FONDO EDITORIAL

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE TAYACAJA
DANIEL HERNÁNDEZ MORILLO

La investigación, su esencia y arte.

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS Y SUPERFICIES

Miguel Ángel Yglesias Jáuregui
Bibiano Martín Cerna Maguiña

https://fondoeditorial.unat.edu.pe

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE TAYACAJA “DANIEL HERNÁNDEZ MORILLO"
Autor:

- Ms.C. MIGUEL ÁNGEL YGLESIAS JÁUREGUI
  Licenciado en Matemática, Maestro en Ciencias con Mención en Didáctica de la Ciencias Experimentales y estudios concluidos de Doctorado en Matemática. Docente Asociado adscrito al Departamento Académico de Estudios Generales - UNAT.
  Email: miguelyglesias@unat.edu.pe
  ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3094-4582
- Dr. Bibiano Martín Cerna Maguiña
  Licenciado en Matemática, Doctor en matemática. Docente Principal adcrito al Departamento Académico de matemática - UNASAM.
  Email: bcernam@unasam.edu.pe
  ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4770-238X

Primera versión, 2024

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS Y SUPERFICIES

© Miguel Ángel Yglesias Jáuregui
https://orcid.org/0000-0003-3094-4582

Bibiano Martín Cerna Maguiña
https://orcid.org/0000-0002-4770-238X

© Universidad Nacional Autónoma de Tayacaja Daniel Hernández Morillo (UNAT) - Fondo Editorial.
Dirección: Bolognesi N° 416, Tayacaja, Huancavelica - Perú
info@unat.edu.pe
Telf: (+51) 67 -990847026
Web: https://unat.edu.pe/

Primera edición digital: Abril 2024
Libro digital disponible en
https://fondoeditorial.unat.edu.pe

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N° 202404045
ISBN: 978-612-5123-18-3

A

Índice general

B

Prefacio

El presente material académico tiene como fin, guiar y facilitar el aprendizaje de los espacios vectoriales euclidianos y las operaciones fundamentales que se desenvuelven allí. Se presenta diversidad de ejemplos para hacer más cómodo la comprensión de los conceptos y la aplicación de las propiedades. Este material debe ser complementado con trabajo de investigación bibliográfica adicional, de tal manera que pueda reforzar el contenido teórico y procedimental con problemas que afiancen sus capacidades matemáticas para el manejo de modelos matemáticos que serán inherentes a la formación profesional de un estudiante de ciencias e ingeniería.

Esta sesión está orientada a que el estudiante aplique el pensamiento crítico en la indagación, análisis e interpretación de temas de su formación profesional, así también, conoce y utiliza estrategias de aprendizaje y hábitos de estudio y trabajo, seleccionando los que le son útiles según sus necesidades de aprendizaje.

Algunas gráficas que aparecen en el texto se realizaron con el software MAPLE 16 y Geogebra; asimismo, de los problemas resueltos y de los que se proponen en esta obra, muchos de ellos están propuestos en los textos que aparecen en la bibliografía.

B

1. Espacios vectoriales euclídeos

Introducción

El estudio del cálculo diferencial e integral de funciones reales de variable real resulta insuficiente cuando se trabaja con problemas que involucran más de dos variables. En ese sentido, es necesario ampliar el estudio del cálculo diferencial e integral a espacios más generales, siendo esta necesidad la de involucrar espacios vectoriales. Pero el espacio vectorial en si, es muy general para lo que se pretende estudiar en esta capítulo. Las funciones vectoriales de variable vectorial solo requieren de espacios vectoriales euclidianos $n-$dimensionales, que denotaremos más adelante como $\mathbb{R}^n$

1.1 Noción de espacio vectorial y vectores

Los conceptos que se presentan en esta unidad, son muy importantes porque dan fundamento a toda la teoría que se desenvuelve en el cálculo vectorial, por lo cual es indispensable que se haga un recorrido breve de las nociones básicas de espacio vectorial sobre un cuerpo[1] y vectores. Para esto

---

[1]Todos los espacios vectoriales se definen sobre un cuerpo. Un conjunto no vacio al que denotamos con $\mathbb{K}$, es un cuerpo si está dotado de la operaciones de adición $(+)$ y producto $(\cdot)$, cuyos elelementos satisfacen los siguientes axiomas:

1. Para la adición
   a) Para todo $x, y \in \mathbb{K}$: $x + y \in \mathbb{K}$. (Cerradura)
   b) Para todo $x, y \in \mathbb{K}$: $x + y = y + x$. (Conmutatividad)
   c) Para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$: $(x + y) + z = x + (y + z)$. (Asociatividad)
   d) Existe en $\mathbb{K}$ un elemento denotado con 0, tal que: $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{K}$. (Existencia del elemento neutro aditivo)
   e) Para cada $x \in \mathbb{K}$ existe un elemento $-x \in \mathbb{K}$, tal que: $x + (-x) = 0$. (Existencia del inverso aditivo)

debemos tratar primero algunos ejemplos con los cuales se comprenda el concepto de espacio vectorial y la noción abstracta que adquieren los vectores, para luego tratar el conjunto $\mathbb{R}^n$ como un espacio vectorial y la representación geométrica que estos tienen en el caso de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.1.1 El conjunto W es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los escalares $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), si dotado de la operación adición

$$\begin{aligned} +: \quad W\times W &\longrightarrow W \\ (w_1,w_2) &\longrightarrow w_1+w_2 \end{aligned}$$

y la operación producto por un escalar

$$\begin{aligned} \cdot: \quad \mathbb{K}\times W &\longrightarrow W \\ (k,w) &\longrightarrow k.w \end{aligned}$$

satisface los siguientes axiomas:

1. PARA LA ADICIÓN
   a) Para todo $w_1,w_2\in W$, $w_1+w_2\in W$.(Ley de la cerradura o clausura)
   b) Para todo $w_1,w_2\in W$, $w_1+w_2=w_2+w_1$. (Ley de la conmutatividad)
   c) Para todo $w_1,w_2,w_3\in W$, $(w_1+w_2)+w_3=w_1+(w_2+w_3)$. (Ley de la asociatividad)
   d) Existe un único elemento en W denotado por 0, el cual es llamado vector cero, de tal manera que: $0+w=w+0=w$, para todo $w\in W$. (Existencia del elemento neutro)
   e) Para cada $w\in W$ existe un único elemento en W denotado por $-w$, tal que: $w+(-w)=(-w)+w=0$. (Existencia del elemento inverso aditivo)
2. PARA EL PRODUCTO POR UN ESCALAR
   a) Para todo $w\in W$ y para todo $k\in\mathbb{K}$, $kw\in W$.
   b) Para todo $w\in W$, $1.w=w$.

---

2. Para el producto
   a) Para todo $x,y\in\mathbb{K}$: $x\cdot y\in\mathbb{K}$. (Cerradura)
   b) Para todo $x,y\in\mathbb{K}$: $x\cdot y=y\cdot x$. (Conmutatividad)
   c) Para todo $x,y,z\in\mathbb{K}$: $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$. (Asociatividad)
   d) Existe en $\mathbb{K}$ un elemento denotado con 1, tal que: $x\cdot 1=x$, $\forall x\in\mathbb{K}$. (Existencia del elemento neutro multiplicativo)
   e) Para cada $x\in\mathbb{K}-\{0\}$, existe en $\mathbb{K}$ un elemento que denotamos con x^{-1}, tal que: $x\cdot x^{-1}=1$. (Existencia del inverso multiplicativo)
3. Para cada $x,y,z\in\mathbb{K}$: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$. (Distributividad)

Los ejemplos clásicos de cuerpo son los reales $\mathbb{R}$ y los complejos $\mathbb{C}$.

c) Para cualesquiera $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, y todo $w \in W$, $k_1(k_2w) = (k_1k_2)w$.
d) Para todo $k \in \mathbb{K}$, y calesquiera $w_1, w_2 \in W$, $k.(w_1 + w_2) = kw_1 + kw_2$.

Siendo W un espacio vectorial, cualquier elemento de W se llama vector, es decir, un vector es elemento de algún espacio vectorial. Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales.

■ **Ejemplo 1.1** El conjunto $W = C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. ■

Tomando f y g cualesquiera en $C([a,b])$, la adición de f con g es la operación usual desarrollada en lo primeros cursos de cálculo, en este caso, $f + g$ está dada por

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \ \forall x \in [a,b]$$

y para un escalar $k \in \mathbb{R}$, la operación del producto por un escalar se desarrolla mediante

$$(kf)(x) := kf(x), \ \forall x \in [a,b]$$

Con estas operaciones y usando el hecho que $\mathbb{R}$ es un cuerpo y las propiedades de la continuidad de funciones, se verifica los axiomas de espacio vectorial:

1. Para la adición, sean $f, g, h \in C([a,b])$
   a) $f + g$ es continua, por lo tanto $f + g \in C([a,b])$.(Ley de la cerradura o clausura)
   b) Para todo $x \in [a,b]$, se tiene $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$, con lo cual

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

   Luego $f + g = g + f$. (Ley de la conmutatividad)
   c) Para todo $x \in [a,b]$, se tiene $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}$, entonces

   $$\begin{aligned} [(f+g)+h](x) &= (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) \\ &= f(x) + (g+h)(x) + [f + (g+h)](x) \end{aligned}$$

   Luego, $(f+g)+h = f+(g+h)$. (Ley de la asociatividad)
   d) La función $\theta(x) = 0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b]$ es la función cero y es continua en $[a,b]$, por lo cual $\theta \in C([a,b])$, además,

   $$(f+\theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

   Así, existe la función cero en $C([a,b])$ denotada por θ tal que : $f + \theta = f$, para todo $f \in C([a,b])$. (Existencia del elemento neutro) *e*) Para cada $f \in C[a,b]$ y cada $x \in [a,b]$, se tiene $f(x) \in \mathbb{R}$, de donde $-f(x) \in \mathbb{R}$. Siendo que $-f$ es continua en $[a,b]$, entonces $-f \in C([a,b])$ y

$$0 = f(x) + (-f(x)) = [f + (-f)](x) = \theta(x)$$

Así, existe $-f$ en $C[a,b]$, tal que $f + (-f) = \theta$. (Existencia del elemento inverso aditivo)

2. Para el producto por un escalar, Sean $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C([a,b])$.

a) kf es continua en $[a,b]$, por lo tanto, $kf \in C[a,b]$.

b) Siendo que para todo $x \in [a,b]$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, entonces $1 \cdot f = f$.

c) Para todo $x \in [a,b]$,

$$[k_1(k_2 f)](x) = k_1(k_2 f)(x) = k_1 k_2 f(x) = (k_1 k_2) f(x) = [(k_1 k_2) f](x)$$

Por lo tanto, $k_1(k_2 f) = (k_1 k_2) f$.

d) Para todo $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} [k \cdot (f+g)](x) &= k(f+g)(x) = k(f(x)+g(x)) \\ &= kf(x) + kg(x) = [kf + kg](x) \end{aligned}$$

Luego, $k \cdot (f+g) = kf + kg$.

Verificados los axiomas de espacio vectorial, se concluye que $C([a,b])$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. En este caso, los vectores de este espacio son las funciones continuas en $[a,b]$.

■ **Ejemplo 1.2** El conjunto $W = L^1[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} / \int_a^b f(x)dx < \infty \right\}$, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, donde la operación de adición y de producto por un escalar es como en el ejemplo 1.1. ■

En este caso, para cada $f, g \in L^1[a,b]$ y cada escalar $k \in \mathbb{R}$, se tiene que $f + g, kf \in L^1[a,b]$. Los demás axiomas se comprueban de manera similar al ejemplo 1.1 y los vectores de este espacio son funciones integrables en $[a,b]$.

■ **Ejemplo 1.3** El conjunto

$$W = M^{m \times n}(\mathbb{R}) = \left\{ [a_{ij}]_{m \times n} \ : \ a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i = \widehat{1,m}, \forall j = \widehat{1,n} \right\}$$

está conformado por todas las matrices de orden $m \times n$ con entradas a_{ij} en $\mathbb{R}$, donde,

$$[a_{ij}]_{m \times n} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sean $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ en $M^{m\times n}(\mathbb{R})$ y k cualquier escalar en $\mathbb{R}$. La operación de adición en $M^{m\times n}(\mathbb{R})$ está dada por

$$A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} := \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

mientras que el producto por un escalar se define mediante

$$kA := [ka_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Si tomamos las matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ en $M^{m\times n}(\mathbb{R})$, los escalares k, k_1, k_2 en $\mathbb{R}$ y usamos el hecho de que $\mathbb{R}$ es un cuerpo, se comprueba lo siguiente:

1. Para la adición
   a) $\forall i = \widehat{1,m}$ y $\forall j = \widehat{1,n}$, se tiene que $a_{ij}+b_{ij} \in \mathbb{R}$, luego $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \in M^{m\times n}(\mathbb{R})$. (Ley de la cerradura o clausura)
   b) $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}+a_{ij}]_{m\times n} = B+A$. (Ley de la conmutatividad)
   c) $(A+B)+C = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} + [c_{ij}]_{m\times n} = [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}+c_{ij}]_{m\times n} = A+(B+C)$. (Ley de la asociatividad)
   d) $\forall i = \widehat{1,m}$ y $\forall j = \widehat{1,n}$, se define $\mathbf{0}_{ij} = 0 \in \mathbb{R}$, así existe la matriz

   $$\mathbf{0} = [\mathbf{0}_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M^{m\times n}(\mathbb{R})$$

   tal que,

   $$A+\mathbf{0} = [a_{ij}+\mathbf{0}_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}+0]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = A$$

   es decir, $A+\mathbf{0} = A$. (Existencia del elemento neutro)
   e) Siendo que $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i = \widehat{1,m}$ y $\forall j = \widehat{1,n}$, entonces $-a_{ij} \in \mathbb{R}$, además,

   $$[-a_{ij}]_{m\times n} = [(-1)a_{ij}]_{m\times n} = -[a_{ij}]_{m\times n} = -A \in M^{m\times n}(\mathbb{R})$$

Con esto,

$$A+(-A)=[a_{ij}]_{m\times n}+[-a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}-a_{ij}]_{m\times n}=[\mathbf{0}_{ij}]_{m\times n}=\mathbf{0}$$

Así, para cada $A\in M^{m\times n}(\mathbb{R})$ existe un único elemento en $-A\in M^{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que: $A+(-A)=\mathbf{0}$. (Existencia del elemento inverso aditivo)

2. Para el producto por un escalar
   a) Para cada $k\in\mathbb{R}$ y para cada $a_{ij}\in\mathbb{R}$ acontece que $ka_{ij}\in\mathbb{R}$, luego

   $$kA=[ka_{ij}]_{m\times n}\in M^{m\times n}(\mathbb{R})$$

   b) Para todo $A\in M^{m\times n}(\mathbb{R})$, $1.A=(1)[a_{ij}]_{m\times n}=[(1)a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}=A$.
   c) $k_1(k_2A)=k_1[k_2a_{ij}]_{m\times n}=[k_1(k_2a_{ij})]_{m\times n}=[(k_1k_2)a_{ij}]_{m\times n}=(k_1k_2)[a_{ij}]_{m\times n}=(k_1k_2)A$.
   d) $k.(A+B)=k[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}=[k(a_{ij}+b_{ij})]_{m\times n}=[ka_{ij}+kb_{ij}]_{m\times n}=[ka_{ij}]_{m\times n}+[kb_{ij}]_{m\times n}=kA+kB$.

Como los elementos de $M^{m\times n}(\mathbb{R})$ satisfacen los axiomas de espacio vectorial, entonces $M^{m\times n}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sus vectores son matrices de orden $m\times n$ con entradas en $\mathbb{R}$. ∎

Hay una abundancia de ejemplos de espacio vectorial en los cuales es menester notar que sus elementos, *los vectores* adquieren una noción bien abstracta, como función, matriz, sucesión, etc.

A continuación, nos ocuparemos de un espacio vectorial muy especial, para ello empezamos con el conjunto

$$W=\mathbb{R}^n=\{\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)/x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

en el cual se define las operaciones de adición y producto por un escalar, respectivamente, mediante:

Para vectores cualesquiera $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ e $\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)$

$$\begin{aligned} +:\quad \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) &\longrightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y}\end{aligned}$$

donde:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}:=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n) \tag{1.2}$$

y

$$\begin{aligned} .:\quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ (r,\mathbf{x}) &\longrightarrow r\cdot\mathbf{x}\end{aligned}$$

donde:

$$r \cdot \mathbf{x} := (rx_1, rx_2, \cdots, rx_n) \tag{1.3}$$

Con estas operaciones, para cualesquier, $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y k, k_1, k_2 en $\mathbb{R}$, se verifica lo siguiente:

1. Para la adición
   a) Para cada $i = \widehat{1,n}$, se tiene $x_i + y_i \in \mathbb{R}$, luego

   $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

   (Ley de la cerradura o clausura)

   b) Para cada $i = \widehat{1,n}$, se tiene $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, luego

   $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \cdots, y_n + x_n) = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

   (Ley de la conmutatividad)

   c) Para cada $i = \widehat{1,n}$, se tiene $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$, luego $[\mathbf{x} + \mathbf{y}] + \mathbf{z} = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) + (z_1, \cdots, z_n) = ((x_1 + y_1) + z_1, \cdots, (x_n + y_n) + z_n) = (x_1 + (y_1 + z_1), \cdots, x_n + (y_n + z_n)) = (x_1, \cdots, x_n) + (y_1 + z_1, \cdots, y_n + z_n) = \mathbf{x} + [\mathbf{y} + \mathbf{z}]$. (Ley de la asociatividad)

   d) Para cada $i = \widehat{1,n}$, se define $\mathbf{0}_i = 0$, así existe $\mathbf{0} = (\mathbf{0}_1, \cdots, \mathbf{0}_n) = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ tal que,

   $$\mathbf{x} + \mathbf{0} = (x_1 + \mathbf{0}_1, \cdots, x_n + \mathbf{0}_n) = (x_1 + 0, \cdots, x_n + 0) = (x_1, \cdots, x_n) = \mathbf{x}$$

   En este caso el elemento neutro de $\mathbb{R}^n$ es $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$. (Existencia del elemento neutro)

   e) Para cada $i = \widehat{1,n}$, se tiene que $x_i \in \mathbb{R}$, así también $-x_i \in \mathbb{R}$, luego

   $$(-x_1, \cdots, -x_n) = ((-1)x_1, \cdots, (-1)x_n) = (-1)(x_1, \cdots, x_n) = -\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

   Así, para cada $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, existe $-\mathbf{x} = (-x_1, \cdots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que,

   $$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (x_1 - x_1, \cdots, x_n - x_n) = (0, \cdots, 0) = \mathbf{0}$$

   (Existencia del elemento inverso aditivo)

2. Para el producto por un escalar
   a) Para cada $i = \widehat{1,n}$, $x_i \in \mathbb{R}$, y con esto, $kx_i \in \mathbb{R}$, luego

   $$(kx_1, \cdots, kx_n) = k(x_1, \cdots, x_n) = k\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

   b) Siendo que $1x_i = x_i$, $\forall i = \widehat{1,n}$, entonces $1 \cdot \mathbf{x} = (1x_1, \cdots, 1x_n) = (x_1, \cdots, x_n) = \mathbf{x}$.

c) Para cada $i = \widehat{1,n}$, se verifica $k_1(k_2x_i) = (k_1k_2)x_i$, y con esto se tiene que $k_1(k_2 \cdot \mathbf{x}) = k_1(k_2x_1, \cdots, k_2x_n) = (k_1(k_2x_1), \cdots, k_1(k_2x_n)) = ((k_1k_2)x_1, \cdots, (k_1k_2)x_n) = (k_1k_2)\mathbf{x}$. Por lo tanto,

$$k_1(k_2 \cdot \mathbf{x}) = (k_1k_2)\mathbf{x}$$

d) $k \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = k(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n) = (k(x_1+y_1), \cdots, k(x_n+y_n)) = (kx_1+ky_1, \cdots, kx_n+ky_n) = (kx_1, \cdots, kx_n) + (ky_1, \cdots, ky_n) = k(x_1, \cdots, x_n) + k(y_1, \cdots, y_n) = k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$. Por lo tanto,

$$k \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$$

Siendo que las operaciones definidas en (1.2) y (1.3) satisfacen todos los axiomas de espacio vectorial, entonces $\mathbb{R}^n$ con dichas operaciones es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.2 El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre el ecuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ con las operaciones de adición y producto por un escalar definidas en (1.2) y (1.3) se denomina *espacio vectorial euclidiano* $n-$dimensional.

En lo referente a las aplicaciones en el área de física, son importantes los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, aquí los vectores (elementos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) tienen una representación geométrica especial que sirve para interpretar la velocidad, aceleración, fuerza, campos vectoriales, etc.

Observación

En Física es costumbre representar geométricamente un vector de $\mathbb{R}^2$ (o de $\mathbb{R}^3$) con una flecha, en la cual están asociadas la magnitud (tamaño del vector), la dirección y el sentido(indicado por la cabeza de flecha).

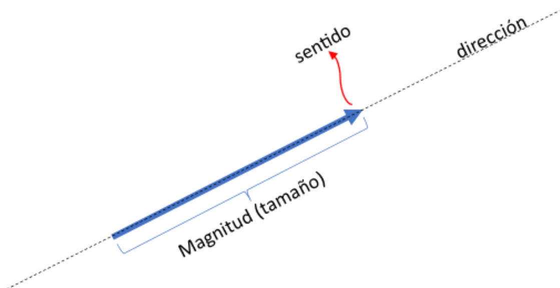

Figura 1.1: Representación geométrica de un vector de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

Por ejemplo, la representación geométrica de un vector cualquiera $\mathbf{v} = (a,b)$ en $\mathbb{R}^2$, es como en la figura 1.2, donde P_0 es el punto inicial y P_2 el punto final.

Hay que tener en cuenta que el desplazamiento en a y en b se toman según el signo. Con a positivo, corresponde un desplazamiento horizontal a la derecha de a unidades, mientras que con a negativo, el desplazamiento es horizontal de $|a|$ unidades a la izquierda. Para b positivo, el desplazamiento es vertical con b unidades hacia arriba, mientras que para b negativo el desplazamiento es vertical con $|b|$ unidades hacia abajo. Aquí, hay que indicar que un vector

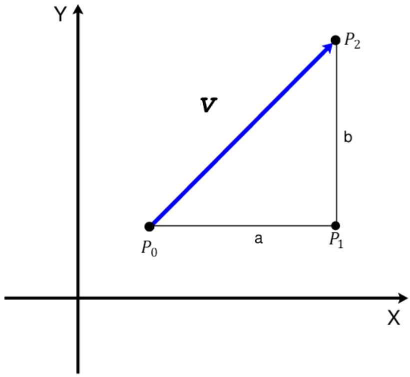

Figura 1.2: Representación geométrica en el plano del vector $\mathbf{v} = (a,b)$

puede dibujarse en cualquier parte del plano, es decir, puede tomar como punto inicial cualquier punto del plano. Observe la figura 1.3

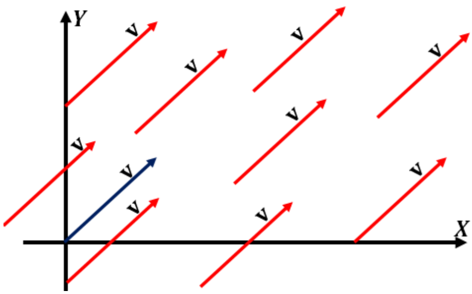

Figura 1.3: Representación geométrica de un vector $\mathbf{v}$ en cualquier parte del plano.

■ **Ejemplo 1.4** En la figura 1.4, se representa los vectores $\mathbf{u} = (4,6)$ con punto inicial en $C(4,2)$ y punto final $D(8,8)$, el vector $\mathbf{v} = (-8,2)$ con punto inicial en $A(-2,2)$ y punto final $B(-10,4)$, y el vector $\mathbf{w} = (8,-2)$ con punto inicial en $E(2,-2)$ y punto final $F(10,-4)$. ■

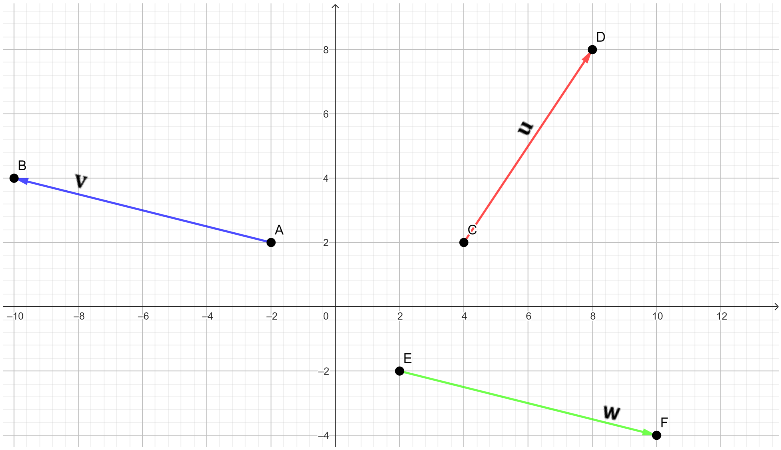

Figura 1.4: Representación geométrica los vectores **u**, **v** y **w** con sus respectivos puntos iniciales y finales.

Observación

En el caso de $\mathbb{R}^2$, la dirección de un vector $\mathbf{v} = (x,y)$ está determinada por la inclinación o el ángulo θ que el vector determina respecto del sentido positivo del eje X. Dibujando el vector con punto inicial en el origen se tiene que $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, $x \neq 0$ (ver figura 1.5)

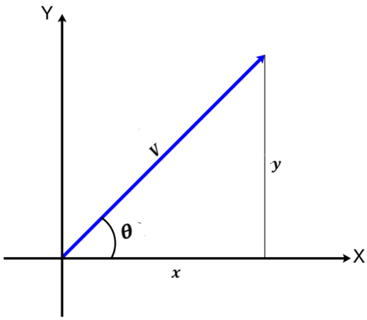

Figura 1.5: Ángulo de un vector de $\mathbb{R}^2$.

Observación

Para la representación geométrica de un vector $\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, el proceso es semejante al caso de $\mathbb{R}^2$ y se muestra en la figura 1.6.

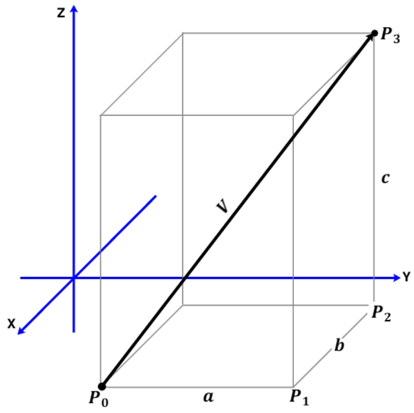

Figura 1.6: Representación geométrica del vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ en el espacio.

La representación de estos vectores no es muy fácil de realizar. En el siguiente ejemplo hacemos una muestra con Geogebra.

■ **Ejemplo 1.5** La representación de los vectores $\mathbf{u} = (4, 5, 4)$, $\mathbf{v} = (-6, 4, 3)$ y $\mathbf{w} = (0, -6, 3)$ se hace tomando el punto inicial en $(0, 0, 0)$. Se muestra en la figura 1.7 ■

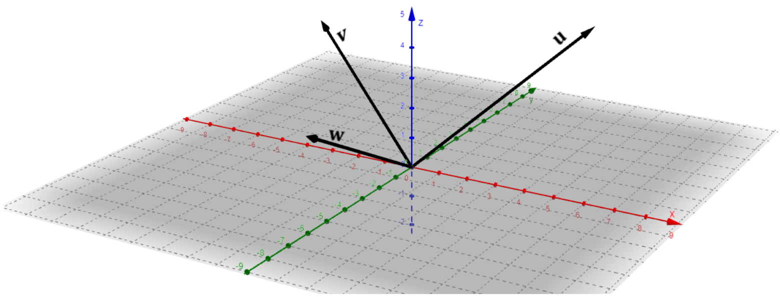

Figura 1.7: Representación geométrica de los vectores **u**, **v** y **w** del ejemplo 1.5.

Observación

Tenga en cuenta que la cabeza de flecha que se pone en el punto terminal de un vector **v** de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, nos indica el sentido del vector. Para dibujar el vector $-\mathbf{v}$ (opuesto de **v**), ponemos la cabeza de flecha en el punto inicial, como en la figura 1.8.

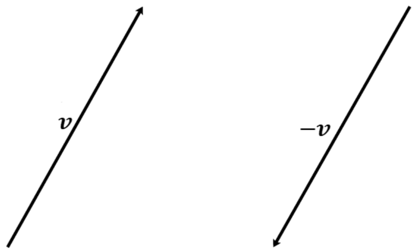

Figura 1.8: Representación del opuesto de un vector.

Para la representación geométrica de la adición de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, ya sea en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, ponemos el vector $\mathbf{v}$ a continuación del vector $\mathbf{u}$, luego unimos el punto inicial de $\mathbf{u}$ con el punto final de $\mathbf{v}$ y obtenemos el vector $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, cuya representación está en la figura 1.9.

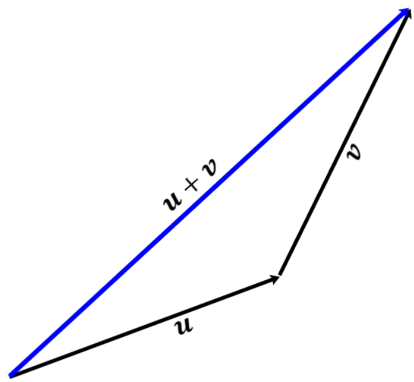

Figura 1.9: Representación de la suma de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Observación

Al vector $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ también se le denomina resultante de $\mathbf{u}$ con $\mathbf{v}$.

Para obtener la representación geométrica de $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ se tiene en cuenta que $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$. Procediendo en forma similar a como se hizo con la representación de la adición, se toma el vector $\mathbf{u}$ y a continuación el vector $-\mathbf{v}$, se une el punto inicial de $\mathbf{u}$ con el punto final de $-\mathbf{v}$ y se obtiene la representación de $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, esto se muestra en la figura 1.10. Este procedimiento, es válido tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$, siempre teniendo cuidado con el sentido de los vectores.

Comparando a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ como objetos de la geometría y como espacios vectoriales; desde el punto de vista de la geometría analítica, los elementos en

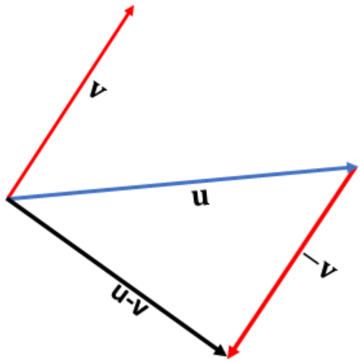

Figura 1.10: Representación de $\mathbf{u}-\mathbf{v}$.

$\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ son puntos, mientras que considerados como espacios vectoriales sus elementos son vectores. Para no confundir los términos, explicamos al lector que un punto puede ser considerado como un vector, el cual es dibujado tomando como punto inicial el origen. Por lo tanto, cuando se mencione punto, nos estaremos refiriendo a un vector que parte del origen y tiene como punto de llegada el punto en referencia (en física se reconocen los puntos como **vectores de posición**, es decir aquellos vectores que son dibujados tomando como punto inicial el origen; los vectores que son dibujados tomando como punto inicial cualquier posición que no es el origen son conocidos como **vectores localizados**).

■ **Ejemplo 1.6** Si se toma $\mathbf{u}=(-3,4)$ y $\mathbf{v}=(4,1)$, entonces la resultante es $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(-3,4)+(4,1)=(1,5)$. Observe la figura 1.11. ■

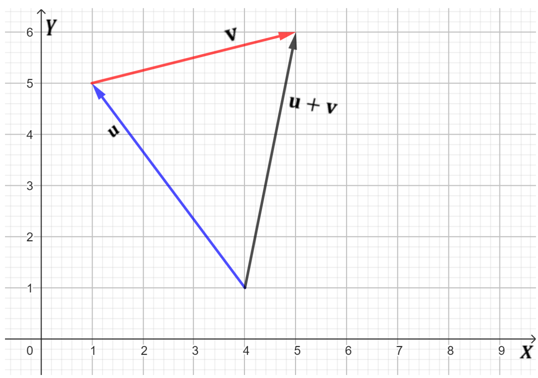

Figura 1.11:

■ **Ejemplo 1.7** Si se toma $\mathbf{u} = (-3,4)$ y $\mathbf{v} = (4,1)$, entonces $\mathbf{u}-\mathbf{v} = (-3,4)-(4,1) = (-7,3)$. Observe la figura 1.12. ■

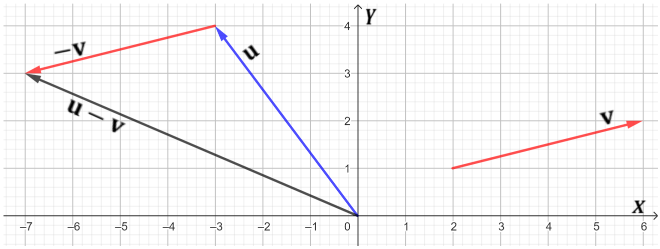

Figura 1.12:

■ **Ejemplo 1.8** Con los vectores $\mathbf{u} = (-8,2)$ y $\mathbf{v} = (3,4)$, se tiene que $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (-5,6)$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v} = (-11,-2)$. Observe la figura 1.13. Tenga en cuenta que

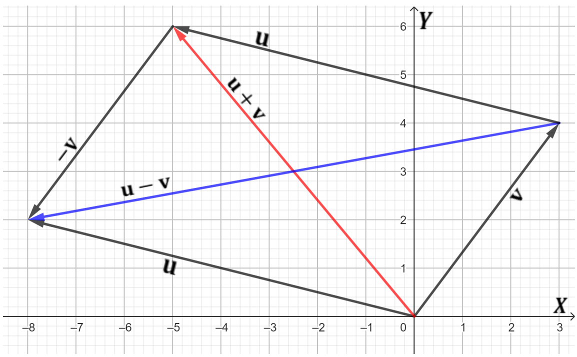

Figura 1.13:

para efectuar la suma y diferencia de los vectores de manera geométrica, se puede disponer los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en un paralelogramo, de tal manera que los vectores $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ resultan ser las diagonales. ■

Observación

Dos puntos p_0 y p_1 en $\mathbb{R}^n$ definen el vector $\mathbf{v}$ que va de p_0 (como punto inicial) al punto p_1 (como punto final) mediante

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{p_0 p_1} = p_1 - p_0 \tag{1.4}$$

La figura 1.14 ilustra esto

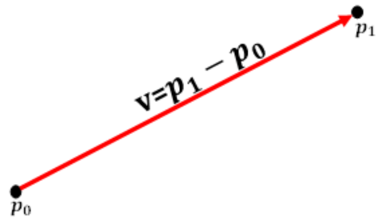

Figura 1.14:

■ **Ejemplo 1.9** Considere los puntos $A(-5,1)$, $B(-1,5)$, $C(1,4)$ y $D(7,1)$. El vector $\mathbf{u}$ que va del punto A al punto B es $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,4)$, mientras que el vector $\mathbf{v}$ que va del punto C al punto D es $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD} = D - C = (6,-3)$. Esto se observa en la figura 1.15. ■

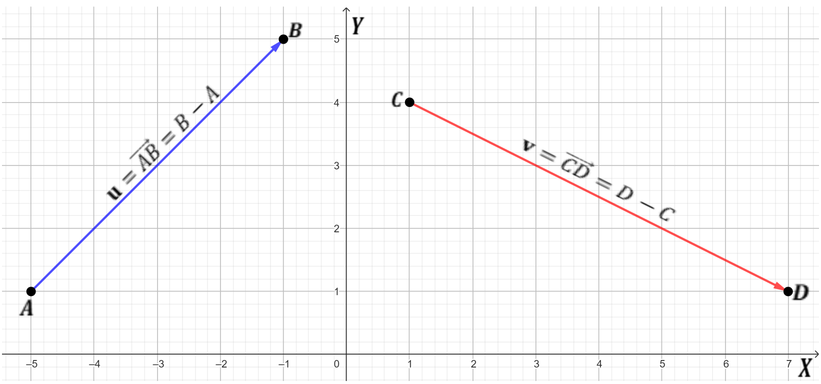

Figura 1.15:

■ **Ejemplo 1.10** En $\mathbb{R}^4$ tomamos los puntos $A(-3,1,0,2)$ y $B(-1,3,5,-3)$, el vector $\mathbf{v}$ que va del punto A al punto B es:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,3,5,-3) - (-3,1,0,2) = (2,2,5-5)$$

■

Definición 1.1.3 Sea W un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, la aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \quad W &\to [0,+\infty\rangle \\ \mathbf{x} &\mapsto \|\mathbf{x}\| \end{aligned} \tag{1.5}$$

es una norma en W, si satisface las siguientes propiedades

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in W$, y, $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.
2. $\|r\mathbf{x}\| = |r|\|\mathbf{x}\|, \forall r \in \mathbb{K}$ y $\forall \mathbf{x} \in W$.
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$.

Un espacio vectorial que está dotado de una norma se denomina, *espacio normado*. En este caso $(W, \|\cdot\|)$ o también $W_{\|\|}$, es espacio normado.

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, para cualquier $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se trabaja con las siguientes normas:

1. Con el entero positivo p, se define la norma p mediante:

$$\|\mathbf{x}\|_p := (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{1.6}$$

En el caso de que $p = 1$, la norma 1 en $\mathbb{R}^n$ queda así:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \tag{1.7}$$

En el caso de que $p = 2$, la norma 2 en $\mathbb{R}^n$ queda así:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \tag{1.8}$$

Esta norma se le denomina *norma euclidiana* en $\mathbb{R}^n$, es la norma la usual o clásica con la cual se trabaja en los cursos de cálculo en ingeniería.

2. La norma infinita o norma del máximo en $\mathbb{R}^n$ se define de la siguiente manera

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\} \tag{1.9}$$

La norma mide el tamaño o longitud de un vector. Acá, es interesante notar que la longitud de un vector depende de la norma con la cual se calcule. En el siguiente ejemplo se muestra como se encuentra la longitud del vector con diferentes normas.

■ **Ejemplo 1.11** El vector $\mathbf{v}$ que va del punto $A(3, 8, -2)$ al punto $B(7, -4, -5)$ es

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (4, -12, -3)$$

La longitud del vector $\mathbf{v}$, que viene a ser la distancia del punto A al punto B, según las normas que acabamos de ver, es como sigue:

1. Con la norma $p = 1$, aplicando (1.7):

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \|(4, -12, -3)\|_1 = |4| + |-12| + |-3| = 19$$

2. Con la norma $p = 2$, aplicando (1.8)

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \|((4, -12, -3))\|_2 = \sqrt{|4|^2 + |-12|^2 + |-3|^2} = \sqrt{169} = 13$$

3. Con la norma $p = 3$, aplicando (1.6)

$$\|\mathbf{v}\|_3 = \|((4,-12,-3))\|_3 = \sqrt[3]{|4|^3 + |-12|^3 + |-3|^3} = \sqrt[3]{1819} \approx 12,21$$

4. Con l norma del máximo, aplicando (1.9)

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \|((4,-12,-3))\|_\infty = \text{máx}\{|4|,|-12|,|-3|\} = \text{máx}\{4,12,3\} = 12$$

En este caso, según la manera usual o cotidiana que estamos acostumbrados a medir longitudes (o distancias), la longitud del vector $\mathbf{v}$ sería con la norma euclidiana, es decir, la longitud del vector es $\|\mathbf{v}\|_2 = 13$. ■

Definición 1.1.4 Sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, la longitud del vector $\mathbf{v}$ según la norma euclidiana es

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \tag{1.10}$$

De aquí en adelante, $\|\cdot\|$ representará la norma euclidiana, salvo que se indique otra cosa.

Definición 1.1.5 Sean $P_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $P_2 = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ dos puntos en $\mathbb{R}^n$. La distancia del punto P_1 al punto P_2 es

$$d(P_1,P_2) = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \cdots + (y_n-x_n)^2} \tag{1.11}$$

Esta es llamada métrica euclidiana, en vista que se define en base a la norma euclidiana.

■ **Ejemplo 1.12** La distancia del punto $A(-3,5,1)$ al punto $B(2,3,-4)$ es

$$d(A,B) = \|B-A\| = \|(5,-2,-5)\| = \sqrt{54}$$

■

Definición 1.1.6 El vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ para el cual $\|\mathbf{u}\| = 1$, se llama vector unitario.

Observación

Para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$, se cumple que

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

es un vector unitario.

Cabe mencionar que el elemento cero de $\mathbb{R}^n$ será escrito como $\mathbf{0}$, siendo en este caso $\mathbf{0} = (0,0,\cdots,0)$.

1.2 Independencia lineal

Definición 1.2.1 Sea W un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m$ vectores en W. Para cualquier colección de escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, la expresión

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m$$

se denomina **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\cdots$, $\mathbf{v}_m$.

■ **Ejemplo 1.13** Sean $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ y $f_3(x) = x^2$ funciones en $C([0,1])$, entonces

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3, \ \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

es combinación lineal de f_1, f_2 y f_3 en $C([0,1])$. ■

■ **Ejemplo 1.14** Una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u} = (-2,3,-5)$, $\mathbf{v} = (0,2,4)$ y $\mathbf{w} = (3,0,-1)$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$2(-2,3,-5) - 6(0,2,4) + 3(3,0,-1)$$

■

Observación

De aquí en adelante asumiremos que todo espacio vectorial estará definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Observación

Sea W un espacio vectorial y $M = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\} \subset W$. Si existen escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m$$

entonces decimos que $\mathbf{u}$ es una combinación lineal de los elementos de M.

■ **Ejemplo 1.15** Sean $\mathbf{v}_1 = (-2,5)$ y $\mathbf{v}_2 = (3,-2)$, entonces $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, en este caso,

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 = 2(-2,5) - 3(3,-2) = (-13,16)$$

■

■ **Ejemplo 1.16** Sean $\mathbf{v}_1 = (0,-1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,4,-3)$ y $\mathbf{v}_3 = (2,0,-2)$. Encuentre la colección de escalares que hacen que $\mathbf{u} = (1,-2,1)$ sea combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ ■

Resolución

Sean λ_1, λ_2 y λ_3 los escalares para los cuales $\mathbf{u}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, es decir, $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3$. Desarrollando esta ecuación se tiene

$$\begin{aligned}(1,-2,1) &= \lambda_1(0,-1,2)+\lambda_2(2,4,-3)+\lambda_3(2,0,-2)\\ &= (2\lambda_2+2\lambda_3, -\lambda_1+4\lambda_2, 2\lambda_1-3\lambda_2-2\lambda_3)\end{aligned}$$

que igualando componentes se tiene el sistema

$$\begin{aligned}&2\lambda_2+2\lambda_3 = 1\\ &-\lambda_1+4\lambda_2 = -2\\ &2\lambda_1-3\lambda_2-2\lambda_3 = 1\end{aligned}$$

que al resolver se obtiene: $\lambda_1 = \frac{6}{7}$, $\lambda_2 = -\frac{2}{7}$ y $\lambda_3 = \frac{11}{14}$. Con estos resultados se verifica que

$$\mathbf{u} = \frac{6}{7}\mathbf{v}_1 - \frac{2}{7}\mathbf{v}_2 + \frac{11}{14}\mathbf{v}_3$$

Observación

Si en $\mathbb{R}^2$ hacemos $\mathbf{i} = (1,0)$ y $\mathbf{j} = (0,1)$, todo vector de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los elementos de $B_2 = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$

Basta tomar cualquier vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, se tiene

$$\mathbf{v} = (v_1,v_2) = v_1(1,0)+v_2(0,1) = v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}$$

En forma similar se tiene:

Observación

En $\mathbb{R}^3$ hacemos $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ y $\mathbf{k} = (0,0,1)$, todo vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los elementos de $B_3 = \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$. Tomando cualquier vector $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$, se tiene

$$\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3) = v_1(1,0,0)+v_2(0,1,0)+v_3(0,0,1) = v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$$

Definición 1.2.2 Sea W un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y $M = \{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m\} \subset W$. El conjunto que consiste de todas las combinaciones lineales de los elementos de M se define como

$$\operatorname{span}(M) = \{\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\cdots+\lambda_m\mathbf{v}_m \;:\; \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{R}\} \qquad (1.12)$$

Uno de los primero resultados es que $\mathbf{0} \in \text{span}(M)$, pues tomando $\lambda_i = 0$, para cada $i = 1, \cdots, m$, se tiene

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_m$$

Definición 1.2.3 Sea W un espacio vectorial y $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m\} \subset W$. Los elementos de M son linealmente independientes (l.i) si para toda combinación lineal $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m$ de los elementos de M,

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0} \text{ implica que } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Si la implicación anterior no es cierta, es decir, alguno de los escalares λ_j es distinto de cero, entonces decimos que los elementos de M son linealmente dependientes (l.d).

La independencia lineal nos dice que es imposible escribir cualquiera de los elementos de M en función de los otros. Ilustramos esto en los siguentes ejemplos

■ **Ejemplo 1.17** Tomemos el conjunto $B_3 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Para cualquier combinación lineal $\lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}$ se tiene

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k} = \mathbf{0} = (0,0,0) \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Esto significa que los elementos de B_3 son (l.i); es decir, ninguno de los elementos de B_3 puede escribirse en función de los otros. Para comprobar lo dicho, vamos a suponer que sí es posible, por ejemplo, podemos suponer que $\mathbf{k}$ se escribe en función de $\mathbf{i}$ y de $\mathbf{j}$, si esto es así, existen escalares $r, s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{k} = (0,0,1) = r\mathbf{i} + s\mathbf{j} = (r,s,0) \Longrightarrow r = 0,\ s = 0 \text{ y } 1 = 0$$

lo que es una contradicción, por lo tanto, es imposible que $\mathbf{k}$ dependa de $\mathbf{i}$ y de $\mathbf{j}$. La misma contradicción acontece en los otros casos. ■

Confirmamos lo escrito más arriba, en un conjunto de vectores (l.i), ninguno de ellos puede depender de los otros.

■ **Ejemplo 1.18** Considere los vectores $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,-1)$ y $\mathbf{v}_3 = (2,-1,3)$. Para averiguar si son (l.i) o (l.d) tomamos cualquier combinación lineal e igualamos a $\mathbf{0}$. En efecto,

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(2,-1,3) = \mathbf{0} = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3) = (0,0,0)$$

Esto nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + 2\lambda_3 &= 0 \\
\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\
\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

De las primeras ecuaciones, $\lambda_1 = -2\lambda_3$ y $\lambda_2 = \lambda_3$, que al poner en la tercera ecuación, esta se cumple. Así hacemos $\lambda_3 = \alpha$ y se tiene: $\lambda_1 = -2\alpha$ y $\lambda_2 = \alpha$. Tomando $\alpha = -1$, es fácil verificar que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$, lo que significa que los vectores son linealmente dependientes, además,

$$2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

de donde se observa que

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}v_3, \qquad \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \qquad \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

Estas expresiones son importantes porque nos muestran como cualquiera de los vectores está dependiendo de los otros. Caso que no ocurre cuando son (l.i). ■

Definición 1.2.4 Sea W un espacio vectorial. El conjunto $B \subset W$ es una base de W, si B es un conjunto linealmente independiente y $W = \text{span}(B)$. En otras palabras, B es un conjunto linealmente independiente y cualquier elemento de W es expresado como una combinación lineal de los elementos de B.

El conjunto $B_2 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ y el conjunto $B_3 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Se llaman bases canónicas.

■ **Ejemplo 1.19** El vector $\mathbf{w} = (6, 10, 3)$ tiene coordenadas $6, 10, 3$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, mientras que si escogemos la base

$$B = \{(1,2,0), (0,1,1), (4,5,2)\}$$

entonces $\mathbf{w} = 2(1,2,0) + 1(0,1,1) + 1(4,5,2)$, luego las coordenadas de $\mathbf{w}$ en la base B son 2, 1, 1. ■

Del ejemplo 1.19 se tiene que las coordenadas de un vector dependen de la base que se escoja, de modo general diremos que las coordenadas de un vector cambian cuando la base del espacio cambia. Es de mencionar que las coordenadas del vector cero(nulo) son todas cero en cualquier base que se tome.

Teorema 1.2.1 Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Tomemos los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3 \\
\mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{32}\mathbf{u}_3 \\
\mathbf{w}_3 &= a_{13}\mathbf{u}_1 + a_{23}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3
\end{aligned}$$

Se tiene que $B_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ si, y solo si,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.13}$$

■ **Ejemplo 1.20** En $\mathbb{R}^2$ tomamos los vectores $\mathbf{v}_1 = (-3,4)$ y $\mathbf{v}_2 = (2,-7)$. Estos vectores en la base $B_2 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ se escriben como

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \\
\mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}
\end{aligned}$$

donde se tiene que

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$$

Según el teorema 1.20, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. ■

■ **Ejemplo 1.21** En $\mathbb{R}^3$ tomamos los vectores $\mathbf{v}_1 = (-2,0,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,-1,1)$ y $\mathbf{v}_3 = (\lambda, 1, 1)$. Determine para qué valores de λ, el conjunto $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Resolución

En la base canónica $B_3 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= -2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - \mathbf{k} \\
\mathbf{v}_2 &= 0\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \\
\mathbf{v}_3 &= \lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}
\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & \lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 4 - \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 4$$

Según el teorema 1.20, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ es una base de $\mathbb{R}^3$ si, y solo si, $\lambda \neq 4$. En el caso de $\lambda = 4$, $v_3 = (4,1,1)$ y

$$\mathbf{v}_3 = -2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

es decir, son linealmente dependientes. ■

Definición 1.2.5 Basándonos en la dependencia lineal, se tiene que dos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ que pertenecen a un espacio vectorial W son paralelos si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$ tal que:

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$$

El paralelismo[a] de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se denota mediante $\mathbf{u}//\mathbf{v}$.

[a] El paralelismo de vectores es una relación de equivalencia en el espacio vectorial X, siendo cada clase de equivalencia, una dirección.

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, dos vectores paralelos están en la misma dirección.

Observación

Dos vectores paralelos son (l.d).

■ **Ejemplo 1.22** Sea $\mathbf{u} = (1,2)$ y $\mathbf{v} = (0,1)$; para ningún escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$. Por lo tanto $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos. Ver figura 1.16. ■

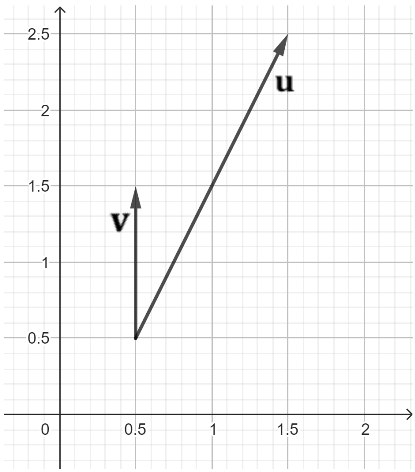

Figura 1.16: Vectores no paralelos

■ **Ejemplo 1.23** Sea $\mathbf{u} = (3,4)$ y $\mathbf{v} = (15,20)$. Vemos que $\mathbf{u}//\mathbf{v}$, pues existe el escalar $\lambda = 5$ tal que $\mathbf{v} = 5\mathbf{u}$. Ver ejemplo 1.17. ■

■ **Ejemplo 1.24** Al considerar los vectores $\mathbf{v}_1 = (-3,2,5)$ y $\mathbf{v}_2 = (6,-4,6)$, si suponemos que son paralelos, entonces debe acontecer que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal

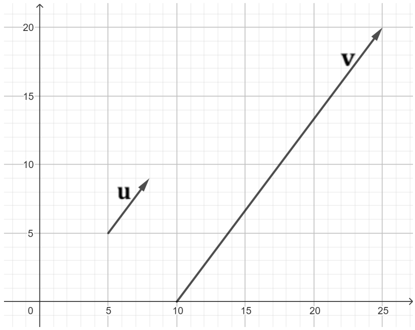

Figura 1.17: Vectores paralelos

que $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$. Resolviendo esto se tiene,

$$(-3,2,5) = (6\lambda, -4\lambda, 6\lambda) \Longleftrightarrow \begin{cases} -3 = 6\lambda \\ 2 = -4\lambda \\ 5 = 6\lambda \end{cases} \quad \text{no tiene solución}$$

Por lo tanto, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son paralelos. ■

Definición 1.2.6 Tres vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ son cooplanares si uno de ellos es obtenido como combinación lineal de los otros dos. Es decir, existen escalares α y β diferentes de cero, tal que

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}$$

Cooplanar significa que se los puede dibujar o graficar en un mismo plano.

1.3 Producto interno y ortogonalidad de vectores

Para relacionar la ortogonalidad de vectores con el producto interno, haremos uso de cuestiones geométricas elementales. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$). Con los vectores anteriores podemos formar un paralelogramo. En primer caso suponemos que $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 90°$. El paralelogramo así contruido tiene como diagonales a los vectores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, cuyas longitudes son distintas. La pregunta que nos hacemos a partir de la figura 1.18 es la siguiente: ¿Qué ángulo deben formar los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ para que la longitud de las diagonales $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ sean iguales?. Nuestra intuición geométrica nos dice que las diagonales tienen igual longitud cuando el paralelogramo formado es un rectángulo, en otras palabras cuando $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 90°$, que lo visualizamos en la figura 1.19. Estas ideas se sintetizan en la siguiente definición

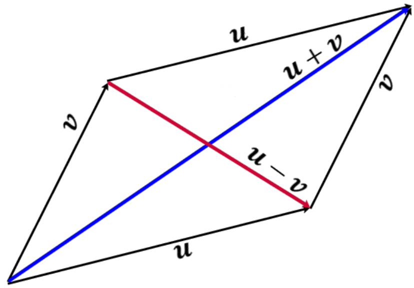

Figura 1.18: Con los vectores **u** y **v** se forma un paralelogramo.

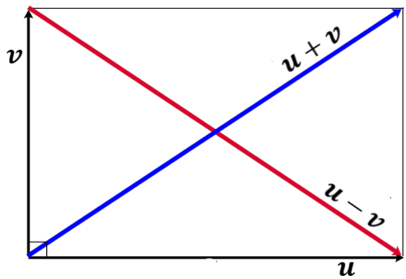

Figura 1.19: Con los vectores **u** y **v** se forma un rectángulo.

Definición 1.3.1 Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{u}$ es ortogonal al vector $\mathbf{v}$ si, y solo si,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \tag{1.14}$$

■ **Ejemplo 1.25** Sean $\mathbf{u} = (-1,3,-3)$ y $\mathbf{v} = (3,3,2)$. Se tiene que $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (2,6,-1)$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v} = (-4,0,-5)$, calculando sus longitudes se obtiene

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{41}$$

luego $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales. ■

■ **Ejemplo 1.26** Sean $\mathbf{u} = (3,2,0)$ y $\mathbf{v} = (1,-1,0)$, la suma y la diferencia son respectivamente $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (4,1,0)$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v} = (2,3,0)$, cuyas longitudes verifican

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \sqrt{17} \neq \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{13}$$

luego $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son ortogonales. ■

■ **Ejemplo 1.27** Demuestre que los vectores $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ son ortogonales si, y sólo si, $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

Demostración. $\Longrightarrow$] Sean $\mathbf{a} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{u}-\mathbf{v}$. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales, entonces $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$. Reemplazando $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se obtiene

$$\|(\mathbf{u}+\mathbf{v})+(\mathbf{u}-\mathbf{v})\| = \|(\mathbf{u}+\mathbf{v})-(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|.$$

De donde $\|2\mathbf{u}\| = \|2\mathbf{v}\|$, y por lo tanto $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.
$\Longleftarrow$] Suponemos que

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|. \tag{1.15}$$

Como $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ y $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, entonces reemplazando en (1,15)

$$\left\|\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\right\| = \left\|\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})\right\|,$$

de donde $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$. Por lo tanto $\mathbf{a}$ es ortogonal con $\mathbf{b}$. ■

▪

Geométricamente, esto ocurre en el rombo, todos sus lados son de igual magnitud, mientras que las diagonales que en este caso son la suma y la diferencia de los vectores, son ortogonales.

¿Qué conclusión se obtiene al afirmar que un vector es ortogonal a sí mismo?.

▪ **Ejemplo 1.28** Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Un vector ortogonal al vector $\mathbf{u}$ es

$$\mathbf{u}^{\perp} = (-u_2, u_1), \tag{1.16}$$

pues

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{u}^{\perp}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{u}^{\perp}\| = \sqrt{(u_1+u_2)^2+(u_1-u_2)^2}.$$

También podemos tomar $\mathbf{u}^{\perp} = (u_2, -u_1)$. ▪

Hemos visto que dos vectores $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$. Haciendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ y reemplazando en (1.14) vemos que

$$\sqrt{(u_1+v_1)^2+\cdots+(u_n+v_n)^2} = \sqrt{(u_1-v_1)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2}$$

elevando al cuadrado y simplificando, se tiene:

$$u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n = \sum_{k=1}^{n} u_kv_k = 0$$

La expresión $\sum_{k=1}^{n} u_kv_k$ es de gran importancia en álgebra, geometría y física. La ortogonalidad de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ equivale a la anulación de $\sum_{k=1}^{n} u_kv_k$ como veremos más adelante.

Definición 1.3.2 Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ en $\mathbb{R}^n$. El producto interno(o producto escalar de vectores) de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n. \tag{1.17}$$

Aquí es notorio las dos notaciones para identificar el producto interno en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. En la mayoría de los capítulos se usa $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, mientras que en los último capítulos usaremos la notación $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Una de las primeras relaciones que se obtiene aplicando (1.17), es la conexión que existe entre el producto interno y la norma euclidiana, como se observa a continuación

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \|\mathbf{u}\|^2,$$

es decir,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2. \tag{1.18}$$

Teorema 1.3.1 El producto interno definido en (1.17) satisface las siguientes propiedades. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\
&\langle r\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, r\mathbf{v} \rangle = r\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\
&\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \\
&\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \\
&\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \ \text{ si y sólo sí } \ \mathbf{u} = 0
\end{aligned}$$

Demostración. Aplicando (1.17) se obtiene cada una de las relaciones. ■

Corolario 1.3.2 Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2 \\
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Demostración. Antes de llegar al resultado, aplicando el teorema anterior y (1.18), se tiene los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \tag{1.20}$$

En forma similar,

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \tag{1.21}$$

De (1.20) y (1.21), sumando y restando respectivamente, se obtiene:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

y

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$$

■

Teorema 1.3.3 Los vectores **u** y **v** son ortogonales si, y solo si, $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$.

Demostración. $\Longrightarrow$] Si **u** es ortogonal a **v**, entonces de acuerdo a la definición de ortogonalidad: $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$. Luego elevando al cuadrado y usando (1.19) se obtiene

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0.$$

por lo tanto $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$.
$\Longleftarrow$] Siendo que $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$, entonces $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 0$. Luego
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$$

y con este resultado **u** y **v** son ortogonales. ■

Teorema 1.3.4 Dados los vectores $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que **u** es ortogonal a **v** si, y solo si $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

Demostración. $\Longrightarrow$] Dando por hecho que **u** y **v** son vectores ortogonales entre si, es decir, $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$ y sabiendo que

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\underbrace{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}_{=0} + \|\mathbf{v}\|^2.$$

entonces se obtiene
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

$\Longleftarrow$] Ahora suponemos que $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$, entonces $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 -$

$\|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 0$. Aplicando (1.20) y siendo que $0 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$, entonces $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$, luego $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. ■

■ **Ejemplo 1.29** Sean $\mathbf{u} = (3,0,5)$ y $\mathbf{v} = (2,-1,-3)$, encuentre $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle$ aplicando propiedades.

Resolución

En efecto, aplicando la distributividad del producto interno, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle &= \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= [\sqrt{(3)^2+(0)^2+(5)^2}]^2 - [\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-3)^2}]^2 \\
&= 20.
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.30** Sean $\mathbf{u} = (3,0,5)$, $\mathbf{v} = (2,-1,-3)$, $P_0 = (1,-2,1)$ y $P_1 = (2,3,-1)$. Calcule $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, P_1 - P_0\rangle$ aplicando propiedades.

Resolución

En efecto, al igual que en el ejercicio anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\langle (\mathbf{u}+\mathbf{v}), (P_1 - P_0)\rangle &= \langle \mathbf{u}, (P_1 - P_0)\rangle + \langle \mathbf{v}, (P_1 - P_0)\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, P_1\rangle - \langle \mathbf{u}, P_0\rangle + \langle \mathbf{v}, P_1\rangle - \langle \mathbf{v}, P_0\rangle \\
&= 1 - 8 + 4 - 1 = -4.
\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 1.31** En la figura 1.20, se tiene que $\|\overrightarrow{OA}\| = 15$, $\|\overrightarrow{AB}\| = 8$, $\|\overrightarrow{DC}\| = 8$ y $\|\overrightarrow{CE}\| = 6$, determine el vector $\mathbf{w} = \overrightarrow{DE}$. ■

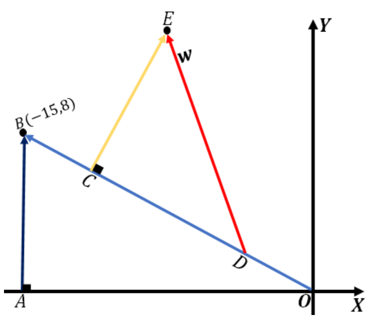

Figura 1.20:

Resolución

Tomemos el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB} = (-15, 8)$, su respectivo módulo es $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = 17$. El vector unitario en la misma dirección y sentido de $\mathbf{v}$ es:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(-\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$$

En la figura 1.20, hacemos $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{DC}$; este vector está en la misma dirección y sentido que $\mathbf{u}$. Además, puesto que $\|\mathbf{v}_1\| = \|\overrightarrow{DC}\| = 8$, entonces $\mathbf{v}_1$ es 8 veces el vector unitario $\mathbf{u}$, esto es,

$$\mathbf{v}_1 = 8\mathbf{u} = 8\left(-\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right) = \left(-\frac{120}{17}, \frac{64}{17}\right)$$

Si tomamos el vector $\mathbf{u}_1 = \left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$, se tiene que $\mathbf{u}_1$ es unitario y ortogonal a $\mathbf{u}$. Haciendo $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{CE}$, es fácil ver que $\mathbf{u}_2$ tiene la misma dirección y sentido

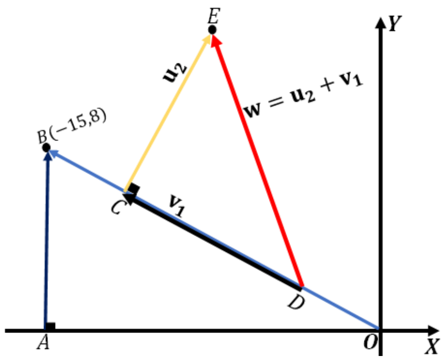

Figura 1.21:

que el vector unitario $\mathbf{u}_1$, además, siendo que $\|\mathbf{u}_2\| = \|\overrightarrow{CE}\| = 6$, entonces $\mathbf{u}_2$ es 6 veces el vector $\mathbf{u}_1$, con lo cual,

$$\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{CE} = 6\mathbf{u}_1 = 6\left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right) = \left(\frac{48}{17}, \frac{90}{17}\right)$$

Luego en la figura 1.21, se tiene que

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 = \left(-\frac{120}{17}, \frac{64}{17}\right) + \left(\frac{48}{17}, \frac{90}{17}\right) = \left(-\frac{72}{17}, \frac{154}{17}\right)$$

1.4 Proyección ortogonal y ángulo entre dos vectores:

Para introducir el concepto de proyección ortogonal, haremos uso de nociones geométricas. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores no nulos (y no paralelos por el momento) en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) Construimos un triángulo rectángulo como en la figura 1.22, cuya hipotenusa sea el vector $\mathbf{u}$ y su base(cateto) un vector paralelo a $\mathbf{v}$, que lo vamos a llamar $\mathbf{p} = r\mathbf{v}$. El tercer lado del triángulo será el cateto $\mathbf{w} := \mathbf{u} - r\mathbf{v}$. Como se trata de un triángulo rectángulo, entonces los vectores

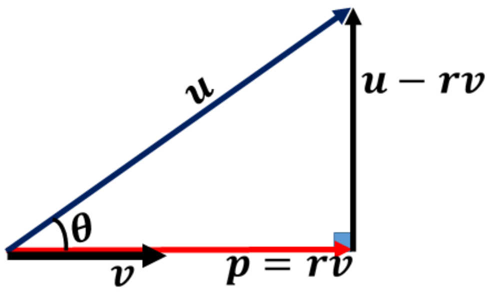

Figura 1.22: $\mathbf{p} = r\mathbf{v}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

$\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, por lo cual

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} - r\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - r\|\mathbf{v}\|^2 = 0$$

de donde se obtiene:

$$r = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \tag{1.22}$$

El lado del triángulo que está dado por $\mathbf{p} = r\mathbf{v}$ se llama proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. Con el valor de r obtenido en (1.22), el vector $\mathbf{p}$ está dado por $\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$.

Definición 1.4.1 Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{v} \neq 0$. La proyección ortogonal del vector $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v}$ denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ es:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} := \frac{< \mathbf{u}, \mathbf{v} >}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \tag{1.23}$$

El vector $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ es un vector unitario[2], lo que nos permite reescribir la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ de la siguiente manera:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \tag{1.24}$$

Definición 1.4.2 El número que multiplica al vector $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ en (1.24), se llama componente de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ y se le define mediante

$$\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|} \tag{1.25}$$

Con (1.24) y (1.25) podemos escribir:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \tag{1.26}$$

En (1.26), el número $|\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}|$ es el tamaño (longitud) del vector proyección. Como la componente puede ser positiva ó negativa, geométricamente esto significa que si $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen el mismo sentido, entonces $\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} > 0$; del mismo modo si $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen sentidos opuestos, entonces $\text{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} < 0$, como podemos ver en la figura 1.23.

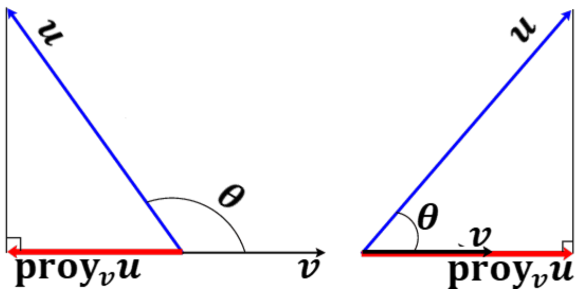

Figura 1.23: Signo de la componente.

Retomando el triángulo de la figura 1.22 y (1.24), la medida del cateto adyacente es $\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}$; de allí que el coseno del ángulo $\theta = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ en dicha figura esté dado por la expresión

$$\cos\theta = \frac{\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \text{donde } \ 0 \le \theta \le \pi$$

[2]Esto se puede verificar calculando su norma, en efecto:

$$\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1$$

lo cual implica

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \tag{1.27}$$

Una propiedad importante es la desigualdad de Cauchy - Schwarz, la cual resulta de (1.27). En efecto

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|.|\cos\theta| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

Luego la desigualdad de Cauchy-Schwarz está dada por:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|, \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{1.28}$$

La cuestión que aquí debe resolver el estudiante es: ¿cuándo acontece la igualdad en (1.28)?.

Teorema 1.4.1 Para cualquier par de vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se cumple la desigualdad triangular:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \tag{1.29}$$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| + \|\mathbf{v}\|^2, \ \text{y aplicando (1.28)} \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2
\end{aligned}$$

Juntando extremos, $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$, luego simplificando exponentes se obtiene la desigualdad deseada $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. ■

■ **Ejemplo 1.32** Verifique que el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}_1 = (1,2,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,-1)$ es el doble del ángulo determinado por los vectores $\mathbf{w}_1 = (1,4,1)$ y $\mathbf{w}_2 = (2,5,5)$.

Resolución

Sea $\theta = \sphericalangle(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, entonces por (1.27)

$$\cos\theta = \frac{<\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2>}{\|\mathbf{w}_1\|\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{2+20+5}{\sqrt{18}\sqrt{54}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

luego $\theta = \frac{\pi}{6}$. Haciendo $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, de (1.27) se tiene:

$$\cos\alpha = \frac{<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2>}{\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{2+2-1}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

de donde $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Luego $\alpha = 2\theta$. ■

1.5 Producto vectorial

A continuación, trataremos una nueva operación entre dos vectores llamada producto vectorial, para abordar esta operación nos haremos la siguiente pregunta: Dados dos vectores no paralelos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$, ¿será posible obtener un tercer vector $\mathbf{w}$ tal que $\mathbf{u}\perp\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}\perp\mathbf{w}$?. Apelando a nuestra intuición es posible, es más, si tomamos los vectores canónicos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ de $\mathbb{R}^3$, vemos que el vector $\mathbf{k}$ es el candidato que cumple tal propiedad, pues $\mathbf{k}$ es ortogonal a ambos vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Ahora, asumiendo que siempre es posible obtener tal vector, ¿cómo lo obtenemos?. Para ello se tiene la siguiente definición.

Definición 1.5.1 Dados los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es denotado mediante $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ y definido por:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{1.30}$$

Desarrollando (1.30) como en la forma usual de un determinante de 3×3, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \tag{1.31}$$

Usando (1.31) hacemos los siguientes cálculos:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\times\mathbf{v}\rangle = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0$$

y

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\times\mathbf{v}\rangle = v_1(u_2v_3 - u_3v_2) + v_2(u_3v_1 - u_1v_3) + v_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0$$

estos resultados son concluyentes por el hecho de, además que el vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es ortogonal al vector $\mathbf{u}$ y al vector $\mathbf{v}$ a la vez. Esta situación se ilustra en la figura 1.24. Algunas propiedades importantes del producto vectorial, son las siguientes:

1. Aplicando $(1,31)$ se comprueba que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\times\mathbf{j} &= (1,0,0)\times(0,1,0) = (0,0,1) = \mathbf{k} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{k} &= (0,1,0)\times(0,0,1) = (1,0,0) = \mathbf{i} \\ \mathbf{k}\times\mathbf{i} &= (0,0,1)\times(1,0,0) = (0,1,0) = \mathbf{j} \end{aligned} \tag{1.32}$$

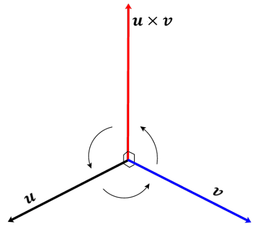

Figura 1.24: Representación del producto vectorial.

2. Para todo $\mathbf{u}(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3$, a partir de (1.31) se tiene

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = (0,0,0) = \mathbf{0}$$

Con este resultado es fácil ver que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = -(u_3v_2 - u_2v_3, u_1v_3 - u_3v_1, u_2v_1 - u_1v_2) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. Por lo tanto

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

este resultado nos muestra que el producto vectorial no es conmutativo.
4. $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = (\alpha(u_2v_3 - u_3v_2), \alpha(u_3v_1 - u_1v_3), \alpha(u_1v_2 - u_2v_1)) = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. Por lo tanto

$$(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}),$$

para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (u_1,u_2,u_3) \times (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) = (u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2), u_3(v_1 + w_1) - u_1(v_3 + w_3), u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1)) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) + (u_2w_3 - u_3w_2, u_3w_1 - u_1w_3, u_1w_2 - u_2w_1) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. Por lo tanto, se tiene la propiedad distributiva

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}.$$

6. Aquí, si aplicamos (1.31), (1.32) y la propiedad distributiva, se obtiene:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w} \tag{1.33}$$

de donde

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= -[\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] = -[\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u} - \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}] \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Este resultado nos muestra que el producto vectorial no es asociativo.

7. Ahora vemos que:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= (u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2\\ &= (u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2\\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2\end{aligned}$$

de donde

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2 \tag{1.34}$$

8. Si $\theta=\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$, entonces se cumple que $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-<\mathbf{u},\mathbf{v}>^2\\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-[\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta]^2\\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1-\cos^2\theta)=(\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta)^2\end{aligned}$$

por lo tanto, $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=(\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta)^2$, de donde simplificando exponentes,

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta \tag{1.35}$$

Geométricamente, si **u** y **v** no son paralelos, entonces podemos construir un paralelogramo (ver figura 1.25) cuyos lados sean los vectores **u** y **v**. En este caso las medidas de la base y la altura del paralelogramo son

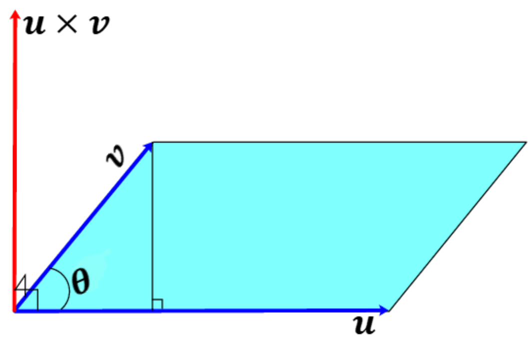

Figura 1.25:

respectivamente: $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta$. Luego el área de la superficie del paralelogramo es $S=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta$. Es por esto, que el módulo del producto vectorial de dos vectores no paralelos, representa geométricamente el área del paralelogramo formado por dichos vectores.

■ **Ejemplo 1.33** Obtenga un vector no nulo **u** de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a los vectores $\mathbf{v}=(2,1,-1)$, $\mathbf{w}=(1,-1,2)$.

Resolución

Con la propiedad de ortogonalidad del producto vectorial, el vector que cumpla con la condición requerida será el vector $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. En efecto, de (1.30)

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -5, -3)$$

luego el vector buscado es $\mathbf{u} = (1, -5, -3)$.

Cualquier vector paralelo a $\mathbf{u}$, será ortogonal a los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. ■

■ **Ejemplo 1.34** Para el vector $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$.

1. Obtenga dos vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $\mathbf{u}$ y ortogonales entre si.
2. Sea $\mathbf{A}$ un vector ortogonal a $\mathbf{u}$, pruebe que $\mathbf{A}$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ obtenidos en 1.

Resolución

1. Sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector ortogonal a $\mathbf{u}$, entonces $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$. De esta ecuación se obtiene $v_3 = v_1 + 2v_2$, lo cual reemplazando en el vector $\mathbf{v}$ resulta, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_1 + 2v_2)$ con $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$. Ahora si buscamos el vector $\mathbf{w}$ que sea ortogonal a $\mathbf{u}$ y ortogonal a $\mathbf{v}$; entonces el candidado es $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Haciendo los cálculos correspondientes

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ v_1 & v_2 & v_1 + 2v_2 \end{vmatrix} = (2v_1 + 5v_2, -2v_1 - 2v_2, v_2 - 2v_1)$$

luego los vectores buscados son

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_1 + 2v_2)$$

y

$$\mathbf{w} = (2v_1 + 5v_2, -2v_1 - 2v_2, v_2 - 2v_1)$$

Para obtener los vectores en forma particular, habrá que darles valores a v_1 y v_2. Ejemplo de estos vectores serían:

$$v_1 = 0 \text{ y } v_2 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = (0, 1, 2) \\ \mathbf{w} = (5, -2, 1) \end{cases}$$

$$v_1 = 1 \text{ y } v_2 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = (1, 1, 3) \\ \mathbf{w} = (7, -4, -1) \end{cases}$$

2. Sea $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ un vector ortogonal a $\mathbf{u}$, entonces $\langle \mathbf{A}, \mathbf{u} \rangle = a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$, luego $a_3 = a_1 + 2a_2$ y $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_1 + 2a_2)$. Hay que probar que $\mathbf{A}$ es combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. En efecto, suponer que existen escalares $r, s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{A} = r\mathbf{v} + s\mathbf{w} \tag{1.36}$$

Multiplicando por $\mathbf{v}$ en (1.36) se tiene:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{v} \rangle = r\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + s\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$$

Como $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$, entonces desarrollando los demás productos

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + (a_1 + 2a_2)(v_1 + 2v_2) = r(2v_1^2 + 5v_2^2 + 4v_1 v_2)$$

de donde

$$r = \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + (a_1 + 2a_2)(v_1 + 2v_2)}{2v_1^2 + 5v_2^2 + 4v_1 v_2} \tag{1.37}$$

De forma similar multiplicamos en (1.36) por el vector $\mathbf{w}$.

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{w} \rangle = r\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + s\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$$

Como $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} &a_1(2v_1 + 5v_2) - 2a_2(v_1 + v_2) + (a_1 + 2a_2)(v_2 - 2v_1) \\ &= s[(2v_1 + 5v_2)^2 + (2v_1 + 2v_2)^2 + (v_2 - 2v_1)^2] \end{aligned}$$

haciendo las operaciones correspondientes

$$s = \frac{a_1 v_2 - a_2 v_1}{2v_1^2 + 5v_2^2 + 4v_1 v_2} \tag{1.38}$$

Con (1.37) y (1.38) se tiene entonces que $\mathbf{A}$ es combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, siendo

$$\mathbf{A} = \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + (a_1 + 2a_2)(v_1 + 2v_2)}{2v_1^2 + 5v_2^2 + 4v_1 v_2}\mathbf{v} + \frac{a_1 v_2 - a_2 v_1}{2v_1^2 + 5v_2^2 + 4v_1 v_2}\mathbf{w}$$

Por ejemplo, si tomamos $v_1 = v_2 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 0$, entonces se tiene

$$\mathbf{A} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 1, 3), \quad \mathbf{w} = (7, -4, -1)$$

y

$$r = \frac{4}{11} \quad \text{y} \quad s = \frac{1}{11}$$

Con esto se verifica:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{11}\mathbf{w}$$

∎

1.6 La línea recta

Definición 1.6.1 Una recta en el espacio $\mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$L = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u}, \ t \in \mathbb{R}\} \tag{1.39}$$

donde el punto fijo $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^n$ es el punto de paso (punto por donde pasa la recta) y el vector fijo no nulo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es la dirección de la recta.

Haciendo $\mathbf{p} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathbf{p}_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, se tiene que los elementos de L están dados por las ecuaciones

$$x_i = x_{i0} + tu_i, \ \ \forall i = 1, \cdots, n$$

Despejando t de cada una de las ecuaciones(en caso $u_i \neq 0$) se tiene

$$\frac{x_i - x_{10}}{u_1} = \frac{x_2 - x_{20}}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_{n0}}{u_n}$$

Cada ecuación obtenida a partir del último resultado representa un plano n-dimensional. Ahora, si queremos una recta en el plano tomamos $n = 2$ en la definición 1.6.1, y de este modo

$$L = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u}, \ t \in \langle -\infty, +\infty \rangle \right\}. \tag{1.40}$$

Haciendo $\mathbf{p} = (x, y)$, $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ se tiene las ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tu_1 \\ y &= y_0 + tu_2 \end{aligned}$$

de donde, despejando t en caso u_1 y u_0 no sean cero, luego igualando las expresiones encontradas

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

Haciendo operaciones

$$y = mx + b, \ \text{ donde } b = y_0 - \frac{x_0}{u_1}, \ \ m = \frac{u_2}{u_1} \tag{1.41}$$

Este último resultado corresponde a la ecuación ordinaria de la recta (geometría analítica), donde

$$m_L := m = \frac{u_2}{u_1} \tag{1.42}$$

es la pendiente de la recta L y b es el intercepto en el eje Y.

Para determinar la ecuación de una recta se requiere de un punto de paso y de una dirección. Por geometría elemental una recta queda bien definida si se conoce dos puntos por los cuales pasa, en efecto: sean $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos de paso de la recta L. La dirección de la recta queda determinada por el vector $\mathbf{u}$ que va del punto $\mathbf{p}_1$ al punto $\mathbf{p}_2$, es decir $\mathbf{u} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Luego la ecuación de la recta es:

$$L: \ (x,y) = (x_1,y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \ \ t \in \langle -\infty, +\infty \rangle \tag{1.43}$$

■ **Ejemplo 1.35** Halle la ecuación vectorial y ordinaria de la recta si se sabe que pasa por los puntos $(0,3)$ y $(2,-1)$.

Resolución

Sean $\mathbf{A} = (0,3)$ y $\mathbf{B} = (2,-1)$, el vector dirección de la recta L, que va de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ es el vector $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (2,-4)$, luego la ecuación vectorial de la recta L que pasa por $\mathbf{A}$ y tiene dirección $\mathbf{u}$ es

$$L: \ (x,y) = (2t, 3-4t), \ t \in \mathbb{R}$$

Siendo que $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3-4t \end{cases}$, entonces $t = \frac{x}{2}$ y con esto, $y = 3 - 4\left(\frac{x}{2}\right)$, de donde se tiene que la ecuación ordinaria de la recta es $L: \ y = -2x + 3$ cuya representación es la figura 1.26. ■

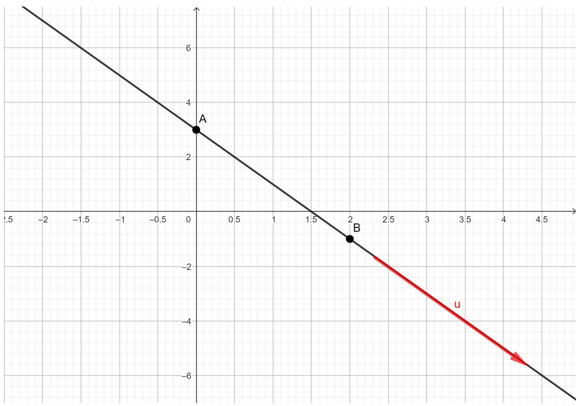

Figura 1.26: Representación geométrica de la recta L, se indica el vector dirección $\mathbf{u}$.

■ **Ejemplo 1.36** Una recta L tiene pendiente 3 y pasa el punto $(3,2)$. La abscisa de otro punto sobre la recta es 4. Halle su ordenada.

Resolución

Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ la dirección de la recta L. Por dato, la pendiente de L es $m_L = \frac{u_2}{u_1} = 3$, de donde $u_2 = 3u_1$. Haciendo $u_1 = 1$ se obtiene $u_2 = 3$, luego el vector dirección[3] de L es $\mathbf{u} = (1,3)$. Como la recta pasa por el punto $(3,2)$, entonces la ecuación vectorial de L es

$$L: \ (x,y) = (3+t, 2+3t), \ t \in \mathbb{R}$$

Por dato, hay un punto $\mathbf{p}$ que tiene abscisa 4, es decir $\mathbf{p} = (4, y_0)$, se tiene que hallar la ordenada y_0. Como $\mathbf{p} \in L$, entonces $(4, y_0) = (3+t, 2+3t)$; igualando componentes: $4 = 3+t$ y $y_0 = 2+3t$, de la primera ecuación se tiene que $t = 1$, con lo cual en la segunda ecuación nos da $y_0 = 5$. ■

1.6.1 Ángulo entre dos rectas

El ángulo formado por dos rectas queda determinado por el ángulo que forman sus vectores dirección. En efecto: sean las rectas L_1, L_2 cuyas direcciones son los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ respectivamente, entonces

$$\sphericalangle(L_1, L_2) = \sphericalangle(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \tag{1.44}$$

Definición 1.6.2 Dos rectas son paralelas, si sus vectores dirección son paralelos. Del mismo modo dos rectas son ortogonales, si sus vectores dirección son ortogonales.

■ **Ejemplo 1.37** Halle la ecuación vectorial y ordinaria de la recta si se sabe que:

1. pasa por el punto $(1,2)$ y es paralela al vector $(3,4)$.
2. pasa por el punto $(-2,0)$ y es ortogonal al vector $(3,2)$.

Resolución

1. En primer lugar, la ecuación vectorial de la recta según (1.43) es:

$$L: \ (x,y) = (1,2) + t(3,4), \ t \in \mathbb{R}$$

de donde

$$L: \ (x,y) = (1+3t, 2+4t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Para calcular la ecuación ordinaria de la recta, en la ecuación anterior igualando componentes, se tiene

$$L: \begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= 2+4t \end{cases}$$

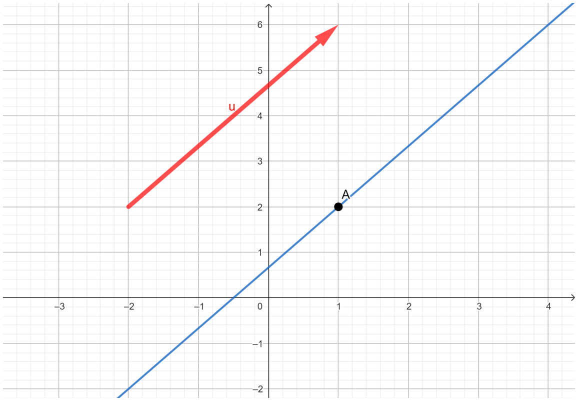

Figura 1.27: Representación geométrica de la recta $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$.

de donde $t = \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4}$, nos liberamos del parámetro t para encontrar que la ecuación ordinaria de la recta es $L:\ y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$, cuya representación en el plano está en la figura 1.27.

2. Sea $\mathbf{u} = (3,2)$, un vector ortogonal a $\mathbf{u}$ es el vector[4] $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\perp} = (-2,3)$. El punto de paso de L es $\mathbf{A} = (-2,0)$, luego la ecuación vectorial está dada por $L:\ (x,y) = \mathbf{A} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. Reemplazando

$$L:\ (x,y) = (-2-2t, 3t),\ t \in \mathbb{R}$$

Nos liberamos del parámetro t y la ecuación de la recta es $3x+2y+6=0$ cuya representación está en la figura 1.28.

■

■ **Ejemplo 1.38** Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135^o. Si la recta final tiene pendiente -3, calcule la pendiente de la recta inicial.

Solución

Sea L_1 la recta inicial con vector dirección $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y L_2 la recta final con vector dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Por dato se tiene que la pendiente de L_2 es $m_{L_2} = \frac{v_2}{v_1} = -3$, de donde se tiene que $v_2 = -3v_1$, y con esto, $\mathbf{v} = (v_1, -3v_1) = v_1(1,-3)$, $v_1 \neq 0$. Con esta información, se puede tomar el vector $\mathbf{v} = (1,-3)$ como la dirección de L_2.

En el caso de L_1, asumimos que su pendiente de L_1 es $m_{L_1} = m$; y por (1.42), se tiene que $m = \frac{u_2}{u_1}$, de donde, $u_2 = mu_1$. Puesto que $\sphericalangle(L_1, L_2) = 135^0$,

[3] Cualquier vector que sea paralelo al vector $\mathbf{u}$, es también una dirección de la recta L.
[4] ver (1.10)

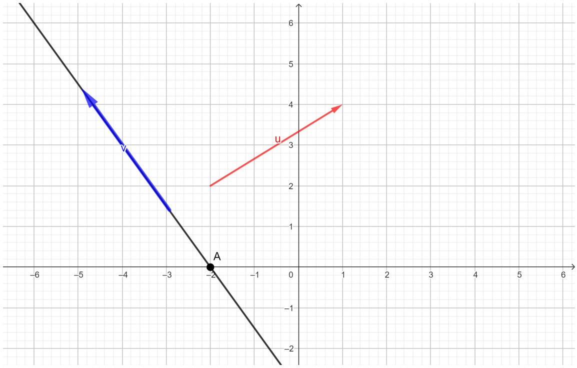

Figura 1.28: Representación geométrica de la recta $3x+2y+6=0$.

entonces $\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 135^o$ y

$$\cos 135^o = \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle (u_1,u_2),(1,-3)\rangle}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{(1)^2+(-3)^2}}$$

luego

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{u_1-3u_2}{\sqrt{10}\sqrt{u_1^2+u_2^2}}$$

Como $u_2 = mu_1$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{u_1-3mu_1}{\sqrt{10}\sqrt{u_1^2+m^2u_1^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(2)(10)(u_1^2+m^2u_1^2)} = 2(3mu_1-u_1), \text{ elevando al cuadrado}$$

$$\Rightarrow \quad 2m^2-3m-2=0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se tiene como solución $m=2$ o $m=-\frac{1}{2}$, escogiendo el valor positivo, la pendiente de la recta inicial L_1 es $m_{L_1}=2$. ■

■ **Ejemplo 1.39** Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45^o. La recta inicial pasa por los puntos $(-2,1)$ y $(9,7)$, mientras que la recta final pasa por el punto $\mathbf{p}(3,9)$ y por el punto $\mathbf{q}$ cuya abscisa es -2. Halle la ordenada del punto $\mathbf{q}$.

Resolución

Sea L_1 la recta inicial cuya dirección es el vector $\mathbf{u}$, y L_2 la recta final con dirección el vector $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$. Si hacemos $\mathbf{p}_1=(-2,1)$ y $\mathbf{p}_2=(9,7)$, se tiene que dichos puntos están en la recta L_1, luego el vector dirección de L_1 lo podemos tomar como $\mathbf{u} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$, reemplazando se tiene $\mathbf{u} = (11,6)$. Ahora se sabe que la recta L_2 pasa por el punto $\mathbf{p}$ y por el punto $\mathbf{q}$ de abscisa -2, si hacemos y_0 la ordenada de $\mathbf{q}$, entonces $\mathbf{q} = (-2, y_0)$. De esta manera el vector dirección de L_2 estará determinado por los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, es decir, $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = (-5, y_0 - 9)$. Por dato $\sphericalangle(L_1, L_2) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 45^o$, entonces

$$\cos 45^o = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle (11,6), (-5, y_0 - 9) \rangle}{\sqrt{157}\sqrt{25 + (y_0 - 9)^2}} = \frac{6y_0 - 109}{\sqrt{157}\sqrt{25 + (y_0 - 9)^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6y_0 - 109}{\sqrt{157}\sqrt{25 + (y_0 - 9)^2}}, \text{ elevando al cuadrado}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} = \frac{(6y_0 - 109)^2}{157[25 + (y_0 - 9)^2]} \Rightarrow 157[25 + (y_0 - 9)^2] = 2[(6y_0 - 109)^2]$$

Simplificando la ecuación se tiene $17y_0^2 - 42y_0 - 1424 = 0$, cuyas soluciones son $y_0 = \frac{178}{17}$, $y_0 = -8$. Escogemos $y_0 = -8$; dejo al estudiante la justificación de porqué elegimos dicho valor. ■

■ **Ejemplo 1.40** Demuestre que la recta L_1 que pasa por los puntos $\mathbf{p}_1(-2,5)$, $\mathbf{p}_2(4,1)$ es ortogonal a la recta L_2 que pasa por los puntos $\mathbf{q}_1(-1,1)$, $\mathbf{q}_2(3,7)$.

Resolución

Sea $\mathbf{u}$ la dirección de la recta L_1, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (6,-4)$. Del mismo modo sea $\mathbf{v}$ la dirección de la recta L_2, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = (4,6)$. Puesto que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (6,-4), (4,6) \rangle = 24 - 24 = 0,$$

entonces $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, lo cual equivale a afirmar que L_1 es ortogonal a L_2. ■

■ **Ejemplo 1.41** Una recta L_1 pasa por los puntos $\mathbf{p}_1(3,2)$, $\mathbf{p}_2(-4,-6)$, y otra recta L_2 pasa por el punto $\mathbf{q}_1(-7,1)$ y el punto $\mathbf{q}_2$ cuya ordenada es -6. Halle la abscisa del punto $\mathbf{q}_2$ sabiendo que L_1 es ortogonal a L_2.

Solución

Sea $\mathbf{u}$ la dirección de L_1, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (-7,-8)$. Sea x_0 la abscisa del punto $\mathbf{q}_2$, entonces $\mathbf{q}_2 = (x_0, -6)$, ahora si $\mathbf{v}$ es la dirección de L_2, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = (x_0 + 7, -7)$. Puesto que la recta L_1 debe ser ortogonal a la recta L_2, entonces $\mathbf{u}$ debe ser ortogonal a $\mathbf{v}$, en efecto, sabiendo que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, entonces

$$\langle (-7,-8), (x_0 + 7, -7) \rangle = -7x_0 - 49 + 56 = -7x_0 + 7 = 0$$

luego $x_0 = 1$. ■

■ **Ejemplo 1.42** La ecuación de una recta está en la forma $3x-4y+11=0$. Halle la ecuación de la recta en forma vectorial.

Resolución

El proceso es sencillo, despejando la variable y se tiene:

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$$

Luego

$$(x,y)=\left(x\,,\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}\right)=\left(x\,,\frac{3}{4}x\right)+\left(0\,,\frac{11}{4}\right)=\left(0\,,\frac{11}{4}\right)+x\left(1\,,\frac{3}{4}\right)$$

hacemos $x=t$, luego tomando $t\in\mathbb{R}$, la ecuación de la recta L es:

$$L:(x,y)=\left(0\,,\frac{11}{4}\right)+t\left(1\,,\frac{3}{4}\right),\ \ t\in\mathbb{R}$$

■

Para obtener la recta en el espacio tridimensional hacemos $n=3$ en la definición 1.6.1, quedando de este modo

$$L=\{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^3\ :\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0+t\mathbf{u},\ t\in\mathbb{R}\} \tag{1.45}$$

donde $\mathbf{p}=(x,y,z)$, $\mathbf{p}_0=(x_0,y_0,z_0)$ y $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$. Las ecuaciones paramétricas de la recta estarían dadas por:

$$\begin{aligned}x&=x_0+tu_1\\ y&=y_0+tu_2\\ z&=z_0+tu_3\end{aligned}$$

que al despejar t e igualar términos se obtiene:

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}$$

(que vendría a ser la intersección de tres plano) En este caso, El ángulo que forman dos rectas en el espacio, es el ángulo de sus vectores dirección.

■ **Ejemplo 1.43** Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $\mathbf{p}_0(3,-4,-1)$ y es paralela al vector $\mathbf{u}=(1,1,1)$.

Resolución

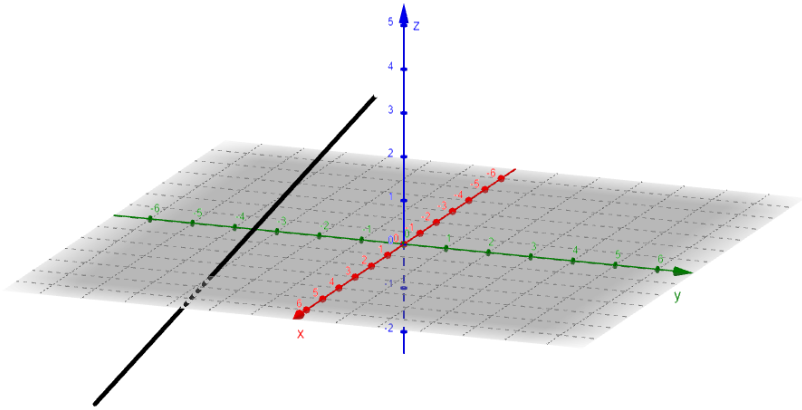

Figura 1.29:

La solución es sencilla, la recta L será:

$$L:\ (x,y,z) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u} = (3,-4,-1) + t(1,1,1),\ \ t \in \mathbb{R}$$

de donde

$$L:\ (x,y,z) = (3+t, -4+t, -1+t),\ t \in \mathbb{R}$$

cuya representación lo vemos en la figura 1.29. ■

■ **Ejemplo 1.44** La recta L pasa por los puntos $\mathbf{p}(1,2,0)$ y $\mathbf{q}(1,1,-1)$, halle su ecuación.

Resolución

En primer lugar determinamos la dirección de la recta, dicha dirección será el vector $\overline{u} = \mathbf{p} - \mathbf{q} = (0,1,1)$, luego escogiendo el punto $\mathbf{p}$ como punto de paso, la ecuación de la recta es:

$$L:\ (x,y,z) = \mathbf{p} + t\mathbf{u} = (1,2,0) + t(0,1,1),\ t \in \mathbb{R}$$

de donde

$$L:\ (x,y,z) = (1, 2+t, t),\ t \in \mathbb{R}$$

■

1.6.2 Distancia de un punto a una recta

En $\mathbb{R}^3$, para calcular la distancia de un punto $\mathbf{q}$ a una recta

$$L = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3\ :\ \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u},\ t \in \mathbb{R}\}$$

usamos el producto vectorial. En efecto, para medir la distancia del punto $\mathbf{q}$ a la recta L, como se muestra en la figura 1.30, bajamos una perpendicular desde el punto $\mathbf{q}$ a la recta L, dicha perpendicular corta a la recta en un punto que lo podemos llamar $\mathbf{s}$; al mismo tiempo construimos el vector $\mathbf{v}$ que va del punto de paso $\mathbf{p}_0$ al punto $\mathbf{q}$, es decir, $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}_0$. Con los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ podemos

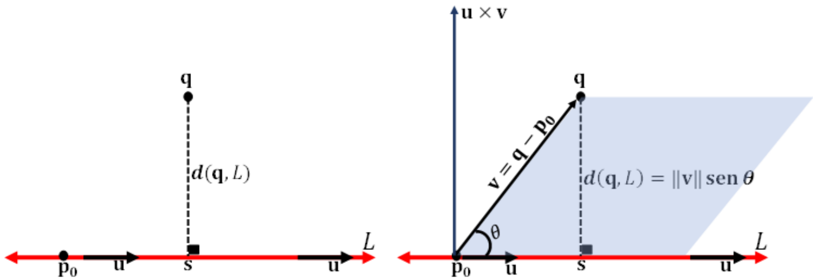

Figura 1.30: Distancia de un punto $\mathbf{q}$ a una recta L.

construir un paralelogramo cuya área [5] es según (1.35)

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \underbrace{\|\mathbf{u}\|}_{\text{longitud de la base}} \quad \underbrace{\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta}_{\text{altura}=d(\mathbf{q},L)}$$

Puesto que la altura de dicho paralelogramo es la distancia del punto $\mathbf{q}$ al punto $\mathbf{p}$, entonces

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{p}\| = \|\mathbf{u}\| d(\mathbf{q},L)$$

Luego

$$d(\mathbf{q},L) = \frac{\|\mathbf{u}\times(\mathbf{q}-\mathbf{p}_0)\|}{\|\mathbf{u}\|} \tag{1.46}$$

■ **Ejemplo 1.45** Considere la recta $L: \begin{cases} x &= 4-t \\ y &= 3+2t \\ z &= -5+3t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$. Encuentre la distancia del punto $\mathbf{q}(3,-1,4)$ a la recta L.

Resolución

La recta L en su forma vectorial es:

$$L:\ (x,y,z) = (4-t, 3+2t, -5+3t),\ t\in\mathbb{R}$$

[5] ver en las propiedades del producto vectorial, observe que: $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$ (donde $\theta = \sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$), representa el área del paralelogramo cuya base y altura miden respectivamente $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$.

descomponiendo vectores

$$L: \ (x,y,z) = (4,3,-5) + t(-1,2,3), \ t \in \mathbb{R}$$

de donde el punto de paso y la dirección de la recta son respectivamente $\mathbf{p}_0 = (4,3,-5)$ y $\mathbf{u} = (-1,2,3)$. Ahora, si aplicamos (1.46), la distancia del punto $\mathbf{q}$ a la recta L, es como sigue:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{q},L) &= \frac{\|\mathbf{u} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}_0)\|}{\|\mathbf{u}\|} \\ &= \frac{\|(-1,2,3) \times [(3,-1,4) - (4,3,-5)]\|}{\|(-1,2,3)\|} \\ &= \frac{\|(-1,2,3) \times (-1,-4,9)\|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{\|(30,6,6)\|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{972}}{\sqrt{14}} = \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{42}}{7} \end{aligned}$$

Por lo tanto la distancia es $\frac{9\sqrt{42}}{7}$. ■

1.7 El Plano:

Anteriormente vimos que con un vector no nulo $\mathbf{u}$ se genera una recta[6], ahora si queremos generar un plano[7], entonces es necesario dos vectores linealmente independientes[8].

Definición 1.7.1 Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ linealmente independientes, el plano que pasa por el punto $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ y generado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el conjunto

$$P = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \ s,t \in \mathbb{R}\right\} \tag{1.47}$$

Para cualquier punto $\mathbf{p} \in P$ se tiene que existen dos números $s,t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. De esta igualdad obtenemos:

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = s\mathbf{u} + \mathbf{v} \tag{1.48}$$

Puesto que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes (no paralelos), entonces $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es no nulo. El vector $\mathbf{n}$ es un vector normal[9] al plano. Si multiplicamos

[6] En matemáticas se lo considera como un objeto unidimensional, es decir un punto de la recta sólo puede moverse en una sola dimensión determinada por el vector $\mathbf{u}$.

[7] Entiéndase como un objeto de dos dimensiones.

[8] No paralelos.

[9] Llamamos vector normal a cualquier vector no nulo que sea ortogonal a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, en particular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector normal al plano.

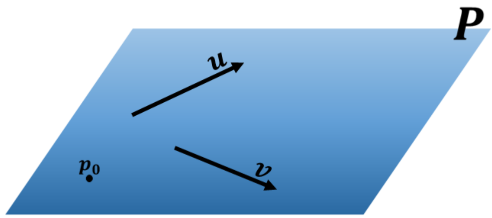

Figura 1.31:

la expresión de (1.48) por **n**, se tiene:

$$\langle(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0),\mathbf{n}\rangle = s\underbrace{\langle\mathbf{u},\mathbf{n}\rangle}_{0}+t\underbrace{\langle\mathbf{v},\mathbf{n}\rangle}_{0}$$

Luego

$$\langle\mathbf{p}-\mathbf{p}_0,\mathbf{n}\rangle = 0$$

Con estos resultados podemos formular el siguiente teorema

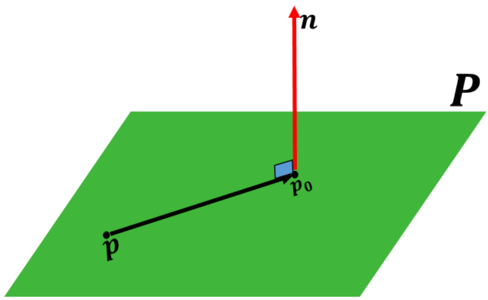

Figura 1.32:

Teorema 1.7.1 Si **n** es un vector normal[a] al plano P en (1.47), entonces

$$P = \{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^3\ :\ \langle\mathbf{p}-\mathbf{p}_0,\mathbf{n}\rangle = 0\} \tag{1.49}$$

[a]Podemos escoger **n** de tal manera que $\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Esto lo visualizamos en la figura 1.32.

Observación

Al desarrollar el producto interno de (1.49), el plano queda determinado por su ecuación general en forma cartesiana:

$$P:\ Ax+By+Cz=D \tag{1.50}$$

donde su normal es el vector $\mathbf{n}=(A,B,C)$. El plano pasa por origen siempre que $D=0$.

Si tenemos tres puntos no colineales $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$, entonces los vectores $\mathbf{u}=\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{v}=\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_0$ son linealmente independientes, luego el plano P que pasa por dichos puntos estará dado por:

$$P=\left\{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^3\ :\ \mathbf{p}=\mathbf{p}_0+s(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0)+t(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_0),\ s,t\in\mathbb{R}\right\} \tag{1.51}$$

Del mismo modo que en el Teorema 1.7.1, $(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0)\times(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_0)$ será un vector normal al plano P, luego podemos también escribir el plano en la siguiente forma:

$$P=\left\{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^3\ :\ \langle\mathbf{p}-\mathbf{p}_0,(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0)\times(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_0)\rangle=0\right\} \tag{1.52}$$

■ **Ejemplo 1.46** Determine la ecuación de un plano P que pasa por los puntos $A(2,0,-1)$, $B(1,-2,3)$ y $C(0,1,1)$ ■

Acá podemos tomar los vectores

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(-1,-2,4)$$
$$\mathbf{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(-2,1,2)$$

Si $\mathbf{n}$ es el vector normal al plano P, este se obtiene del producto vectorial de $\mathbf{u}$ con $\mathbf{v}$, es decir,

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&-2&4\\-2&1&2\end{vmatrix}=(-8,-6,-5)$$

Como punto de paso del plano se puede escoger cualquiera de los tres puntos, el resultado es el mismo y el estudiante lo puede corroborar. En este caso, tomaremos como punto de paso al punto A, así se tiene que el plano está dado por

$$P=\{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^3\ :\ \langle\mathbf{p}-A,n\rangle=0\}$$

Siendo que $\mathbf{p}=(x,y,z)$, entonces reemplazando A y $\mathbf{n}$ se tiene:

$$P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ \langle(x-2,y,z+1),(-8,-6,-5)\rangle=0\}$$

Para determinar la ecuación cartesiana del plano desarrollamos el producto interno y se obtiene:

$$P:\ 8x+6y+5z=11$$

La representación geométrica de este plano está en la figura 1.33.

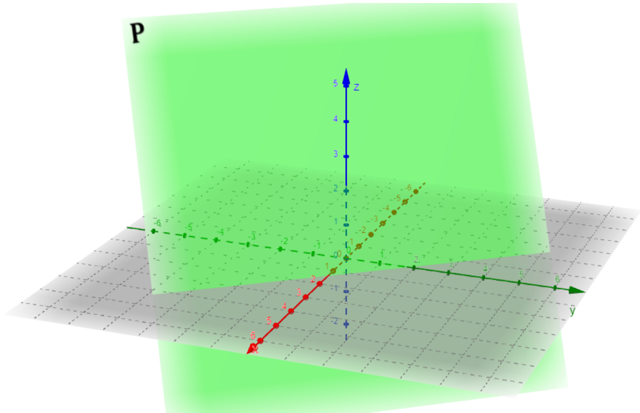

Figura 1.33:

■ **Ejemplo 1.47** Determine el plano que contiene los puntos $\mathbf{p}_0(1,1,-1)$, $\mathbf{p}_1(3,3,2)$ y $\mathbf{p}_2(3,-1,-2)$.

Resolución

Sea P el plano buscado, los vectores que generan P son $\mathbf{u} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = (2,2,3)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 = (2,-2,-1)$.

Teniendo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ hallamos el vector normal al plano, el cual es $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Haciendo cálculos

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (4,8,-8) \end{aligned}$$

luego el plano será

$$P = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = 0\}$$

reemplazando

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle (x-1, y-1, z+1), (4,8,-8) \rangle = 0\}$$

■

■ **Ejemplo 1.48** Dados los puntos $A(3,0,-2), B(1,-3,4)$ y $C(5,4,-3)$

1. halle la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos A, B y C.
2. si una partícula viaja a lo largo de la recta

$$L = \left\{p \in \mathbb{R}^3 : p = (-1+2t, 3-4t, 5-t)\right\}$$

¿en qué punto impacta al plano?

$\blacksquare$

Resolución

1. Si tomamos los vectores

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2, 4, -1)$$
$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -3, 6)$$

entonces el vector normal del plano es

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (21, -10, 2)$$

Tomando A como punto de paso del plano, se tiene

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle (x-3, y, z+2), (21, -10, 2) \rangle = 0\}$$

y desarrollando el producto interno, la forma cartesiana del plano es:

$$P: \ 21x - 10y + 2z = 59$$

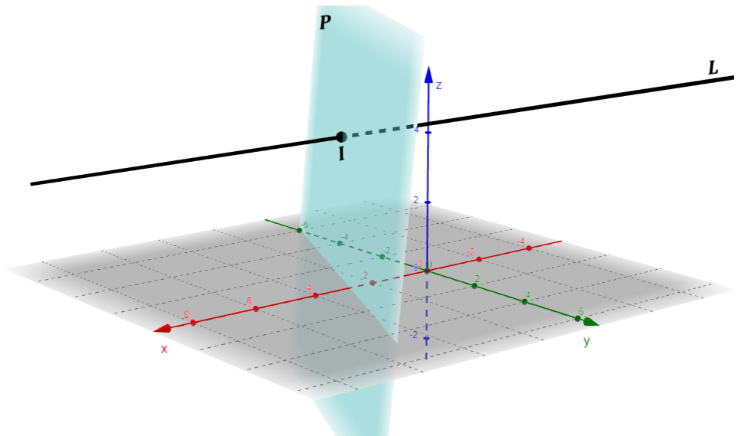

Figura 1.34:

2. Sea $\mathbf{I}$ el punto donde la partícula impacta al plano, para encontrar este punto, hay que reemplazar las coordenadas sobre las cuales viaja la partícula en la ecuación del plano, teniendo así:

$$21(-1+2t) - 10(3-4t) + 2(5-t) = 59 \Longrightarrow t = \frac{5}{4}$$

Luego el punto de impacto es:

$$\mathbf{I} = \left(-1+2\left(\frac{5}{4}\right), 3-4\left(\frac{5}{4}\right), 5-\left(\frac{5}{4}\right)\right)$$

de donde, $I = \left(\frac{3}{2}, -2, \frac{15}{4}\right)$. La representación geométrica de este problema se muestra en la figura 1.34.

■ **Ejemplo 1.49** Encuentre la ecuación cartesiana del plano que contiene a las rectas $L_1 : (x,y,z) = (2t, 3-2t, -3+5t),\ t \in \mathbb{R}$ y $L_2 : (x,y,z) = (5-t, -2+t, 8-t),\ t \in \mathbb{R}$ ■

Resolución

Es muy importante tener en cuenta que para dos rectas no paralelas existe un plano que las contiene a ambas, siempre que estas rectas se intercepten[10]. En primer lugar, averiguamos si existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $(2t_1, 3-2t_1, -3+5t_1) = (5-t_2, -2+t_2, 8-t_2)$; igualamos las componentes para obtener el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2t_1 = 5-t_2 \\ 3-2t_1 = -2+t_2 \\ -3+5t_1 = 8-t_2 \end{cases} \Longrightarrow t_1 = 2 \text{ y } t_2 = 1$$

De este resultado se tiene que L_1 se intercepta con L_2 en el punto $\mathbf{p}_0(4,-1,7)$. Ponemos los datos del problema en un gráfico simulado como se muestra en la figura 1.35. Reescribimos las rectas para identificar el punto de paso con su

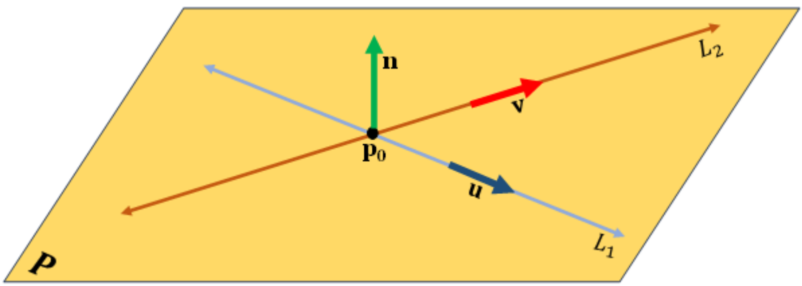

Figura 1.35:

respectiva dirección y se tiene

$$L_1 : (x,y,z) = (0,3,-3) + t(2,-2,5), t \in \mathbb{R}$$

[10]En $\mathbb{R}^3$, si dos rectas no paralelas no se interceptan, no existe un plano que las contenga. El estudiante debe corroborar este hecho.

y

$$L_2: \ (x,y,z) = (5,-2,8) + t(-1,1,-1), t \in \mathbb{R}$$

El punto de paso y la dirección de L_1 son respectivamemte $A(0,3,-3)$ y $\mathbf{u} = (2,-2,5)$, mientras que el punto de paso y la dirección de L_2 son respectivamente $B(5,-2,8)$ y $\mathbf{v} = (-1,1,-1)$. El vector normal $\mathbf{n}$ del plano se obtiene del producto vectorial de $\mathbf{u}$ con $\mathbf{v}$ y de esta manera

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-3,-3,0)$$

Luego la ecuación del plano P que contiene a ambas rectas es

$$P: \ \langle (x,y,z) - (4,-1,7), (-3,-3,0) \rangle = 0$$

que desarrollando el producto se llega a la forma cartesiana

$$P: \ x + y = 3$$

■ **Ejemplo 1.50** Los puntos $\mathbf{A}(6,-3,3)$ y $\mathbf{B}(5,-4,10)$ al proyectarse ortogonalmente sobre el plano $P: \ x - y + z = 4$, determinan respectivamente los puntos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ en el plano. Determine la recta que pasa por $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$. ■

Resolución

Representamos esta situación en el gráfico simulado que se muestra en la figura 1.36 El vector normal al plano P es $\mathbf{n} = (1,-1,1)$. Para determinar los

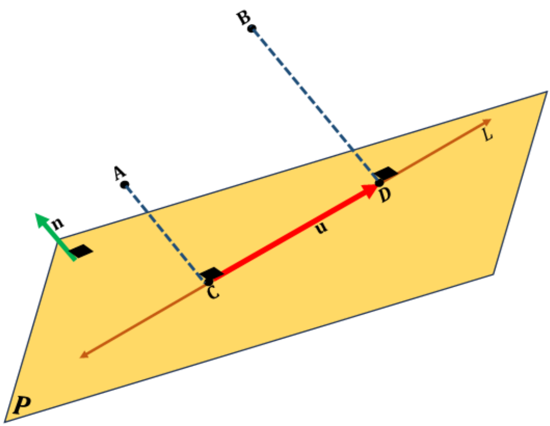

Figura 1.36:

puntos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$, bajamos rectas perpendiculares al plano P, en la dirección del vector normal **n** desde los puntos **A** y **B** respectivamente. Si L_1 es la recta perpendicular que baja por el punto **A**, entonces

$$L_1 : (x,y,z) = (6,-3,3) + t(1,-1,1),\ t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow L_1 : (x,y,z) = (6+t, -3-t, 3+t),\ t \in \mathbb{R}$$

En forma similar la recta perpendicular que baja por **B** es

$$L_2 : (x,y,z) = (5,-4,10) + t(1,-1,1),\ t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow L_2 : (x,y,z) = (5+t, -4-t, 10+t),\ t \in \mathbb{R}$$

Luego los puntos **C** y **D** se obtienen de la siguiente manera:

$$\mathbf{C} = L_1 \cap P : (6+t) - (-3-t) + (3+t) = 4 \Longrightarrow t = -\frac{8}{3}$$

que al reemplazar en la recta L_1 se tiene que $\mathbf{C} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. En forma similar,

$$\mathbf{D} = L_2 \cap P : (5+t) - (-4-t) + (10+t) = 4 \Longrightarrow t = -5$$

que al reemplazar en la recta L_2 se tiene que $D = (0,1,5)$. Para obtener la

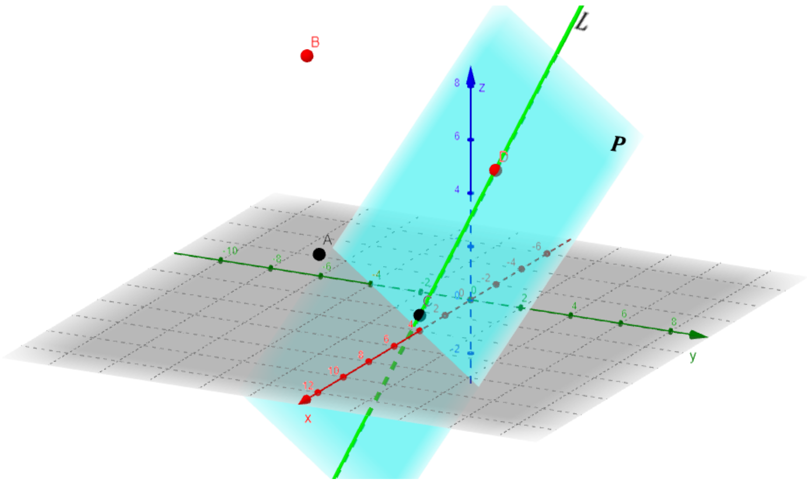

Figura 1.37:

recta L que pasa por los puntos **C** y **D**, la dirección de esta recta es el vector

$\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathbf{CD}} = \mathbf{D} - \mathbf{C} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}\right)$, luego, tomando como punto de paso a $\mathbf{D}$, la recta está dada por

$$L: \ (x,y,z) = (0,1,5) + t\left(\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}\right), \ t \in \mathbb{R}$$

Observe figura 1.37. Si se toma el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$, se tiene que la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v}$ sobre el plano P, es el vector $\mathbf{u}$; podríamos escribir que

$$\mathbf{u} = \operatorname{proy}_P \mathbf{v}$$

1.7.1 Distancia de un punto a un plano

A continuación nos ocuparemos de la distancia de un punto cualquiera a un plano. Sea $\mathbf{q}$ un punto cualquiera de $\mathbb{R}^3$ y P un plano que pasa por el

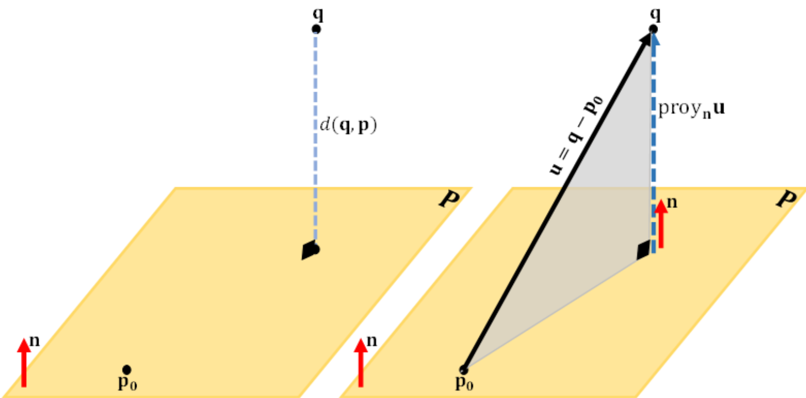

Figura 1.38: La distancia del punto $\mathbf{q}$ al plano P, es el módulo del vector $\operatorname{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{u}$.

punto $\mathbf{p}_0$ teniendo como una de sus normales al vector $\mathbf{n}$. Teniendo como referencia la figura 1.38, la distancia del punto $\mathbf{q}$ al plano P será la longitud de la perpendicular bajada del punto $\mathbf{q}$ al plano, dicha perpendicular es sin duda alguna paralela al vector normal $\mathbf{n}$; asimismo es la proyección ortogonal del vector $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{p}_0$ sobre el vector $\mathbf{n}$, luego la distancia del punto $\mathbf{q}$ al plano P es el módulo de dicha proyección, es decir:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{q}, P) &= |\operatorname{proy}_{\mathbf{n}}\mathbf{u}| = \left|\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{n}\|}\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}\right| = \left|\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{n}\|}\right| = \left|\frac{\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{n}\|}\right| \\ &= \frac{|\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n}\rangle|}{\|\mathbf{n}\|} \end{aligned}$$

Se ha demostrado el siguiente teorema

Teorema 1.7.2 Sea $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, y $\mathbf{p}_0$ un punto en el plano P. Si la normal de P es el vector $\mathbf{n}$, entonces la distancia del punto $\mathbf{q}$ al plano P es

$$d(\mathbf{q}, P) = \frac{|\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} \tag{1.53}$$

Suponga que se tiene el plano P en coordenadas cartesianas, es decir,

$$P: \; Ax + By + Cz = D,$$

siendo que su normal es el vector $\mathbf{n} = (A, B, C)$, para el punto $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in P$, se tiene que

$$\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$$

Luego,

$$|\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle| = |\langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle| = |\langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle - D|$$

y con este resultado en (1.53) se tiene que la distancia de cualquier punto $\mathbf{q}$ de $\mathbb{R}^3$ al plano $P: \; Ax + By + Cz = D$ es

$$d(\mathbf{q}, P) = \frac{|\langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{1.54}$$

1.7.2 Ángulo entre dos planos

Definición 1.7.2 Dos planos son paralelos, cuando sus vectores normales son paralelos; o también, tienen el mismo vector normal.

Observación

Si P_1 y P_2 son planos paralelos, al tener el mismo vector normal, sus ecuaciones cartesianas se reducen siempre a las expresiones

$$\begin{aligned} P_1 &: \; Ax + By + Cz = D_1 \\ P_1 &: \; Ax + By + Cz = D_2 \end{aligned} \tag{1.55}$$

donde el vector normal a ambos planos es $\mathbf{n} = (A, B, C)$.

Definición 1.7.3 El ángulo formado por dos planos[a], es el ángulo formado por sus vectores normales.

[a] También se le llama ángulo diedro.

■ **Ejemplo 1.51** Deduzca una fórmula para calcular la distancia entre dos planos paralelos en forma cartesiana. ■

Resolución

Sean P_1 y P_2 planos paralelos, de acuerdo a la última observación, sus ecuaciones son

$$P_1 : \ Ax+By+Cz = D_1 \quad \text{y} \quad P_1 : \ Ax+By+Cz = D_1$$

donde $\mathbf{n} = (A,B,C)$ es el vector normal de ambos planos. Para calcular la distancia del plano P_1 al plano P_2, empezamos tomando un punto $\mathbf{q} = (x^*, y^*, z^*) \in P_1$, esto es,

$$Ax^* + By^* + Cz^* = D_1, \ \text{donde } \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle = Ax^* + By^* + Cz^*$$

Según (1.54), la distancia del punto $\mathbf{q}$ al plano P_2 es

$$d(P_1, P_2) = \frac{|\langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Por lo tanto, la distancia entre los planos paralelos P_1 y P_2 es

$$d(P_1, P_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{1.56}$$

■ **Ejemplo 1.52** Las caras opuestas de un cubo se encuentran en los planos $P_1 : \ 2x - 6y - 9z = 5$ y $P_2 : \ -2x + 6y + 9z = 17$, calcule su volumen. ■

Resolución

Para calcular el volumen basta con saber la longitud l de uno de sus lados. Como tiene dos de sus caras opuestas en los planos P_1 y P_2, entonces la longitud l será la distancia entre dichos planos. Antes tenga en cuenta que $P_2 : 2x - 6y - 9z = -17$. Para aplicar (1.56) observamos que $D_1 = 5$ y $D_2 = -17$, luego

$$l = d(P_1, P_2) = \frac{|5 - (-17)|}{\sqrt{(2)^2 + (-6)^2 + (-9)^2}} = 2$$

Con esto el volumen del cubo es $V = 2^3 = 8$.

■ **Ejemplo 1.53** Obtenga el plano que pasa por el punto $\mathbf{p}_0 = (1, 2, -3)$ y es paralelo al plano cuya ecuación es $3x - y + 2z = 4$.

Resolución

Por dato nos dan el plano

$$P_1 : \ 3x - y + 2z = 4$$

El vector normal al plano P_1, es el vector $\mathbf{n}_1 = (3, -1, 2)$. Sea P el plano que pasa por el punto $\mathbf{p}_0$, puesto que P debe ser paralelo al plano P_1, entonces sus normales deben ser paralelas[11]. Si $\mathbf{n}$ es la normal del plano P, entonces como nos interesa sólo la dirección, podemos escoger $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = (3,-1,2)$. luego el plano P está dado por

$$P = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = 0\}$$

reemplazando

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle (x-1, y-2, z+3), (3,-1,2) \rangle = 0\}$$

Los dos planos paralelos aparecen en la figura 1.39. ■

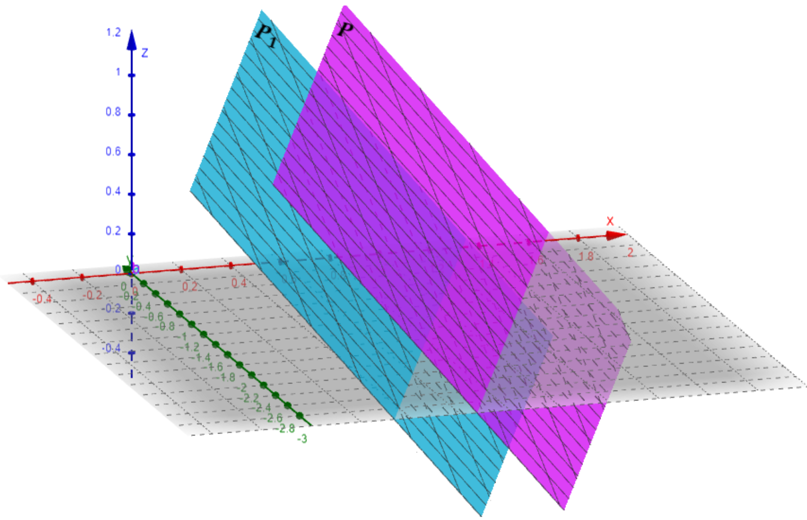

Figura 1.39:

■ **Ejemplo 1.54** Determine el ángulo que forman dos planos cuyas ecuaciones cartesianas son $x+y=1$ y $y+z=2$.

Resolución

Por dato nos dan los planos $P_1 : \ x+y=1$ y $P_2 : \ y+z=2$ (ver figura 1.40) El vector normal del plano P_1 es $\mathbf{n}_1 = (1,1,0)$, mientras que el vector normal de P_2 es el vector $\mathbf{n}_2 = (0,1,1)$, luego el ángulo entre los planos P_1 y P_2 es el ángulo entre sus vectores normales, es decir

$$\sphericalangle(P_1, P_2) = \sphericalangle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \theta$$

[11] En este caso sólo nos interesa la dirección, así pues, puede haber infinitas normales, pero todas ellas son paralelas y están en una misma dirección.

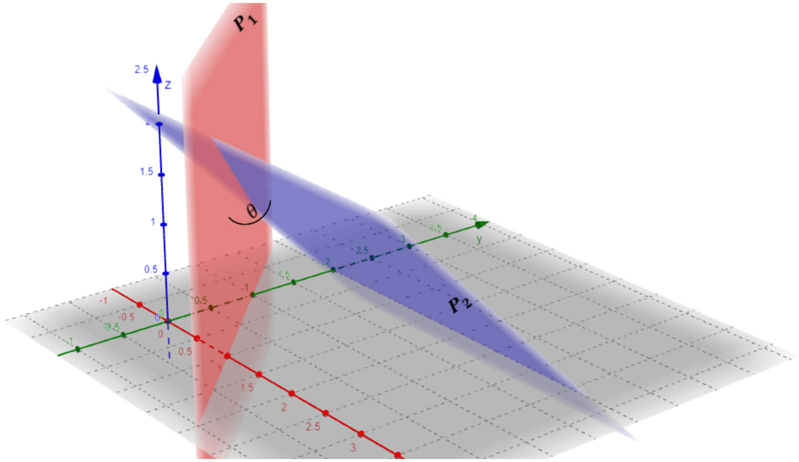

Figura 1.40:

Con esta información

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\rangle}{\|\mathbf{n}_1\|\,\|\mathbf{n}_2\|} = \frac{\langle (1,1,0),(0,1,1)\rangle}{\|(1,1,0)\|\,\|(0,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, de donde $\theta = \frac{\pi}{3}$. ■

■ **Ejemplo 1.55** Obtenga la recta que contiene el punto $(2,1,-3)$ y es ortogonal al plano determinado por la ecuación $4x-3y+z=5$.

Resolución

Sea L la recta que pasa por el punto $\mathbf{p}_0 = (2,1,-3)$ y es ortogonal al plano $P:\ 4x-3y+z=5$. El vector normal al plano es $\mathbf{n} = (4,-3,1)$. Como L es ortogonal a P, entonces L es paralelo a $\mathbf{n}$, lo que significa que L es generado por el vector $\mathbf{n}$. Luego la ecuación de la recta está dada por

$$L:\ \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{n},\ \ t\in\mathbb{R}$$

reemplazando

$$L:\ (x,y,z) = (2+4t, 1-3t, -3+t),\ \ t\in\mathbb{R}$$

■

■ **Ejemplo 1.56** Considere los planos $P_1:\ \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}_0, \mathbf{u}\rangle = 0$ y $P_2:\ \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}_0, \mathbf{v}\rangle = 0$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes[12]. Sea $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

[12]Que dos vectores sean linealmente independientes equivale a que sean no paralelos.

1. Verifique que la recta $L: \ \mathbf{p} = \mathbf{p}_o + t\mathbf{w}$, $t \in \mathbb{R}$ está contenida en ambos planos.
2. Probar que si $\mathbf{p}$ es un punto que pertenece a ambos planos, entonces $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t_0\mathbf{w}$.

Resolución

1. Sea $\mathbf{p}$ un punto cualquiera de la recta, entonces $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{w}$, para algún $t \in \mathbb{R}$.
   Si reemplazamos $\mathbf{p}$ en la ecuación de P_1 se tiene:
   $$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{u} \rangle = \langle (\mathbf{p}_o + t\mathbf{w}) - \mathbf{p}_0, \mathbf{u} \rangle = t\underbrace{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle}_{0} = 0,$$
   luego $\mathbf{p} \in P_1$.
   Ahora si reemplazamos $\mathbf{p}$ en la ecuación de P_2 se tiene:
   $$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{v} \rangle = \langle (\mathbf{p}_0 + t\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle = t\underbrace{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}_{0} = 0,$$
   luego $\mathbf{p} \in P_2$. Se a probado de esta manera que $\mathbf{p} \in P_1$ y $\mathbf{p} \in P_2$. Por lo tanto $L \subset P_1$ y $L \subset P_2$.
2. De las ecuaciones de los planos P_1 y P_2 es fácil darse cuenta que $\mathbf{p}_0 \in P_1$ y $\mathbf{p}_0 \in P_2$. Asimismo, por dato se tiene que $\mathbf{p}$ está en P_1 y P_2. Si tomamos el vector $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$, entonces $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, de donde se obtiene que $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ es paralelo al vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, es decir; existe una constante t_0 tal que
   $$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = t_0\mathbf{w}$$
   de donde $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t_0\mathbf{w}$.

■

Actividad de transferencia 1

1. Pruebe que el segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.
2. Un río de 5 km de ancho corre a una velocidad de 4 km/h. Halle la dirección y la velocidad a la que debe viajar una motora para que cruce el río en 20 minutos y termine en el punto de la otra orilla situado justamente enfrente del de partida.
3. Encuentre los números x, y, z en las siguientes ecuaciones:
   a) $(x - y - 2)\mathbf{i} + (2x + 3y - 12)\mathbf{j} = 0$
   b) $(x^2 + y^2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} = 16\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j}$.
4. Encuentre el vector unitario $\mathbf{u}$, el cual forma un ángulo de 60^o con el semieje positivo X.

5. Encuentre un vector unitario $\mathbf{u}$, el cual tenga la misma dirección que $-4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ y sentido opuesto.
6. Halle el extremo del vector $(5,-7)$ si su origen es $(-4,8)$.
7. Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
8. Sean x_0, y_0 constantes tales que $\mathbf{u}_0 = (x_0, y_0)$ y $\mathbf{u} = (x, y)$. Describa el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas verifiquen:
   a) $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_0\| = 4$
   b) $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_0\| \leq 3$.
9. Las fuerzas $\mathbf{F}_1 = (-3,4)$ y $\mathbf{F}_2 = (-3,-8)$ actúan sobre un cuerpo. Determine la fuerza que hay que aplicar al cuerpo para que se quede en reposo.
10. Se dispara un cohete formando un ángulo de 60^o con la horizontal, a una velocidad de $80m/seg$. Halle la componente horizontal y vertical del vector velocidad del cohete.
11. Un ave vuela desde su nido 8 km en una dirección al norte del este, donde se detiene para descansar sobre un árbol. Después vuela 12 km en dirección sureste, y se detiene sobre un poste de la telefónica. Sitúe un sistema coordenado XY de modo que el origen sea el nido del ave, el eje X señale el este y el eje Y señale al norte. ¿En qué punto se localiza el árbol? ¿En qué punto se localiza el poste de la telefónica?
12. Demuestre que las medianas de un triángulo se cortan en un punto, el cual es llamado *baricentro*.
13. Halle los números x, y, z para los cuales se verifica que

$$x(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})+y(\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})-z(\mathbf{i}-\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}+3\mathbf{k}$$

14. Halle el número a para que los vectores $(5,-2,1)$ y $(2,a,-8a)$ sean ortogonales.
15. Halle los ángulos que forma el vector $(1,2,-1)$ con cada uno de los ejes coordenados (Los cosenos de esos ángulos se llaman cosenos directores)
16. Halle la componente escalar de la fuerza $\mathbf{F} = (-4,5,3)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = (2,-1,1)$.
17. Calcule el área del paralelogramo determinado por los vectores:
    a) $(0,4,3)$ y $(-1,2,-1)$
    b) $(4,-1,3)$ y $(2,-3,1)$
18. En los siguientes problemas calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores:
    a) $\mathbf{u} = (1,0,1)$, $\mathbf{v} = (3,-1,5)$ y $\mathbf{w} = (5,0,1)$.
    b) $\mathbf{u} = (2,-1,-3)$, $\mathbf{v} = (3,2,1)$ y $\mathbf{w} = (0,1,-1)$.
19. Responda las siguientes interrogantes justificando su respuesta
    a) Si $\mathbf{u}\times\mathbf{w} = \mathbf{v}\times\mathbf{w}$. ¿Se deduce que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$?
    b) Si $\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$. ¿Se deduce que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$?

c) Si $\mathbf{u}\times\mathbf{w}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ y $\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$. ¿Se deduce que $\mathbf{u}=\mathbf{v}$?

20. Demuestre que el área del triángulo cuyos vértices son (x_1,y_1), (x_2,y_2) y (x_3,y_3) es $\frac{D}{2}$, donde
$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$
21. Sean $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{w}$ y $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=0$. Demuestre que existen escalares r_1, r_2 tales que:
$$\mathbf{v}=r_2(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) \text{ y } \mathbf{u}=r_1(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$
22. Sea $\theta=\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$, con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Demuestre que:
$$\tan\theta=\frac{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}{\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}$$
23. Verifique que todo vector de $\mathbb{R}^2$ puede ser escrito como combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}=(-1,2)$, $\mathbf{v}=(3,-5)$, $\mathbf{w}=(-3,4)$. ¿Significa esto que el conjunto $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$?
24. Sean $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$. Demuestre que $|\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{v}\||\le\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.
25. Demuestre que si el conjunto $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_k\}$ es un conjunto ortogonal[13] de vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces $\|\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\cdots+\mathbf{u}_k\|^2=\|\mathbf{u}_1\|^2+\|\mathbf{u}_2\|^2+\cdots+\|\mathbf{u}_k\|^2$.
26. Sean $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$. Demuestre que: $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\in\mathbb{R}^+$ si, y solo si, $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|>\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.
27. Si cada pareja de vectores $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$, y $\|\mathbf{u}\|=1$, $\|\mathbf{v}\|=2$, $\|\mathbf{w}\|=3$. Calcule $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$.
28. Sea $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto ortogonal de vectores unitarios. Demuestre que el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ mide $\frac{\pi}{4}$. ¿Qué opinión daría usted si los vectores dados no fueran unitarios? ¿Qué ocurre geométricamente cuando $n=2$?
29. Sean los vectores no nulos $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ tales que $\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$. Demuestre que $\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})=\frac{\pi}{3}$. ¿Cuál es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$?, ¿Entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-\mathbf{v}$? Discuta geométricamente cuando $n=2$.
30. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $P(3,-1)$, $Q(-1,5)$ y $R(-5,3)$. Determinar los vértices del triángulo.
31. Sean $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ tres vectores tales que $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=0$. Demuestre que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{w}\times\mathbf{u}$.
32. Sean $\mathbf{u},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\in\mathbb{R}^3$, demuestre que:
$$\langle\mathbf{u},\mathbf{u}_1\times(\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3)\rangle=\langle\mathbf{u}\times\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3\rangle$$

[13] Se refiere, que sus elementos son entre si vectores ortogonales

33. Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $x = 3-5t$, $y = 6+4t$, $z = -3t$.
34. Verifique si las dos rectas $L_1 = \{x = 3t, y = 2t, z = t : t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(-3t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ se cortan en un punto.
35. Demuestre que la distancia d entre el punto $p = (x_1, y_1, z_1)$ y la recta $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z - 0 + ct$, está dada por

$$d = \frac{\|(a,b,c) \times (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)\|}{\|(a,b,c)\|}$$

36. Encuentre la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^4$ que pasa por el punto $p_0 = (2,0,0,4)$ y tiene al vector $\mathbf{v} = (-1,2,0,-5)$ por el vector paralelo.
37. Halle la ecuación del plano que pasa por el punto $p = (4,1,-1)$, si se sabe que los vectores $\mathbf{u} = (-2,1,2)$, $\mathbf{v} = (4,-5,2)$ son paralelos a el.
38. Halle la ecuación del plano que pasa por los puntos $p = (2,3,-2)$, $q = (-3,5,-4)$, si se sabe que el vector $\mathbf{u} = (5,-1,3)$ es paralelo a el.
39. Halle la ecuación del plano que pasa por el punto $p = (5,-2,3)$ y es paralelo al plano $4x - 5y + 2z = 6$.
40. Halle la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano $2x - 3y + 5z = 9$.
41. Demuestre que la ecuación de un plano que pasa por el punto $p = (x_0, y_0, z_0)$, tal que los vectores no colineales $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ son paralelos a él, se puede escribir como

$$\begin{vmatrix} x + x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

42. Habiendo verificado que los planos $2x + y - z = 4$, $4x + 2y - 2z = 7$ son paralelos, calcule la distancia entre ellos.
43. Suponga que los planos $A_1x + B_1y + c_1z = D_1$, $A_1x + B_2y + c_2z = D_2$ son paralelos. Obtenga una fórmula para calcular la distancia entre ellos.
44. Dos caras de un cubo se encuentran en los planos $3x - y + 2z = 8$, $3x - y + 2z = 12$. Calcule el volumen del cubo.

B

2. Superficies tridimensionales:

Hay varias maneras de enfocar una superficie en $\mathbb{R}^3$, ya sea como un conjunto, como una gráfica o como una aplicación.

2.1 Superficie como un conjunto

Aquí se enfoca una superficie como un conjunto de puntos, los cuales están sujetos a satisfacer una ecuación.

Definición 2.1.1 Una superficie S en el espacio $\mathbb{R}^3$ es:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ G(x,y,z) = 0\}$$

siempre que la ecuación $G(x,y,z) = 0$ tenga sentido[a].

[a] Más adelante veremos que esta es una superficie de nivel cero.

Definición 2.1.2 Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la gráfica de la función f es el conjunto

$$\mathbf{graf}(f) = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in \Omega\}$$

$S = \mathbf{graf}(f)$ es una superficie.

En la ecuación $G(x,y,z) = 0$ las variables x,y,z pueden estar dadas en forma implícita, o también, en forma explícita cuando cualquiera de ellas se puede despejar en función de las otras. Por ejemplo, si de la ecuación $G(x,y,z) = 0$ se puede despejar z en función de x e y, entonces esto se puede expresar como $z = f(x,y)$. Con esto, la superficie o parte de ella, es ahora la gráfica de la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y quedaría expresada así:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ z = f(x,y), (x,y) \in \Omega\} \subset S$$

Observación

No siempre la gráfica de f cubre toda la superficie S como veremos más adelante. Aquí, es importante destacar que

$$G(x,y,f(x,y)) = 0, \forall (x,y) \in \Omega$$

Para una mejor comprensión veamos el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 2.1** Suponga que una superficie S está dada por la función

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

es decir,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ G(x,y,z) = 0\}$$

Aquí, es fácil notar que G está definida en todo $\mathbb{R}^3$, sin embargo, $G(x,y,z) = 0$ solo es satisfecha por un conjunto de puntos que en este caso están en la superficie S. Las variables x,y,z están definidas implícitamente por $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, pero es posible despejar z en función de x e y mediante,

$$z = f_1(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \text{y} \quad z = f_2(x,y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

El dominio de f_1 y f_2 es el círculo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + ^2 \leq 4\}$ y las superficies

$$S_1 : z = f_1(x,y) \quad \text{y} \quad S_2 : z = f_2(x,y)$$

son subconjuntos propios de S, pues $z \geq 0$ en S_1 y $z \leq 0$ en S_2. ■

■ **Ejemplo 2.2** Si $G(x,y,z) = Ax + By + Cz + D$ con $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, se tiene que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ G(x,y,z) = 0\}$, o también, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ Ax + By + Cz + D = 0\}$ es un plano cuya normal es el vector $\mathbf{n} = (A,B,C)$. Si $C \neq 0$, es posible despejar z y se tendría

$$z = f(x,y) = -\frac{D}{C} - \frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y$$

El dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$ y en este caso sí se tiene que $S : \ z = f(x,y)$. ■

■ **Ejemplo 2.3** La superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2\}$ es la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$. ■

Cilindros

Definición 2.1.3 Sea $\mathscr{C}$ una curva plana (osea contenida en un plano) y L una recta que corta a C y no es paralela a dicho plano. El conjunto de todas los puntos en las rectas que son paralelas a L y que cortan a C se llama **cilindro**. Observe figura 2.1

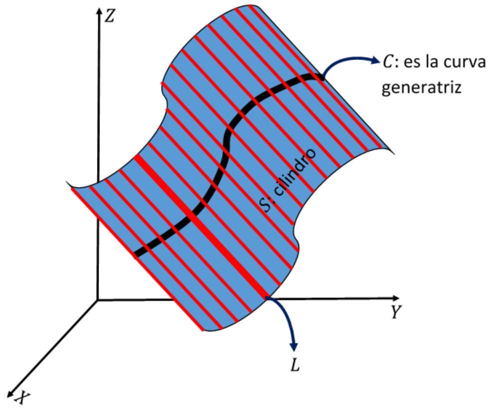

Figura 2.1:

A C se le llama curva generatriz. Los cilindros con los cuales estamos más familiarizados, son los cilindros circulares rectos. Entre otros se tiene los cilindros parabólicos, hiperbólicos y elípticos que se muestran en los siguientes ejemplos.

■ **Ejemplo 2.4** Un cilindro circular recto, es aquel cuya curva generatriz C es una circunferencia y L es una recta perpendicular a C. Veamos: ■

1. El cilindro $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$ que se muestra en la figura 2.2 tiene como curva generatriz a la circunferencia C. Si esta curva lo vemos en el plano XY olvidándonos del eje Z, entonces

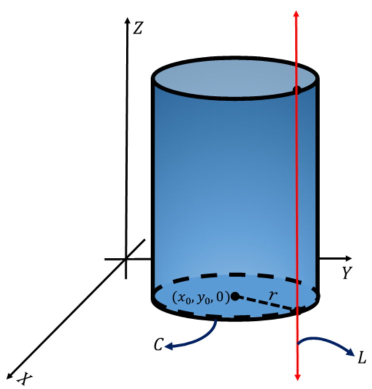

Figura 2.2:

tendríamos que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$[1]

2. Los cilindros circulares rectos, no necesariamente son paralelos al eje Z, en general pueden ser paralelos a cualquier recta. El cilindro $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x-9)^2 + (z-3)^2 = 4\}$ que se muestra en la figura 2.3 es paralelo al eje Y y la curva generatriz es una circunferencia en el plano XZ, cuando $y = 0$.

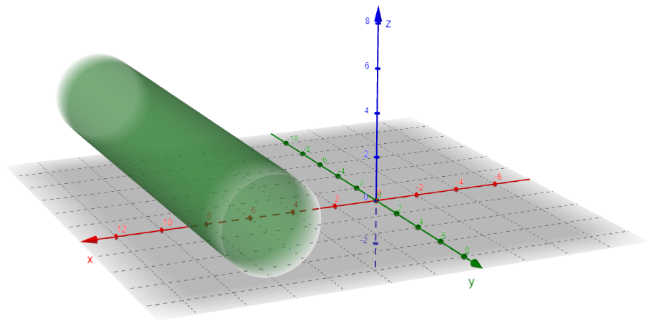

Figura 2.3:

■ **Ejemplo 2.5** Un cilindro elíptico recto es aquel cuya curva generatriz $\mathscr{C}$ es una elipse y la recta L es ortogonal a la elipse. Veamos ■

1. El cilindro $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(z-5)^2}{4} = 1\}$ que se muestra en la figura 2.4 tiene su directriz paralela al eje Y.

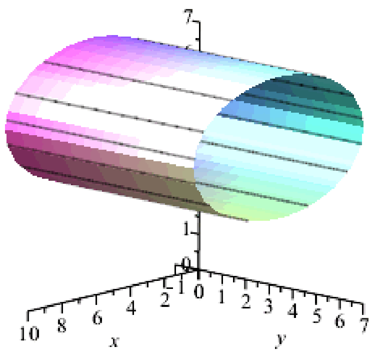

Figura 2.4:

[1] Si tomamos esta circunferencia como en $\mathbb{R}^3$ y en el plano XY, es correcto escribir $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2,\ y = 0\}$.

2. El cilindro $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1\right\}$ que se muestra en la figura 2.5 tiene su directriz paralela al eje Z.

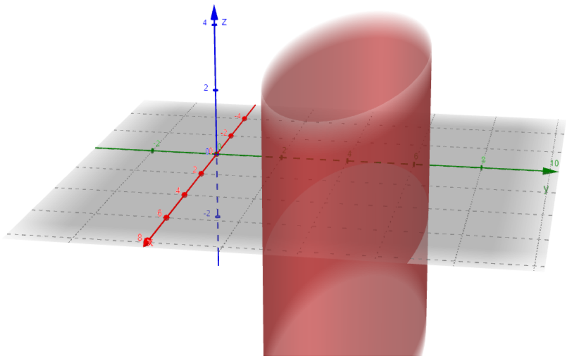

Figura 2.5:

■ **Ejemplo 2.6** También hay cilindros hiperbólicos rectos, donde la curva generatriz $\mathscr{C}$ es una hipérbola. en la figura 2.6 mostramos el cilindro hipérbólico $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1\right\}$, cuya directriz L es paralela al eje Z. ■

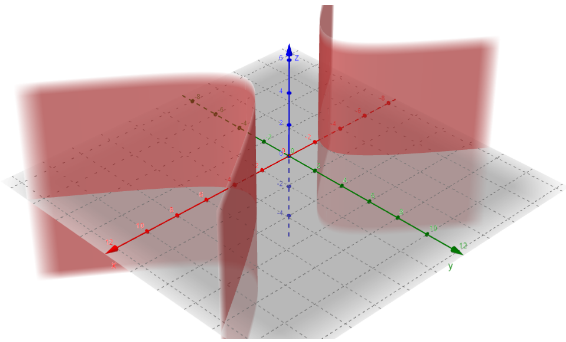

Figura 2.6:

■ **Ejemplo 2.7** Por último, también hay cilindros parabólicos. En la figura 2.7 se muestra dos cilindros parabólicos. El de la izquierda S_1 y derecha S_2, son respectivamente,

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = \frac{x^2}{2} + 2\right\} \text{ y } S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \frac{x^2}{3} + 2\right\}$$

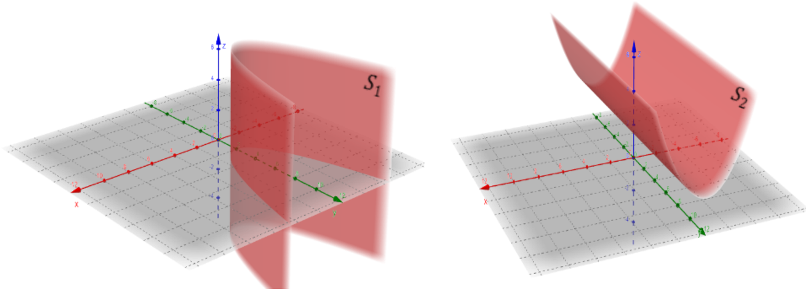

Figura 2.7:

■

El estudiante se habrá dado cuenta que construir estos tipos de cilindros es sencillo, basta tomar la cónica que ya conocen y por ella hacer pasar rectas ortogonales. Dependiendo de la cónica en que plano se dibuje, esta se irá hacia arriba con el eje Z o estará echada con su directriz ya sea apuntando en la dirección del eje X o Y.

Otro detalle que el estudiante habrá notado hasta aquí, es que los conjuntos

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ g_1(x,y) = 0\} \ \text{o} \ S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ g_2(x,z) = 0\}$$

o

$$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ g_3(y,z) = 0\}$$

son cilindros. En caso de S_1 su directriz es paralela al eje Z, en caso de S_2 su directriz es paralela al eje Y y por último para S_3 su directriz es paralela al eje X.

■ **Ejemplo 2.8** La superficie $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 2\,\mathrm{sen}\,x + 1\right\}$ que se muestra en la figura 2.8 es un cilindro. En este caso la directriz del cilin-

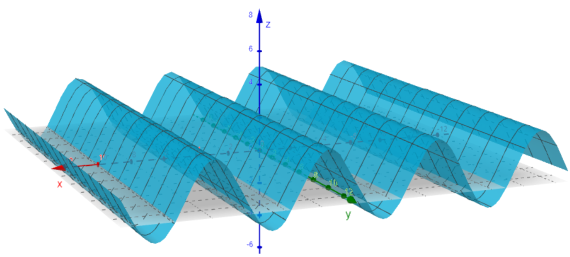

Figura 2.8:

dro es paralelo al eje Y. ■

A continuación veremos otro tipo de superficies, definidas por ecuaciones cuadráticas en las cuales intervienen las tres variables x, y y z.

Superficies cuádricas

Definición 2.1.4 La forma general de una **superficie cuádrica** S es:

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0\}$$

Pero evitaremos complicaciones y solamente trabajaremos con superficies de la forma:

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ Ax^2+By^2+Cz^2+Gx+Hy+Iz+J=0\} \qquad (2.1)$$

Si en la ecuación se tiene que $G=H=I=0$, entonces nos quedaría una expresión mucho más simple; y la superficie estaría dada por

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ Ax^2+By^2+Cz^2+J=0\} \qquad (2.2)$$

Esta superficie de (2.2),se llama superficie cuádrica central, y se caracteriza por que es simétrica respecto de todos los ejes y octantes. Lo importante aquí es que cualquier superficie cuádrica (2.1) mediante traslación de coordenadas depués de haber completado cuadrados, se transforma en una de la forma (2.2). Para determinar la representación geométrica en el espacio de una superficie (2.2), la técnica es analizar sus secciones transversales respecto de cualquiera de los ejes y sus intersecciones con ellos. Entre estas superficies tenemos:

1. **La esfera** de centro en el origen y radio $a>0$, cuya ecuación es:

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

   a) Si usted hace $x=0$, otiene la circunferencia $y^2+z^2=a^2$ en el plano YZ.
   b) Si usted hace $y=0$, otiene la circunferencia $x^2+z^2=a^2$ en el plano XZ.
   c) Si usted hace $z=0$, otiene la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ en el plano XY.

   En cualquiera de los casos, la esfera se obtiene haciendo rotar la circunferencia alrededor de uno de sus diámetros.

   ■ **Ejemplo 2.9** La esfera $S:\ x^2+y^2+z^2=25$ tiene su centro en el origen y al interceptarse con cada uno de los planos coordenados resulta una circunferencia. Ver figura 2.9. ■

   En general, una esfera de radio r con centro en el punto $O(a,b,c)$ tiene por ecuación a:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \qquad (2.3)$$

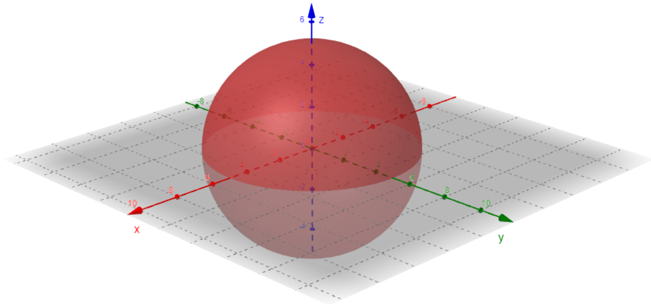

Figura 2.9:

■ **Ejemplo 2.10** La esfera con ecuación

$$(x-4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36,$$

tiene centro en el punto $O(4,-1,3)$ y su radio es $r=6$. Ver figura 2.10

■

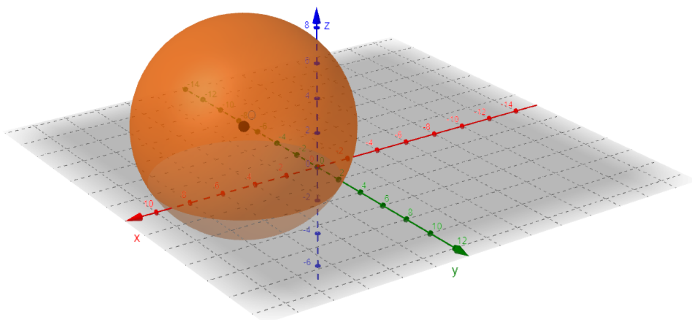

Figura 2.10:

Si en la esfera de ecuación (2.3) despejamos una de las variables, se obtiene una semiesfera.

■ **Ejemplo 2.11** De la esfera $(x-4)^2+y^2+(z-3)^2=36$, si despejamos la variable z se obtiene las superficies

$$S_1:\ z=3+\sqrt{36-(x-4)^2-y^2} \quad \text{y} \quad S_2:\ z=3-\sqrt{36-(x-4)^2-y^2}$$

Cada una de ellas es una semiesfera de radio $r=5$ y centro en $O(4,0,3)$. Se ilustra en la figura 2.11. ■

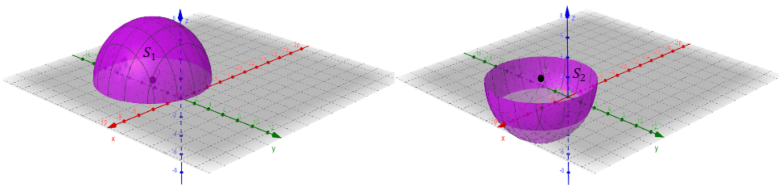

Figura 2.11:

2. **El elipsoide** con centro en el origen cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

a) Si usted hace $x=0$, obtiene la elipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ en el plano YZ.

b) Si usted hace $y=0$, obtiene la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ en el plano xZ.

c) Si usted hace $z=0$, obtiene la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en el plano YZ.

Si el elipsoide tiene centro en el punto $O(h,k,l)$, entonces su ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1 \tag{2.4}$$

■ **Ejemplo 2.12** El elipsoide $\frac{(x+1)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(z-1)^2}{9}=1$ tiene su centro en el punto $O(-1,2,1)$. Ver figura 2.12. ■

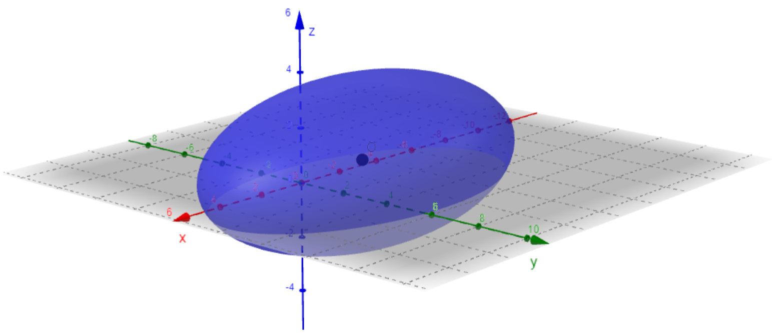

Figura 2.12:

Aquí también si despejamos cualquiera de las variables, se obtiene un semielipsoide.

■ **Ejemplo 2.13** Si del elipsoide $\frac{(x-2)^2}{64}+\frac{y^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{9}=1$ se despeja la variable z, entonces se obtienen los elipsoides (ver figura 2.13)

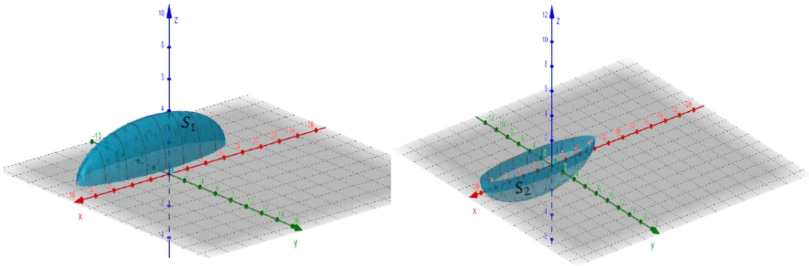

Figura 2.13:

$$S_1: z=1+3\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{64}-\frac{y^2}{4}} \text{ y } S_2: z=1-3\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{64}-\frac{y^2}{4}}$$

■

3. **El hiperboloide de una hoja** con centro en el origen cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

   a) Si usted hace $x=0$, obtiene la hipérbola $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ en el plano YZ.
   b) Si usted hace $y=0$, obtiene la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ en el plano xZ.
   c) Si usted hace $z=0$, obtiene la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en el plano YZ.

■ **Ejemplo 2.14** Considere el hiperboloide $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=1$. Su representación geométrica es la figura 2.14. Tenga en cuenta que la superficie está separada, no contiene al origen. ■

4. **El hiperboloide de dos hojas** con centro en el origen cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

   a) Si usted hace $x=0$, no se obtiene curva, pues $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$, esto es una contradicción y significa que la superficie nunca intercepta al plano YZ.
   b) Si usted hace $y=0$, obtiene la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ en el plano xZ.

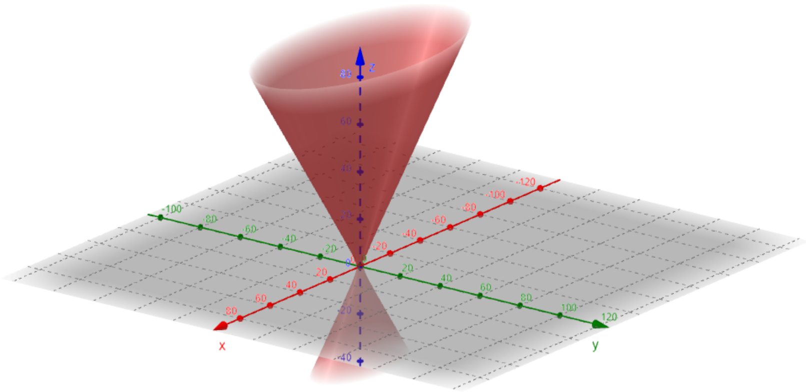

Figura 2.14:

c) Si usted hace $z=0$, obtiene la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ en el plano YZ.

■ **Ejemplo 2.15** En el hiperboloide $\frac{x^2}{9}-y^2-\frac{z^2}{4}=1$, si hacemos $x=0$, entonces $y^2+\frac{z^2}{4}=-1$, que es un absurdo. Por lo tanto, la superficie no contiene al origen y allí, ambas hojas están separadas. Su representación geométrica está en la figura 2.15 ■

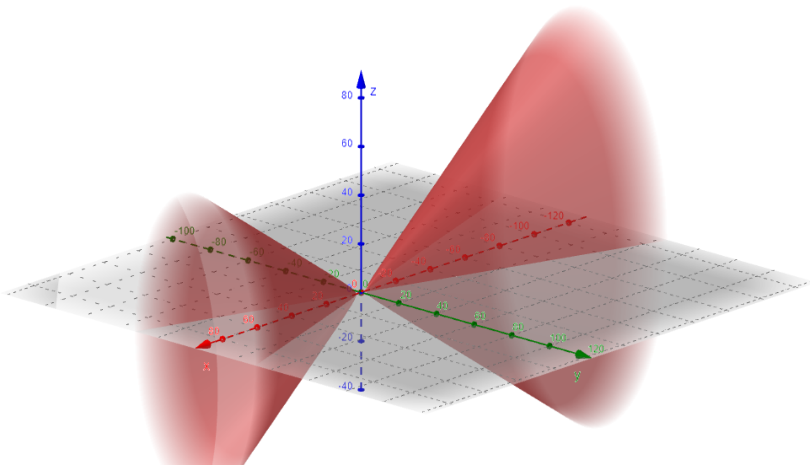

Figura 2.15:

5. **El cono elíptico** con centro en el origen cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

   a) Si usted hace $x=0$, obtiene $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, que al factorizar le da dos rectas que se interceptan (origen) en el plano YZ.
   b) Si usted hace $y=0$, obtiene $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, que al factorizar le da dos rectas que se interceptan (origen) en el plano xZ.
   c) Si usted hace $z=0$, obtiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, que es el punto $(0,0)$.

■ **Ejemplo 2.16** La superficie $S: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=0$ es un cono elíptico que pasa por el origen. Su representanción geométrica está en la figura 2.16. ■

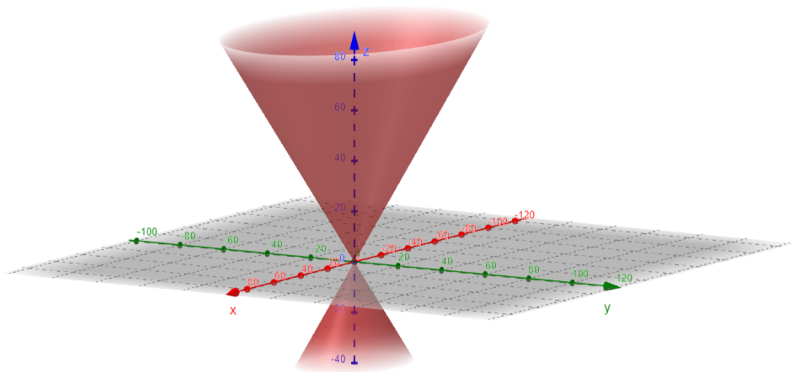

Figura 2.16:

6. **El paraboloide elíptico** con centro en el origen cuya ecuación es

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

   a) Si usted hace $x=0$, obtiene la parábola $z=\frac{y^2}{b^2}$ en el plano YZ.
   b) Si usted hace $y=0$, obtiene la parábola $z=\frac{x^2}{a^2}$ en el plano xZ.
   c) Si usted hace $z=0$, obtiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, que es el punto $(0,0)$.

■ **Ejemplo 2.17** El paraboloide elíptico $z=\frac{x^2}{4}+y^2$ se observa en la figura 2.17. ■

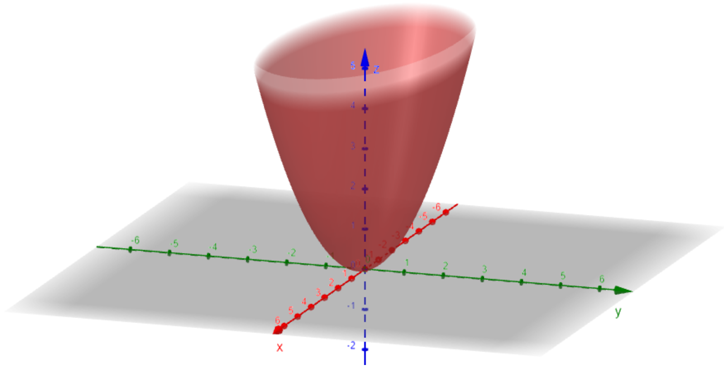

Figura 2.17:

7. **El paraboloide hiperbólico o silla de montar** con centro en el origen cuya ecuación es
$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

   a) Si usted hace $x = 0$, obtiene la parábola $z = \frac{y^2}{b^2}$ en el plano YZ.

   b) Si usted hace $y = 0$, obtiene la parábola $z = -\frac{x^2}{a^2}$ en el plano xZ.

   c) Si usted hace $z = 0$, obtiene $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, que son dos rectas en el plano XY.

■ **Ejemplo 2.18** El paraboloide hiperbólico $z = \frac{x^2}{4} - y^2$ se observa en la figura 2.18. ■

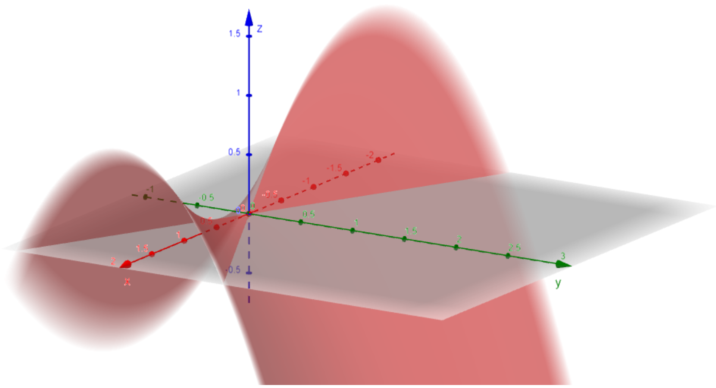

Figura 2.18:

2.2 Superficie paramétrica

Definición 2.2.1 Considere la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donde

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)), \quad (x,y) \in \Omega$$

la imagen de f

$$S = \mathbf{Im}(f) = \{f(x,y) \ : \ (x,y) \in \Omega\}$$

es una superficie, llamada también superficie paramétrica de f.

Conociendo $f = (f_1, f_2, f_3)$, muchas veces escribimos la superficie como

$$S = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \ : \ u = f_1(x,y), v = f_2(x,y), w = f_3(x,y)\right\}$$

Podemos entender la superficie como la aplicación f que toma una región Ω del plano, la estira, la dobla o tuerce, para formar un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que llamamos superficie (ver figura 2.19).

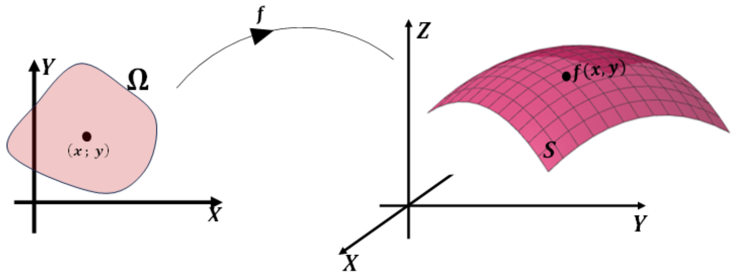

Figura 2.19:

Observación

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Hemos visto que una superficie S puede construirse a partir de la gráfica de f, es decir,

$$S: \ z = f(x,y)$$

Sin embargo, si a partir de f definimos la función $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$, la superficie queda expresada también en forma paramétrica, así se tiene

$$S = \{F(x,y) \ : \ (x,y) \in \Omega\}$$

Observación

Un plano también puede ser expresado en forma paramétrica. Si tomamos el plano $P:\ Ax+By+Cz=D$, $C\neq 0$, entonces despejando z se tiene $z=f(x,y)=\frac{D}{C}-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y$. Con esto se construye la función

$$F(x,y)=\left(x,y,\frac{D}{C}-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y\right),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad (2.5)$$

y el plano queda definido paramétricamente por $F(x,y)$. Ver figura 2.20

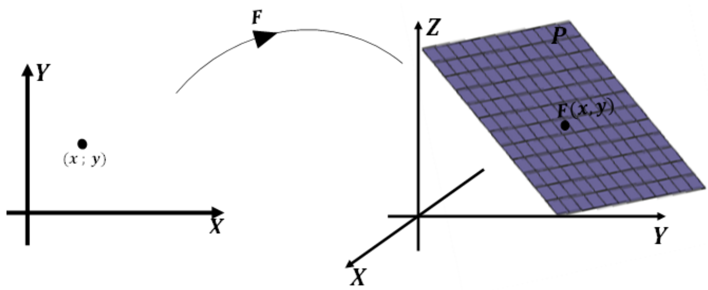

Figura 2.20:

Con lo expuesto en la observación la aplicación en (2.5) define un plano.

■ **Ejemplo 2.19** Sea $F(x,y)=(x,y,2-\frac{x}{2}-\frac{y}{2})$. Esta aplicación define el plano P que se muestra en la figura 2.21. Como gráfica sería $P:\ z=2-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}$. ■

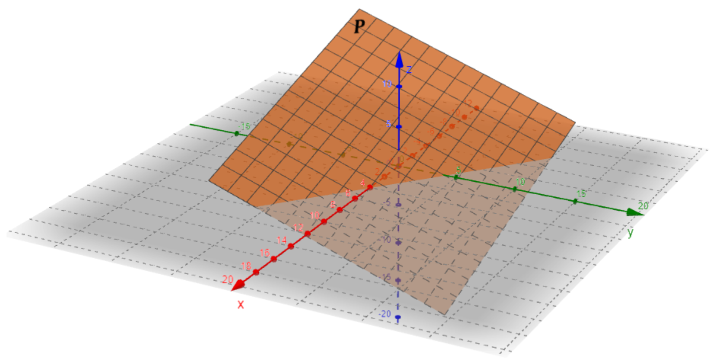

Figura 2.21:

Observación

En general, cualquier aplicación de la forma

$$F(x,y) = (a_1x+by_1+c_1z+d_1, a_2x+by_2+c_2z+d_2, a_3x+by_3+c_3z+d_3), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

es un plano en forma paramétrica, siempre que cualquiera de dos componentes del lado derecho no coincidan. En caso todas sean iguales, lo que se obtiene es una línea recta en $\mathbb{R}^3$.

En caso una de las componentes en el lado derecho fuera constante y las otras dos que no lo son, coinciden, entonces la recta es paralela a uno de los planos coordenados.

■ **Ejemplo 2.20** Sea $F(x,y) = (2x-y, x+y, 1-x+2y)$. Si hacemos $\begin{cases} u = 2x-y \\ v = x+y \\ w = 1-x+2y \end{cases}$,

se tiene: $\begin{cases} x = \frac{u}{3}+\frac{v}{3} \\ y = \frac{2v}{3}-\frac{u}{3} \end{cases}$.

Con esto $w = 1+v-u$ y se tiene de manera equivalente $F(u,v) = (u, v, 1+v-u)$, que es la aplicación que define un plano P en forma paramétrica. La representación del plano está en la figura 2.22. ■

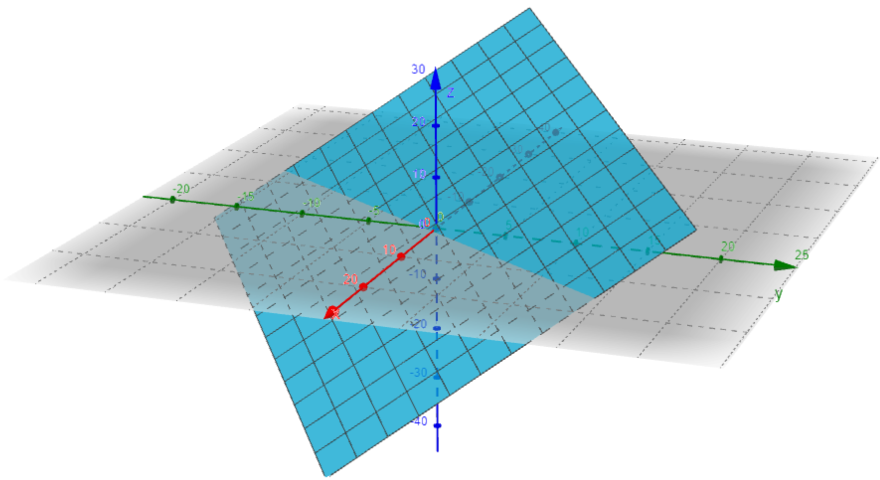

Figura 2.22:

A continuación, ilustramos diferentes aplicaciones con su respectiva superficie

1. $S:\ F(x,y) = (2\cos y, 2\operatorname{sen} y, x)$, ver figura 2.23. Esto es un cilindro.

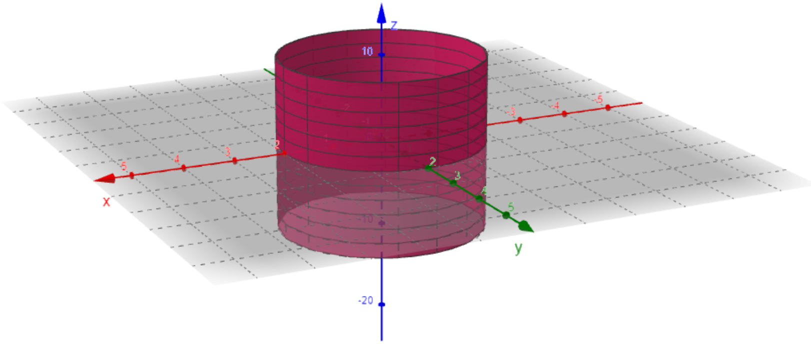

Figura 2.23:

2. Sean a y b números reales tales que $ab > 0$; un paraboloide elíptico (cuando $a \neq b$) en forma paramétrica está dado por la aplicación $F(x,y) = (x,y,c + ax^2 + by^2)$.

   Por ejemplo, sea $S: \; F(x,y) = \left(x,y,2+2x^2+3y^2\right)$. La representación geométrica de este paraboloide está en la figura 2.24. Como se observa, cada plano que intercepta a la superficie lo hace en una elipse.

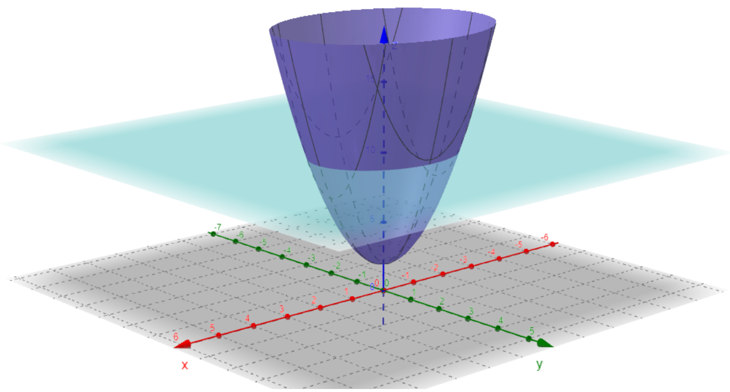

Figura 2.24:

   En el caso de que $a = b$, el paraboloide es circular, en el sentido que cada plano horizontal que corta a la superficie, lo hace en una circunferencia.

   Por ejemplo, la superficie $S: \; F(x,y) = \left(x,y,6-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)$ es un paraboloide con sección transversal circular, su representación geométrica está en la figura 2.25.

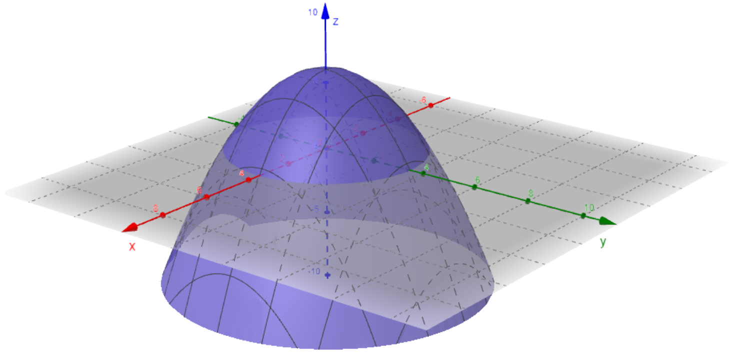

Figura 2.25:

3. Sea r un número positivo, con la función $F(x,y) = (x, y, k \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$ se parametriza una semiesfera. En el caso de signo positivo en la tercera componente, corresponde a una semiesfera superior, mientras que el signo negativo se corresponde con la semiesfera inferior.

   Sea $F(x,y) = \left(x, y, 3 + \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right)$, su representación geométrica es la semiesfera que se muestra en la figura 2.26.

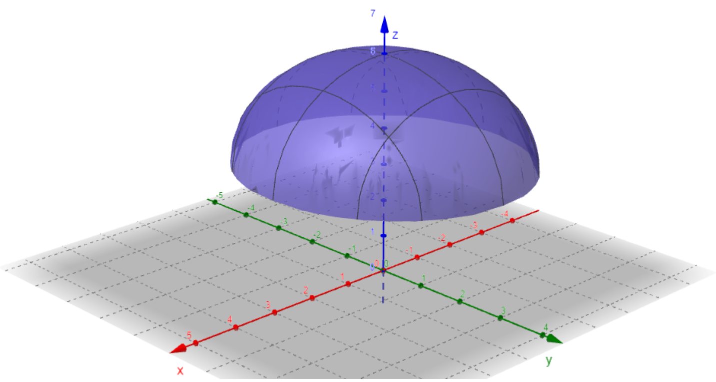

Figura 2.26:

Actividad de transferencia 2

1. Represente geométricamente la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : G(x,y,z) = 0\}$, donde
   a) $G(x,y,z) = 4x^2 + 36y^2 - 144$
   b) $G(x,y,z) = y^2 + z^2 - 16$
   c) $G(x,y,z) = 3x + 2z - 10$
   d) $G(x,y,z) = z^2 - 3y$
   e) $G(x,y,z) = x^2 + y^2 - 8x + 4y + 13$
   f) $G(x,y,z) = 2x^2 - 32z^2$
   g) $G(x,y,z) = 4x^2 + 9y^2 + 49z^2 - 1764$
   h) $G(x,y,z) = 9x^2 - y^2 + 9z^2 - 9$
   i) $G(x,y,z) = -x^2 + y^2 + z^2$
   j) $G(x,y,z) = y - e^{2x}$
   k) $G(x,y,z) = x^2 - z^2 + y$
   l) $G(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z^2 + 4$
   m) $G(x,y,z) = 9x^2 + 4z^2 - 36y$
   n) $G(x,y,z) = 9x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 225$
   ñ) $G(x,y,z) = y - \cos x$
   o) $G(x,y,z) = z - \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
   p) $G(x,y,z) = z - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$
2. Si la curva $z = x^2$ en el plano XZ, gira en torno del eje Z, la superficie resultante tiene la ecuación $z = x^2 + y^2$; obtenida como resultado de reemplazar x por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Si $y = 2x^2$ en el plano XY se gira en torno del eje Y, ¿cuál es la ecuación de la superficie resultante?
3. Determine la ecuación de la superficie que se obtiene al girar la curva $z = 2y$ en el plano YZ, alrededor del eje Z.
4. Determine la ecuación de la superficie que se obtiene al girar la curva $4x^2 + 3y^2 = 12$ en el plano XY, alrededor del eje Y.
5. Determine la ecuación de la superficie que se obtiene al girar la curva $4x^2 - 3y^2 = 12$ en el plano XY, alrededor del eje X.
6. Demuestre que la proyección en el plano XZ de la curva que resulta de la intersección de las superficies $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 + z^2$ es una elipse, de la cual debe determinar sus diámetros mayor y menor.
7. Esboce la representación geométrica de las siguientes superficies dadas en forma paramétrica (se sugiere que corrobore con el Geogebra)
   a) $S : F(x,y) = (x, y, 2x - y + 3)$
   b) $S : F(x,y) = (x - 1, x + y, x + y)$
   c) $S : F(x,y) = \left(x, y, x^2 + 4y^2\right)$
   d) $S : F(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$
   e) $S : F(x,y) = \left(x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$
   f) $S : F(x,y) = \left(x, y, x^2 - y^2\right)$

B

Bibliografía

[1] Carlos Daniel Prado Pérez *et al.*, *Cálculo Diferencial Para Ingeniería*, Pearson Prentice Hall, México, 2006.

[2] Charles H. Lehmann, *Geometría Analítica*, Limusa, México, 1997.

[3] Claudio pita Ruiz, *Cálculo Vectorial*, Prentice Hall, México, 1994.

[4] Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales*, Thomson, México, 2006.

[5] Eduardo Espinoza Ramos, *Análisis Matemático III*, Servicios Gráficos J.J, Lima, 2002.

[6] Eduardo Espinoza Ramos, *Vectores y Aplicaciones - Matrices Determinantes, Sistemas de Ecuaciones Lineales*, Servicios Gráficos J.J, Lima, 1999.

[7] Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil, Luis Tristán Vega, *Cálculo Infinitesimal en Varias Variables*, Thonsom, Madrid, 2005.

[8] Gareth Williams, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, México, 2001.

[9] George B. Thomas, *Cálculo*, Pearson Addison Wesley, México, 2006.

[10] James Stewart, *Cálculo*, Thomson, México, 1999.

[11] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Pearson Addison Wesley, Madrid, 2004.

[12] Murray R. Spiegel, *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, Prentice Hall, México,1983.

[13] Norman B. Haaser, Joseph P. LaSalle, Joseph A. Sullivan, *Análisis Matemático 2*, Trillas, México,1979.

[14] Robert C. Wrede, Murray Spiegel, *Cálculo Avanzado*, Mc Graw Hill, Madrid, 2004.

Página web:

[22] http://www.uv.es/ivorra/Libros/Analisis.pdf

[23] http://ladyada.usach.cl/ vguinez/apuntes.html