tn \cdot m \quad M_2(x_2) = \begin{bmatrix} 82 \\ 72.375 \\ 56 \\ 32.125 \\ 0 \end{bmatrix} Tn \cdot m$$

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que produce la fuerza sobre la viga.

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.6

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.79 (b).

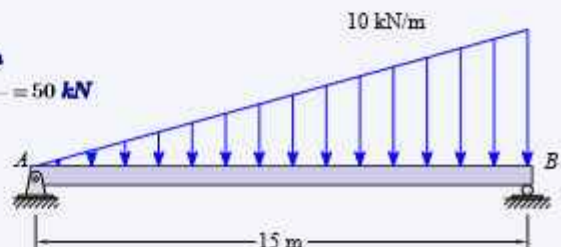
$$\curvearrowright \sum M_A = 0;$$

$$\frac{10 \text{ kN}}{2 \text{ m}} \cdot 15 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} + R_{By} \cdot 15 \text{ m} = 0 \quad R_{By} := \frac{\frac{10 \text{ kN}}{2 \text{ m}} \cdot 15 \text{ m} \cdot 10 \text{ m}}{15 \text{ m}} = 50 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} - \frac{10 \text{ kN}}{2 \text{ m}} \cdot 15 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ay} := -R_{By} + \frac{10 \text{ kN}}{2 \text{ m}} \cdot 15 \text{ m} = 25 \text{ kN}$$



(a)

CONTINUACIÓN

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

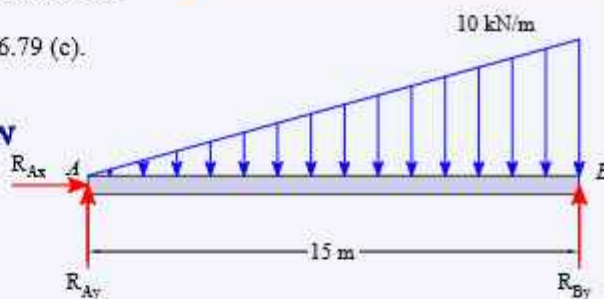
- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x_1 < 15 \text{ m}$, figura 6.79 (c).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_1 + R_{Ax} = 0 \quad N_1 := -R_{Ax} = 0 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_1(x_1) := R_{Ay} - \frac{2}{3} \frac{x_1 \cdot x_1}{2} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum M_B = 0; \quad M_1 + \frac{2}{3} \frac{x_1 \cdot x_1}{2} \cdot \frac{x_1}{3} - R_{Ay} \cdot x_1 = 0$$

$$M_1(x_1) := R_{Ay} \cdot x_1 - \frac{x_1^3}{9} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$



(b)

De la misma manera podemos hacerlo de derecha hacia izquierda

- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x_2 < 15 \text{ m}$, figura 6.79 (d).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_2 = 0$$

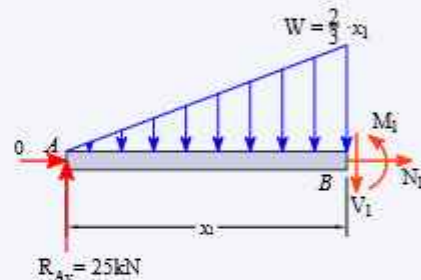
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{By} - 10 \cdot x_2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + \frac{2}{3} \frac{x_2}{2} \cdot x_2 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} + V_2 = 0$$

$$V_2(x_2) := -R_{By} + 10 \cdot x_2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} - \frac{2}{3} \frac{x_2}{2} \cdot x_2 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum M_A = 0;$$

$$R_{By} \cdot x_2 - 10 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} + \frac{2}{3} \frac{x_2}{2} \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} - M_2 = 0$$

$$M_2(x_2) := R_{By} \cdot x_2 - 10 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} \frac{\text{kN}}{\text{m}} + \frac{2}{3} \frac{x_2}{2} \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$



(c)

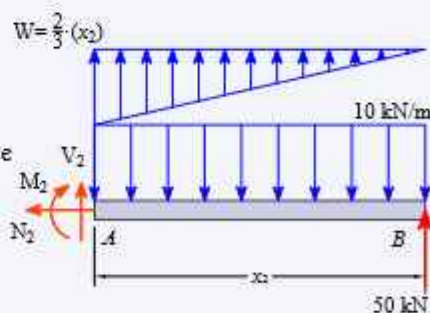
Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.79 (e).

Resumen de cortantes en los dos tramos

$$x_1 := [0 \ 6 \ 8.66 \ 12 \ 15] \text{ m} \quad x_2 := [15 \ 9 \ 6.34 \ 3 \ 0] \text{ m}$$

$$V_1(x_1) := -\frac{x_1^2 \cdot \text{kN}}{3 \cdot \text{m}^2} + 25 \cdot \text{kN}$$

$$V_2(x_2) := -\frac{x_2^2 \cdot \text{kN}}{3 \cdot \text{m}^2} + \frac{10 \cdot x_2 \cdot \text{kN}}{\text{m}} - 50 \cdot \text{kN}$$



(d)

CONTINUACIÓN

Resumen de momentos en los dos tramos

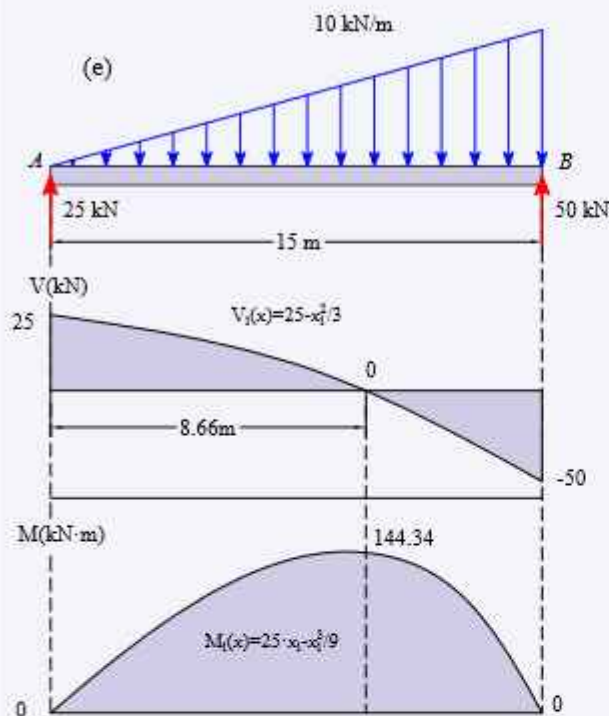


Figura 6.79

$$M_1(x_1) := \frac{-x_1^3 \text{ kN}}{9 \text{ m}^2} + 25 x_1 \cdot \text{kN}$$

$$M_2(x_2) := \frac{x_2^3 \text{ kN}}{9 \text{ m}^2} - \frac{5 x_2^2 \text{ kN}}{\text{m}} + 50 x_2 \cdot \text{kN}$$

$$x_1 := \begin{bmatrix} 0 \text{ m} \\ 6 \text{ m} \\ 8.66 \text{ m} \\ 12 \text{ m} \\ 15 \text{ m} \end{bmatrix} \quad x_2 := \begin{bmatrix} 15 \text{ m} \\ 9 \text{ m} \\ 6.34 \text{ m} \\ 3 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$V_1(x_1) = \begin{bmatrix} 25 \\ 13 \\ 0.001 \\ -23 \\ -50 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad V_2(x_2) = \begin{bmatrix} 25 \\ 13 \\ 0.001 \\ -23 \\ -50 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$M_1(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 126 \\ 144.338 \\ 108 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_2(x_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 126 \\ 144.338 \\ 108 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que producen las fuerzas sobre la viga.

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.7

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.80 (b).

$$\Rightarrow \sum M_A = 0;$$

$$\frac{27 \text{ Tn}}{2 \text{ m}} \cdot 9 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} + 9 \text{ Tn} \cdot \text{m} + M_A = 0$$

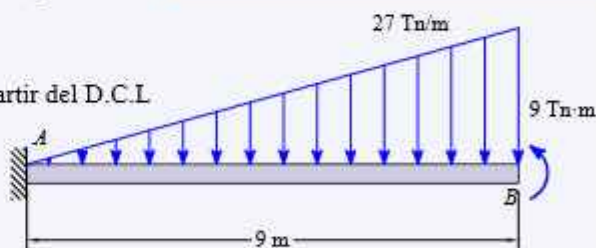
$$M_A := \frac{27 \text{ Tn}}{2 \text{ m}} \cdot 9 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} - 9 \text{ Tn} \cdot \text{m} = 720 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} := 0 \text{ Tn}$$

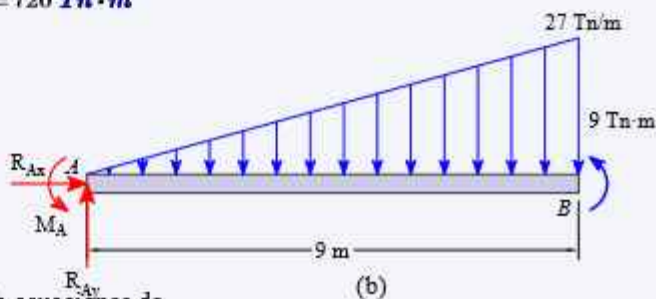
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - \frac{27 \text{ Tn}}{2 \text{ m}} \cdot 9 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ay} := \frac{27 \text{ Tn}}{2 \text{ m}} \cdot 9 \text{ m} = 121.5 \text{ Tn}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio



(a)



(b)

CONTINUACIÓN

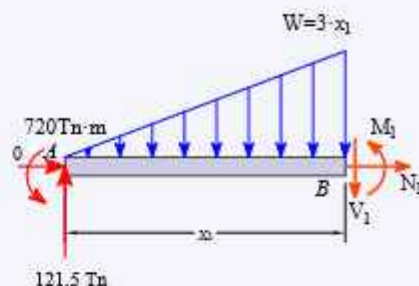
- Fuerzas internas en el tramo 1-1, $0 \leq x_1 < 9 \text{ m}$, figura 6.80 (c).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_1 + R_{Ax} = 0 \quad N_1 := -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_1(x_1) := 121.5 \text{ Tn} - \frac{3 \cdot x_1}{2} \cdot x_1 \cdot \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum M_B = 0; \quad M_1 + \frac{3 \cdot x_1}{2} \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{3} \cdot \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2} - R_{Ay} \cdot x_1 + M_A = 0$$

$$M_1(x_1) := 121.5 \text{ Tn} \cdot x_1 - \frac{x_1^3}{2} \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2} - 720 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



(c)

De la misma manera podemos hacerlo de derecha hacia izquierda

- Fuerzas internas en el tramo 1-1, $0 \leq x_2 \leq 9 \text{ m}$, figura 6.80 (d).

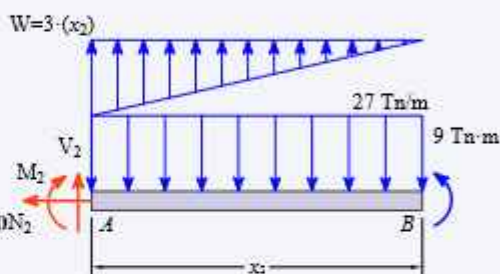
$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_2 = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -27 \cdot x_2 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} + 3 \frac{x_2}{2} \cdot x_2 \cdot \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2} + V_2 = 0$$

$$V_2(x_2) := 27 \cdot x_2 \cdot \frac{\text{Tn}}{\text{m}} - 3 \cdot \frac{x_2}{2} \cdot x_2 \cdot \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum M_A = 0; \quad 9 \text{ Tn} \cdot \text{m} - 27 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} \frac{\text{Tn}}{\text{m}} + 3 \frac{x_2}{2} \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} \cdot \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2} - M_2 = 0 \Rightarrow N_2$$

$$M_2(x_2) := 9 \text{ Tn} \cdot \text{m} - 13.5 x_2^2 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} + \frac{x_2^3}{2} \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2}$$



(d)

Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.80 (e).

Resumen de cortantes en los dos tramos

$$V_1(x_1) := 121.5 \text{ Tn} - 1.5 x_1^2 \cdot \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2}$$

$$V_2(x_2) := 27 \cdot x_2 \cdot \frac{\text{Tn}}{\text{m}} - 1.5 x_2^2 \cdot \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2}$$

$$M_1(x_1) := 121.5 \text{ Tn} \cdot x_1 - \frac{x_1^3}{2} \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2} - 720 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_2(x_2) := 9 \text{ Tn} \cdot \text{m} - 13.5 x_2^2 \frac{\text{Tn}}{\text{m}} + \frac{x_2^3}{2} \frac{\text{Tn}}{\text{m}^2}$$

$$x_1 := 0 \text{ m}, 3 \text{ m} \dots 9 \text{ m}$$

$$x_2 := 9 \text{ m}, 6 \text{ m} \dots 0 \text{ m}$$

$$V_1(x_1) = \begin{bmatrix} 121.5 \\ 108 \\ 67.5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$V_2(x_2) = \begin{bmatrix} 121.5 \\ 108 \\ 67.5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$M_1(x_1) = \begin{bmatrix} -720 \\ -369 \\ -99 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

$$M_2(x_2) = \begin{bmatrix} -720 \\ -369 \\ -99 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

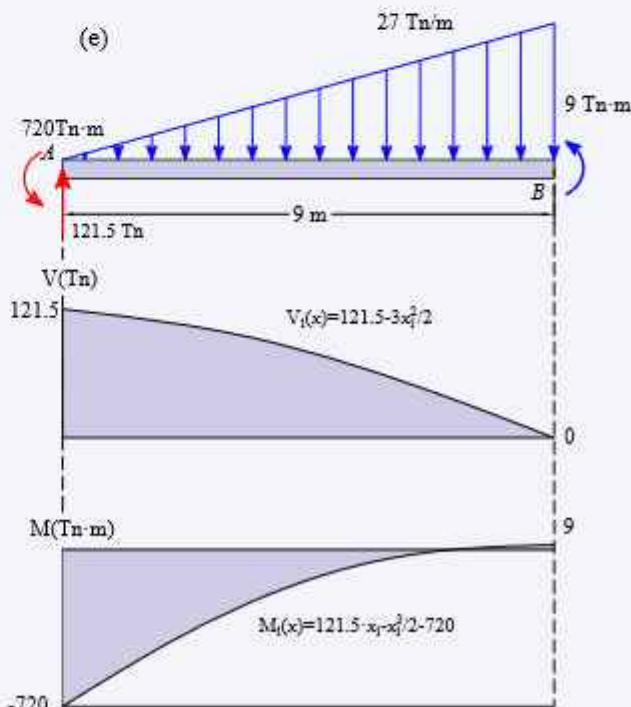
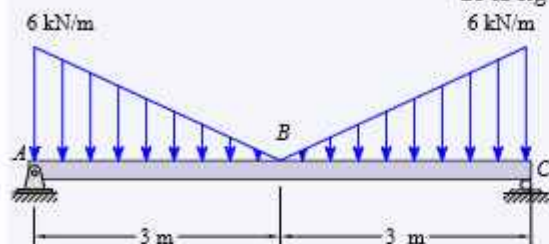


Figura 6.80

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.8

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que produce la fuerza sobre la viga.

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.81(b).



(a)

$$\sum M_A = 0; \quad -6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{3 \text{ m}}{2} \cdot 1 \text{ m} - 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{3 \text{ m}}{2} \cdot (5 \text{ m}) + R_{Cy} \cdot 6 \text{ m} = 0$$

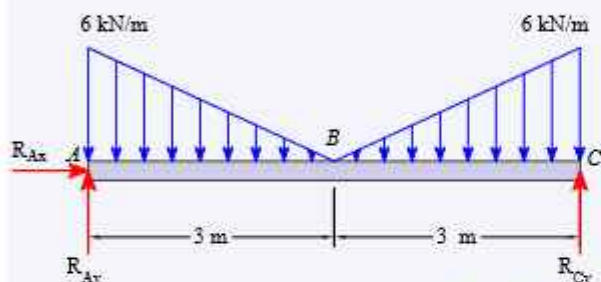
$$R_{Cy} = \frac{6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{3 \text{ m}}{2} \cdot 1 \text{ m} + 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{3 \text{ m}}{2} \cdot (5 \text{ m})}{6 \text{ m}} = 9 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Cy} - \left(6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{3 \text{ m}}{2}\right) 2 = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{Cy} + \left(6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{3 \text{ m}}{2}\right) 2$$

$$R_{Ay} = 9 \text{ kN}$$



(b)

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x_1 < 3 \text{ m}$, figura 6.81 (c).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B = -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

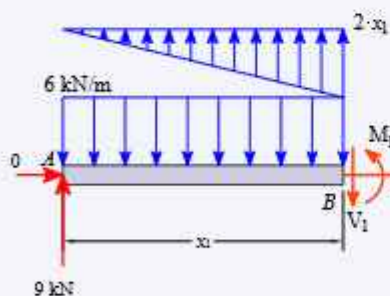
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -V_1 - 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} x_1 + R_{Ay} + \frac{2 \text{ kN}}{2 \text{ m}^2} x_1 \cdot x_1 = 0$$

$$V_1(x_1) = -6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} x_1 + R_{Ay} + 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} x_1^2$$

$$\Rightarrow \sum M_B = 0;$$

$$M_1 - 9 \text{ kN} x_1 - 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} x_1 \cdot \frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_1}{3} + 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = 0$$

$$M_1(x_1) = 9 \text{ kN} x_1 + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} x_1 \cdot \frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_1}{3} - 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} x_1 \cdot \frac{x_1}{2}$$



(c)

- **Fuerzas internas** en el tramo 2-2, $3 \text{ m} \leq x_2 < 6 \text{ m}$, figura 6.81 (d).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B = -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

CONTINUACIÓN

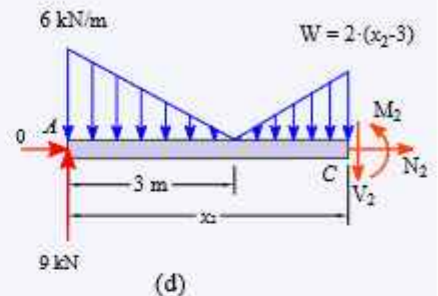
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -V_2 - 6 \frac{kN}{m} \frac{3m}{2} + R_{Ay} - \frac{2 kN (x_2 - 3m) \cdot (x_2 - 3m)}{2 m^2} = 0$$

$$V_2(x_2) = -6 \frac{kN}{m} \frac{3m}{2} + R_{Ay} - \frac{2 kN (x_2 - 3m) \cdot (x_2 - 3m)}{2 m^2}$$

$$\curvearrowright \sum M_C = 0;$$

$$M_2 - 9 kN x_2 + 2 \frac{kN}{6 m^2} (x_2 - 3m)^3 + 6 \frac{kN}{m} 3m \cdot \frac{(x_2 - 1m)}{2} = 0$$

$$M_2(x_2) = 9 kN x_2 - 2 \frac{kN}{6 m^2} (x_2 - 3m)^3 - 6 \frac{kN}{m} 3m \cdot \frac{(x_2 - 1m)}{2}$$



Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.81 (e).

Resumen de Cortante y momento

$$V_1(x_1) = -6 \frac{kN}{m} x_1 + 9 kN + 1 \frac{kN}{m^2} x_1^2$$

$$V_2(x_2) = -\frac{x_2^2 \cdot kN}{m^2} + \frac{6 \cdot x_2 \cdot kN}{m} - 9 kN$$

$$M_1(x_1) = \frac{x_1^3 \cdot kN}{3 \cdot m^2} - \frac{3 \cdot x_1^2 \cdot kN}{m} + 9 \cdot x_1 \cdot kN$$

$$M_2(x_2) = -\frac{x_2^3 \cdot kN}{3 \cdot m^2} + \frac{3 \cdot x_2^2 \cdot kN}{m} - 9 \cdot x_2 \cdot kN + 18 \cdot kN \cdot m$$

$$x_1 = 0 m, 0.5 m \dots 3 m$$

$$x_2 = 3 m, 3.5 m \dots 6 m$$

$$V_1(x_1) = \begin{bmatrix} 9 \\ 6.25 \\ 4 \\ 2.25 \\ 1 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

$$V_2(x_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.25 \\ -1 \\ -2.25 \\ -4 \\ -6.25 \\ -9 \end{bmatrix} kN$$

$$M_1(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.792 \\ 6.333 \\ 7.875 \\ 8.667 \\ 8.958 \\ 9 \end{bmatrix} kN \cdot m$$

$$M_2(x_2) = \begin{bmatrix} 9 \\ 8.958 \\ 8.667 \\ 7.875 \\ 6.333 \\ 3.792 \\ 0 \end{bmatrix} kN \cdot m$$

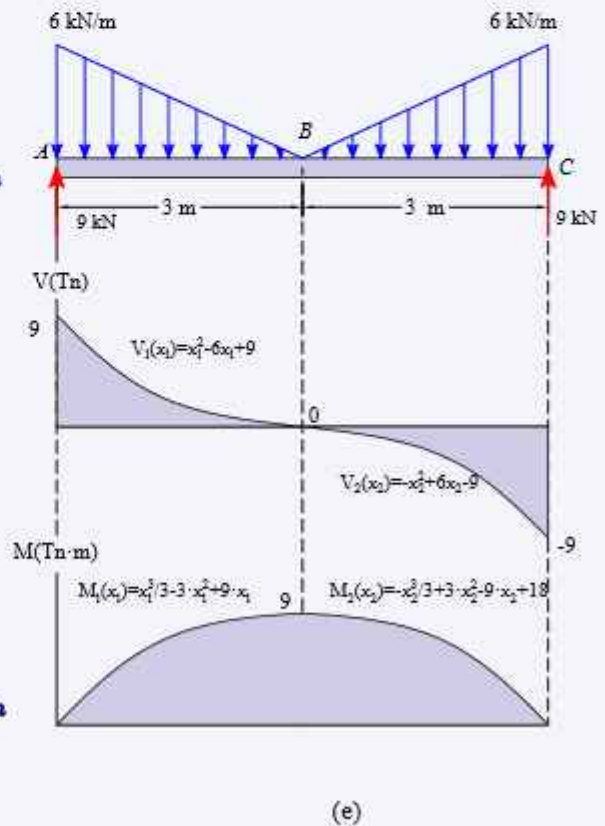
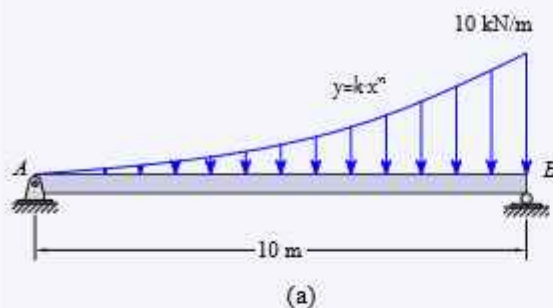


Figura 6.81

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.9

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que produce la fuerza sobre la viga.



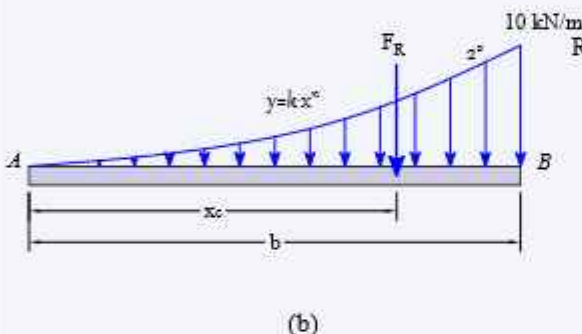
Paso ①: Determinación de la fuerza resultante de la carga distribuida y su ubicación, figura 6.82 (b).

$$w = w(x) \quad w = k \cdot x^n \quad x = b \quad y = h \quad k = \frac{h}{b^n}$$

$$dA = w \cdot dx \quad dA = k \cdot x^n \cdot dx$$

$$F_R = \int_A^b dA = k \int_0^b x^n dx = \frac{k \cdot x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^b = \frac{h}{b^n} \cdot \frac{b^n \cdot b}{n+1} = \frac{b \cdot h}{n+1}$$

$$x_c = \frac{\int_A^b x dA}{\int_A^b dA} = \frac{\int_0^b x \cdot k \cdot x^n dx}{k \int_0^b x^n dx} = \frac{\frac{k \cdot b^{n+2}}{n+2}}{\frac{k \cdot b^{n+1}}{n+1}} = \frac{(n+1) \cdot b}{n+2}$$

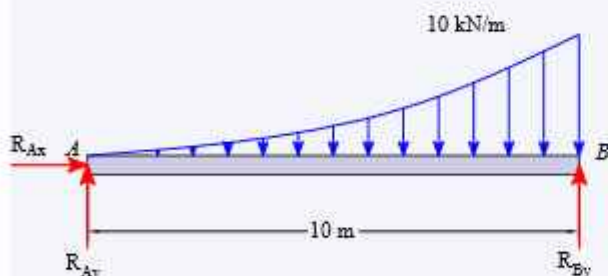


Reemplazamos los valores

$$b = 10 \text{ m} \quad h = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1} \quad n = 2$$

$$F_R = \frac{b \cdot h}{n+1} \rightarrow \frac{100 \cdot \text{kN}}{3} \quad x_c = \frac{(n+1) \cdot b}{n+2} \rightarrow \frac{15 \cdot \text{m}}{2}$$

Paso ②: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.82 (c).



$$\curvearrowright \sum M_A = 0; \quad R_{By}(10 \text{ m}) - F_R \cdot x_c = 0$$

$$R_{By} = \frac{F_R \cdot x_c}{10 \text{ m}} = 25 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} - F_R = 0$$

$$R_{Ay} = F_R - R_{By} = 8.333 \text{ kN}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x_1 < 3 \text{ m}$, figura 6.82 (d).

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_B + R_{Ax} = 0 \quad N_B = -R_{Ax} = 0 \text{ Tn}$$

$$y = k \cdot x^n \quad k = \frac{y}{x^n} \rightarrow \frac{\text{kN}}{10 \cdot \text{m}^3} \quad y(x) = k \cdot x^n \rightarrow \frac{\text{kN} \cdot x^2}{10 \cdot \text{m}^3}$$

CONTINUACIÓN

$$y(10 \text{ m}) = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad y(0 \text{ m}) = 0 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad y(x_1) \rightarrow \frac{x_1^2 \cdot \text{kN}}{10 \cdot \text{m}^3}$$

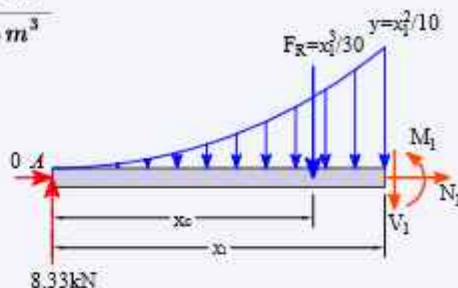
$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad -V_1 - \frac{\text{kN} \cdot x_1^2 \cdot x_1}{10 \cdot \text{m}^3 \cdot 3} + R_{Ay} = 0$$

$$V_1(x_1) = R_{Ay} - \frac{x_1^3 \cdot \text{kN}}{30 \cdot \text{m}^3}$$

$$\curvearrowright \sum M_H = 0 ;$$

$$M_1 - R_{Ay} x_1 + \frac{\text{kN} \cdot x_1^2 \cdot x_1}{10 \cdot \text{m}^3 \cdot 3} \cdot \left(x_1 - \frac{(n+1) \cdot x_1}{n+2} \right) = 0$$

$$M_1(x_1) = R_{Ay} x_1 - \frac{x_1^3 \cdot \text{kN}}{30 \cdot \text{m}^3} \cdot \left(x_1 - \frac{3 \cdot x_1}{4} \right)$$

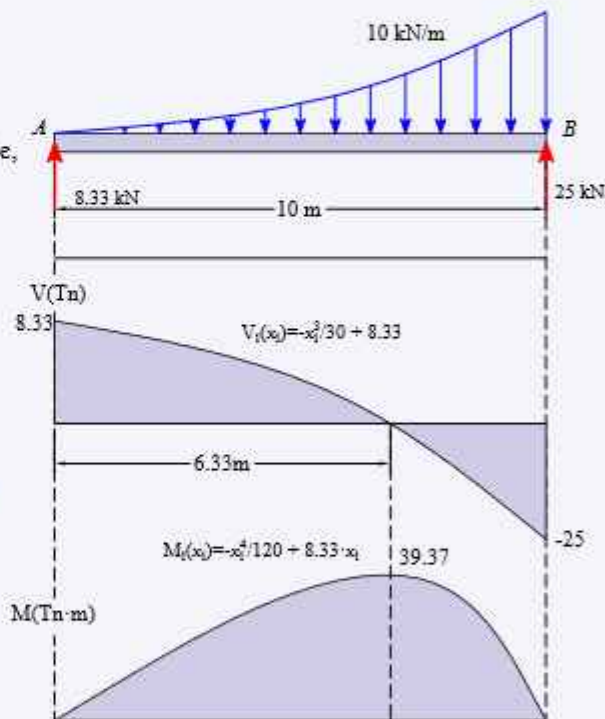


(d)

Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.82 (e).
Resumen de Cortante y Momento

$$x_1 = 0 \text{ m}, 1 \text{ m} \dots 10 \text{ m}$$

$V_1(x_1) =$	$\begin{bmatrix} 8.333 \\ 8.3 \\ 8.067 \\ 7.433 \\ 6.2 \\ 4.167 \\ 1.133 \\ -3.1 \\ -8.733 \\ -15.967 \\ -25 \end{bmatrix} \text{ kN}$	$M_1(x_1) =$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 8.325 \\ 16.533 \\ 24.325 \\ 31.2 \\ 36.458 \\ 39.2 \\ 38.325 \\ 32.533 \\ 20.325 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$
--------------	--	--------------	---



(e)

Figura 6.82

Determinación del momento máximo

$$V_1(x_1) = 0$$

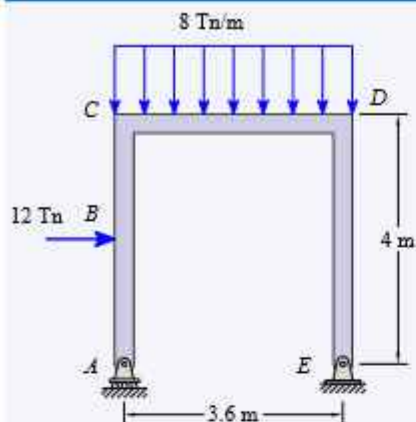
$$R_{Ay} - \frac{x_1^3 \cdot \text{kN}}{30 \cdot \text{m}^3} = 0 \quad x_1 = 6.33 \text{ m}$$

Momento Máximo

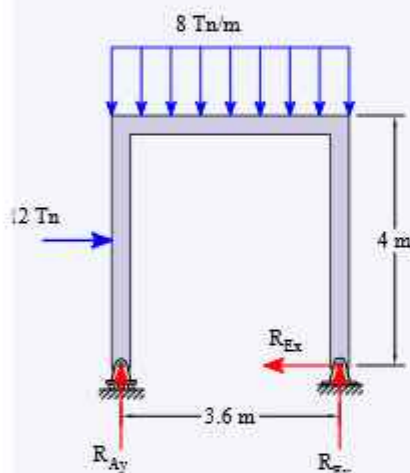
$$M_{\text{max}} := M_1(6.33 \text{ m}) = 39.371 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.10

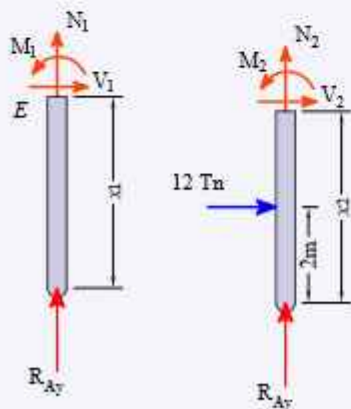
Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que producen las fuerzas sobre el marco.



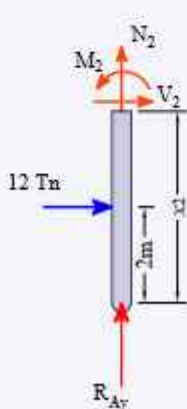
(a)



(b)



(c)



(d)

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.83 (b).

$$\curvearrowright \sum M_B = 0; \quad -R_{Ay}(3.6 \text{ m}) - 12 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} + 8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 3.6 \text{ m} \cdot 1.8 \text{ m}$$

$$R_{Ay} = \frac{-12 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} + 8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 3.6 \text{ m} \cdot 1.8 \text{ m}}{3.6 \text{ m}} = 7.733 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad -R_{Ex} + 12 \text{ Tn} = 0 \quad R_{Ex} = 12 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Ey} - 8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 3.6 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ey} = 8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 3.6 \text{ m} - R_{Ay} = 21.067 \text{ Tn}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x_1 < 2 \text{ m}$, figura 6.83 (c).

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + N_1 = 0 \quad N_1 = -R_{Ay} = -7.733 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad V_1 = 0 \\ V_1 = 0 \text{ Tn}$$

$$\curvearrowright \sum M_B = 0; \quad M_1 = 0 \\ M_1(x_1) = 0 \text{ Tn}$$

- **Fuerzas internas** en el tramo 2-2, $2 \leq x_2 < 4 \text{ m}$, figura 6.83 (d).

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + N_2 = 0 \quad N_2 = -R_{Ay} = -7.733 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad V_2 + 12 \text{ Tn} = 0 \\ V_2 = -12 \text{ Tn}$$

$$\curvearrowright \sum M_C = 0; \quad M_2 + 12 \text{ Tn} (x_2 - 2 \text{ m}) \\ M_2(x_2) = -12 \text{ Tn} \cdot (x_2 - 2 \text{ m})$$

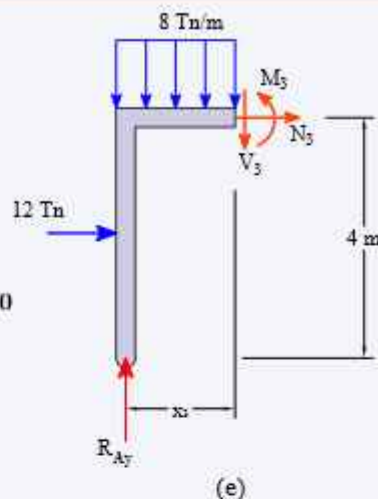
$$M_2(2 \text{ m}) = 0 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad M_2(4 \text{ m}) = -24 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

CONTINUACIÓN

- Fuerzas internas en el tramo 3-3, $0 \leq x_3 < 3.6 \text{ m}$, figura 6.83 (e).

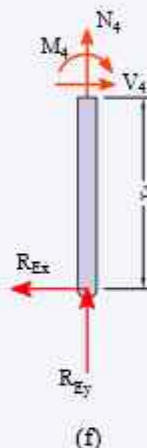
$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum F_x = 0; & \quad N_3 + 12 \text{ Tn} = 0 & \quad N_3 := -12 \text{ Tn} \\ +\uparrow \sum F_y = 0; & \quad -V_3 + R_{Ay} - 8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot x_3 = 0 \\ & \quad V_3(x_3) := R_{Ay} - 8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot x_3 \\ \Leftrightarrow \sum M_D = 0; & \quad M_3 + 8 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2} + 12 \text{ Tn} \cdot 2 \text{ m} - R_{Ay} \cdot x_3 = 0 \\ & \quad M_3(x_3) := -4 \text{ Tn} \cdot \text{m}^{-1} \cdot x_3^2 + R_{Ay} \cdot x_3 - 24 \text{ Tn} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3(0 \text{ m}) &= 7.733 \text{ Tn} & \quad M_3(0 \text{ m}) &= -24 \text{ m} \cdot \text{Tn} \\ V_3(3.6 \text{ m}) &= -21.067 \text{ Tn} & \quad M_3(0.967 \text{ m}) &= -20.262 \text{ Tn} \cdot \text{m} \\ V_3(0.9667 \text{ m}) &= 0 \text{ Tn} & \quad M_3(3.6 \text{ m}) &= -48 \text{ Tn} \cdot \text{m} \end{aligned}$$



- Fuerzas internas en el tramo 4-4, $0 \leq x_4 < 4 \text{ m}$, figura 6.83 (f).

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y = 0; & \quad R_{By} + N_4 = 0 & \quad N_4 := -R_{By} = -21.067 \text{ Tn} \\ \Rightarrow \sum F_x = 0; & \quad V_4 - R_{Bx} = 0 \\ & \quad V_4 = R_{Bx} = 12 \text{ Tn} \\ \Leftrightarrow \sum M_D = 0; & \quad -M_4 - R_{Bx} \cdot x_4 = 0 \\ & \quad M_4(x_4) := -R_{Bx} \cdot x_4 \end{aligned}$$



$$M_4(0 \text{ m}) = 0 \text{ m} \cdot \text{Tn} \quad M_4(4 \text{ m}) = -48 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.83 (g), (h) y (i).

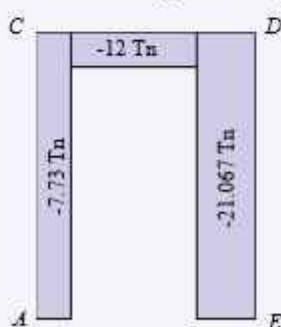


Diagrama Axial (g)

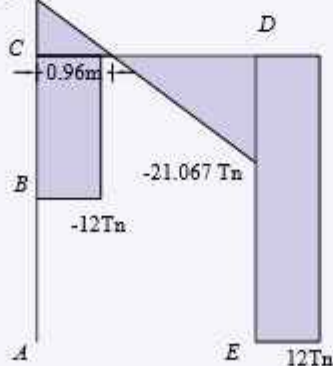


Diagrama Cortante (h)

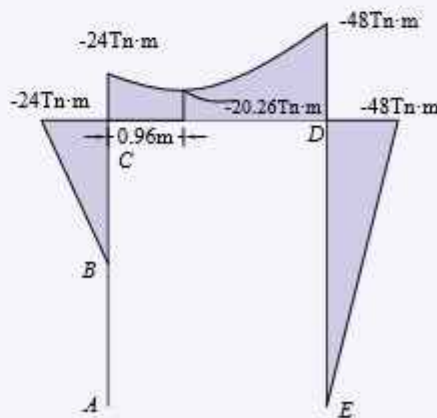
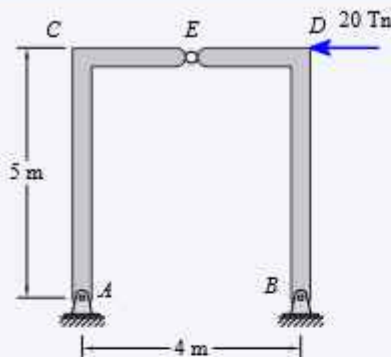


Diagrama Momento (i)

Figura 6.83

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.11

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que produce la fuerza sobre el marco.



(a)

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.84 (b).

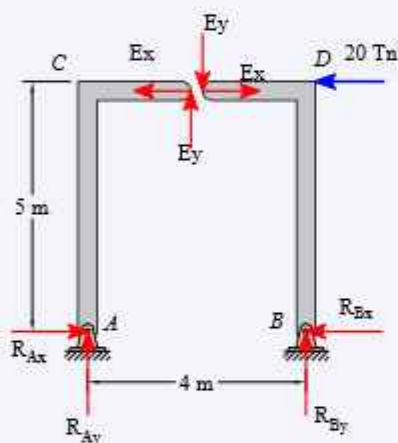
$$\Leftrightarrow \sum M_B = 0; \quad R_{Ay} \cdot 4 \text{ m} + 20 \text{ Tn} \cdot 5 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ay} := \frac{-20 \text{ Tn} \cdot 5 \text{ m}}{4 \text{ m}} = -25 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} + R_{Bx} - 20 \text{ Tn} = 0 \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} = 0 \quad R_{Ay} = -R_{By} = 25 \text{ Tn}$$

- Determinación de las fuerzas sobre la rótula, figura 6.84 (b).



(b)

$$\Leftrightarrow \sum M_E = 0; \quad R_{Ay} \cdot 2 \text{ m} - R_{Ax} \cdot 5 \text{ m} = 0$$

$$R_{Ax} := \frac{R_{Ay} \cdot 2 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 10 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Ax} - E_x = 0 \quad E_x = R_{Ax} = 10 \text{ Tn}$$

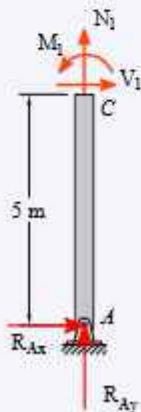
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + E_y = 0 \quad E_y = -R_{Ay} = -25 \text{ Tn}$$

Reemplazando

$$R_{Ax} + R_{Bx} - 20 \text{ Tn} = 0 \quad R_{Bx} := 20 \text{ Tn} - R_{Ax} = 10 \text{ Tn}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x_1 < 5 \text{ m}$, figura 6.84 (c).



(c)

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad N_1 + R_{Ay} = 0 \quad N_1 := -R_{Ay} = -25 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0; \quad V_1 + R_{Ax} = 0 \quad V_1 := -R_{Ax} = -10 \text{ Tn}$$

$$\Leftrightarrow \sum M_E = 0; \quad M_1 + R_{Ax} \cdot x_1 = 0$$

$$M_1(x_1) := -R_{Ax} \cdot x_1$$

$$M_1(0 \text{ m}) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad M_1(5 \text{ m}) = -50 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

CONTINUACIÓN

- Fuerzas internas en el tramo 2-2, $0 \leq x_2 < 4 \text{ m}$, figura 6.84 (d).

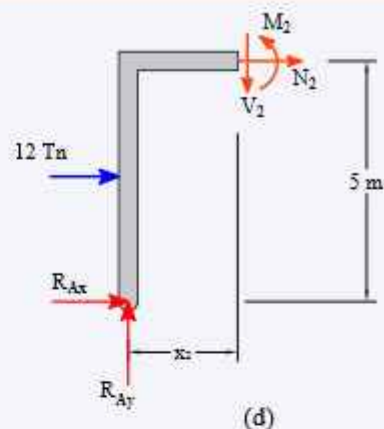
$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad -V_2 + R_{Ay} = 0 \quad V_2 := R_{Ay} = 25 \text{ Tn}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad N_2 + R_{Ax} = 0 \quad N_2 := -R_{Ax} = -10 \text{ Tn}$$

$$\Leftrightarrow \sum M_E = 0 ; \quad M_2 - R_{Ay} \cdot x_2 + R_{Ax} \cdot 5 \text{ m} = 0$$

$$M_2(x_2) := R_{Ay} \cdot x_2 - R_{Ax} \cdot 5 \text{ m}$$

$$M_2(0 \text{ m}) = -50 \text{ Tn} \cdot \text{m} \quad M_2(4 \text{ m}) = 50 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



- Fuerzas internas en el tramo 3-3, $0 \leq x_3 < 5 \text{ m}$, figura 6.84 (e).

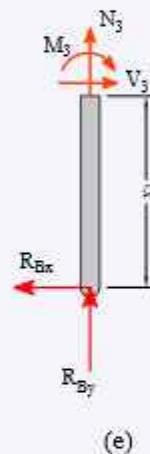
$$\Rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad V_3 + R_{Bx} = 0 \quad V_3 := -R_{Bx} = -10 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad N_3 - R_{By} = 0 \quad N_3 := R_{By} = 25 \text{ Tn}$$

$$\Leftrightarrow \sum M_E = 0 ; \quad -M_3 + R_{Bx} \cdot x_3 = 0$$

$$M_3(x_3) := R_{Bx} \cdot x_3$$

$$M_3(0 \text{ m}) = 0 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad M_3(5 \text{ m}) = 50 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$



Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.84 (f), (g) y (h).

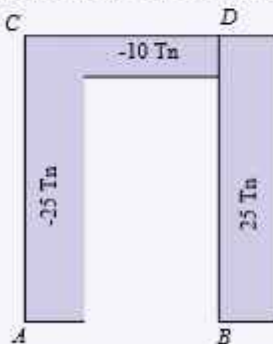


Diagrama Axial
(f)

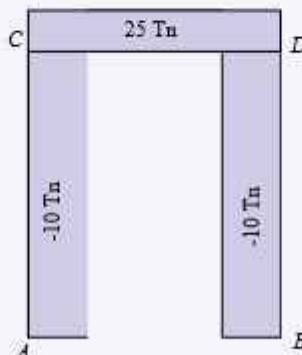


Diagrama Cortante
(g)

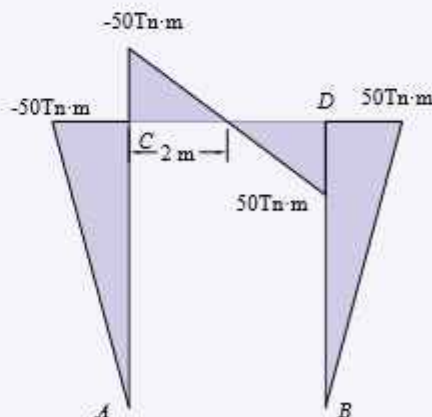


Diagrama Momento
(h)

Figura 6.84

EJEMPLO RESUELTO 6.1.5.12

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante que produce la fuerza sobre la viga circular.

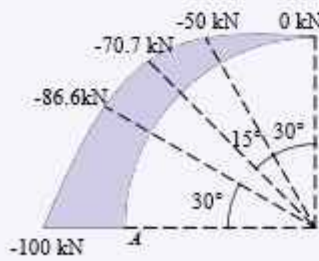
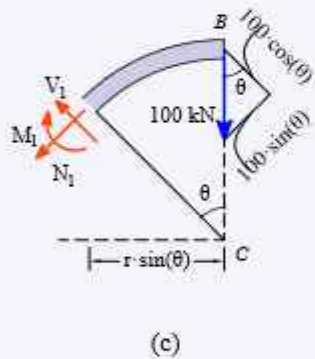
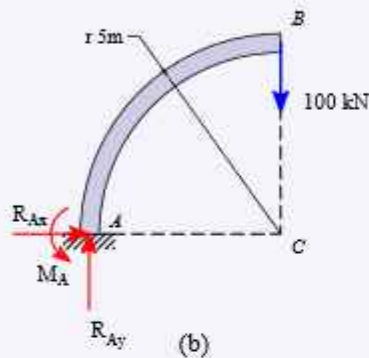
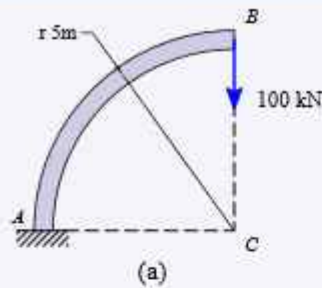


Diagrama Axial
(d)

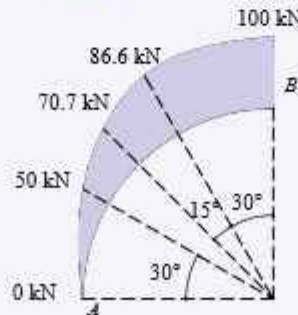


Diagrama Cortante
(e)

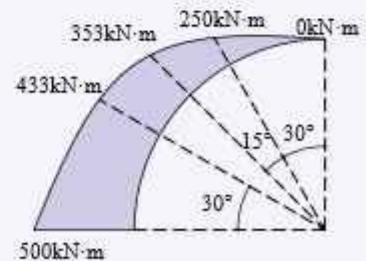


Diagrama Momento
(f)

Paso ①: Determinación de las reacciones en los apoyos, a partir del D.C.L. de la figura 6.85 (b).

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sum M_B = 0; & \quad M_A - 100 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} = 0 \\ & \quad M_A = 100 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} = 500 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum F_x = 0; & \quad R_{Ax} = 0 \text{ Tn} \\ +\uparrow \sum F_y = 0; & \quad R_{Ay} - 100 \text{ kN} = 0 \quad R_{Ay} = 100 \text{ kN} \end{aligned}$$

Paso ②: Determinación de las fuerzas internas, usando ecuaciones de equilibrio

- **Fuerzas internas** en el tramo 1-1, $0 \leq x_1 < 5 \text{ m}$, figura 6.85 (c).

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; & \quad N_1 + 100 \text{ kN} \cdot \sin(\theta) = 0 & \quad N_1 = -100 \text{ kN} \cdot \sin(\theta) \\ \sum F_x = 0; & \quad V_1 - 100 \text{ kN} \cdot \cos(\theta) = 0 & \quad V_1 = 100 \text{ kN} \cdot \cos(\theta) \\ \sum M_1 = 0; & \quad -M_1 - 100 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} \cdot \sin(\theta) = 0 & \quad M_1 = 100 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

Paso ③ Diagrama de fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 6.85 (d), (e) y (f).

$\theta = 0 \text{ deg}$

$$N_1 = 0 \text{ kN} \quad V_1 = 100 \text{ kN} \quad M_1 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$\theta = 30^\circ$

$$N_1 = -50 \text{ kN} \quad V_1 = 86.603 \text{ kN} \quad M_1 = 250 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$\theta = 45^\circ$

$$N_1 = -70.711 \text{ kN} \quad V_1 = 70.711 \text{ kN} \quad M_1 = 353.553 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$\theta = 60^\circ$

$$N_1 = -86.603 \text{ kN} \quad V_1 = 50 \text{ kN} \quad M_1 = 433.013 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$\theta = 90^\circ$

$$N_1 = -100 \text{ kN} \quad V_1 = 0 \text{ kN} \quad M_1 = 500 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

6.1.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

21

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de la figura

Ejercicios

6.61

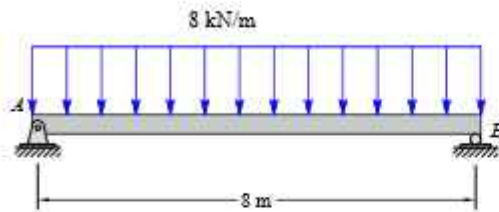


Figura 6.86

6.62

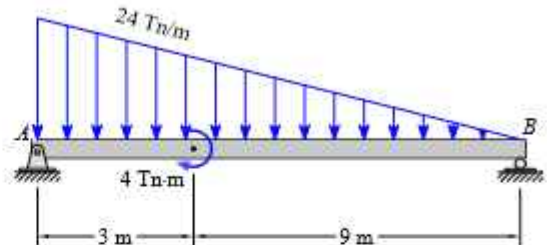


Figura 6.87

6.63

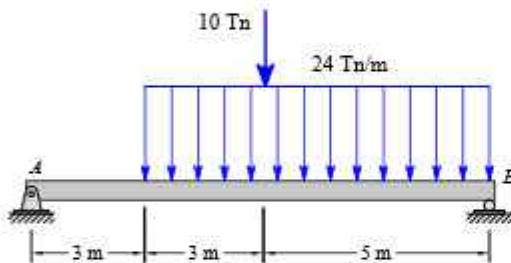


Figura 6.88

6.64

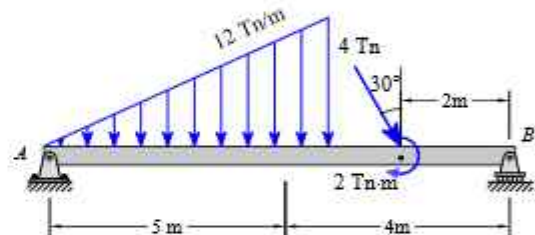


Figura 6.89

6.65

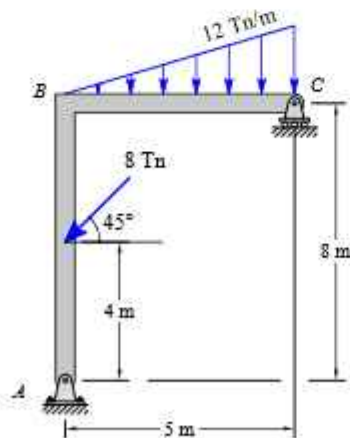


Figura 6.90

6.66

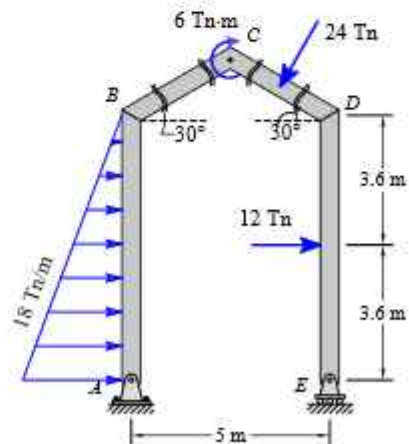


Figura 6.91

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.67

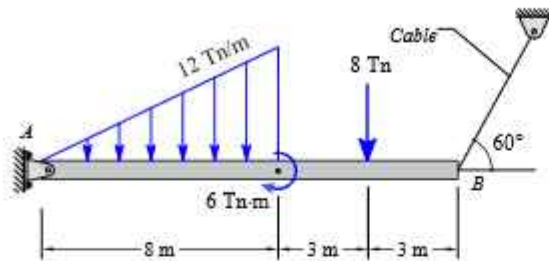


Figura 6.92

6.68

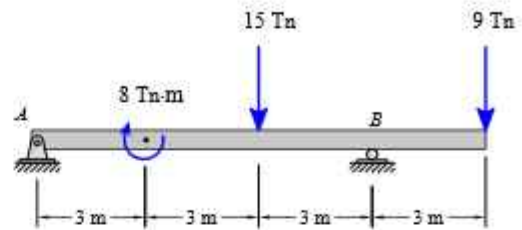


Figura 6.93

6.69

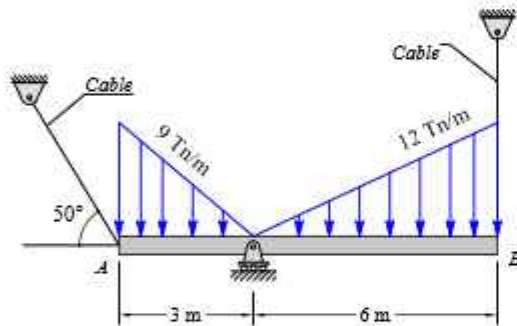


Figura 6.94

6.70

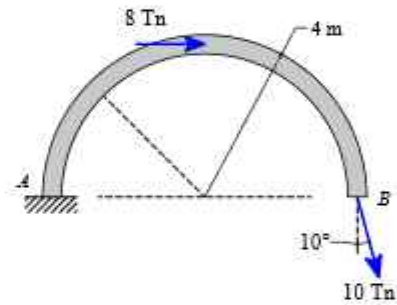


Figura 6.95

6.71

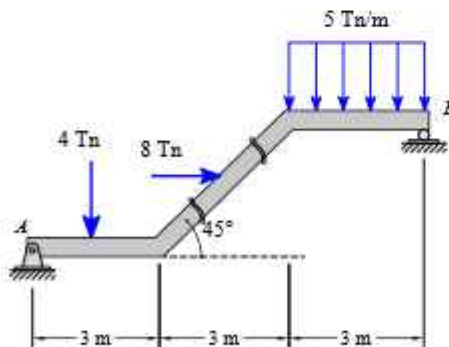


Figura 6.96

6.72

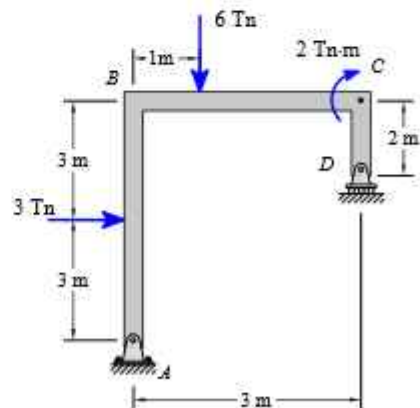


Figura 6.97

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.73

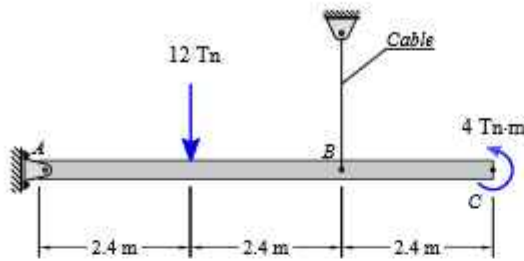


Figura 6.98

6.74

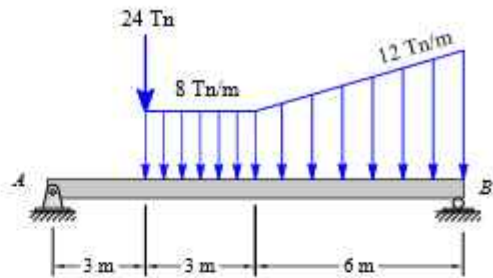


Figura 6.99

6.75

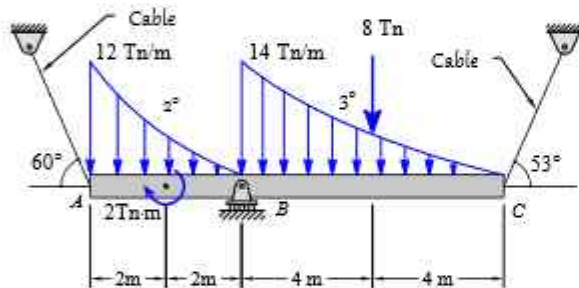


Figura 6.100

6.76

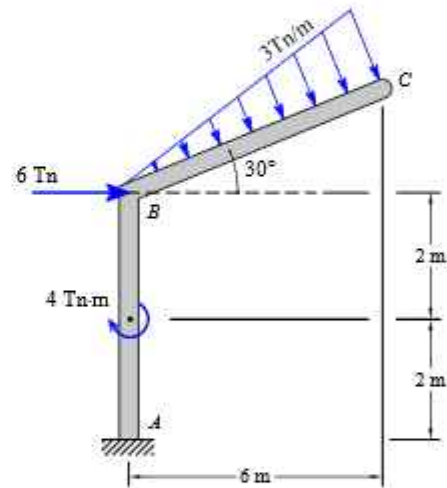


Figura 6.101

6.77

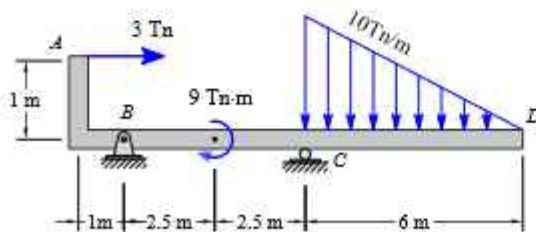


Figura 6.102

6.78

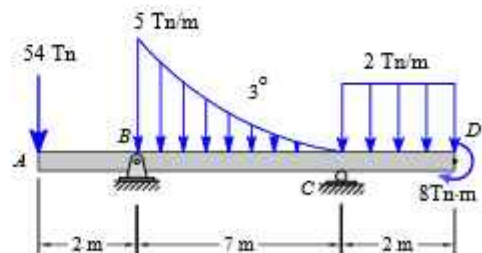


Figura 6.103

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B

de las siguientes figuras.

6.79

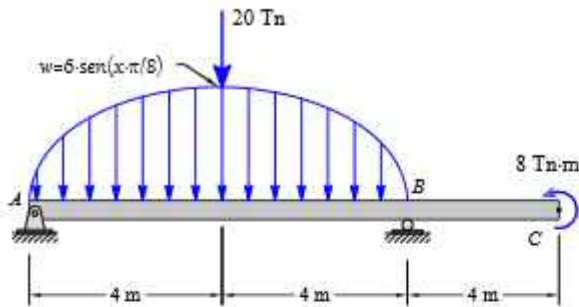


Figura 6.104

6.80

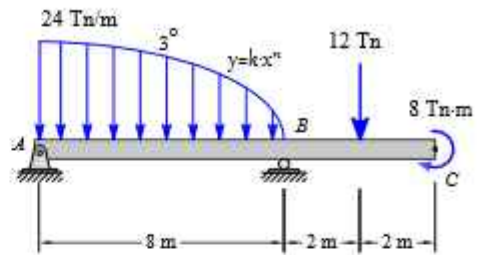


Figura 6.105

6.81

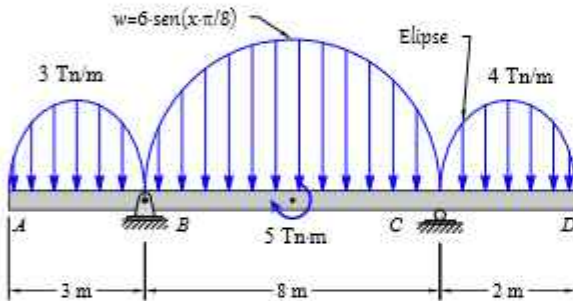


Figura 6.106

6.82

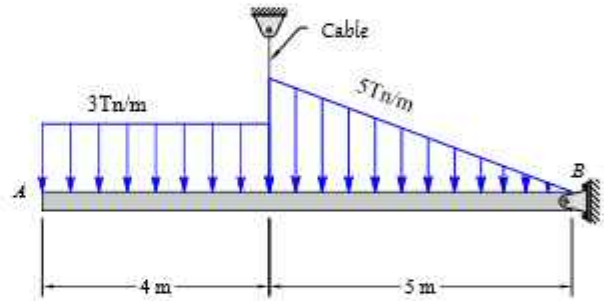


Figura 6.107

6.83

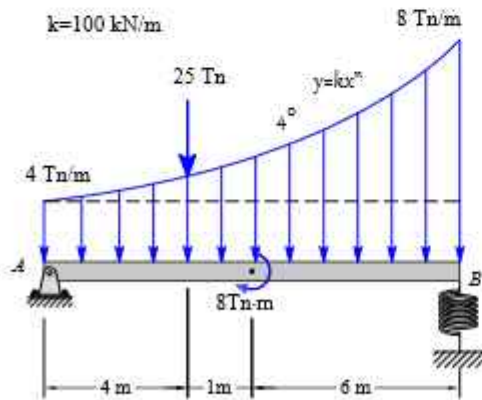


Figura 6.108

6.84

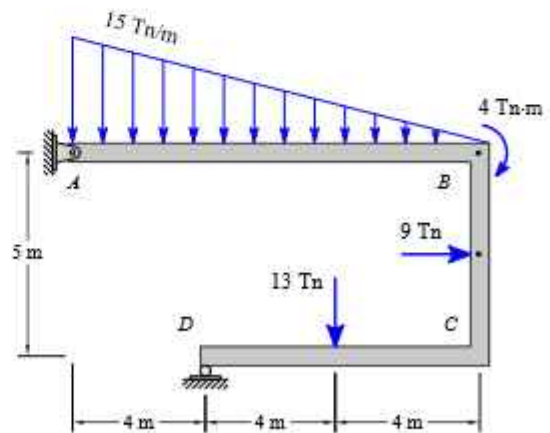


Figura 6.109

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B

de las siguientes figuras.

6.85

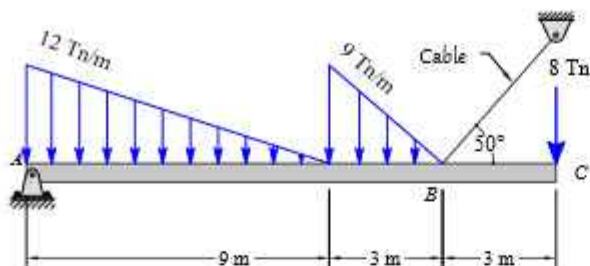


Figura 6.110

6.86

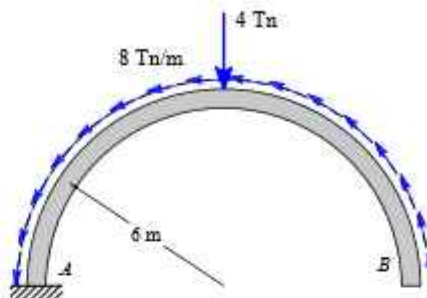


Figura 6.111

6.87

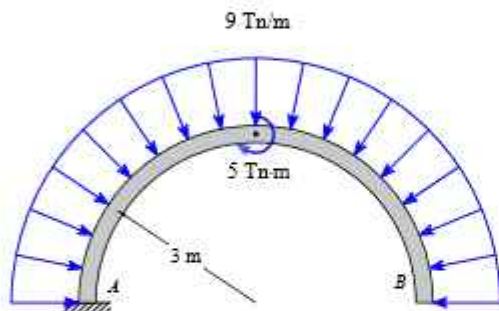


Figura 6.112

6.88

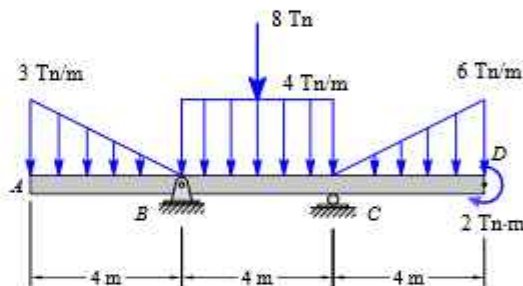


Figura 6.113

6.89

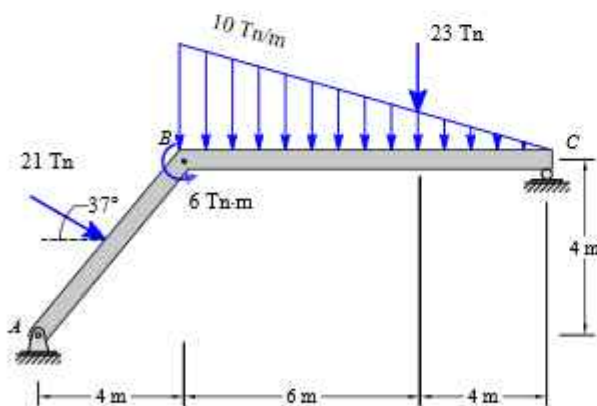


Figura 6.114

6.90

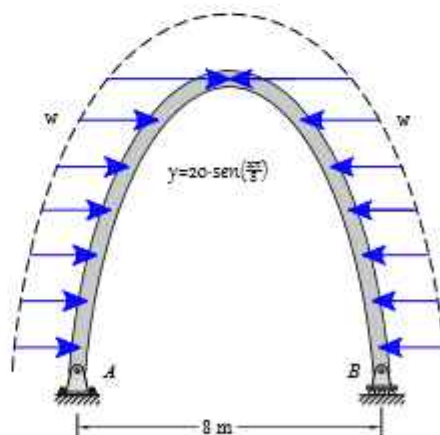


Figura 6.115

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.91

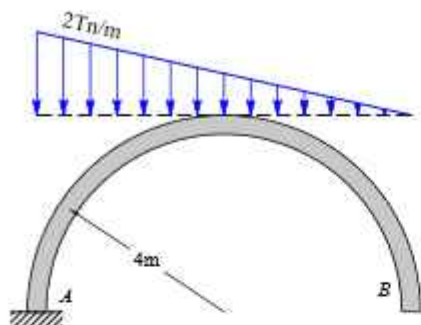


Figura 6.116

6.92

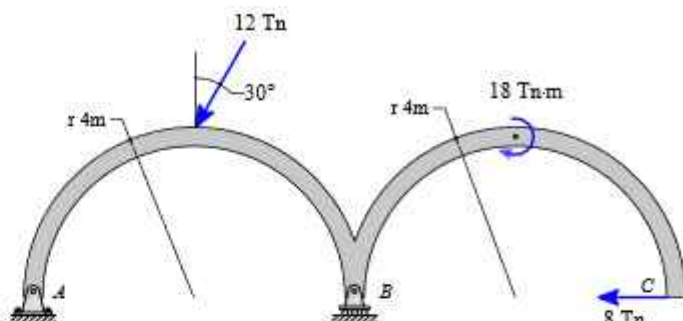


Figura 6.117

6.93

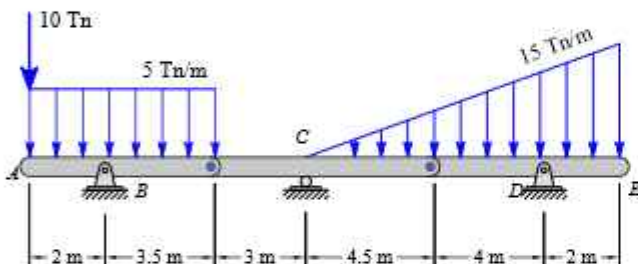


Figura 6.118

6.94

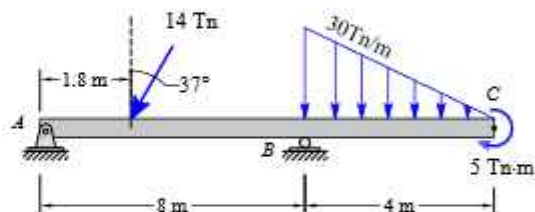


Figura 6.119

6.95

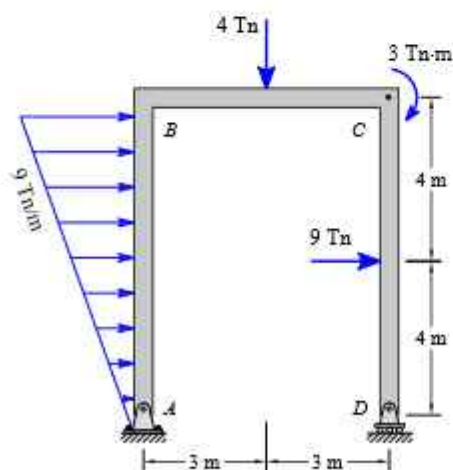


Figura 6.120

6.96

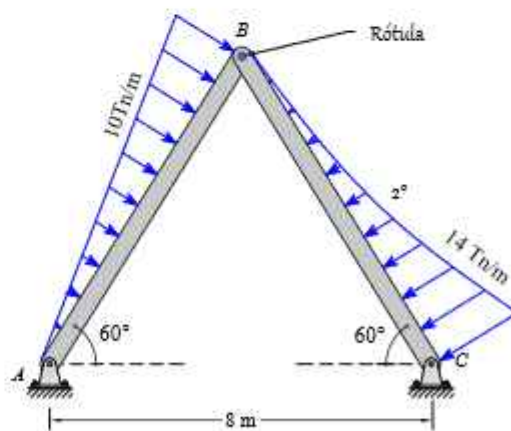


Figura 6.121

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.97

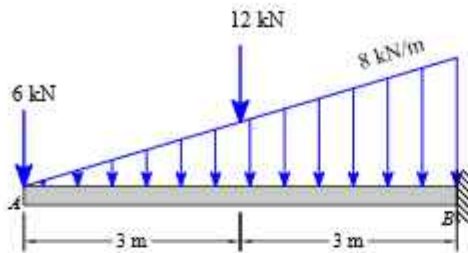


Figura 6.122

6.98

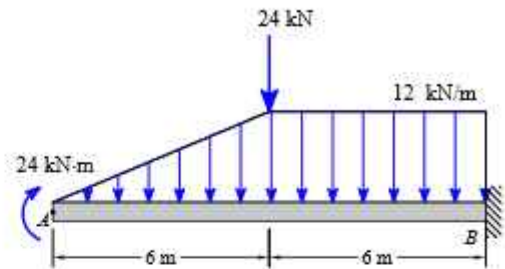


Figura 6.123

6.99

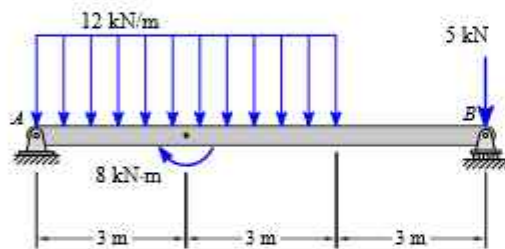


Figura 6.124

6.100

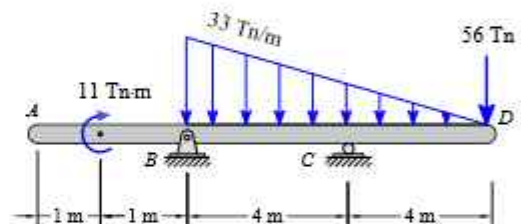


Figura 6.125

6.101

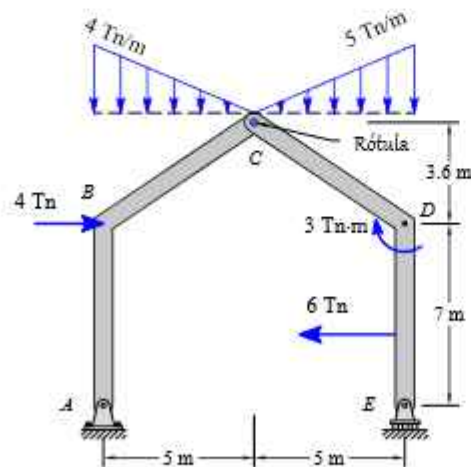


Figura 6.126

6.102

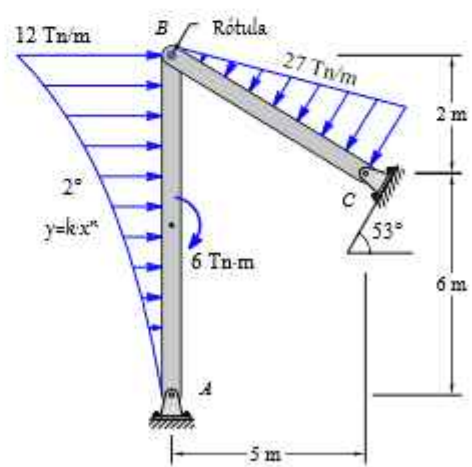


Figura 6.127

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.103

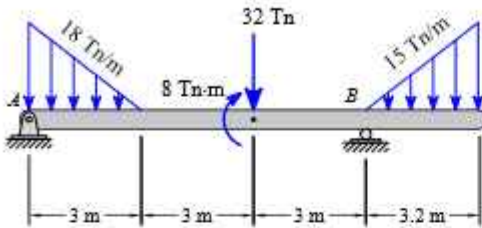


Figura 6.128

6.104

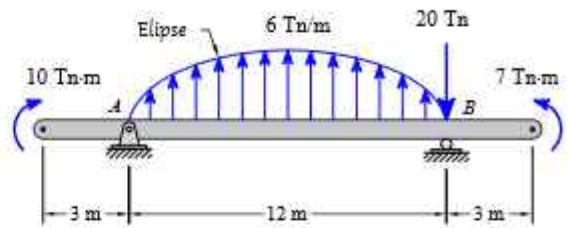


Figura 6.129

6.105

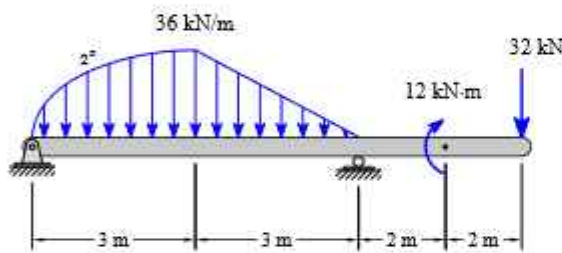


Figura 6.130

6.106

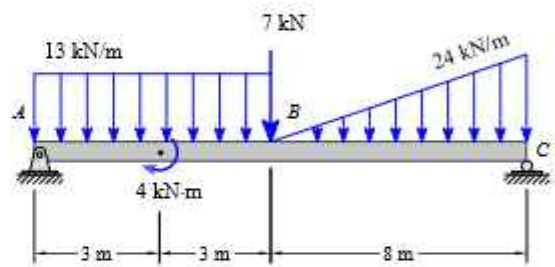


Figura 6.131

6.107

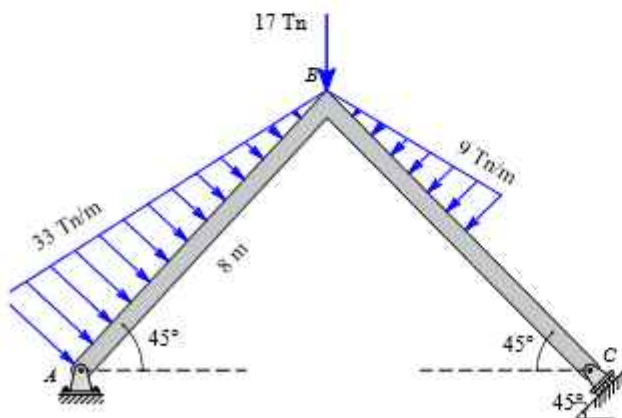


Figura 6.132

6.108

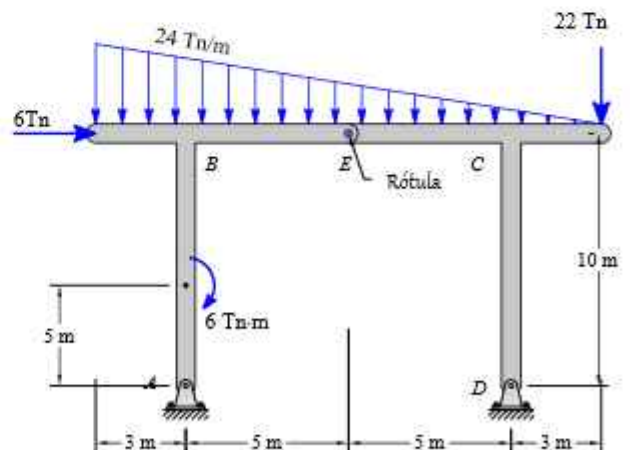


Figura 6.133

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.109

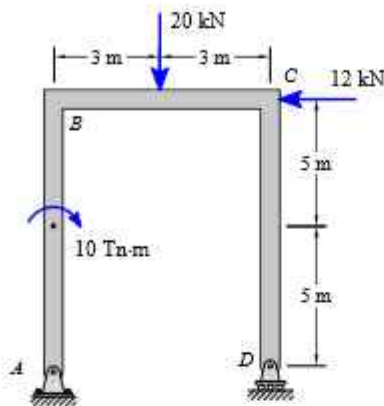


Figura 6.134

6.110

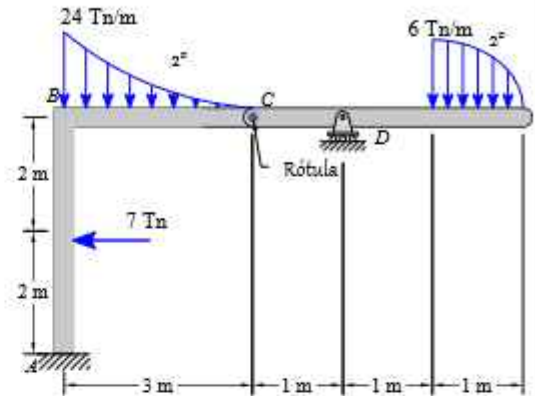


Figura 6.135

6.111

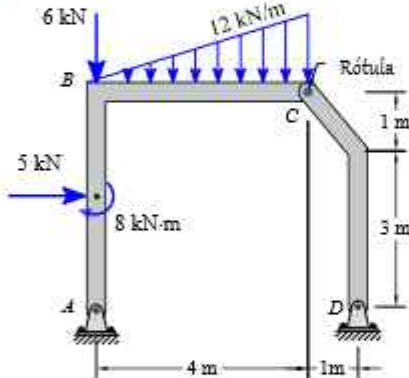


Figura 6.136

6.112

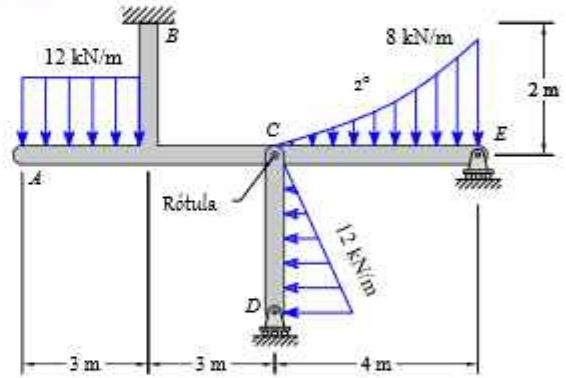


Figura 6.137

6.113

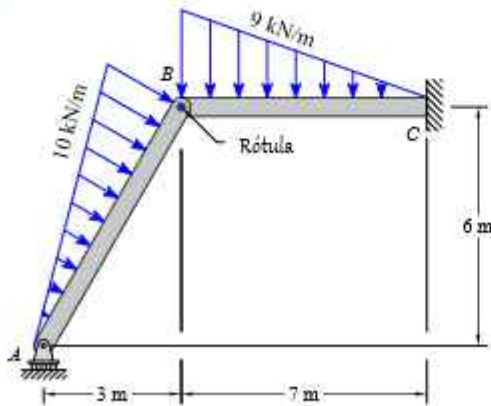


Figura 6.138

6.114

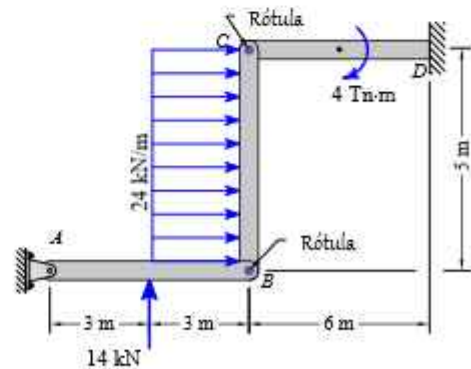


Figura 6.139

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.115

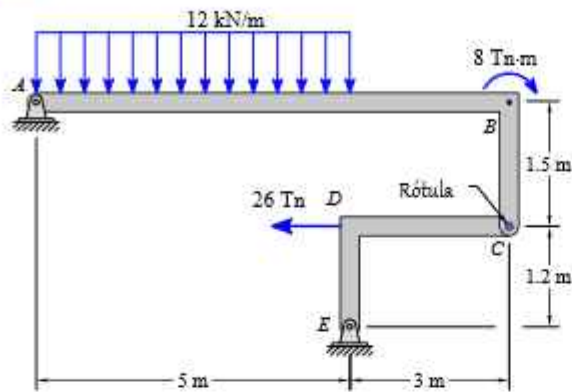


Figura 6.140

6.116

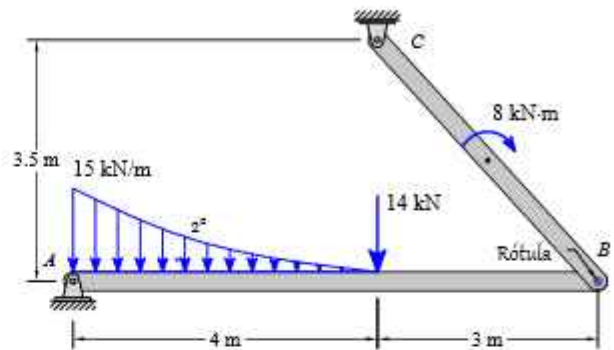


Figura 6.141

6.117

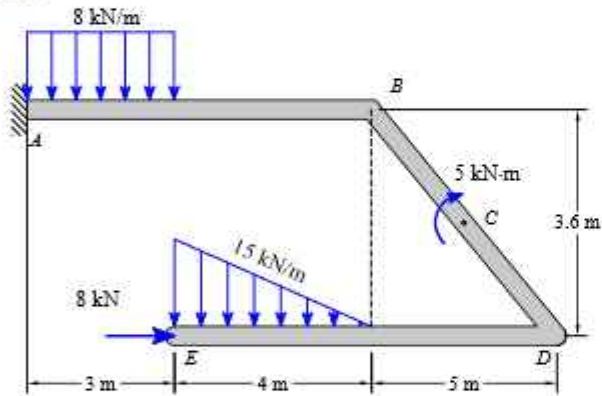


Figura 6.142

6.118

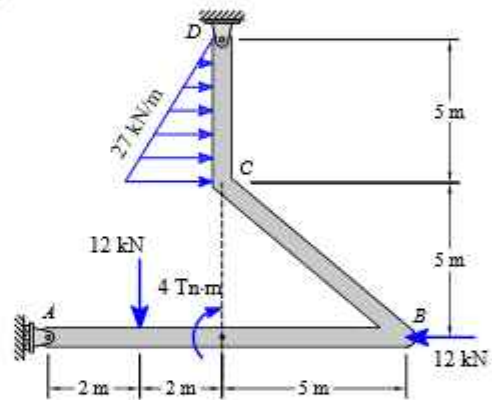


Figura 6.143

6.119

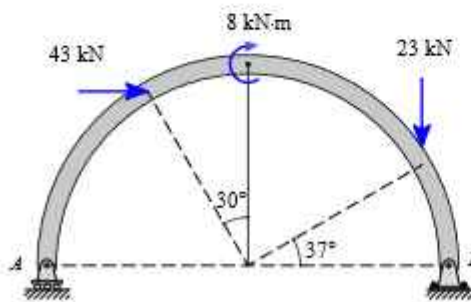


Figura 6.144

6.120

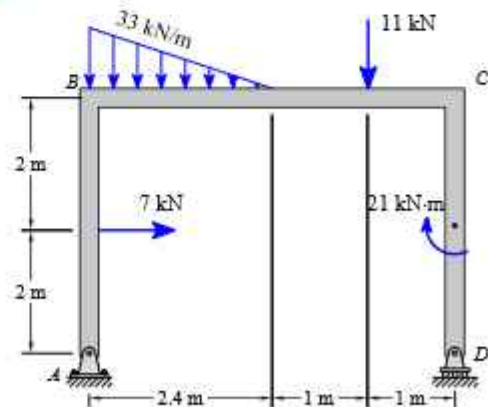


Figura 6.145

Determinar la fuerza Normal, fuerza cortante y momento flexionante en el lado izquierdo y derecho del punto B de las siguientes figuras.

6.121

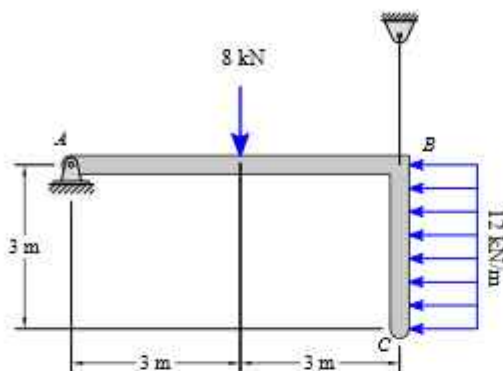


Figura 6.146

6.122

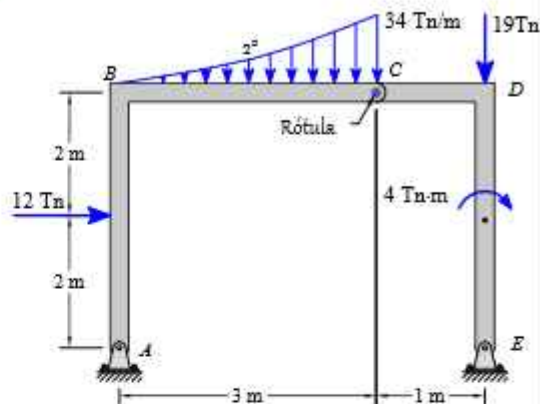


Figura 6.147

6.123

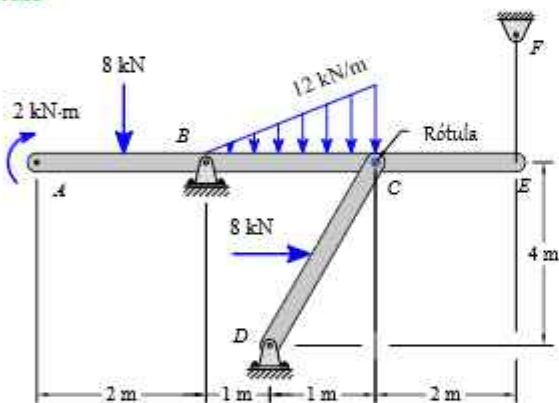


Figura 6.148

6.124

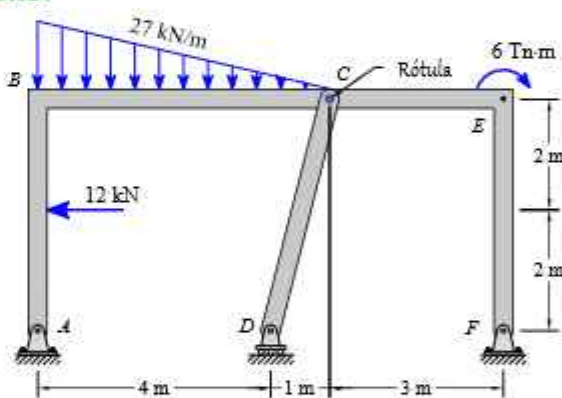


Figura 6.149

6.125

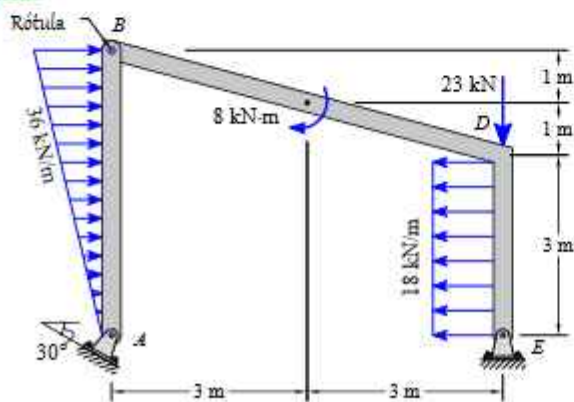


Figura 6.150

6.126

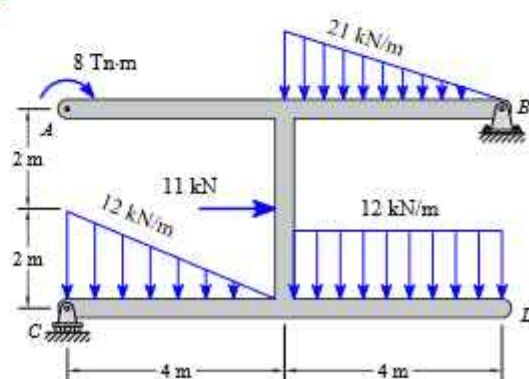
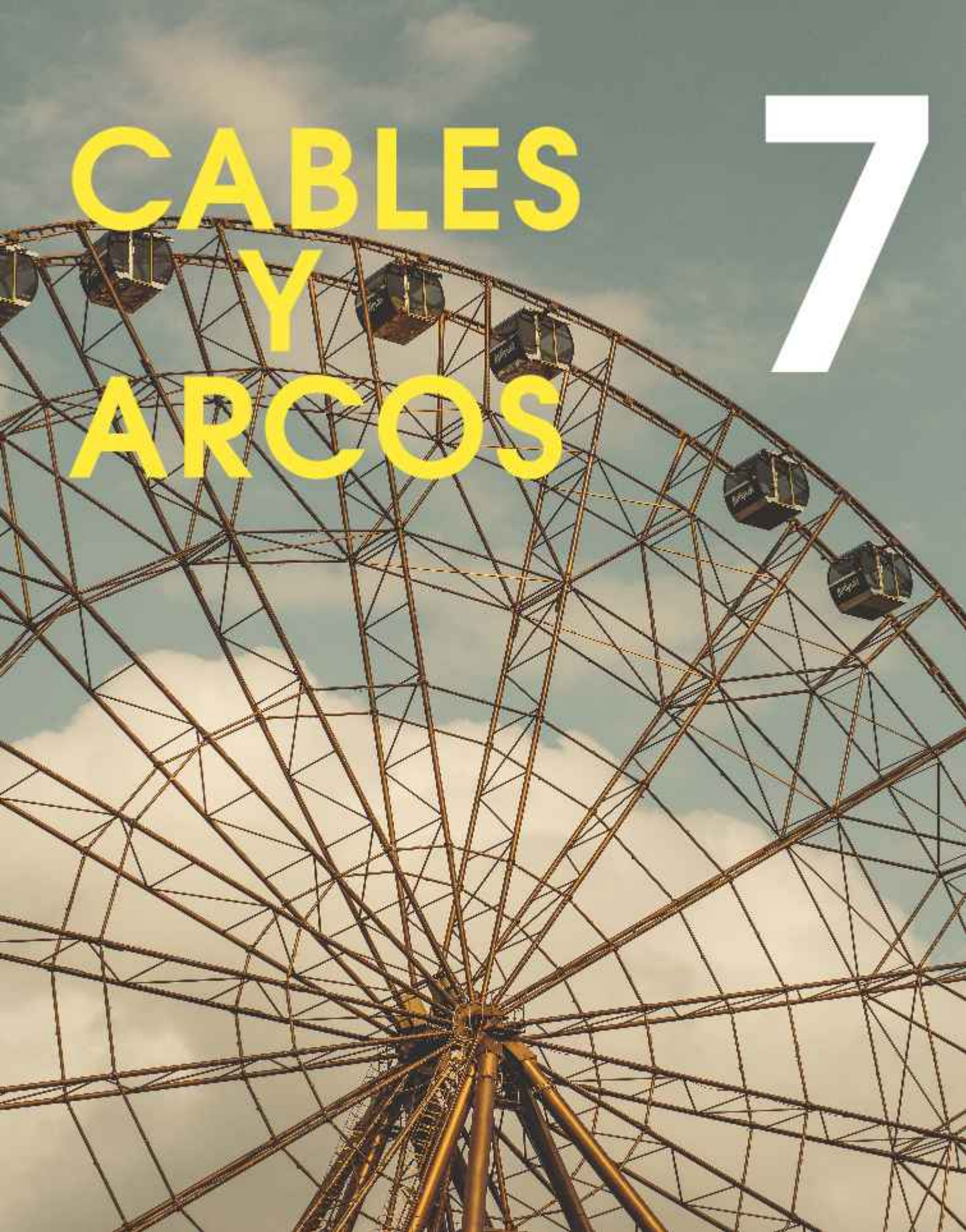


Figura 6.151



**CABLES
Y
ARCOS**

7

7 | CABLES

7.1. CABLES

Los cables desempeñan un papel crucial en la ingeniería estructural, ya que son elementos fundamentales en la construcción de estructuras modernas de gran envergadura y complejidad. Están diseñados para soportar cargas de tracción y compresión en forma de fuerzas de tensión, y su aplicación abarca desde puentes colgantes icónicos hasta techos tensados y sistemas de suspensión.

Los cables y cadenas son:

Tipos de Cables	}	• Cable con carga concentrada	→ Para formular las condiciones de equilibrio, las cargas deben coplanares al cable
		• Cable con carga distribuida	
		• Cable sometido a su propio peso	

Hipótesis de análisis:

- Perfectamente flexible e inextensible.
- Las fuerzas de tensión que actúan en el cable son siempre tangentes en el punto aplicado.
- El cable tiene una longitud constante antes y después de ser aplicado la carga.
- El cable es inextensible.
- Para el análisis por elementos finitos un segmento del cable puede ser tratado como cuerpo rígido.



Figura 7.1: Uso de cables en Semáforos y puentes colgantes

7.1.1. CABLES CON CARGAS CONCENTRADAS

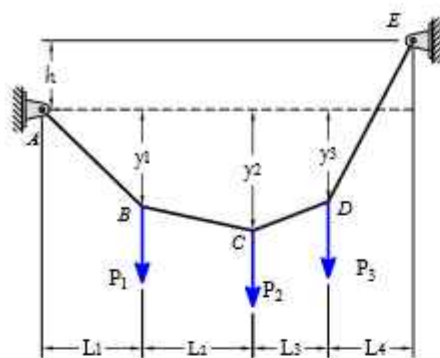


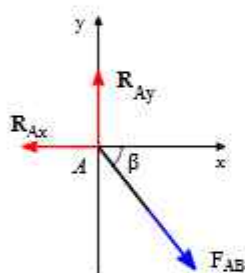
Figura 7.2: figura4

Las cargas concentradas en cables pueden inducir efectos como la concentración de tensiones en puntos de carga y la redistribución de las fuerzas a lo largo del cable. En cables sometidos a cargas puntuales, las tensiones tienden a aumentar significativamente en las zonas cercanas a los puntos de aplicación de carga. Esto puede resultar en un aumento localizado de las tensiones y, si no se considera en el diseño, podría provocar fallos prematuros en la estructura. **PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS:**

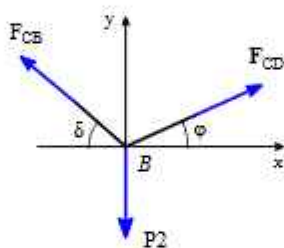
Para determinar las tensiones sobre los cables se pueden determinar, a través, del *método de nodos* y *método de las secciones*

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS: MÉTODO DE NODOS

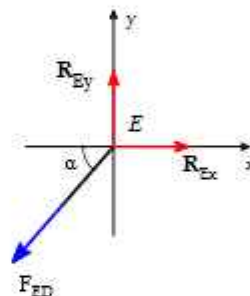
Para determinar las tensiones en los cables se usa las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$.



(a)



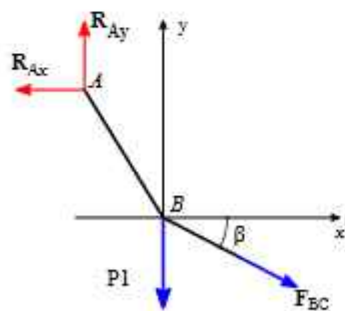
(b)



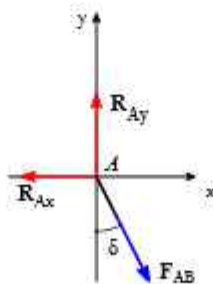
(c)

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS: MÉTODO DE LAS SECCIONES

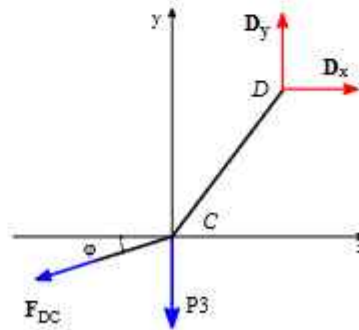
Para determinar las tensiones en los cables se usa las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_O = 0$



(a)



(b)



(c)

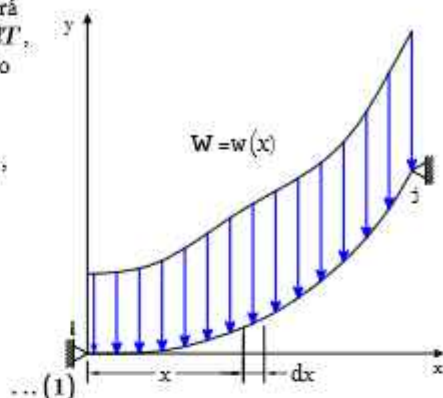
7.1.2. CABLES CON CARGA DISTRIBUIDA

Para determinar la tensión en el cable consideramos al cable sin peso, el cual estará sometido a una carga distribuida $w(x)$, el cambio de tensión se denotará como dT , la distancia donde actuara la resultante de la carga distribuida se considerara como una distancia fraccionara $Q(dx)$, donde $0 < Q < 1$

Aplicamos las ecuaciones de equilibrio, luego dividimos las ecuaciones entre dx , además, se cumple $dy=0$, $d\theta=0$, $dT=0$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad \frac{-T \cdot \cos(\theta) + (T + dT) \cdot \cos(\theta + d\theta)}{dx} = 0$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{(-T \cdot \cos(\theta) + (T + dT) \cdot \cos(\theta + d\theta))}{dx} = \frac{d(T \cdot \cos(\theta))}{dx} = 0 \quad \dots (1)$$

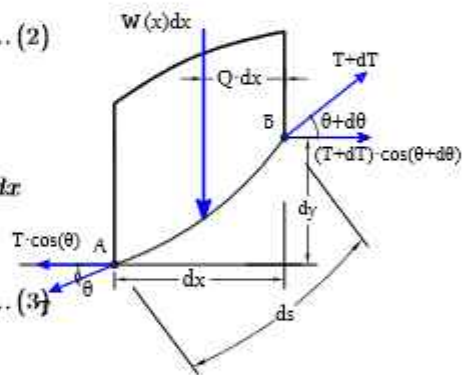


$$+ \uparrow \sum F_y = 0; \quad -T \cdot \sin(\theta) - w(x) dx + (T + dT) \sin(\theta + d\theta)$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{-T \cdot \sin(\theta) - w(x) dx + (T + dT) \sin(\theta + d\theta)}{dx} = \frac{d(T \cdot \sin(\theta))}{dx} - w(x) \quad \dots (2)$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad w(x) \cdot dx (Q \cdot dx) - T \cdot \cos(\theta) \cdot dy + T \cdot \sin(\theta) dx$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{w(x) \cdot dx (Q \cdot dx) - T \cdot \cos(\theta) \cdot dy + T \cdot \sin(\theta) dx}{dx} = \frac{dy}{dx} = \tan(\theta) \quad \dots (3)$$



Integramos la ecuación 1, y obtenemos, que representa la fuerza de tensión horizontal en cualquier punto

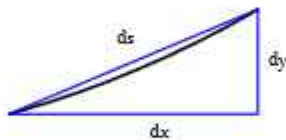
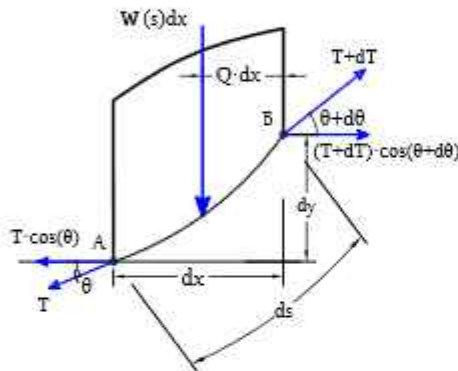
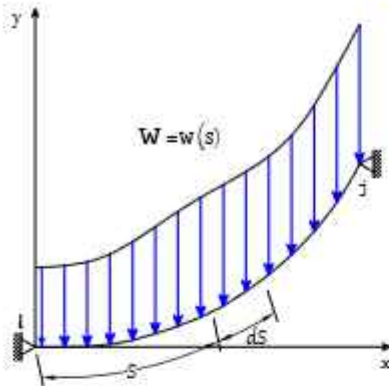
$$T \cdot \cos(\theta) = F_H = \text{Constante} \quad \dots (4)$$

Integramos la ecuación 2, y obtenemos la siguiente ecuación

$$T \cdot \sin(\theta) = \int w(x) dx \quad \dots (5)$$

Dividimos las ecuaciones 5 entre 4, luego realizamos la segunda integración y obtenemos la ecuación para determinar la curva del cable

$$\frac{T \cdot \sin(\theta)}{T \cdot \cos(\theta)} = \frac{1}{F_H} \int w(x) dx \quad \tan(\theta) = \frac{1}{F_H} \int w(x) dx \quad y = \frac{1}{F_H} \int \left(\int w(x) dx \right) dx$$



7.1.3. CABLE SOMETIDO A SU PROPIO PESO

Para determinar la tensión en el cable consideramos al cable con su peso, el cual estará sometido a una carga distribuida $w(s)$, el cambio de tensión se denotará como dT , la distancia donde actuara la resultante de la carga distribuida se considerará como una distancia fraccionaria $Q(ds)$, donde $0 < Q < 1$.

$$T \cdot \cos(\theta) = F_H = \text{Constante} \quad \dots (1)$$

$$T \cdot \sin(\theta) = \int w(s) ds \quad \dots (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w(s) ds \quad \dots (3)$$

De la figura obtenemos

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \dots (4)$$

Reemplazamos la ecuación 3 en 4

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{F_H} \int w(s) ds\right)^2} \quad \dots (5)$$

Al integrar la ecuación 5 obtenemos la ecuación siguiente

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s) ds\right)^2}}$$

7.1.4. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO RESUELTO 7.1.4.1

Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura, y la longitud total del cable

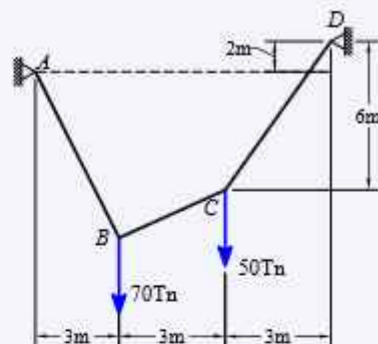
Paso ①: Construcción del D.C.L de todo el cable, figura 7.3 (b).

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad R_{Dx} - R_{Ax} = 0 \quad \dots (1)$$

$$+ \odot \sum M_A = 0 ; \quad -70 \text{ Tn} (3 \text{ m}) - 50 \text{ Tn} (6 \text{ m}) - R_{Dx} (2 \text{ m}) + R_{Dy} (9 \text{ m}) = 0 \quad \dots (2)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Ay} + R_{Dy} = 120 \text{ Tn} \quad \dots (3)$$

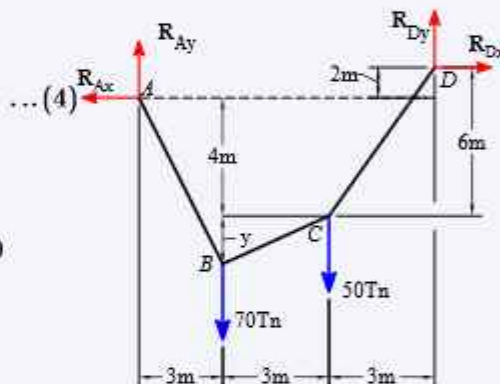


(a)

Para poder determinar las reacciones hacemos uso del método de las secciones, figura 7.3 (e).

$$+ \odot \sum M_C = 0 ; \quad R_{Dx} (6 \text{ m}) - R_{Dy} (3 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Dy} = 2 R_{Dx}$$



(b)

Reemplazamos la ecuación (4) en (2) para obtener R_{Dx} y R_{Dy}

$$-70 \text{ Tn} (3 \text{ m}) - 50 \text{ Tn} (6 \text{ m}) - R_{Dx} (2 \text{ m}) + 2 R_{Dx} (9 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Dx} = \frac{210 \text{ Tn} + 300 \text{ Tn}}{16} = 31.875 \text{ Tn}$$

$$R_{Dy} = 2 R_{Dx} = 63.75 \text{ Tn} \quad R_{Ax} = R_{Dx} = 31.875 \text{ Tn}$$

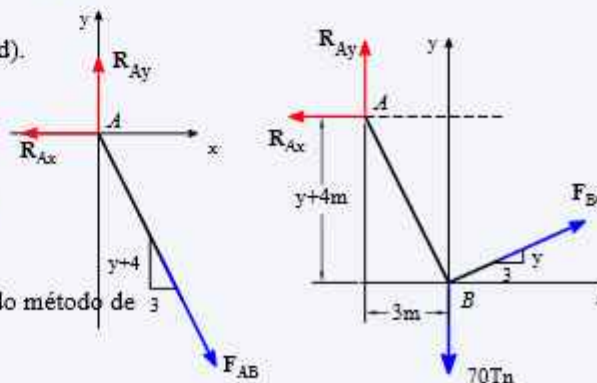
Reemplazamos en la ecuación (3) para hallar R_{Ay}

$$R_{Ay} + R_{Dy} = 120 \text{ Tn} \quad R_{Ay} = 120 \text{ Tn} - R_{Dy} = 56.25 \text{ Tn}$$

Para determinar y , hacemos uso de la sección de la figura 7.3 (d).

$$+ \odot \sum M_B = 0 ; \quad -R_{Ay} (3 \text{ m}) + R_{Ax} (y + 4 \text{ m}) = 0$$

$$y = \frac{R_{Ay} \cdot (3 \text{ m})}{R_{Ax}} - 4 \text{ m} = 1.294 \text{ m}$$

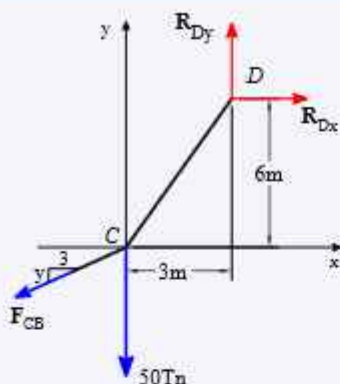


Paso ③: Determinamos las tensiones sobre los cables usando método de las secciones. Tensión sobre el cable F_{AB} , figura 7.3 (c).

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad -R_{Ax} + F_{AB} \cdot \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (y + 4 \text{ m})^2}} \right) = 0 \quad (c)$$

(d)

CONTINUACIÓN



(e)

$$F_{AB} := R_{Ax} \cdot \left(\frac{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (y+4 \text{ m})^2}}{3 \text{ m}} \right) = 64.654 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; R_{Ay} - F_{AB} \cdot \left(\frac{y+4 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (y+4 \text{ m})^2}} \right) = 0$$

$$F_{AB} := R_{Ay} \cdot \left(\frac{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (y+4 \text{ m})^2}}{y+4 \text{ m}} \right) = 64.654 \text{ Tn}$$

Tensión sobre el cable F_{BC} , figura 7.3 (e).

$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 ;$$

$$R_{Dx} - F_{BC} \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + y^2}} \right) = 0 \quad F_{BC} := R_{Dx} \cdot \left(\frac{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + y^2}}{3 \text{ m}} \right) = 34.714 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; -F_{BC} \left(\frac{y}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + y^2}} \right) + R_{Dy} - 50 = 0$$

$$F_{BC} := (R_{Dy} - 50 \text{ Tn}) \cdot \left(\frac{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + y^2}}{y} \right) = 34.714 \text{ Tn}$$

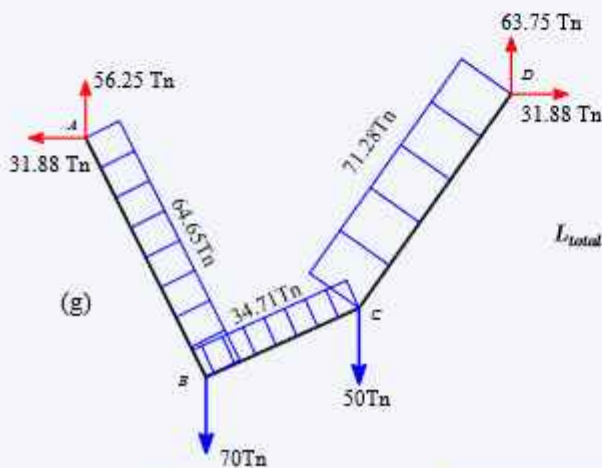
Tensión sobre el cable F_{CD} , figura 7.3 (f).

$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 ; R_{Dx} - F_{CD} \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2}} \right) = 0$$

$$F_{CD} := R_{Dx} \cdot \left(\frac{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2}}{3 \text{ m}} \right) = 71.275 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; R_{Dy} - F_{CD} \left(\frac{6 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2}} \right) = 0$$

$$F_{CD} := R_{Dy} \cdot \left(\frac{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2}}{6 \text{ m}} \right) = 71.275 \text{ Tn}$$



(g)

$$L_{total} := \sqrt{(y+4 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2} + \sqrt{(6 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2} + \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (y)^2}$$

$$L_{total} = 16.06 \text{ m}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{BC} \\ F_{CD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.654 \\ 34.714 \\ 71.275 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$[y] = [1.294] \text{ m}$$

Figura 7.3

Determine las tensiones en los cables por el método de los nodos

EJEMPLO RESUELTO 7.1.4.2

Paso ①: Para la solución del presente problema haremos el uso del método de los nodos

Nodo B: Por equilibrio del D.C.L de la figura 7.4 (a).

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad F_{BC} \cdot \cos(\theta) - F_{BA} \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad F_{BC} \cdot \sin(\theta) - F_{BA} \cdot \sin(\alpha) - 50 \text{ Tn} = 0 \quad \dots (2)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L de la figura 7.4 (b).

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad F_{CD} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{45}} \right) - F_{CB} \cdot \cos(\theta) = 0 \quad \dots (3)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad F_{CD} \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{45}} \right) - F_{CB} \cdot \sin(\theta) - 70 \text{ Tn} = 0 \quad \dots (4)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_{bc}}{\sqrt{y_{bc}^2 + 9}} \quad \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{y_{bc}^2 + 9}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{4 + y_{bc}}{\sqrt{y_{bc}^2 + 8 y_{bc} + 25}} \quad \cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{y_{bc}^2 + 8 y_{bc} + 25}}$$

$$F_{BC} := 1 \text{ Tn} \quad F_{BA} := 1 \text{ Tn} \quad F_{CD} := 1 \text{ Tn} \quad y_{bc} := 1 \text{ m}$$

$$F_{BC} \cdot \frac{3 \text{ m}}{\sqrt{y_{bc}^2 + 9 \text{ m}^2}} - F_{BA} \cdot \frac{3 \text{ m}}{\sqrt{y_{bc}^2 + 8 \text{ m } y_{bc} + 25 \text{ m}^2}} = 0$$

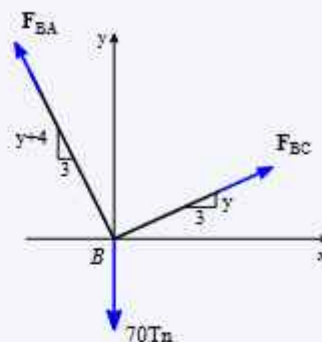
$$F_{BC} \cdot \frac{y_{bc}}{\sqrt{y_{bc}^2 + 9 \text{ m}^2}} + F_{BA} \cdot \frac{4 \text{ m} + y_{bc}}{\sqrt{y_{bc}^2 + 8 \text{ m } y_{bc} + 25 \text{ m}^2}} - 70 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{CD} \cdot \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{45 \text{ m}^2}} \right) - F_{BC} \cdot \frac{3 \text{ m}}{\sqrt{y_{bc}^2 + 9 \text{ m}^2}} = 0$$

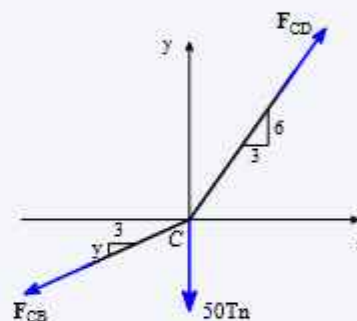
$$F_{CD} \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{45}} \right) - F_{BC} \cdot \frac{y_{bc}}{\sqrt{y_{bc}^2 + 9 \text{ m}^2}} - 50 \text{ Tn} = 0$$

$$\begin{bmatrix} F_{BC} \\ F_{BA} \\ F_{CD} \\ y_{bc} \end{bmatrix} := \mathbf{find} (F_{BC}, F_{BA}, F_{CD}, y_{bc})$$

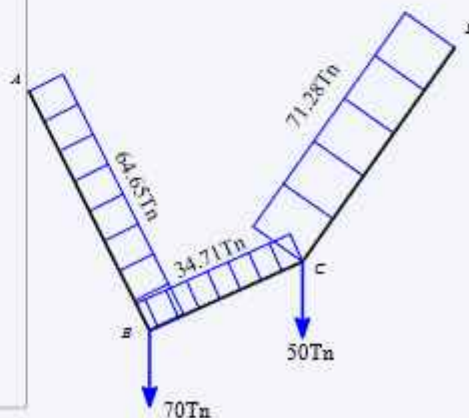
$$\begin{bmatrix} F_{BC} \\ F_{BA} \\ F_{CD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.714 \\ 64.654 \\ 71.275 \end{bmatrix} \text{ Tn} \quad y_{bc} = 1.294 \text{ m}$$



(a)



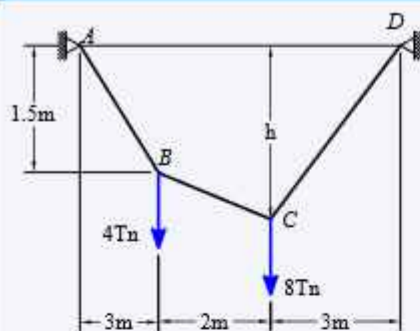
(b)



(c)

Figura 7.4

EJEMPLO RESUELTO 7.1.4.3



(a)

Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura, y la longitud total del cable

Paso ①: Construcción del D.C.L. de todo el cable, figura 7.5 (b).

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio, a demás, hallamos h

$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0; \quad R_{Dx} - R_{Ax} = 0$$

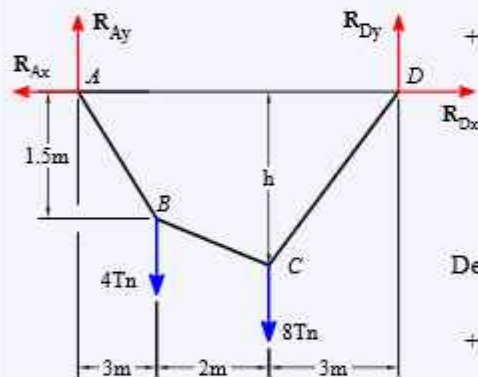
$$+ \circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad R_{Dy}(8 \text{ m}) - 4 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} - 8 \text{ Tn} \cdot 5 \text{ m} = 0$$

$$R_{Dy} := \frac{4 \text{ Tn} \cdot 3 \text{ m} + 8 \text{ Tn} \cdot 5 \text{ m}}{8 \text{ m}} = 6.5 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{Dy} = 12 \text{ Tn}$$

$$R_{Ay} = 12 \text{ Tn} - R_{Dy} = 5.5 \text{ Tn}$$

Determinación de la reacción R_{Ax} y R_{Dy} , según la figura 7.5 (c).



(b)

$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad R_{Ax}(1.5 \text{ m}) - R_{Ay}(3 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Ax} := \frac{R_{Ay} \cdot (3 \text{ m})}{1.5 \text{ m}} = 11 \text{ Tn}$$

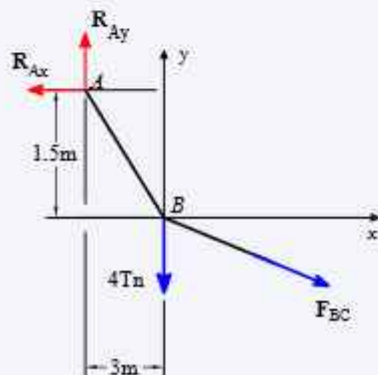
$$R_{Dx} = R_{Ax} = 11 \text{ Tn}$$

Determinación de h , según la figura 7.5 (d).

$$+ \circlearrowleft \sum M_C = 0; \quad R_{Dy}(3 \text{ m}) - R_{Dx}(h) = 0$$

$$h := \frac{R_{Dy} \cdot (3 \text{ m})}{R_{Dx}} = 1.773 \text{ m}$$

Paso ③: Determinamos las tensiones sobre los cables usando método de las secciones. Tensión sobre el cable F_{BC} , figura 7.5 (d)



(c)

$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$R_{Dx} - F_{BC} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{2^2 + (h-1.5)^2}} \right) = 0$$

$$F_{BC} := \frac{R_{Dx}}{\left(\frac{2 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h-1.5 \text{ m})^2}} \right)} = 11.102 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$R_{Dy} + F_{BC} \cdot \left(\frac{h-1.5 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h-1.5 \text{ m})^2}} \right) - 8 \text{ Tn}$$

CONTINUACIÓN

$$F_{BC} := \frac{8 \text{ Tn} - R_{Dy}}{h - 1.5 \text{ m}} = 11.102 \text{ Tn}$$

$$\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h - 1.5 \text{ m})^2}$$

Tensión sobre el cable F_{AB} , figura 7.5 (e).

$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad -R_{Ax} + F_{AB} \left(\frac{3}{\sqrt{3^2 + 1.5^2}} \right) = 0$$

$$F_{AB} := \frac{R_{Ax}}{\left(\frac{3}{\sqrt{3^2 + 1.5^2}} \right)} = 12.298 \text{ Tn}$$

$$-F_{AB} \left(\frac{1.5}{\sqrt{3^2 + 1.5^2}} \right) + R_{Ay} = 0$$

$$F_{AB} := \frac{R_{Ay}}{1.5} = 12.298 \text{ Tn}$$

$$\sqrt{3^2 + 1.5^2}$$

Tensión sobre el cable F_{CD} , figura 7.5 (f).

$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad R_{Dx} - F_{CD} \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (h)^2}} \right) = 0$$

$$F_{CD} := \frac{R_{Dx}}{3 \text{ m}} = 12.777 \text{ Tn}$$

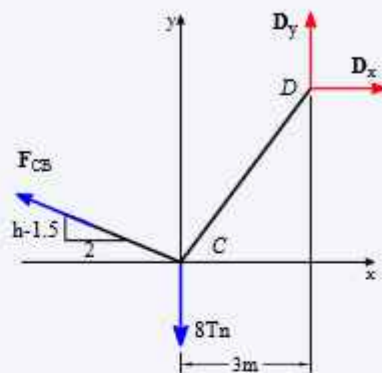
$$\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (h)^2}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Dy} - F_{CD} \left(\frac{h}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (h)^2}} \right) = 0$$

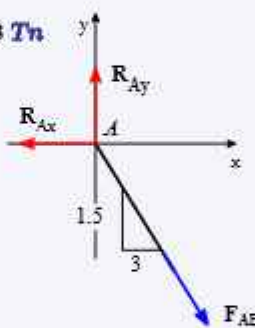
$$F_{CD} := R_{Dy} \cdot \left(\frac{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (h)^2}}{h} \right) = 12.777 \text{ Tn}$$

$$\text{Respuesta: } \begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{BC} \\ F_{CD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.298 \\ 11.102 \\ 12.777 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

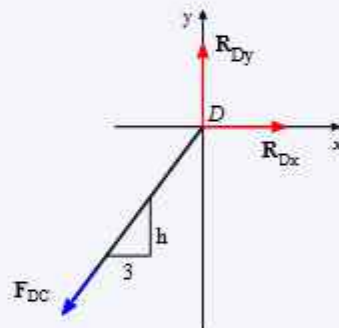
$$[h] = [1.773] \text{ m}$$



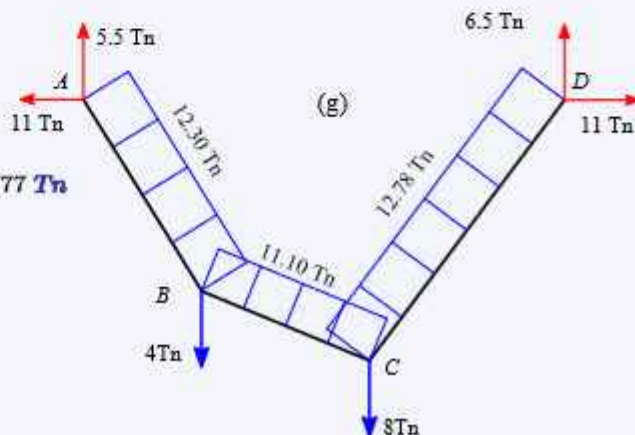
(d)



(e)



(f)



(g)

Figura 7.5

EJEMPLO RESUELTO 7.1.4.4

Determine las tensiones en los cables con el método de los nodos

Paso ①: Para la solución del presente problema haremos el uso del método de los nodos. **Nodo B:** Por equilibrio del D.C.L de la figura 7.6 (a)

$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 ;$$

$$-F_{AB} \cdot \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (1.5 \text{ m})^2}} \right) + F_{BC} \cdot \left(\frac{2 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h - 1.5 \text{ m})^2}} \right) = 0 \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ;$$

$$F_{AB} \cdot \left(\frac{1.5 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (1.5 \text{ m})^2}} \right) - F_{BC} \cdot \left(\frac{h - 1.5 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h - 1.5 \text{ m})^2}} \right) - 4 \text{ Tn} = 0 \dots (2)$$

(a)

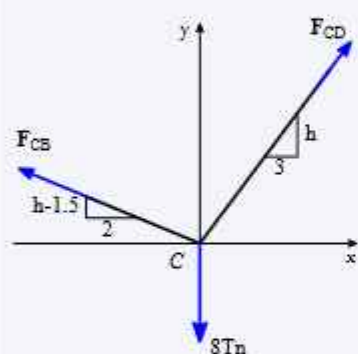
Nodo C: Por equilibrio del D.C.L de la figura 7.6 (b).

$$\pm \rightarrow \sum F_x = 0 ;$$

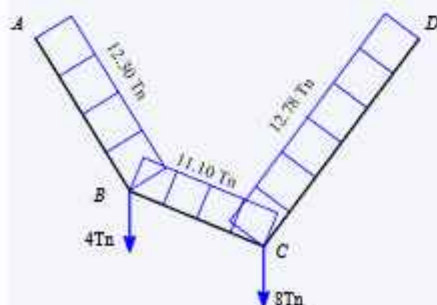
$$-F_{BC} \cdot \left(\frac{2 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h - 1.5 \text{ m})^2}} \right) + F_{CD} \cdot \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + h^2}} \right) = 0 \dots (3)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ;$$

$$F_{BC} \cdot \left(\frac{h - 1.5 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h - 1.5 \text{ m})^2}} \right) + F_{CD} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + h^2}} \right) - 8 \text{ Tn} = 0 \dots (4)$$



(b)



(c)

Figura 7.6

$$F_{AB} = 1 \text{ Tn} \quad F_{BC} = 1 \text{ Tn} \quad F_{CD} = 1 \text{ Tn} \quad h = 1 \text{ m}$$

$$-F_{AB} \cdot \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (1.5 \text{ m})^2}} \right) + F_{BC} \cdot \left(\frac{2 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h - 1.5 \text{ m})^2}} \right) = 0$$

$$F_{AB} \cdot \left(\frac{1.5 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (1.5 \text{ m})^2}} \right) - F_{BC} \cdot \left(\frac{h - 1.5 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h - 1.5 \text{ m})^2}} \right) - 4 \text{ Tn} = 0$$

$$-F_{BC} \cdot \left(\frac{2 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h - 1.5 \text{ m})^2}} \right) + F_{CD} \cdot \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + h^2}} \right) = 0$$

$$F_{BC} \cdot \left(\frac{h - 1.5 \text{ m}}{\sqrt{(2 \text{ m})^2 + (h - 1.5 \text{ m})^2}} \right) + F_{CD} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + h^2}} \right) - 8 \text{ Tn} = 0$$

$$\begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{BC} \\ F_{CD} \\ h \end{bmatrix} = \text{find} (F_{AB}, F_{BC}, F_{CD}, h)$$

$$\begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{BC} \\ F_{CD} \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.298 \\ 11.102 \\ 12.777 \\ 1.773 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura, y la longitud total del cable

EJEMPLO RESUELTO 7.1.4.5

Paso ①: Construcción del D.C.L de todo el cable, figura 7.7 (b)

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio

$$\rightarrow \sum F_y = 0 ; \quad R_{Dy} - R_{Ay} = 0$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_D = 0 ;$$

$$20 \text{ Tn} (3 \text{ m}) + 10 \text{ Tn} (7 \text{ m}) - R_{Ax} (8 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Ax} = \frac{20 \text{ Tn} \cdot (3 \text{ m}) + 10 \text{ Tn} \cdot (7 \text{ m})}{8 \text{ m}} = 16.25 \text{ Tn}$$

$$+ \uparrow \sum F_x = 0 ; \quad -R_{Ax} - R_{Dx} + 30 \text{ Tn} = 0$$

$$R_{Dx} = -R_{Ax} + 30 \text{ Tn} = 13.75 \text{ Tn}$$

Agregamos ecuaciones usando el método de las secciones para determinar las reacciones y x , según las figuras 7.7 (d) y 7.7 (c), respectivamente:

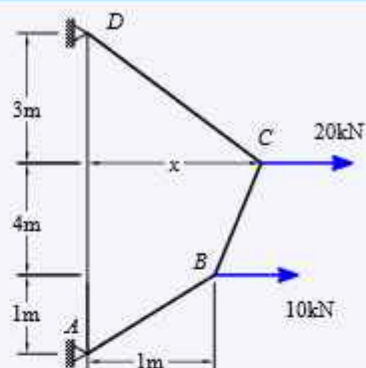
$$+ \circlearrowleft \sum M_B = 0 ; \quad -R_{Ax} (1 \text{ m}) + R_{Ay} (1 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Ay} = R_{Ax} = 16.25 \text{ Tn}$$

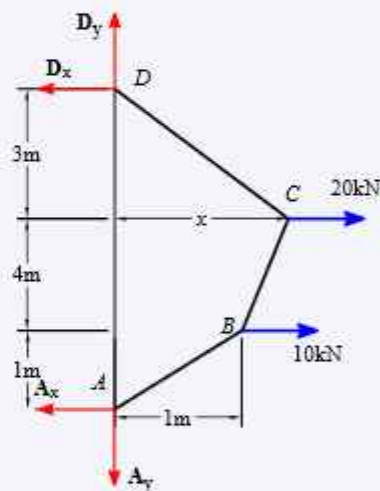
$$R_{Dy} = R_{Ay} = 16.25 \text{ Tn}$$

$$+ \circlearrowleft \sum M_C = 0 ; \quad -R_{Dy} (h) + R_{Dx} (3 \text{ m}) = 0$$

$$x = \frac{R_{Dx} \cdot (3 \text{ m})}{(R_{Dy})} = 2.538 \text{ m}$$



(a)



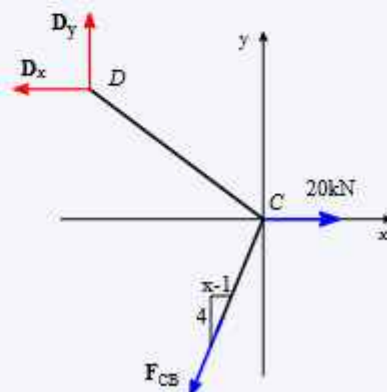
(b)

Paso ③: Determinamos las tensiones sobre los cables usando método de las secciones.

Tensión sobre el cable F_{CD} , figura 7.7 (e).

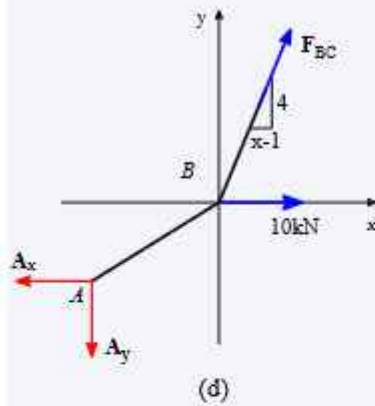
$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; \quad -R_{Dx} + F_{CD} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (x)^2}} \right) = 0$$

$$F_{CD} = R_{Dx} \cdot \left(\frac{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (x)^2}}{x} \right) = 21.287 \text{ Tn}$$



(c)

CONTINUACIÓN



$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{By} - F_{CD} \cdot \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (x)^2}} \right) = 0$$

$$F_{CD} = R_{By} \cdot \left(\frac{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (x)^2}}{3 \text{ m}} \right) = 21.287 \text{ Tn}$$

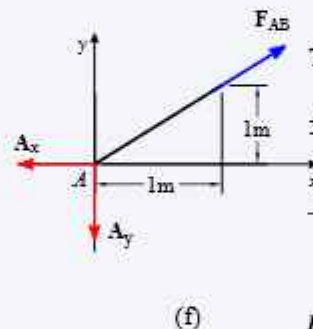
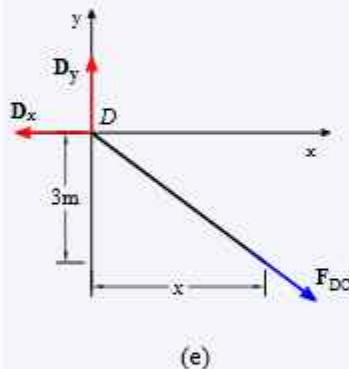
Tensión sobre el cable F_{AB} , figura 7.7 (f).

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad -R_{Ax} + F_{AB} \left(\frac{1 \text{ m}}{\sqrt{2 \text{ m}^2}} \right) = 0$$

$$F_{AB} = R_{Ax} \cdot \left(\frac{\sqrt{2 \text{ m}^2}}{1 \text{ m}} \right) = 22.981 \text{ Tn}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{AB} \left(\frac{1 \text{ m}}{\sqrt{2 \text{ m}^2}} \right) - R_{Ay} = 0$$

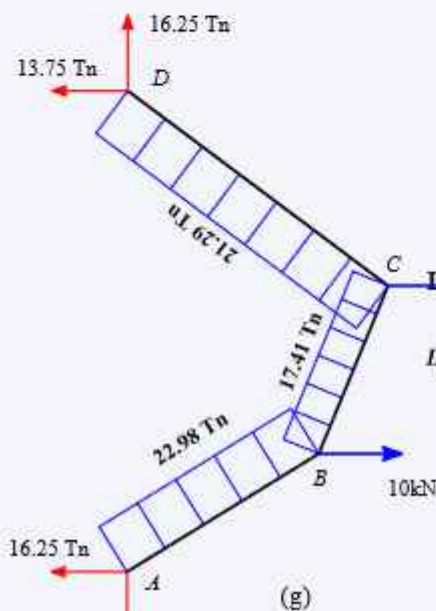
$$F_{AB} = R_{Ay} \cdot \left(\frac{\sqrt{2 \text{ m}^2}}{1 \text{ m}} \right) = 22.981 \text{ Tn}$$



Tensión sobre el cable F_{BC} , figura 7.7 (d).

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad -R_{Ax} + F_{BC} \left(\frac{x-1 \text{ m}}{\sqrt{(x-1 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) + 10 \text{ Tn} = 0$$

$$F_{BC} = (R_{Ax} - 10 \text{ Tn}) \cdot \left(\frac{\sqrt{(x-1 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}}{x-1 \text{ m}} \right) = 17.41 \text{ Tn}$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -R_{Ay} + F_{BC} \left(\frac{4 \text{ m}}{\sqrt{(x-1 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) = 0$$

$$F_{BC} = R_{Ay} \cdot \left(\frac{\sqrt{(x-1 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}}{4 \text{ m}} \right) = 17.41 \text{ Tn}$$

Longitud del cable

$$L_{\text{total}} = \sqrt{(x)^2 + (3 \text{ m})^2} + \sqrt{(4 \text{ m})^2 + (x-1 \text{ m})^2} + \sqrt{(1 \text{ m})^2 + (1 \text{ m})^2} = 9.63 \text{ m}$$

$$\text{Respuesta} := \begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{BC} \\ F_{CD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.981 \\ 17.41 \\ 21.287 \end{bmatrix} \text{ Tn}$$

$$|x| = |2.538| \text{ m}$$

Figura 7.7

EJEMPLO RESUELTO 7.1.4.6

Determine las tensiones en los cables con el método de los nodos

Paso ①: Para la solución del presente problema haremos el uso del método de los nodos.

Nodo B: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 7.8 (a).

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad T_{BC} \cdot \left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (4)^2}} \right) - T_{BA} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 10 = 0 \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad T_{BC} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{(x-1)^2 + (4)^2}} \right) - T_{BA} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0 \quad \dots (2)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L. de la figura 7.8 (b).

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 20 - T_{CD} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3^2}} \right) - T_{BC} \left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (4)^2}} \right) = 0 \dots (3)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad T_{CD} \left(\frac{3}{\sqrt{x^2 + 3^2}} \right) - T_{BC} \left(\frac{4}{\sqrt{(x-1)^2 + (4)^2}} \right) = 0 \quad \dots (4)$$

$$T_{BC} = 1 \text{ kN} \quad T_{BA} = 1 \text{ kN} \quad T_{CD} = 1 \text{ kN} \quad x = 2 \text{ m}$$

$$T_{BC} \cdot \left(\frac{x-1 \text{ m}}{\sqrt{(x-1 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) - T_{BA} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 10 \text{ kN} = 0$$

$$T_{BC} \cdot \left(\frac{4 \text{ m}}{\sqrt{(x-1 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) - T_{BA} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$20 \text{ kN} - T_{CD} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (3 \text{ m})^2}} \right) - T_{BC} \cdot \left(\frac{x-1 \text{ m}}{\sqrt{(x-1 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) = 0$$

$$T_{CD} \cdot \left(\frac{3 \text{ m}}{\sqrt{x^2 + (3 \text{ m})^2}} \right) - T_{BC} \cdot \left(\frac{4 \text{ m}}{\sqrt{(x-1 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{BC} \\ T_{BA} \\ T_{CD} \\ x \end{bmatrix} = \text{find} (T_{BC}, T_{BA}, T_{CD}, x)$$

$$\begin{bmatrix} T_{BC} \\ T_{BA} \\ T_{CD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.41 \\ 22.981 \\ 21.287 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

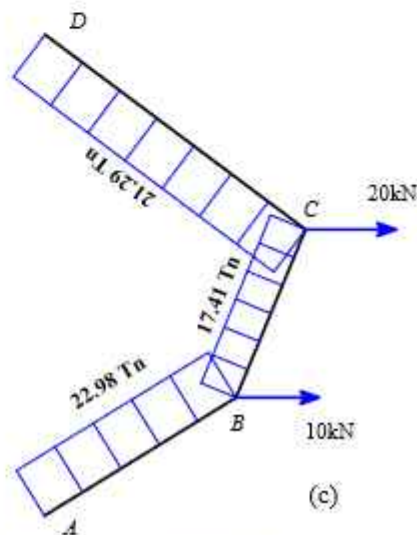
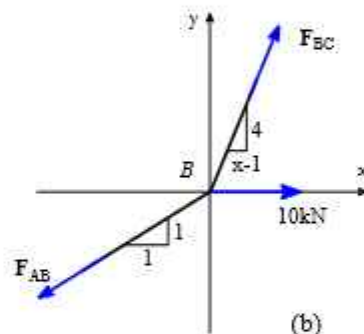
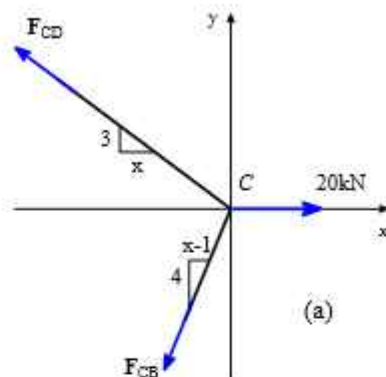


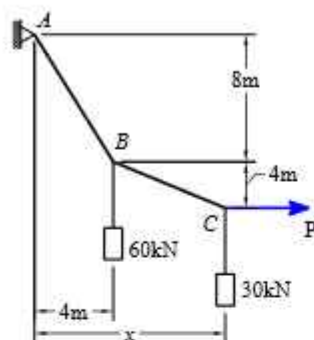
Figura 7.8

EJEMPLO RESUELTO 7.1.4.7

Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura, y la longitud total del cable

Paso ①: Construcción del D.C.L. de todo el cable, figura 7.9 (b).

Paso ②: Determinamos las reacciones en los apoyos por equilibrio



(a)

$$\rightarrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - 60 \text{ kN} - 30 \text{ kN} = 0$$

$$R_{Ay} := 60 \text{ kN} + 30 \text{ kN} = 90 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0; \quad -60 \text{ kN}(4 \text{ m}) - 30 \text{ kN}(x) + P(12 \text{ m}) = 0 \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_x = 0; \quad -R_{Ax} + P = 0 \quad \dots (2)$$

Determinamos R_{Ax} , según la figura 7.9 (c).

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad R_{Ax}(8 \text{ m}) - R_{Ay}(4 \text{ m}) = 0$$

$$R_{Ax} := R_{Ay} \div 2 = 45 \text{ kN}$$

$$P := R_{Ax} = 45 \text{ kN}$$

Reemplazamos en la ecuación (1), para determinar x

$$-60 \text{ kN}(4 \text{ m}) - 30 \text{ kN}(x) + P(12 \text{ m}) = 0$$

$$x := \frac{-60 \text{ kN} \cdot (4 \text{ m}) + P \cdot (12 \text{ m})}{30 \text{ kN}} = 10 \text{ m}$$

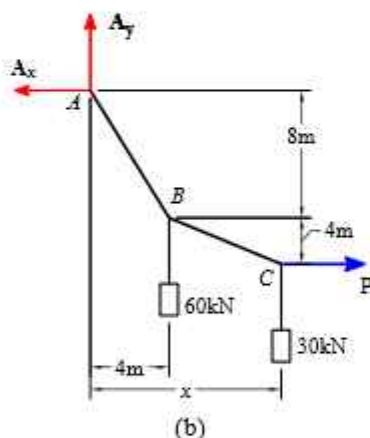
Paso ③: Determinamos las tensiones sobre los cables usando método de las secciones.

Tensión sobre el cable F_{AB} , figura 7.9 (d).

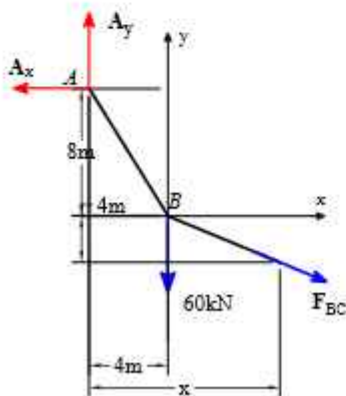
$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad -R_{Ax} + F_{AB} \cdot \left(\frac{4 \text{ m}}{\sqrt{(4 \text{ m})^2 + (8 \text{ m})^2}} \right) = 0$$

$$F_{AB} := R_{Ax} \cdot \left(\frac{\sqrt{(4 \text{ m})^2 + (8 \text{ m})^2}}{4 \text{ m}} \right) = 100.623 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{Ay} - F_{AB} \cdot \left(\frac{8 \text{ m}}{\sqrt{(4 \text{ m})^2 + (8 \text{ m})^2}} \right) = 0$$



(b)



(c)

CONTINUACIÓN

$$F_{AB} := R_{Ay} \cdot \left(\frac{\sqrt{(4 \text{ m})^2 + (8 \text{ m})^2}}{8 \text{ m}} \right) = 100.623 \text{ kN}$$

Tensión sobre el cable F_{BC} , figura 7.9 (e).

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad P - F_{BC} \left(\frac{x - 4 \text{ m}}{\sqrt{(x - 4 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) = 0$$

$$F_{BC} := P \cdot \left(\frac{\sqrt{(x - 4 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}}{x - 4 \text{ m}} \right) = 54.083 \text{ kN}$$

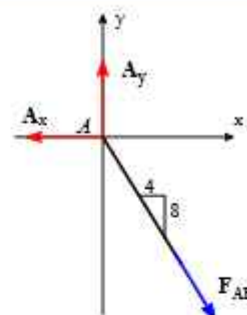
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{BC} \left(\frac{4 \text{ m}}{\sqrt{(x - 4 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) - 30 \text{ kN} = 0$$

$$F_{BC} := 30 \text{ kN} \cdot \left(\frac{\sqrt{(x - 4 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}}{4 \text{ m}} \right) = 54.083 \text{ kN}$$

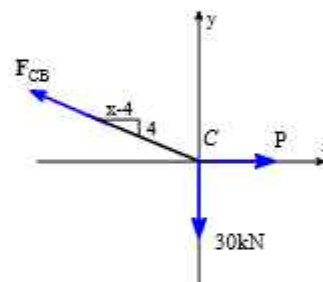
$$L_{total} := \sqrt{(8 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} + \sqrt{(4 \text{ m})^2 + (x - 4 \text{ m})^2} = 16.155 \text{ m}$$

$$Respuesta := \begin{bmatrix} F_{AB} \\ F_{BC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100.623 \\ 54.083 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

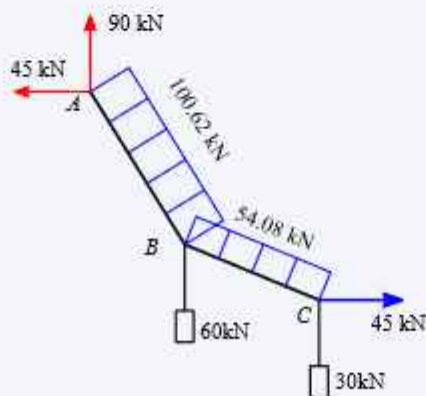
$$[x] = [10] \text{ m}$$



(d)



(e)



(f)

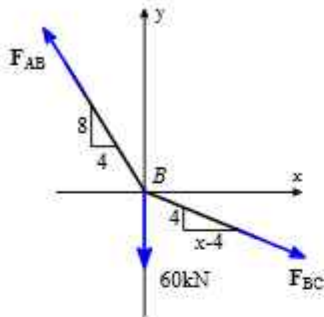
Figura 7.9

EJEMPLO RESUELTO 7.1.4.8

Determine las tensiones en los cables con el método de los nodos

Paso ①: Para la solución del presente problema haremos el uso del método de los nodos.

Nodo B: Por equilibrio del D.C.L de la figura 7.10 (a).



(a)

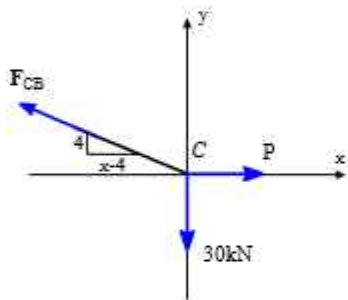
$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad T_{BC} \cdot \left(\frac{x-4}{\sqrt{(x-4)^2 + (4)^2}} \right) - T_{BA} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{4^2 + 8^2}} \right) = 0 \quad \dots (1)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -T_{BC} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{(x-4)^2 + (4)^2}} \right) + T_{BA} \cdot \left(\frac{8}{\sqrt{4^2 + 8^2}} \right) - 60 \text{ kN} = 0 \quad \dots (2)$$

Nodo C: Por equilibrio del D.C.L de la figura 7.10 (b).

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad P - T_{BC} \cdot \left(\frac{x-4}{\sqrt{(x-4)^2 + (4)^2}} \right) = 0 \quad \dots (3)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad T_{BC} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{(x-4)^2 + (4)^2}} \right) - 30 \text{ kN} = 0 \quad \dots (4)$$



(b)

$$T_{BC} := 1 \text{ kN} \quad T_{BA} := 1 \text{ kN} \quad P := 1 \text{ kN} \quad x := 1 \text{ m}$$

$$T_{BC} \cdot \left(\frac{x-4 \text{ m}}{\sqrt{(x-4 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) - T_{BA} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{4^2 + 8^2}} \right) = 0$$

$$-T_{BC} \cdot \left(\frac{4 \text{ m}}{\sqrt{(x-4 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) + T_{BA} \cdot \left(\frac{8}{\sqrt{4^2 + 8^2}} \right) - 60 \text{ kN} = 0$$

$$P - T_{BC} \cdot \left(\frac{x-4 \text{ m}}{\sqrt{(x-4 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) = 0$$

$$T_{BC} \cdot \left(\frac{4 \text{ m}}{\sqrt{(x-4 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2}} \right) - 30 \text{ kN} = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{BC} \\ T_{BA} \\ P \\ x \end{bmatrix} := \text{find}(T_{BC}, T_{BA}, P, x)$$

$$\begin{bmatrix} T_{BC} \\ T_{BA} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54.083 \\ 100.623 \\ 45 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$|x| = |10| \text{ m}$$

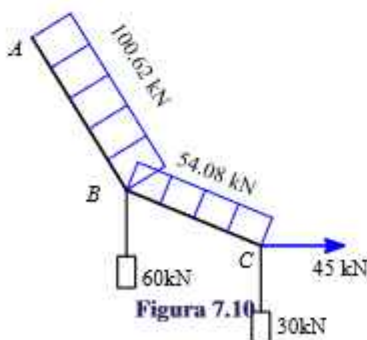


Figura 7.10

(c)

Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura, y la longitud total del cable

EJEMPLO RESUELTO 7.1.4.9

$$y = \frac{1}{F_H} \int \left(\int w \, dx \right) dx$$

$$y = \frac{1}{F_H} \left(\frac{w \cdot x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \right) \quad \begin{array}{ll} x=0 & y=0 \\ x=0 & y'=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} C_2=0 \\ C_1=0 \end{array}$$

$$y = \frac{w \cdot x^2}{2 \cdot F_H}$$

$$1 \, \text{m} = \frac{w \cdot x_a^2}{2 \cdot F_H} \quad \quad \quad 4 \, \text{m} = \frac{w \cdot (18 \, \text{m} - x_a)^2}{2 \cdot F_H}$$

$$F_H = \frac{w \cdot x_a^2}{2 \cdot 1 \, \text{m}} \quad \quad \quad F_H = \frac{w \cdot (18 \, \text{m} - x_a)^2}{2 \cdot 4 \, \text{m}}$$

$$\frac{w \cdot x_a^2}{2 \cdot 1 \, \text{m}} = \frac{w \cdot (18 \, \text{m} - x_a)^2}{2 \cdot 4 \, \text{m}} \xrightarrow{\text{solve, } x_a} \left[\begin{array}{l} 6 \cdot \text{m} \\ -(18 \cdot \text{m}) \end{array} \right]$$

$$x_a = 6 \, \text{m} \quad \quad \quad w = 10 \, \text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$F_H := \frac{w \cdot x_a^2}{2 \cdot 1 \, \text{m}} = 180 \, \text{kN} \quad \quad \quad F_H := \frac{w \cdot (18 \, \text{m} - x_a)^2}{2 \cdot 4 \, \text{m}} = 180 \, \text{kN}$$

Determinación de la tensión máxima

$$y = \frac{w \cdot x^2}{2 \cdot F_H} \quad \quad \quad \frac{dy}{dx} = \tan(\theta_{\text{máx}})$$

$$x := 18 \, \text{m} - x_a = 12 \, \text{m}$$

$$\tan(\theta_{\text{máx}}) = \frac{2 \cdot x \cdot w}{2 \cdot F_H}$$

$$\tan(\theta_{\text{máx}}) := \frac{x \cdot w}{F_H} = 0.667 \quad \quad \quad \theta_{\text{máx}} := \text{atan}(0.667) = 33.703 \, \text{deg}$$

$$T_{\text{máx}} := \frac{F_H}{\cos(\theta_{\text{máx}})} = 216.366 \, \text{kN}$$

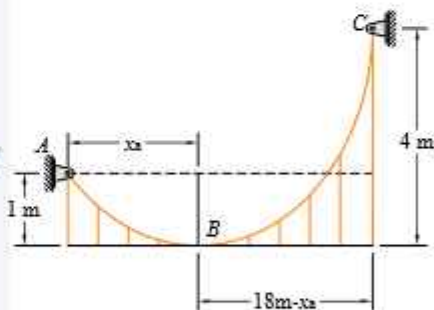
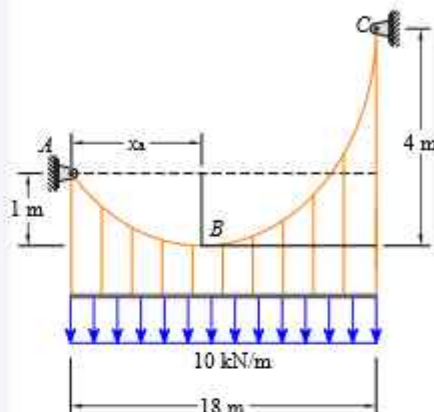


Figura 7.11

EJEMPLO RESUELTO 7.1.4.10

Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura, y la longitud total del cable

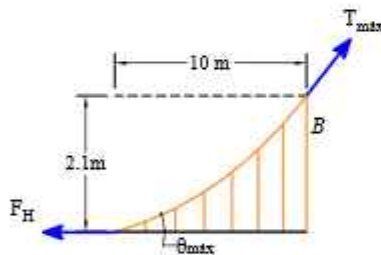
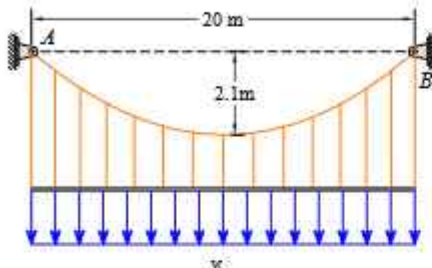


Figura 7.12

$$y = \frac{1}{F_H} \int \left(\int w \, dx \right) dx$$

$$y = \frac{1}{F_H} \left(\frac{w \cdot x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \right) \quad \begin{array}{lll} x=0 & y=0 & C_2=0 \\ x=0 & y'=0 & C_1=0 \end{array}$$

$$y = \frac{w \cdot x^2}{2 \cdot F_H}$$

$$x = 10 \, \text{m} \quad y = 2.1 \, \text{m}$$

$$F_H := \frac{w \cdot x^2}{2 \cdot y} \xrightarrow{\text{float}, 4} 23.81 \cdot \text{m} \cdot w$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta_{\text{máx}}) = \frac{x \cdot w}{F_H} \quad \tan(\theta_{\text{máx}}) := \frac{10 \, \text{m} \cdot w}{23.81 \cdot \text{m} \cdot w} \xrightarrow{\text{float}, 2} 0.42$$

$$T_n := \text{tonne} \quad \theta_{\text{máx}} := \text{atan}(0.42) = 22.782 \, \text{deg}$$

$$T_{\text{máx}} := 1.5 \, T_n$$

$$T_{\text{máx}} = \frac{F_H}{\cos(\theta_{\text{máx}})}$$

$$F_H := \cos(\theta_{\text{máx}}) \cdot T_{\text{máx}} = 1382.973 \, \text{kg}$$

$$F_H = 23.81 \cdot \text{m} \cdot w$$

$$w := \frac{F_H}{23.81 \cdot \text{m}} = 58.084 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

7.1.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

22

Ejercicios

7.1 Determine la tensión en cada cable, y la flecha y_c de la figura 7.13

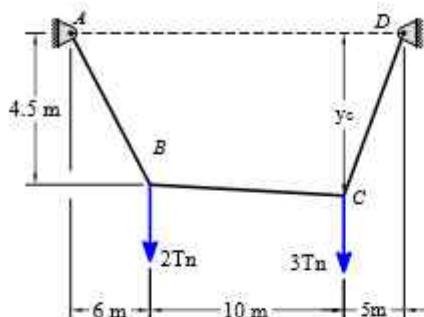


Figura 7.13

7.2 Determine la tensión en cada segmento del cable y la longitud total del cable mostrada en la figura 7.14

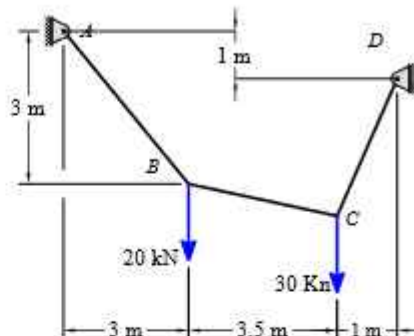


Figura 7.14

7.3 Determinar la fuerza F, de tal modo que el segmento CD permanezca horizontal, además, determine la tensión en los cables y la flecha y_d

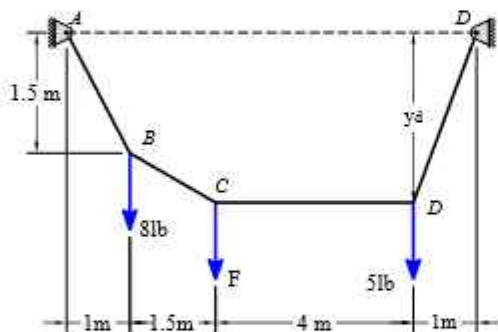


Figura 7.15

7.4 Determine la fuerza F, de tal forma que cada segmento del cable soporte una tensión de 50 kN, 7.16

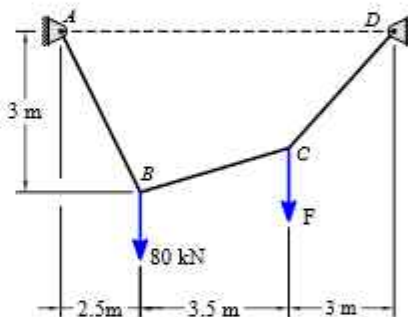


Figura 7.16

7.5 El sistema de cables que se muestra en la figura 7.17. Determine las tensiones en los cables y las flechas y_b, y_d

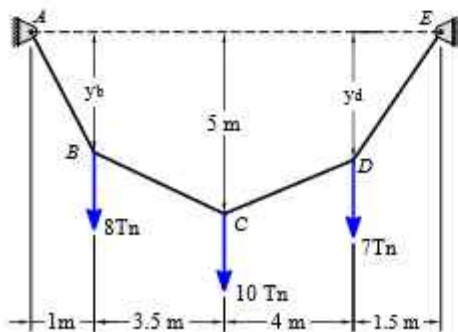


Figura 7.17

7.6 Determinar las tensiones en los cables, la fuerza F y la flecha y_b de la figura 7.18

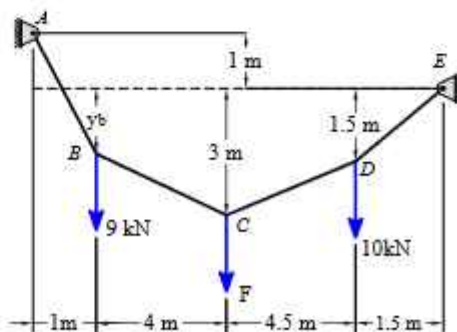


Figura 7.18

7.7 Determinar las tensiones en los cables y la flecha x_b de la figura 7.19

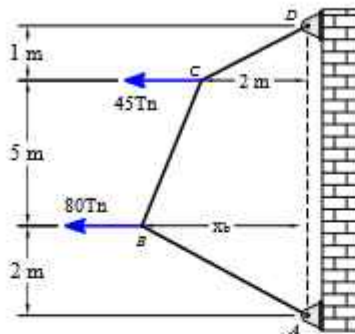


Figura 7.19

7.8 El cable soporta la carga F y 33 kN, determine dicha fuerza F para que $x_b=5\text{m}$ de la figura 7.20

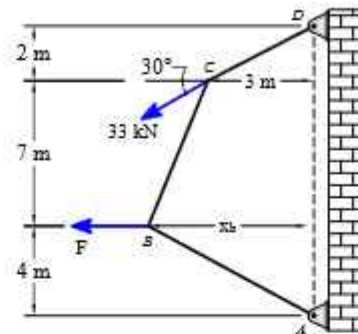


Figura 7.20

7.9 Determine la fuerza F , para que el cable BC permanezca vertical, además, calcule x_b en la figura 7.21

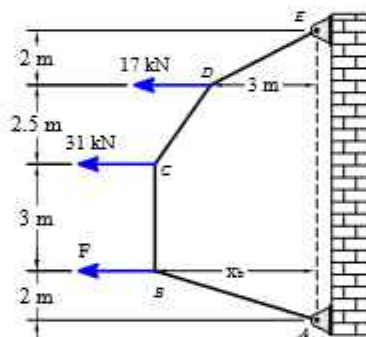


Figura 7.21

7.10 Determine las tensiones en los cables, la longitud total del cable y x_b de la siguiente figura mostrada 7.22

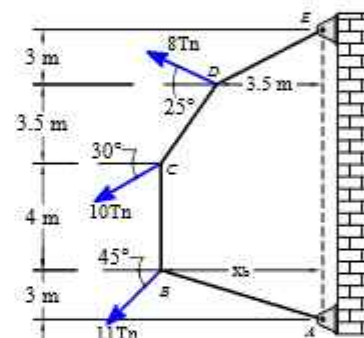


Figura 7.22

7.11 Determinar el centro de gravedad del área sombreada mostrada en la figura 7.23

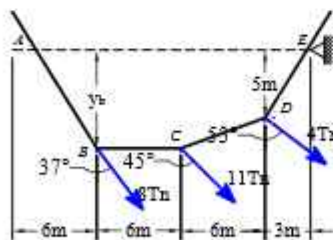


Figura 7.23

7.12 Determinar el centro de gravedad del área sombreada mostrada en la figura 7.24

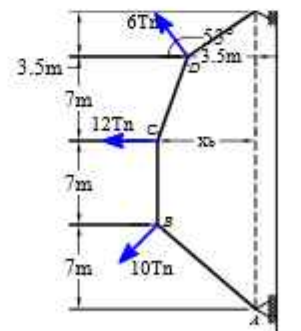


Figura 7.24

8

BIBLIOGRAFIA

- (1). Andrew Pytel, J. K. (2010). Engineering Mechanics: Statics, Third Edition (Volume 1). Cengage Learning.
- (2). Anthony, B., & Wallace T, F. (2001). Engineering Mechanics: Statics (3rd Edition) (3rd ed.). Prentice Hall.
- (3). Arisnabarreta, L.E.G. (2015). Estática: teoría y aplicaciones (Primera edición). Editorial MACRO.
- (4). Beer Johnston, M. C. S. (2019). Vector Mechanics for Engineers , Statics and Dynamics (12th ed.). McGraw Hill.
- (5). Best, E.W.N.W.G.M.C.L. (2004). Mecánica Vectorial: Estática y dinámica (5a ed.) McGraw Hill
- (6). Caio Sérgio Calçada, J. L. S. (1998). Física Clássica: Dinâmica Estática (2nd ed.). Atual.
- (7). Costanzo, M. E. P. G. L. G. R. J. W. F. (2023). Engineering Mechanics: Statics and Dynamics, 3rd Edition (3rd ed.). McGraw Hill.
- (8). Dubey, N. H. (2015). Engineering Mechanics: Statics and Dynamics. McGraw Hill Education.
- (9). Flores, C. G. M. (1997). Conceptos fundamentales de la estática. Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.
- (10). Francesco Costanzo Michael E. Plesha, G. L. G. (2010). Engineering mechanics: Statics; 1th Edition (1st ed.). McGraw Hill Higher Education.
- (11). Gary L. Gray Francesco Costanzo, R. J. W. M. E. P. (2023). Engineering Mechanics: Statics and Dynamics, 3rd Edition (3rd ed.). McGraw Hill.
- (12). Hibbeler, R. C. (2009). Engineering Mechanics: Statics (12th Edition) (12th ed.). Prentice Hall.
- (13). J. L. Meriam, L. G. K. (2001). Engineering Mechanics, Volume I: Statics (5th ed.). Wiley.
- (14). JAMES W. DALLY ROBERT J. BONENBERGER, J. R. W. L. F. (2016). MECHANICS I STATICS +++. McGraw Hill Education.
- (15). Jan, A. (2012). Classical mechanics: kinematics and statics (1st ed.). Springer.
- (16). Kralov, I. (2010). Mechanics. Part I. Statics and kinematics (1st ed.). Technical University of Sofia.

- (17). Meriam, J. L. (2017). *Engineering Mechanics: Statics*. Wiley.
- (18). Nimal Rajapakse Dietmar Gross, W. H. J. S. W. A. W. (auth.). (2009). *Engineering Mechanics 1: Statics (1st ed.)*. Springer.
- (19). Tullio Levi Civita, U. A. (1923). *Lezioni di Meccanica Razionale, Vol. 1: Cinematica. Principi e statica*. Zanichelli.
- (20). William, R. (2008). *Ingenieria Mecanica Estatica*.