La investigación, su esencia y arte

FONDO EDITORIAL

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE TAYACAJA
DANIEL HERNÁNDEZ MORILLO

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR CON APLICACIONES

https://fondoeditorial.unat.edu.pe

MIGUEL ANGEL YGLESIAS JAUREGUI
DIK DANI LUJERIO GARCIA
JULIO CÉSAR LÓPEZ LUIS

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior con aplicaciones

Miguel Ángel Yglesias Jáuregui
Dik Dani Lujerio García
Julio César López Luis

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE TAYACAJA

AUTORES:

- Ms. C. MIGUEL ÁNGEL YGLESIAS JÁUREGUI
  Licenciado en Matemáticas (UNT), Maestría en Ciencias con Mención en Didáctica de las ciencias Experimentales (UNT) y estudios concluidos de Maestría en Matemática (UNASAM). Docente nombrado en la categoría de asociado adscrito al Departamento Académico de Estudios Generales de la Universidad Nacional Autónoma de Tayacaja - UNAT.
  Email: *miguelyglesias@unat.edu.pe*, *mayj5@hotmail.com*
- MsC. DIK DANI LUJERIO GARCIA
  Licenciado en Matemáticas (UNASAM), Maestría en matemática con área de Concentración en Sistemas Dinámicos (UFG-BRASIL). Docente adscrito al Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias - UNASAM.
  Email: *lujeriogarcia@gmail.com*
- Dr. JULIO CÉSAR LÓPEZ LUIS
  Licenciado en Matemáticas (UNT), Maestria en Ciencias, mención en Matemáticas (UNT), Doctorado en Ingenieria Matemática, mención modelación Matematica (U de Chile). Profesor asociado en el Instituto de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería y Ciencias, Universidad Diego Portales.
  Email: *julio.lopez@udp.cl*

Primera versión, Julio 2023

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior con aplicaciones

© Miguel Angel Yglesias Jauregui
Email: miguelyglesias@unat.edu.pe
Dirección: Avenida Mariscal Cáceres 1413

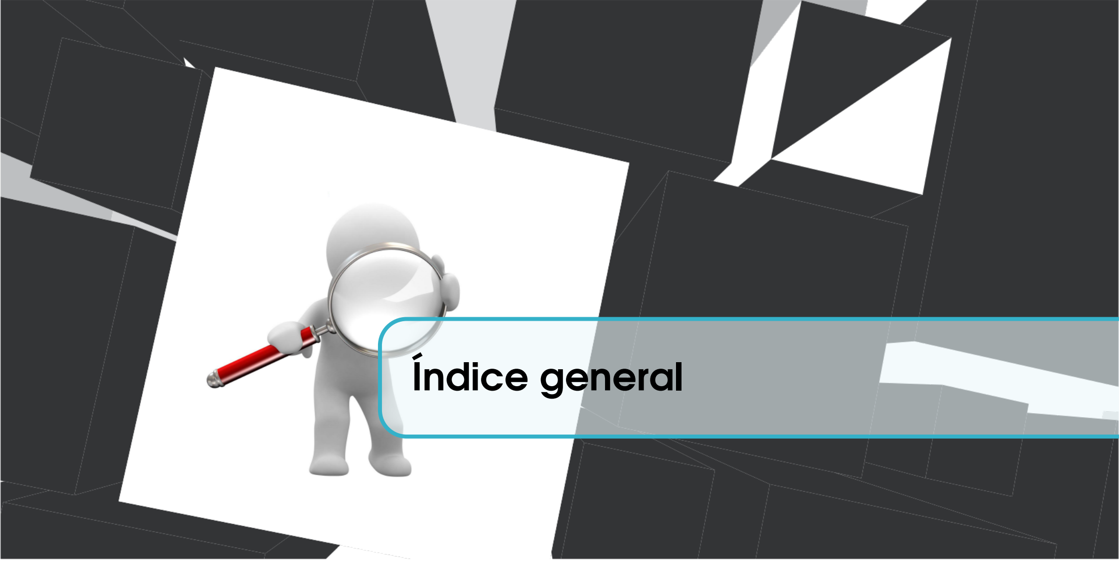
© Dik Dani Lujerio García
Email: lujeriogarcia@gmail.com
Dirección: Avenida Mariscal Cáceres 1413

© Julio César López Luis
Email: julio.lopez@udp.cl
Dirección: Avenida Mariscal Cáceres 1413

Editada por:

© Universidad Nacional Autónoma de Tayacaja Daniel Hernández Morillo (UNAT) - Fondo Editorial.
Dirección: Bolognesi N° 416, Tayacaja, Huancavelica -Perú
info@unat.edu.pe
Telf: (+51) 67 -990847026
Web: https://unat.edu.pe/

Primera edición digital: Julio 2023
Libro digital disponible en
https://fondoeditorial.unat.edu.pe
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2023-06020
ISBN: 978-612-5123-02-2



Índice general

Prefacio

El presente texto titulado **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior y sus Aplicaciones** tiene como objetivo el de contribuir y fortalecer el aprendizaje de la asignatura de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*[1]. Este es un material idóneo para los estudiantes porque contiene el análisis de métodos matemáticos eficientes que le permitirán desarrollar habilidades y estrategias para resolver problemas con ecuaciones diferenciales de orden superior; asimismo, contiene aplicaciones que van a contribuir en la modelación matemática con problemas prácticos y de interés en su formación profesional.

La realización de este libro ha llevado varios años, para lo cual es muy valiosa la experiencia adquirida por los autores en la enseñanza de la asignatura de matemática en diversas universidades del ámbito nacional e internacional. El material que exponemos en este libro, como los problemas resueltos y propuestos, han sido parte de nuestras sesiones de clase con los estudiantes y planteados en sus exámenes a lo largo de todos estos años. Otros problemas que van a ser de interés para los estudiantes han sido resueltos por los autores, que debido a su complejidad y el tiempo no han sido expuestos en clase, pero que servirán para el desarrollo y análisis de proyectos matemáticos formativos.

A continuación comentamos sucintamente los contenidos por capítulo para que den un panorama al estudiante acerca del material y pueda organizar su estudio de manera eficiente:

Capítulo I: aquí se inicia con una exposición de los conceptos básicos acerca del orden y la linealidad de una ecuación diferencial ordinaria, es importante que se identifique el operador asociado a una ecuación diferencial,

---

[1]Es una asignatura que está contemplada en los planes de estudios de algunas Carreras Profesionales como Matemática, ingeniería civil, agrícola y de minas.

porque esto le permitirá más adelante resolver ecuaciones usando estos operadores. También se menciona el teorema de existencia unicidad de una ecuación diferencial lineal con condiciones iniciales; este teorema es importante que el estudiante lo conozca bien, porque no solo da información acerca de la existencia de soluciones, sino también de los intervalos donde debemos buscarlas. Luego se hace una exposición breve acerca de la solución complementaria y particular de una ecuación diferencial no homogénea. En el caso de la solución complementaria, el estudiante debe tener muy claro como es que se genera esta solución a partir de las soluciones fundamentales o linealmente independientes, para lo cual el Wronskiano juega un papel importante para determinar la independencia lineal. Finalmente, debemos mencionar el rol que juega el teorema conocido como principio de superposición en ecuaciones diferenciales lineales, mediante el cual se llega a la solución total o general en el caso homogéneo.

Capítulo II: Este capítulo es uno de los más importantes de este libro porqué aquí se analiza los principales métodos de resolución de una ecuación diferencial ordinaria de orden superior. Se inicia con el estudio y deducción de la *identidad de Abel* y la *fórmula de Liouville* para el caso de ecuaciones de segundo orden. La fórmula de Liouville es muy importante porque nos permite encontrar una solución fundamental a partir de otra ya conocida, en este libro la aplicaremos muchas veces y son varios los problemas en los cuales mostramos su aplicación para resolver ecuaciones lineales de segundo orden homogéneas.

En el caso de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes y homogéneas, es muy importante la transformación $y(x) = e^{\lambda x}$, la cual permite convertir a la ecuación diferencial en una ecuación polinómica (también llamada ecuación característica); según la naturaleza de las raíces de esta ecuación se tiene diferentes tipos de soluciones para la ecuación diferencial. En este caso, primero se hace el estudio de la ecuación diferencial de segundo orden, para luego generalizar el caso de orden n, $n \geq 3$.

Visto el caso homogéneo, el siguiente trabajo es desarrollar métodos que nos permitan determinar la solución particular de una ecuación no homogénea, así tenemos tres métodos clásicos: el método de coeficientes indeterminados, el método de variación de parámetros y el método de operadores inversos. El primero es algebraico y funciona solamente cuando una función y todas sus derivadas son generadas por un número finito de funciones básicas. En cambio, el método de variación de parámetros es más general, y está sujeta a procesos de integración. Por último, el método de operadores inversos suele ser muy práctico en el caso de algunas funciones.

Finalmente, se estudia algunos casos de ecuaciones de coeficientes variables, como por ejemplo, la ecuación de Cauchy - Euler; asimismo, se ve otras transformaciones que permiten convertir una ecuación diferencial de coeficientes variables, en una de coeficientes constantes.

Capítulo III: para adentrarse en este capítulo, el estudiante ya debe manejar los métodos de resolución de una ecuación diferencial. Aquí en este capítulo, se estudia el movimiento oscilatorio producido por una masa adherido a un resorte. Así se tiene, el movimiento armónico simple y el movimiento amortiguado, los cuales son modelados y explicados mediante una ecuación diferencial lineal de segundo orden. En el caso del movimiento amortiguado, hay tres casos: el sub amortiguado, sobre amortiguado y críticamente amortiguado. Una característica común a estos tres casos, es que acontece la estabilidad hacia cero, lo que significa que la oscilación se va disipando con el tiempo hasta quedar en reposo. Finalmente, se realiza el estudio del movimiento forzado, donde es importante el fenómeno de resonancia.

Capítulo IV: Muchas de las ecuaciones hasta aquí estudiadas no pueden resolverse por los métodos clásicos vistos en el Capítulo II, puesto que el proceso de integración no siempre puede llevarse a cabo con funciones elementales conocidas, como las **polinómicas, exponenciales, trigonométricas, hiperbólicas, racionales e irracionales**; motivo por el cual, es necesario recurrir a herramientas más poderosas como es el caso de las series de potencias. El estudiante debe conocer que todas las funciones elementales enunciadas más arriba tienen asociada una serie de potencias convergente conocida, o en todo caso, series de potencias convergentes conocidas pueden empaquetarse como alguna de las funciones elementales ya mencionadas.

El capítulo inicia con el estudio muy breve de las serie de potencias de números reales y los principales criterios de convergencia, como el criterio de la razón. A continuación se analiza las series de potencias y su radio de convergencia. Luego nos adentramos en el estudio de las ecuaciones diferenciales, para lo cual nos ocupamos primero de los puntos ordinarios de una ecuación diferencial y su solución respectiva como una serie de potencias.

El siguiente caso corresponde a los puntos singulares regulares, aquí la solución es una serie de Frobenius. Se estudia tres casos según las raíces de la ecuación indicial asociada a la ecuación diferencial. Vemos algunos casos y técnicas importantes que sirven para resolver una ecuación diferencial de manera práctica. En los ejercicios propuestos, se brinda al estudiante algunos casos de series conocidas para que profundice y mejore sus técnicas con los métodos de resolución vistos en este capítulo.

Capítulo V: La transformada de Laplace es una herramienta muy importante para resolver problemas con ecuaciones diferenciales donde una fuerza actúa por partes sobre un movimiento de una masa o en caso de circuitos donde la fuerza es ahora una fuente de voltaje.

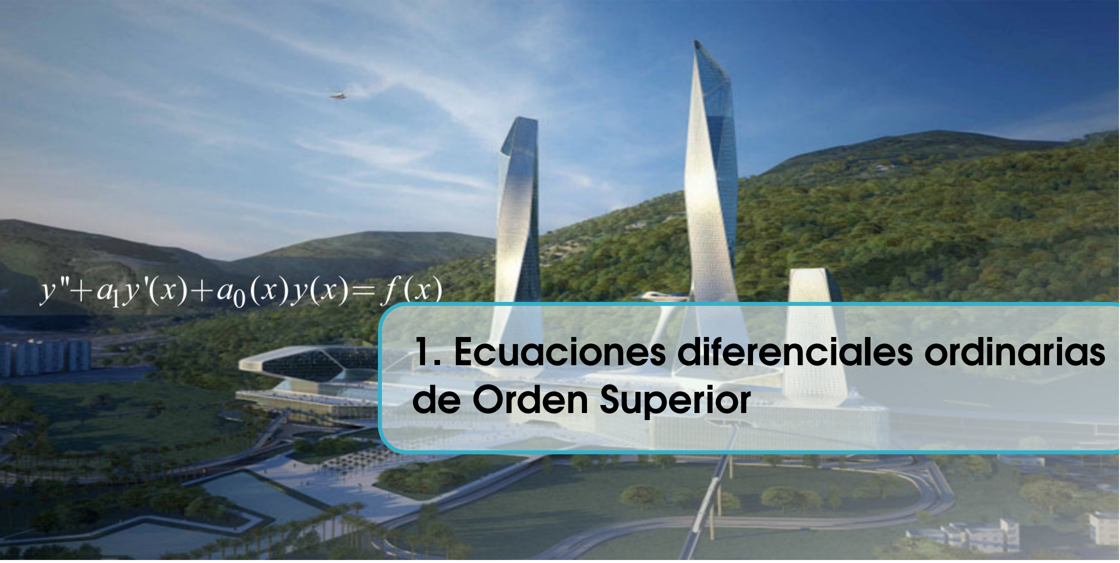
El estudio de la transformada de Laplace se inicia con su definición, para luego analizar las propiedades de como actúa sobre distintos tipos de funciones. Se estudia la transformada inversa a través de fracciones parciales y la convolución. En todo este capítulo nos esmeramos en evitar el cálculo de la transformada según la definición de integral impropia, y el tratamiento que hacemos se basa enteramente en las propiedades. Recomendamos al estudiante que se especialice en las propiedades de traslación y como se aplican en diferentes casos; así también, con la transformada de Laplace de funciones definidas por partes y como éstas se expresan usando la función de Heaviside, y por último la función de Dirac, la cual permite modelar impulsos que actúan en un instante de tiempo.

Después de estudiar la transformada de Laplace, nos ocupamos en seguida de su aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales (homogéneas y no homogéneas). Aquí vemos el caso de movimiento oscilatorio, circuitos y algunos casos deflexión de vigas (simplemente apoyadas, en voladizo y empotradas en ambos extremos). Finalizamos este capítulo con la aplicación a sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, los cuales sirven para modelar y resolver problemas con sistemas acoplados.

A los estudiantes, esperamos que este material sea de mucha ayuda en su formación profesional; asimismo, aguardamos sus sugerencias y observaciones para que este material mejore en una próxima edición.

Las gráficas que aparecen en este libro han sido realizadas con COREL, asimismo, con la aplicación del software MAPLE 16. También debemos indicar que muchos de los problemas resueltos, son propuestos y/o adaptados de los textos, página web que se indican en la bibliografía. Otros problemas han sido creación nuestra, y de los ejercicios que se proponen, algunos también están consignados en los textos de la bibliografía, así también, otros son de nuestro aporte.

Los Autores



1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de Orden Superior

En este capítulo, hacemos un recorrido abreviado por los conceptos fundamentales que involucran las ecuaciones diferenciales, son estas ecuaciones las que ocupan nuestro objetivo principal de estudio a lo largo de este libro, así que es importante que debamos desarrollar conceptos relacionados como el de solución, condiciones iniciales y de frontera, linealidad e independencia lineal de las soluciones.

De forma general, decimos que estamos frente a una ecuación diferencial, si esta involucra una función incógnita y sus derivadas. Es decir, a diferencia de las ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas representan números, en las ecuaciones diferenciales, la incógnita representa una función que aparece con sus derivadas. En el siguiente ejemplo se proporciona algunos modelos de ecuaciones diferenciales.

■ Ejemplo 1.1

- $\dfrac{dy}{dt} = y^2$, es una ecuación diferencial donde $y(t)$ es la función incógnita (t es la variable independiente y y es la variable dependiente)[1].
- $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, es una ecuación diferencial con función incógnita $y = y(x)$ y x como variable independiente.
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = 0$, es una ecuación diferencial con función incógnita $u(x,y,z)$. Aquí, x, y y z son variables independientes.

■

[1] Cuando se esta modelando, t lleva el nombre de variable temporal y y lleva el nombre de variable de estado, debido a que las ecuaciones diferenciales modelan el estado de un sistema dinámico en el tiempo t.

Definición 1.0.1 Una ecuación es llamada *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) si la función incógnita depende solamente de una variable independiente. En el caso de que dependa de dos o más de variables, será denominada ecuación diferencial parcial (EDP).

En el ejemplo 1.1, las ecuaciones $\frac{dy}{dt} = y^2$, $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ son ecuaciones diferenciales ordinarias y la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ es una EDP.

1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias - Conceptos básicos

De aquí en adelante sólo nos ocuparemos de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 1.1.1 El orden de una ecuación diferencial queda determinado por el orden de la derivada más alta de la variable dependiente que interviene en la ecuación diferencial.

Por ejemplo:
1. $(y'')^2 + 2xy' + y = 0$, es de segundo orden.
2. $y^{(4)} - y'' = 2x$, es de cuarto orden.
3. $(y')^5 - y = 1$, es de primer orden.

Una característica importante de una ecuación diferencial es la linealidad, así se tiene:

Definición 1.1.2 Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n es de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (1.1)$$

donde las funciones $a_n, \cdots, a_0$ y f deben estar definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Si $f(x) = 0$, $\forall x \in I$, entonces decimos que la ecuación diferencial (1.1) es homogénea, caso contrario es no homogénea.

Observación

En la ecuación diferencial (1.1) nos interesa que $a_n(x)$ no se anule en I. En el caso de que se anule, las raíces de $a_n(x) = 0$ se llaman puntos singulares de (1.1), lo que será visto más adelante cuando tengamos que resolver ecuaciones diferenciales con series de Frobenius.

Si tomamos en cuenta de que $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$, entonces podemos reescribir (1.1) mediante la expresión:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \tag{1.2}$$

de donde[2] también se obtiene:

$$\left[a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)id\right] y = f(x)$$

Esta última presentación de (1.1) nos permite definir el operador

$$L(x) = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)id \tag{1.3}$$

con el cual la ecuación diferencial (1.1) queda escrita de manera más compacta mediante la expresión:

$$L(x)[y] = f(x) \tag{1.4}$$

Una de las cualidades más importantes del operador $L(x)$ dado en (1.3) es su linealidad[3], es decir, para dos funciones y_1, y_2 de clase C^n en I ((también podemos escribir $y_1, y_2 \in C^n(I)$)) y un escalar $r \in \mathbb{R}$ se cumple la propiedad

$$L(x)[y_1 + ry_2] = L(x)[y_1] + rL(x)[y_2]$$

■ **Ejemplo 1.2** En la ecuación diferencial $3y'' + 5y' + 2y = 0$, el operador $L(x)$ asociado a esta ecuación es

$$L(x) = 3\frac{d^2}{dx^2} + 5\frac{d}{dx} + 2id$$

A continuación verificamos que este operador es lineal. En efecto, dadas las

[2] id representa el operador identidad.

[3] Es importante aclarar que la linealidad del operador asociado a una ecuación diferencial es quien determina o hace que la ecuación sea lineal.

funciones y_1, y_2 de clase C^2 y $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
L(x)[y_1 + ry_2] &= \left[3\frac{d^2}{dx^2} + 5\frac{d}{dx} + 2id\right](y_1 + ry_2) \\
&= 3\frac{d^2}{dx^2}[y_1 + ry_2] + 5\frac{d}{dx}[y_1 + ry_2] + 2[y_1 + ry_2] \\
&= 3\frac{d^2}{dx^2}[y_1] + 3\frac{d^2}{dx^2}[ry_2] + 5\frac{d}{dx}[y_1] + 5\frac{d}{dx}[ry_2] + 2[y_1 + ry_2] \\
&= 3y_1'' + 3ry_2'' + 5y_1' + 5ry_2' + 2y_1 + 2ry_2 \\
&= \left(3y_1'' + 5y_1' + 2y_1\right) + r\left(3y_2'' + 5y_2' + 2y_2\right) \\
&= L(x)[y_1] + rL(x)[y_2]
\end{aligned}$$

Así vemos que $L(x)$ es un operador lineal, y de esto, la ecuación diferencial asociada resulta ser también lineal. ■

■ **Ejemplo 1.3** La ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ tiene como operador asociado a $L(x) = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2id$, el cual es lineal. ■

■ **Ejemplo 1.4** Demuestre que el operador asociado a la ecuación diferencial $3y'' - 4(y')^2 + y = \text{sen}(x)$ no es lineal

<u>Resolución</u>

En efecto, el operador asociado a la ecuación dada es

$$L(x)[y] = \left[3\frac{d^2}{dx^2} - 4\left(id^2 \circ \frac{d}{dx}\right) + id\right](y)$$

Si consideramos dos funciones y_1, y_2 y un escalar $r \in \mathbb{R}$ tendríamos:

$$\begin{aligned}
L(x)[y_1 + ry_2] &= \left[3\frac{d^2}{dx^2} - 4\left(id^2 \circ \frac{d}{dx}\right) + id\right](y_1 + ry_2) \\
&= 3\frac{d^2}{dx^2}(y_1 + ry_2) - 4id^2\left(\frac{d}{dx}(y_1 + ry_2)\right) + y_1 + ry_2 \\
&= 3(y_1'' + ry_2'') - 4\left[\frac{d}{dx}(y_1 + ry_2)\right]^2 + y_1 + ry_2 \\
&= 3y_1'' + 3ry_2'' - 4\left[y_1' + ry_2'\right]^2 + y_1 + ry_2 \\
&= 3y_1'' + 3ry_2'' - 4(y_1')^2 - 8ry_1'y_2' - 4r^2(y_2')^2 + y_1 + ry_2 \\
&= 3y_1'' - 4(y_1')^2 + y_1 + r\left[3y_2'' - 4(y_2')^2 + y_2\right] - 8ry_1'y_2' \\
&\quad +4r(y_2')^2 - 4r^2(y_2')^2 \\
&= L(x)[y_1] + rL(x)[y_2] + 4r(y_2')^2 - 4r^2(y_2')^2 - 8ry_1'y_2'
\end{aligned}$$

Este resultado nos muestra que $L(x)[y_1+ry_2] \neq L(x)[y_1]+rL(x)[y_2]$, por lo tanto $L(x)$ no es lineal[4]. ■

■ **Ejemplo 1.5** En la ecuación diferencial

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}-y=x\operatorname{sen}x$$

el operador diferencial de orden 3 asociado a la ecuación diferencial está dado por

$$L(x)=x^3\frac{d^3}{dx^3}-2x^2\frac{d^2}{dx^2}+7x\frac{d}{dx}-id \tag{1.5}$$

así la ecuación queda escrita en forma compacta como $L(x)[y]=x\operatorname{sen}x$, además es no homogénea. ■

A continuación, tratamos otro concepto muy importante en las ecuaciones diferenciales, que es el de *solución de una ecuación diferencial*, veamos la siguiente definición:

Definición 1.1.3 La función $\phi=\phi(x)$, $x\in I$ es solución de la ecuación diferencial (1.4) en el intervalo abierto I si, y solo si, $L(x)[\phi]=f(x)$, $\forall x\in I$.

■ **Ejemplo 1.6** La función $\phi(x)=2\operatorname{sen}(x)-\cos(x)$ es solución de la ecuación diferencial $y''+y=0$, pues resulta que $\phi''(x)+\phi(x)=0$. Esto es fácil de comprobar, veamos los siguientes cálculos

$$\phi'(x)=2\cos(x)+\operatorname{sen}(x) \quad \text{y} \quad \phi''(x)=-2\operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

luego

$$\begin{aligned}\phi''(x)+\phi(x) &= [-2\operatorname{sen}(x)+\cos(x)]+[2\operatorname{sen}(x)-\cos(x)]\\ &= 0\end{aligned}$$

Esto comprueba que en efecto la función $\phi(x)$ es solución de la ecuación $y''+y=0$. ■

Lo que es de sumo interés ahora, es determinar qué condiciones debe satisfacer una ecuación diferencial ordinaria de orden superior y lineal para garantizar la existencia de su solución, el siguiente teorema justamente nos proporciona esas condiciones, donde el lector puede ver que el concepto de la continuidad es aquí muy preponderante.

[4] Así la ecuación diferencial tampoco es lineal.

Teorema 1.1.1 El problema de valor inicial[a]

$$\begin{cases} y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x),\ x\in I \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

con las funciones $a_{n-1}, \cdots, a_0$ y f continuas en un intervalo abierto I que contiene al punto x_0, tiene una única solución en este intervalo.

[a] Se llama problema de valor inicial porque todas las condiciones impuestas a y se dan en un mismo valor de la variable independiente.

Demostración. De hecho nuestra ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x)-a_{n-1}(x)y^{(n-1)}-\cdots-a_1(x)y'-a_0(x)y \\ &= F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Esta ecuación diferencial ordinaria es de orden n y, debido a que la variable de estado y está en $\mathbb{R}$ nuestra ecuación es dimensión uno. Haciendo

$$\begin{aligned} z_1 &= y' \\ z_2 &= z_1' = y'' \\ z_3 &= z_2' \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= z_{n-2}' = y^{(n-1)} \\ z_{n-1}' &= F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}) = y^{(n)} \end{aligned}$$

tenemos que nuestra ecuación 1.6 se puede reescribir como

$$z' = G(x,z) \tag{1.7}$$

donde $z=(y,z_1,\ldots,z_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ y el campo

$$G(x,z)=(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},F(x,y,y^{(1)},y^{(2)},\ldots,y^{(n-1)})).$$

Nuestras hipótesis nos conducen a que el campo G es una aplicación continua y localmente Lipchitziano en relación a la segunda variable z. Aplicando el Teorema de Picard -Lindelöft a (1.7) tenemos existencia y unicidad para las soluciones de (1.6), toda vez que se fije una condición inicial. Una demostración moderna se presenta en [**19**]. ■

Veamos el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 1.7** Determinemos el intervalo máximo en que el problema de valor inicial $\begin{cases} (x^2-4)y''+y'+(\operatorname{sen} x)y = \frac{e^x}{x} \\ y(1)=y_0, y'(1)=y'_0 \end{cases}$ tiene solución única.

<u>Resolución</u>

Aquí, reescribimos la ecuación diferencial para obtener:

$$y'' + \frac{1}{x^2-4}y' + \frac{\operatorname{sen} x}{x^2-4}y = \frac{e^x}{x(x^2-4)}$$

se tiene que las funciones $a_1(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $a_0(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2-4}$ y $f(x) = \frac{e^x}{x(x^2-4)}$ son continuas en $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$. Como $x_0 = 1$, entonces de acuerdo al teorema 1.1.1, el problema de valor inicial tiene solución única en el intervalo $0 < x < 2$, que es el mayor intervalo conteniendo $x_0 = 1$ donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $f(x)$ son continuas. ■

1.1.1 Ecuación diferencial complementaria u homogénea

Si en (1.1) hacemos $f(x) = 0$, $\forall x \in I$, entonces la ecuación diferencial

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1.8}$$

es llamada ecuación complementaria[5] asociada a (1.1)

Teorema 1.1.2 — Principio de superposición. Si las funciones y_1, y_2, $\cdots$, y_n son soluciones de (1.8) en algún intervalo abierto I, entonces $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ también es solución de (1.8) para constantes c_1, c_2, $\cdots$, c_n cualesquiera.

Demostración. Usando el operador diferencial $L(x)$ dado en (1.3)[6], la ecuación diferencial (1.8) es equivalente a la ecuación compacta

$$L(x)[y] = 0$$

Ahora, si para cada $i = \widehat{1,n}$ se tiene que y_i es solución de (1.8), entonces acontece que $L(x)[y_i] = 0$. A continuación, tomamos arbitrariamente las constantes

[5] o también ecuación homogénea.
[6] El cual sabemos que es lineal.

$c_1, c_2, \cdots, c_n$, con las cuales formamos la función $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$; aplicamos a esta función el operador $L(x)$ y se tiene:

$$\begin{aligned}
L(x)[y] &= L(x)[c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n] \\
&= c_1\underbrace{L(x)[y_1]}_{=0} + c_2\underbrace{L(x)[y_2]}_{=0} + \cdots + c_n\underbrace{L(x)[y_n]}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

De donde $L(x)[y] = 0$, este resultado nos demuestra que $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ también es solución de la ecuación (1.8). ■

Observación

El principio de superposición nos dice de otro modo, que la combinación lineal de soluciones de (1.8), también es solución de (1.8). Algo que debemos resaltar aquí, es que esto solo acontece para ecuaciones diferenciales lineales.

Definición 1.1.4 Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) y $M = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$. Decimos que el conjunto de vectores M es **linealmente independiente (l.i)** si, y solo si, para cualquier colección de escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ en $\mathbb{R}$:

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \cdots + \lambda_nv_n = 0$$

implica que $\lambda_1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

Si la implicación anterior no fuera verdadera, es decir, la igualdad

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \cdots + \lambda_nv_n = 0$$

acontece para algunos escalares λ_i diferentes de cero, entonces decimos que el conjunto de vectores M es **linealmente dependiente (l.d)**. La independencia lineal es importante porque es una condición necesaria para que genere[7] un espacio o subespacio vectorial.

[7] Por ejemplo, el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene como base canónica a los vectores linealmente independientes i, j, k (Es un hecho que cualquier conjunto de vectores l.i de $\mathbb{R}^3$ genera $\mathbb{R}^3$). Para que la idea quede más clara, la recta en forma vectorial que pasa por el origen se comporta como un subespacio de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, y es generada por un vector no nulo, lo mismo acontece con un plano que pasa por el origen, siendo en este caso un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y generado por dos vectores l.i. Para profundizar más sobre este tema recomendamos que lo haga en algún texto de álgebra lineal.

Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$, consideramos el espacio vectorial[8]:

$$V = \{f \ : \ f \text{ es una aplicación de } I \text{ en } \mathbb{R}\}$$

Según la definición 1.1.4, el conjunto $M = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \subset V$ es l.i en el intervalo I si, y solo si, para cualquier colección de escalares $c_1, c_2, \cdots, c_n$ en $\mathbb{R}$:

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0$$

implica que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, $\forall x \in I$.

En vista de que nuestro estudio son las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, tomaremos el espacio vectorial

$$V = \mathscr{C}^{n-1}(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ posee } (n-1)\text{−ésima derivada continua en } I\}$$

y el conjunto $M = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \subset V$, para analizar la independencia lineal de los vectores de este conjunto procedemos de la siguiente manera: Tomamos una combinación lineal arbitraria de estos vectores, $c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$, con escalares en $\mathbb{R}$ e igualamos a cero, teniéndose así:

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0, \ \forall x \in I \tag{1.9}$$

Como cada y_i es un elemento de V, entonces podemos derivar hasta el orden $n-1$ para obtener n ecuaciones, y así formar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
&c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0 \\
&c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + \cdots + c_ny_n'(x) = 0 \\
&\vdots \\
&c_1y_1^{(n-1)}(x) + c_2y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x) = 0
\end{aligned}$$

que en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Para analizar la solución de la ecuación (1.10), ponemos la siguiente definición

[8]Recomendamos al lector verifique que el conjunto que se indica es un espacio vectorial.

Definición 1.1.5 Sean $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ funciones en el espacio $\mathscr{C}^{n-1}(I)$, donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. El **Wronskiano** de $y_1, y_2, \dots, y_n$ es la función $W : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$W(x) = W(y_1,\cdots,y_n) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

Definiendo por $Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$,

y por $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^T$ (la T indica transpuesta), la ecuación (1.10) es equivalente a:

$$Y(x)C = 0,\ \forall x \in I \tag{1.12}$$

Como podemos ver en (1.11), el determinante de la matriz $Y(x)$ es $W(x)$, así la ecuación (1.12) tiene solución $C = 0$ (es decir: $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$) en I, si $W(x) \neq 0,\ \forall x \in I$. Esto que acabamos de hacer es muy importante porque nos dice de la independencia lineal de las funciones $y_1, y_2, \cdots, y_n \subset \mathscr{C}^{n-1}(I)$ ocurre en I, siempre que $W(x) \neq 0,\ \forall x \in I$. A continuación se propone el siguiente teorema

Teorema 1.1.3 Las funciones $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathscr{C}^{n-1}(I)$ son linealmente independientes en el intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, siempre que $W(x) \neq 0,\ \forall x \in I$.

El recíproco de este teorema no siempre es cierto, vea el ejemplo 1.13

■ **Ejemplo 1.8** Sean las funciones $y_1(x) = \cos ax$, $y_2(x) = \operatorname{sen} ax$, con $a \neq 0$, se tiene que el Wronskiano[9] de estas funciones es:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos ax & \operatorname{sen} ax \\ -a \operatorname{sen} ax & a \cos ax \end{vmatrix} = a \neq 0,\ \forall x \in I$$

[9] Józef Hoene-Wronski (1776-1853) fue un matemático polaco de origen checo. En sus inicios se dedicó a la actividad militar, para luego dedicarse a la actividad científica, mucha de la cual lo desarrolló en París, donde vivió hasta su muerte. Fue un arduo crítico de Lagrange por el uso de series infinitas, sin embargo, muchas de sus críticas fueron infundadas, por lo cual fue ridiculizado. Sus mejores trabajos estuvieron relacionados con el estudio de las series, teniéndose en su honor, la famosa serie de Wronski; donde la importancia de los coeficientes de dicha serie fueron reconocidos después de su muerte, y pasaron a formar los determinantes que en la actualidad conocemos como Wronskianos.

■

Luego en virtud del teorema 1.1.3, las funciones $\cos(ax)$, $\operatorname{sen}(ax)$ son linealmente independientes en todo $\mathbb{R}$.

■ **Ejemplo 1.9** Tomemos el intervalo abierto I y la funciones $y_1(x) = 2 - x + x^2$, $y_2(x) = 2x - 3x^2$ y $y_3(x) = 3 + 5x + 4x^2$, con $x \in I$. El Wronskiano de y_1, y_2, y_3 según (1.11) está dado como sigue:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 2 - x + x^2 & 2x - 3x^2 & 3 + 5x + 4x^2 \\ -1 + 2x & 2 - 6x & 5 + 8x \\ 2 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 98$$

Luego por el teorema 1.1.3, y_1, y_2 y y_3 son linealmente independientes en $I = \mathbb{R}$. ■

■ **Ejemplo 1.10** Para $\alpha \neq \beta$, considere las funciones $y_1(x) = e^{\alpha x}$, $y_2(x) = e^{\beta x}$, con $x \in \mathbb{R}$. El Wronskiano de estas funciones es:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)e^{(\alpha+\beta)x} \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, dichas funciones son linealmente independientes. ■

■ **Ejemplo 1.11** Si tomamos las funciones $y_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $y_2(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ y calculamos su Wronskiano, se tiene lo siguiente:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\frac{1}{x}} & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1-x}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$$

En este caso podemos ver que las funciones son linealmente independientes en los intervalos $I_1 = \langle -\infty, 0\rangle$, $I_2 = \langle 0, 1\rangle$ o $I_3 = \langle 1, +\infty\rangle$. ■

■ **Ejemplo 1.12** Si para $x \in \mathbb{R}$ tomamos las funciones $y_1(x) = x^2e^{ax}$, $y_2(x) = xe^{ax}$, $y_3(x) = e^{ax}$ y calculamos su Wronskiano, entonces:

$$\begin{aligned}
W(x) &= \begin{vmatrix} x^2e^{ax} & xe^{ax} & e^{ax} \\ ax^2e^{ax} + 2xe^{ax} & axe^{ax} + e^{ax} & ae^{ax} \\ a^2x^2e^{ax} + 4axe^{ax} + 2e^{ax} & a^2xe^{ax} + 2ae^{ax} & a^2e^{ax} \end{vmatrix} \\
&= e^{3ax} \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ ax^2 + 2x & ax + 1 & a \\ a^2x^2 + 4ax + 2 & a^2x + 2a & a^2 \end{vmatrix} \\
&= e^{3ax}\left[x^2\left(-a^2\right) - x\left(-2a^2x - 2a\right) - a^2x^2 - 2ax - 2\right] \\
&= -2e^{3ax}
\end{aligned}$$

Aquí encontramos que $W(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo cual y_1, y_2 y y_3 son linealmente independientes en todo $\mathbb{R}$. ■

■ **Ejemplo 1.13** Considere las funciones $y_1(x) = x^2$ y $y_2(x) = x|x|$, con $x \in \mathbb{R}$, su Wronskiano en este caso es como sigue[10]:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

A pesar de que $W(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, no podemos afirmar que y_1, y_2 sean linealmente dependientes en $\mathbb{R}$. Para corroborar esto, tomamos una combinación lineal de dichas funciones e igualamos a cero, en efecto:

$$c_1x^2 + c_2x|x| = 0$$

derivando y simplificando se obtiene:

$$c_1x + c_2|x| = 0$$

Aquí, si $x < 0$, entonces $c_1 - c_2 = 0$, y si $x > 0$, entonces $c_1 + c_2 = 0$, de ambas ecuaciones vemos que $c_1 = c_2 = 0$, y de esta manera y_1, y_2 son linealmente independientes[11]. ■

El siguiente teorema establece una relación entre el número de soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial ordinaria lineal y su orden.

[10] Acá debemos tener en cuenta que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$, pero para $x \neq 0$ se tiene que $f'(x) = \frac{|x|}{x}$. Sin embargo la función $g(x) = x|x|$ sí es derivable en todo $\mathbb{R}$, además $\frac{d}{dx}(x|x|) = 2|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

[11] El hecho de que $W = 0$, no implica que las funciones sean linealmente dependientes.

Teorema 1.1.4 La ecuación diferencial homogénea de orden n en (1.8) tiene no más de n soluciones linealmente independientes (o soluciones fundamentales) en algún intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$.

La importancia de este teorema radica en que nos dice que la ecuación diferencial (1.8) tiene n soluciones que son linealmente independientes. Si suponemos que $y_1, y_2, \cdots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de (1.8) en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces el conjunto $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ genera un espacio vectorial, este espacio vectorial será llamado el **espacio solución (ES)** de (1.8), es decir:

$$ES := \{y(x) \ : \ y(x) \text{ es solución de } (1.8)\} \tag{1.13}$$

Además, la base de este espacio vectorial será el conjunto de soluciones fundamentales $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, que de aquí en adelante será llamado **sistema fundamental de soluciones (sfs)**, es decir:

$$sfs = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \tag{1.14}$$

Por lo que acabamos de ver, cada ecuación diferencial lineal de la forma (1.8) tiene su sistema fundamental de soluciones (sfs), el cual genera su propio espacio solución (ES). También aclaramos que si y es un elemento de ES, entonces y es combinación lineal de los elementos del sfs, es decir, existen escalares reales c_1, c_2, $\cdots$, c_n tales que

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

1.1.2 Ecuación diferencial no homogénea

Como ya se explicó más arriba, en el caso de que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, la ecuación (1.1) se denomina no homogénea; para determinar la solución de esta ecuación, debemos tener en cuenta que ésta tiene su ecuación complementaria asociada, que no es otra cosa que la ecuación homogénea (1.8). Así, la solución de (1.8) la llamaremos **solución complementaria** y la denotaremos como $y_c(x)$, mientras que la solución que procede de $f(x)$ la llamaremos **solución particular** y la denotaremos como $y_p(x)$. Tenga en cuenta que la solución complementaria es de la forma

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \ x \in I$$

puesto que es un elemento del espacio solución de (1.8). Formalmente se tiene que

$$L(x) y_c(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad L(x) y_p(x) = f(x)$$

Teorema 1.1.5 Si $y_p(x)$ es la solución particular de la ecuación diferencial (1.1) que procede de $f(x)$ y $y_c(x)$ es su solución complementaria, entonces la función $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ es la solución (total) de (1.1).

Demostración. Puesto que $y_p(x)$ es la solución particular de (1.1) que procede de $f(x)$, entonces acontece que $L(x)[y_p] = f(x)$. Asimismo, siendo $y_c(x)$ la solución complementaria, entonces ocurre que $L(x)[y_c] = 0$. Haciendo $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$, se tiene:

$$\begin{aligned} L(x)[y(x)] &= L(x)[y_p + y_c] \\ &= \underbrace{L(x)[y_p]}_{=f(x)} + \underbrace{L(x)[y_c]}_{=0} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto $L(x)[y] = f(x)$, con lo cual se demuestra que $y = y_p + y_c$ es solución de (1.1). ■

1.2 EJERCICIOS PROPUESTOS 1

1. Halle el operador asociado a la ecuación diferencial $2y''' - 3yy' = x$, luego analice si es lineal.
2. Dada la ecuación diferencial $y'' - 2y' - 4y = x\cos(x)$, halle el operador asociado a esta ecuación y determine si es lineal.
3. Halle el operador asociado a la ecuación diferencial:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

   y verifique su linealidad.
4. Halle el operador asociado a la ecuación diferencial

$$\left(x^4 - x^3\right)y'' + \left(2x^3 - 2x^2 - x\right)y' - y = 0, \;\; x > 1$$

   y verifique si es lineal.
5. Halle el operador asociado a la ecuación diferencial $2xyy' = 3y^2 - x^2$ y verifique si es lineal.
6. Considere la ecuación diferencial $y'' - \omega^2 y = 0$, para $\omega > 0$.
   a) Demuestre que $y(t) = c_1 e^{-\omega(t-a)} + c_2 e^{\omega(t-a)}$ para $a \in \mathbb{R}$ fijo, es solución general de la ecuación diferencial.

b) Demuestre que $y(t) = c_1 \cosh(\omega(t-a)) + c_2 \operatorname{senh}(\omega(t-a))$ para $a \in \mathbb{R}$ fijo, es solución general de la ecuación diferencial.

7. Considere la ecuación diferencial $(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$
   (a) Encuentre una solución de la ecuación diferencial de la forma $y_1(x) = e^{rx}$, para r un número real fijo.
   (b) Encuentre una solución de la ecuación diferencial que sea una función de grado 1.
   (c) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.
   (d) Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0 \\ y(1) = 1, y'(1) = 3. \end{cases}$$

8. En cada caso se presenta una familia de soluciones que viene a ser la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo indicado. Determine de esta familia infinita un miembro que sea solución del problema de valor inicial correspondiente.
   a) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}$ en $\langle -\infty, \infty \rangle$ para el problema de valor inicial.

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 10y = 0 \\ y(0) = -1 \text{ y } y'(0) = 1. \end{cases}$$

   b) $y(x) = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{x^2}$ en $\langle 0, \infty \rangle$ para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2\ln x + 3 \\ y(1) = 0 \text{ y } y'(1) = 2. \end{cases}$$

9. Sea $y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$ la solución general de la ecuación $y'' + \omega^2 y = 0$ en el intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$, demuestre que cada una de las soluciones dadas satisface las condiciones iniciales
   a) La solución $y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{y_1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$ con condiciones iniciales $y(0) = y_0$ y $y'(0) = y_1$.
   b) La solución $y(t) = y_0 \cos(\omega(t-t_0)) + \frac{y_1}{\omega} \operatorname{sen}(\omega(t-t_0))$ con condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y_1$.

10. Verifique que la función $f(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x - 1$ es solución del problema de valor inicial $\begin{cases} (x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2+1)^2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

11. La familia biparamétrica $y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$ en el intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$. Deter-

mine si se puede encontrar un intervalo de la familia que satisfaga las condiciones en la frontera[12] dadas en cada caso.

$$a) y(0) = 1,\ y'(\pi) = 0. \quad b)\ y(0) = 1,\ y(\pi) = -1.$$
$$c) y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 1. \quad d)\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

12. Si r y s son números reales; el operador diferencial[13] $D+r$ se define como $(D+r)[y] = y' + ry$, además se define el operador diferencial $(D+r)(D+s)$ como

$$(D+r)(D+s)[y] = (D+r)[(D+s)[y]]$$

Si $y = 2x^3 - e^{3x}$ evalúe:

$a)(D-2)[y].$ $\quad b)(D-2)(D+3)[y].$

$c)(D+3)[y].$ $\quad d)(D+3)(D-2)[y].$

13. Usando la definición del operador diferencial $(D+r)[y] = y' + ry$ y tomando a $s, r \in \mathbb{R}$, demuestre:
a) $(D-r)[e^{sx}] = e^{sx}(s-r)$, con s un número real cualquiera.
b) $(D-r)[h(x)e^{sx}] = e^{sx}(D+s-r)[h(x)]$.
14. Verifique que el conjunto dado es el sistema fundamental de soluciones para la ecuación diferencial dada. Además, compruebe que y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea; y por último escriba la solución general de la ecuación diferencial no homogénea.
a) El conjunto de funciones $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ para la ecuación diferencial $y'' + y = 1$ y la solución particular es $y_p(x) = 1$ para todo x.
b) El conjunto de funciones $\{e^x, e^{2x}\}$ para la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 2x$$

y la solución particular es $y_p(x) = x + \frac{3}{2}$ para todo x.
c) El conjunto de funciones $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ para la ecuación diferencial $y'' + y' = \sec x$ y la solución particular es $y_p(x) = x \operatorname{sen} x + (\cos x)\ln(\cos x)$ en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

[12] Se denomina condiciones de frontera cuando a la variable dependiente se le impone condiciones sobre distintos valores de la variable dependiente.

[13] Aquí se tiene que D es el operador:

$$D := \frac{d}{dx}$$

d) El conjunto de funciones $\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}\}$ para la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln x + 3$$

y la solución particular es

$$y_p(x) = \ln x \text{ para } x > 0$$

15. Las ecuaciones de **Cauchy-Euler** de segundo orden, son ecuaciones que pueden ser escritas en la forma

$$x^2y'' + bxy' + cy = 0, \text{ donde } b, c \in \mathbb{R} \tag{1.15}$$

Verifique que existen valores constantes de r tal que $y(x) = x^r$ es solución de (1.15). Además de eso, compruebe que $y(x) = x^r$ es solución de (1.15), si y solo si:

$$r^2 + (b-1)r + c = 0, \tag{1.16}$$

la ecuación (1.16) es llamada ecuación indicial de (1.15).

16. Demuestre que si la ecuación indicial (1.16) tiene dos raíces reales (distintas), r_1 y r_2, entonces $y_1(x) = x^{r_1}$ y $y_2(x) = x^{r_2}$ son soluciones fundamentales (soluciones linealmente independientes generadoras del espacio solución de la ecuación diferencial) de (1.15) y por lo tanto $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$ es la solución general de (1.15) para $x > 0$. [**Santos 2013**].

17. Si la ecuación indicial (1.16) tiene dos raíces complejas $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, use la formula de Euler para escribir la solución general compleja en términos de las soluciones reales

$$u(x) = x^\alpha \cos(\beta lnx) \qquad y \qquad v(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

Demuestre que estas soluciones son soluciones fundamentales de (1.15) y por lo tanto

$$y(x) = c_1x^\alpha \cos(\beta lnx) + c_2x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)$$

es la solución general de (1.15), para $x > 0$.

18. Si la ecuación indicial (1.16) tiene solamente una raíz real, demuestre que $y_1(x) = x^{\frac{1-b}{2}}$ y $y_2(x) = x^{\frac{1-b}{2}} \ln x$ son soluciones fundamentales de (1.15) y por lo tanto $y(x) = c_1x^{\frac{1-b}{2}} + c_2x^{\frac{1-b}{2}} \ln x$ es la solución general de (1.15) para $x > 0$.

19. **(Teorema de Abel)** Considere la ecuación homogénea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

con $p(t)$ y $q(t)$ funciones continuas en un intervalo I. Sean y_1 y y_2 dos soluciones de esta ecuación en el intervalo I. Sea $W[y_1, y_2](t)$ el wronskiano de $y_1(t)$ y $y_2(t)$ en el intervalo I. Verifique que:
(a) $W[y_1, y_2]'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t)$.
(b) $W[y_1, y_2](t)$ satisface la ecuación diferencial $y' + p(t)y = 0$ en el intervalo I.
(c) $W[y_1, y_2](t) = ce^{-\int p(t)dt}$, con $c \in \mathbb{R}$.
(d) $W[y_1, y_2](t) = 0$ para todo $t \in I$ o $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

20. Demuestre que si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones fundamentales de la ecuación $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ en un intervalo I, entonces

$$p(t) = \frac{y_2(t)y_1''(t) - y_1(t)y_2''(t)}{W[y_1, y_2](t)} \text{ y}$$

$$q(t) = -\frac{y_2'(t)y_1''(t) - y_1'(t)y_2''(t)}{W[y_1, y_2](t)}, \quad \textit{para} \quad t \in I.$$

21. Basado en el Teorema 1.1.1, determine un intervalo en que los problemas de valor inicial abajo tiene una única solución, sin resolverlos:
(a) $\begin{cases} (x^2 - 1)y'' + (x - 2)y = x \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_0' \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (x^2 - 1)y'' + y' + xy = x^2 \\ y(2) = y_0, y'(2) = y_0' \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (x^2 - x)y'' + (x + 1)y' + y = e^x \\ y(-1) = y_0, y'(-1) = y_0' \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (x^2 - x)y'' + (x + 3)y' + 2y = \cos x \\ y(2) = y_0, y'(2) = y_0' \end{cases}$

22. Considere la ecuación homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, con $p(x)$ y $q(x)$ funciones continuas en un intervalo I. Usando el Teorema 1.1.1 demuestre que esta ecuación tiene soluciones fundamentales.

23. Demuestre que $y(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ no puede ser solución de una ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, con $p(x)$ y $q(x)$ continuas en un intervalo conteniendo $x = 0$.

24. Considere la ecuación

$$xy'' - (2 + x^2)y' + 3xy = 0.$$

Demuestre que $y_1(x) = x^3$ y $y_2(x) = x^2|x|$ son soluciones linealmente independientes de esta ecuación válidas para todo $x \in \mathbb{R}$, sin embargo $W[y_1, y_2](x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

En este capítulo hacemos un estudio amplio acerca de los métodos clásicos de resolución de una ecuación diferencial ordinaria lineal. Aquí destacamos el hecho de poder determinar las soluciones fundamentales de una ecuación diferencial, porqué es a partir de estas que se genera su solución general. En la siguiente sección se trabaja con el caso de orden 2, a partir del cual se generaliza para ver el caso de orden n.

2.1 Ecuación diferencial lineal de segundo orden, fórmula de Abel y el método de reducción de orden

En esta sección, nos ocupamos acerca de las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial de segundo orden homogénea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

en la cual asumimos que las funciones a_2, a_1 y a_0 son continuas en algún intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, y que $a_2(x)$ no se anula en I, esto nos permite transformar la ecuación diferencial dada, en

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = 0$$

Aquí, ponemos $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$, para obtener una forma más práctica como:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.1}$$

donde p y q son continuas en I.

En primer lugar, vamos a establecer una fórmula que relacione la ecuación diferencial (2.1) con el Wronskiano de sus soluciones. Para determinar esta conexión, procedemos de la siguiente manera: tomamos dos soluciones y_1 y y_2 de la ecuación (2.1) definidas en I, para obtener:

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases}$$

si multiplicamos la primera ecuación por $-y_2$ y por y_1 a la segunda, entonces de la suma se llega a la identidad

$$y_1y_2'' - y_1''y_2 + p(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0 \tag{2.2}$$

En este caso, el Wronskiano de y_1, y_2 está dado por

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

mientras que

$$\frac{dW}{dx} = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

con estos resultados, la ecuación (2.2) se convierte en:

$$\frac{dW}{dx} + p(x)W = 0$$

de cuya resolución obtenemos la **identidad de Abel** dada por

$$W(x) = ce^{-\int p(x)dx}, \; c \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

según esta identidad, el Wronskiano o se hace cero, o es diferente de cero en todo el intervalo I.

A continuación analizamos un método[1] que nos permitirá obtener una solución de (2.1) si por anticipado ya conocemos otra. Pero antes de iniciar recordemos el teorema (1.1.4), según el cual la ecuación (2.1) no tendrá más de dos soluciones linealmente independientes, teniendo en cuenta este detalle, empezamos asumiendo que se conoce una solución $y_1(x)$ de (2.1); usando esta solución hallamos otra solución que la vamos asumir como

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) \tag{2.4}$$

[1]Este método se conoce como el método de reducción de orden.

como y_2 también debe ser solución de (2.1), entonces debe satisfacerla, es decir: $y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)=0$; aquí usamos (2.4), luego calculamos las derivadas y resolvemos apropiadamente para determinar $v(x)$ como se ilustra en los siguientes cálculos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}[v(x)y_1(x)]+p(x)\frac{d}{dx}[v(x)y_1(x)]+q(x)v(x)y_1(x)=0\\
&v''(x)y_1(x)+2v'(x)y_1'(x)+v(x)y_1''(x) \quad +p(x)\left[v'(x)y_1(x)+v(x)y_1'(x)\right]\\
&\qquad +q(x)v(x)y_1(x)=0\\
&v(x)\underbrace{\left[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)\right]}_{=0} \quad +v''(x)y_1(x)\\
&\qquad +\left[2y_1'(x)+p(x)y_1(x)\right]v'(x)=0\\
&\frac{v''(x)}{v'(x)}+2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}+p(x)=0, \text{ por derivación del logaritmo natural}\\
&\frac{d}{dx}[\ln v'(x)]+2\frac{d}{dx}[\ln y_1(x)]=-p(x)\\
&\frac{d}{dx}\left[\ln v'(x)+2\ln y_1(x)\right]=-p(x)\\
&\frac{d}{dx}\left\{\ln\left[v'(x)y_1^2(x)\right]\right\}=-p(x)\\
&d\left\{\ln\left[v'(x)y_1^2(x)\right]\right\}=-p(x)dx\\
&\ln\left[v'(x)y_1^2(x)\right]=-\int p(x)dx\\
&v'(x)=\frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}
\end{aligned}
$$

de esto último resulta que

$$v(x)=\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx \tag{2.5}$$

reemplazando (2.5) en (2.4) vemos que la otra solución de (2.1) está dada por la función

$$y_2(x)=y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx \tag{2.6}$$

La fórmula (2.6) es conocida como **fórmula de Liouville** y será muy aplicada más adelante. Ahora, en base a la fórmula de Liouville, hemos obtenido dos soluciones y_1, y_2 para la ecuación diferencial (2.1), la pregunta que ahora nos hacemos es, ¿son linealmente independientes estas dos soluciones?, para determinar si esto es así, calculamos el Wronskiano de estas dos soluciones y vemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx \\ & \\ y_1'(x) & \frac{d}{dx}\left[y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx\right] \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx \\ & \\ y_1'(x) & y_1'(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx + \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)} \end{vmatrix} \\ &= e^{-\int p(x)dx} \neq 0 \end{aligned}$$

Con este resultado se responde a la pregunta que se hizo más arriba, comprobándose en efecto que y_1 y y_2 son linealmente independientes[2], y por lo tanto la combinación lineal de ellas formaría la solución general de la ecuación diferencial (2.1).

A continuación resolvemos algunas ecuaciones diferenciales aplicando este método.

■ **Ejemplo 2.1** Para $x > 1$ se tiene la ecuación diferencial

$$\left(x^4 - x^3\right)y'' + \left(2x^3 - 2x^2 - x\right)y' - y = 0$$

Encuentre el sistema fundamental de soluciones, sabiendo que una de las soluciones es $y_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

<u>Resolución</u>

Si escribimos la ecuación diferencial en la forma (2.1), se tiene:

$$y'' + \underbrace{\left(\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 - x^2}\right)}_{p(x)}y' - \underbrace{\left(\frac{1}{x^4 - x^3}\right)}_{q(x)}y = 0$$

Dado que $y_1(x) = e^{\frac{1}{x}}$ es solución de la ecuación diferencial[3], procedemos a aplicar la fórmula de Liouville (2.6) para encontrar la segunda solución $y_2(x)$,

[2]También diríamos en este caso que y_1, y_2 son soluciones fundamentales, es decir, $sfs = \{y_1, y_2\}$, por lo que generarían el espacio solución de la ecuación diferencial (2.1).

[3]Recomendamos verificar este hecho.

la cual como ya vimos en la teoría es linealmente independiente con $y_1(x)$. En efecto se tiene:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx = e^{\frac{1}{x}}\int \frac{e^{-\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2}dx}}{e^{\frac{2}{x}}}dx \\ &= e^{\frac{1}{x}}\int \frac{e^{\int\left(\frac{1}{x^2(x-1)}-\frac{2}{x}\right)dx}}{e^{\frac{2}{x}}}dx = e^{\frac{1}{x}}\int \frac{e^{\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)dx}}{e^{\frac{2}{x}}}dx \\ &= e^{\frac{1}{x}}\int \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}dx = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Es decir, $y_2(x) = \frac{1}{x}$. Luego el sistema fundamental de soluciones está dado por $sfs = \left\{e^{\frac{1}{x}},\ \frac{1}{x}\right\}$, y la solución general mediante

$$y(x) = c_1e^{\frac{1}{x}} + c_2\frac{1}{x},\ x > 1 \tag{2.7}$$

tenga en cuenta que esta solución general es elemento del espacio solución de la ecuación diferencial. ■

■ **Ejemplo 2.2** Dada la ecuación diferencial $y'' + 3y' - 10y = 0$. Halle el sistema fundamental de soluciones y la solución general, sabiendo que una de las soluciones es: $y_1(x) = e^{2x}$.

<u>Resolución</u>

En esta ecuación diferencial es fácil identificar que $p(x) = 3$ y $q(x) = -10$. Usando la fórmula de Liouville (2.6) para encontrar la segunda solución se tiene:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= e^{2x}\int \frac{e^{-\int 3dx}}{(e^{2x})^2}dx = e^{2x}\int e^{-7x}dx \\ &= -\frac{1}{7}e^{-5x} \end{aligned}$$

Con este resultado vemos que[4] $sfs = \left\{e^{2x}, e^{-5x}\right\}$ y la solución general es $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}$. ■

■ **Ejemplo 2.3** En el intervalo $\langle 0, +\infty\rangle$ se define la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

[4]No se considera el escalar.

Si una de sus soluciones es la función $y_1(x) = \frac{\operatorname{senh} x}{x}$, determine el sfs y la solución general.

Resolución

En primer lugar, escribimos la ecuación diferencial dada en la forma (2.1), teniendo así:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} - y = 0$$

Aquí vemos que $p(x) = \frac{2}{x}$ y $q(x) = -1$. Aplicando la fórmula de Liouville (2.6), la segunda solución de la ecuación diferencial es como sigue:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx \\ &= \frac{\operatorname{senh} x}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{2dx}{x}}}{\frac{\operatorname{senh}^2 x}{x^2}} dx = \frac{\operatorname{senh} x}{x} \int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} dx \\ &= -\frac{\cosh x}{x} \end{aligned}$$

Con esto se tiene que $sfs = \left\{ \frac{\cosh x}{x}, \frac{\operatorname{senh} x}{x} \right\}$ y su solución general está dada por $y(x) = c_1 \frac{\cosh x}{x} + c_2 \frac{\operatorname{senh} x}{x}$. ■

■ **Ejemplo 2.4** La **ecuación de Legendre**[5] de orden p es de la forma:

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0, \ |x| > 1 \tag{2.8}$$

Para $p = 1$ se tiene: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, si una de sus soluciones es $y_1(x) = x$, encuentre el sfs y la solución general.

Resolución

Para empezar, escribimos la ecuación en la forma usual (2.1), así se tiene:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0, \quad \text{donde } \ p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$$

[5] Adrien Marie Legendre (1752- 1833), matemático francés. Hizo importantes contribuciones a la teoría de números, álgebra abstracta y el análisis matemático. Es conocido también por la transformada de Legendre muy aplicada en mecánica clásica.

Es fácil verificar que $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación dada. Para encontrar la segunda solución aplicamos la fórmula de Liouville (2.6), en efecto:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx \\
&= x\int \frac{e^{-\int \frac{2x}{x^2-1}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{1}{x^2(x^2-1)}dx \\
&= x\int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+1
\end{aligned}$$

Con este resultado se tiene que $sfs = \left\{x, \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+1\right\}$, y la solución general es

$$y(x) = c_1 x + c_2 + \frac{c_2}{2}x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right),\ |x|>1$$

■

■ **Ejemplo 2.5** Una ecuación muy importante en física-matemática es la **ecuación diferencial de Bessel**[6] de orden p:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right)y = 0,\ x>0$$

Para $p = \frac{1}{2}$ se tiene la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \tag{2.9}$$

verifique que la función $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}$ es una de sus soluciones, luego determine el sfs y la solución general.

<u>Resolución</u>

En primer lugar, verificamos que y_1 es solución de (2.9), para ello derivamos y_1 dos veces y se tiene:

$$y_1'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}x}{x^{3/2}} \qquad \text{y} \qquad y''(x) = \frac{3}{4}\frac{\operatorname{sen}x}{x^{5/2}} - \frac{\cos x}{x^{3/2}} - \frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}$$

[6] Friedrich Wilhelm Bessel nació el 22 de Julio de 1784 en Westfalia (Alemania), y falleció 17 de marzo de 1846 en Königsberg (Kaliningrado), fue matemático y astrónomo.

De Bessel se sabe que siendo muy joven trabajó en una compañía mercantil de importaciones y exportaciones de Bremen, donde destacó por sus habilidades con la matemática. Respecto de la astronomía, destaca por determinar la órbita del cometa 1P/Halley, trabajo que le permitió desempeñarse en un observatorio en Bremen. Aquí hizo muchas observaciones y mediciones importantes, lo que le valió para que el rey Federico Guillermo III de Prusia le nombrara director del Observatorio de Königsberg en 1810, en donde trabajo por el resto de su vida.

con lo cual

$$\begin{aligned}
x^2y_1''(x) &= \frac{3}{4}x^{-1/2}\operatorname{sen}x-\sqrt{x}\cos x-x^{3/2}\operatorname{sen}x\\
xy_1'(x) &= \sqrt{x}\cos x-\frac{1}{2}x^{-1/2}\operatorname{sen}x\\
\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y_1(x) &= x^{-3/2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{4}x^{-1/2}\operatorname{sen}x
\end{aligned}$$

sumando se obtiene:

$$x^2y_1''(x)+xy_1'(x)+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y_1(x)=0$$

lo cual verifica que $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial dada. Para obtener la segunda solución escribimos primero la ecuación diferencial en la forma (2.1), así se tiene:

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)y=0,\quad \text{donde}\ \ p(x)=\frac{1}{x}$$

Luego aplicando la fórmula de Liouville (2.6) resulta que la segunda solución se obtiene de las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx\\
&= \frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}\int\frac{e^{-\int\frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}\right)^2}dx=\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2x}\\
&= \frac{\cos x}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Con esto el $sfs=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{x}},\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}\right\}$ y la solución general es:

$$y(x)=c_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+c_2\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}},\ x>0$$

■

■ **Ejemplo 2.6** Resuelva la ecuación diferencial:

$$x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0,\ x\neq 0$$

sabiendo que una de sus soluciones es de la forma $y_1(x)=x^n$ para n apropiado

Resolución

Como $y_1(x) = x^n$ es solución de la ecuación diferencial, entonces ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} & x^2 y_1''(x) - x(x+2)y_1'(x) + (x+2)y_1(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & n(n-1)x^n - n(x+2)x^n + (x+2)x^n = 0 \\ \Rightarrow \quad & x^n \left[(1-n)x + (n^2 - 3n + 2)\right] = 0 \\ \Rightarrow \quad & (1-n)x + (n^2 - 3n + 2) = 0 \end{aligned}$$

Como la última igualdad acontece para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ y el conjunto $\{1, x\}$ es linealmente independiente, entonces

$$1 - n = 0 \ \text{ y } \ n^2 - 3n + 2 = 0$$

De ambas ecuaciones resulta que $n = 1$, por lo tanto una de las soluciones es $y_1(x) = x$. Para encontrar la segunda solución y_2, ponemos la ecuación diferencial en la forma (2.1), resultando así:

$$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{x+2}{x^2} y = 0$$

donde $p(x) = -\frac{x+2}{x}$ y $q(x) = \frac{x+2}{x^2}$. Aplicamos la fórmula de Liouville (2.6) para obtener:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx = x \int \frac{e^{-\int -\frac{x+2}{x} dx}}{x^2} dx \\ &= x \int \frac{e^{x + \ln x^2}}{x^2} dx = x \int e^x dx \\ &= xe^x \end{aligned}$$

Con este resultado se tiene finalmente que el sistema fundamental de soluciones y la solución general son respectivamente $sfs = \{x, xe^x\}$ y $y(x) = c_1 x + c_2 xe^x$. ■

■ **Ejemplo 2.7** En la ecuación diferencial:

$$x\left(1 + 3x^2\right) y'' + 2y' - 6xy = 0, \ x \neq 0$$

una de las soluciones es $y_1(x) = \frac{1}{x}$. Determine el sistema fundamental de soluciones y su solución general.

Resolución

En vista de que ya se tiene la primera solución, solo queda determinar la segunda solución aplicando la fórmula de Liouville (2.6). Para esto, la ecuación diferencial equivalente a la dada es:

$$y'' + \frac{2}{x(1+3x^2)}y' - \frac{6y}{1+3x^2} = 0 \tag{2.10}$$

donde $p(x) = \frac{2}{x(1+3x^2)}$ y $q(x) = -\frac{6}{1+3x^2}$. Luego la segunda solución se obtiene según las siguientes operaciones[7]

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx = \frac{1}{x}\int \frac{e^{\int\left(\frac{6x}{1+3x^2}-\frac{2}{x}\right)dx}}{\frac{1}{x^2}}dx = \frac{1}{x}\int (1+3x^2)dx \\ &= 1+x^2 \end{aligned}$$

de esta manera el sistema fundamental de soluciones está dado por

$$\text{sfs} = \left\{\frac{1}{x}, 1+x^2\right\}$$

y su solución general es $y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2(1+x^2)$. ■

■ **Ejemplo 2.8** Dada la ecuación diferencial $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0$, $x \neq 0$. Halle el sistema fundamental de soluciones y la solución general, si una de sus soluciones es de la forma $y_1(x) = e^{mx}$.

Resolución

Antes de empezar con la resolución de la ecuación diferencial, expresamos ésta en la forma usual (2.1), así tenemos que la ecuación equivalente está dada por:

$$y'' + \frac{2(1-x)}{x}y' + \frac{x-2}{x}y = 0,\ x \neq 0 \tag{2.11}$$

Como $y_1(x) = e^{mx}$ es solución de (2.11), reemplazándola allí se tiene

$$m^2e^{mx} + \frac{2m(1-x)}{x}e^{mx} + \frac{x-2}{x}e^{mx} = 0$$

de donde fácilmente vemos que $(m-1)^2x + 2(m-1) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, y esto a la vez implica[8] que $m = 1$. Por lo tanto la primera solución de (2.11)

[7] Aplicando la Fórmula de Liouville

[8] No olvide que el conjunto $\{x, 1\}$ es linealmente independiente. Recuerde también que cualquier combinación lineal de elementos linealmente independientes igualada a cero implicaba que los coeficientes son cero.

es: $y_1(x) = e^x$. Para determinar la segunda solución aplicamos la fórmula de Liouville (2.6), así se tiene:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx, \quad \text{donde } p(x) = \frac{2(1-x)}{x} \\ &= e^x \int \frac{e^{-\int \frac{2(1-x)}{x}dx}}{e^{2x}}dx = e^x \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

Como el signo aquí es irrelevante, tomamos $y_2(x) = \frac{e^x}{x}$, y así el sistema fundamental de soluciones está dado por $sfs = \left\{e^x, \frac{e^x}{x}\right\}$, y con esto la solución general es:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 \frac{e^x}{x}$$

El dominio[9] de esta solución es $\langle -\infty, 0\rangle$ o $\langle 0, +\infty\rangle$. ∎

2.2 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes

Se trata de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{2.12}$$

donde $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, son constantes. Este tipo de ecuaciones diferenciales son fáciles de resolver, así, para determinar la solución $y(x)$ de (2.12), suponemos que ésta es de la forma:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

Ponemos esta expresión en (2.12), y resulta la ecuación polinómica

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2.14}$$

La expresión en (2.14) es llamada **ecuación característica**[10] asociada a la ecuación diferencial (2.12). Para hacer el estudio de las soluciones de este tipo de ecuaciones, nos restringimos al caso de orden dos y a partir de allí hacemos la generalización para cualquier orden n.

[9] Para escoger uno de los intervalos, dependerá de donde nos dan la condición inicial.

[10] Es interesante ver como la transformación exponencial $y(x) = e^{\lambda x}$ convierte la ecuación diferencial (2.12) en una ecuación polinómica. Con esto, el problema de resolver la ecuación diferencial, nos conduce a determinar la raíces de la ecuación (2.14)

Suponer que se tiene la ecuación diferencial:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{2.15}$$

donde a_1 y a_0 son constantes. Aplicando (2.13) se llega a la ecuación característica

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2.16}$$

En (2.16), según el signo del discriminante $\triangle = a_1^2 - 4a_0$, se puede tener dos raíces reales y distintas, una solución real o raíces complejas. De acuerdo a cada uno de los casos, las soluciones de la ecuación diferencial se comportan como exponenciales, polinómicas o trigonométricas. A continuación, analizamos cada uno de los casos:

1. Cuando $\triangle > 0$, las raíces de (2.16) son reales y distintas. Suponiendo que dichas raíces son λ_1 y λ_2, entonces según (2.13) las soluciones de (2.15) correspondientes a dichas raíces estarían dadas por:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{y} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

Es fácil verificar que $W(y_1, y_2) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, es decir, y_1 y y_2 son linealmente independientes en todo $\mathbb{R}$. Por esto, el sistema fundamental de soluciones está dado por $sfs = \left\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\right\}$

■ **Ejemplo 2.9** En la ecuación diferencial: $y'' - 3y - 4 = 0$, aplicando (2.13) se tiene la ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$. A estas raíces le corresponden las soluciones $y_1(x) = e^{4x}$, $y_2(x) = e^{-x}$, que según vimos son linealmente independientes. De esta manera $sfs = \left\{e^{4x}, e^{-x}\right\}$, y la solución general es la combinación lineal de estas soluciones, es decir:

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$$

■

2. Cuando $\triangle = 0$, la ecuación (2.16) tiene solo una raíz real $\lambda = \lambda_0$, así, según (2.13) una solución de (2.15) correspondiente a dicha raíz estará dada por $y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$. Pero según el teorema 1.1.4 la ecuación diferencial (2.15) debe tener dos soluciones linealmente independientes, la pregunta ahora es ¿cómo conseguimos la segunda solución, si solamente se cuenta con una raíz de la ecuación característica?, la respuesta a este problema lo tenemos a partir de la fórmula de Liouville. Veamos el siguiente ejemplo

■ **Ejemplo 2.10** Considere la ecuación diferencial:

$$y'' - 2a_0 y' + a_0 y = 0 \tag{2.17}$$

En este caso es fácil ver que $\triangle = 0$ y la ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial usando (2.13) es

$$\lambda^2 - 2a_0\lambda + a_0 = 0$$

que equivale a $(\lambda - a_0)^2 = 0$, así podemos ver que la única raíz (con multiplicidad 2) es $\lambda = a_0$, luego la primera solución de la ecuación diferencial dada asociada a esta raíz es $y_1(x) = e^{a_0 x}$. A continuación determinamos la segunda solución $y_2(x)$ de (2.17) aplicando (2.6), en efecto:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx, \text{ donde } p(x) = -2a_0 \text{ y } q(x) = a_0 \\ &= e^{a_0 x}\int \frac{e^{-\int -2a_0 dx}}{e^{2a_0 x}}dx = e^{a_0 x}\int dx \\ &= xe^{a_0 x} \end{aligned}$$

De esta manera, si la primera solución es $y_1(x) = e^{a_0 x}$, entonces la segunda solución es $y_2(x) = xe^{a_0 x}$, así el sistema fundamental de soluciones es $sfs = \{e^{a_0 x}, xe^{a_0 x}\}$. ■

3. Cuando $\triangle < 0$, entonces las raíces de (2.16) son complejas y conjugadas entre si. Podemos suponer que dichas raíces son $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, con $\beta \neq 0$, de esta manera según (2.13), las soluciones de (2.15) son

$$y_1(x) = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\,\mathrm{sen}\,\beta x)$$

y

$$y_2(x) = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\,\mathrm{sen}\,\beta x)$$

Estas funciones y_1 y y_2 son soluciones de (2.15), sin embargo están en el campo de los números complejos[11]. Para pasar al campo de los números reales aplicamos el principio de superposición visto en el teorema 1.1.2, según el cual, la combinación lineal de soluciones de una ecuación diferencial lineal también es solución de dicha ecuación. Aplicando esta idea, tomamos las funciones:

$$\hat{y}_1(x) = \frac{1}{2}y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

[11] En la práctica estas soluciones no nos conviene, ya que todo nuestro estudio lo estamos haciendo en el campo de los números reales.

y

$$\hat{y}_2(x) = \frac{1}{2i}y_1(x) - \frac{1}{2i}y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

Así tenemos que $\hat{y}_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $\hat{y}_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ también son soluciones de (2.15). A continuación calculamos el Wronskianno de $\hat{y}_1$ y $\hat{y}_2$, en efecto se tiene:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} \hat{y}_1(x) & \hat{y}_2(x) \\ \hat{y}_1'(x) & \hat{y}_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}\cos\beta x\right) & \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\right) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x & \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} \\ &= \beta e^{\alpha x} \neq 0, \text{ pues } \beta \neq 0 \end{aligned}$$

Este resultado es muy importante, porque nos dice que $\hat{y}_1$ y $\hat{y}_2$ son soluciones linealmente independientes de 2.15, así el sistema fundamental de dicha ecuación es $sfs = \{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\}$.

■ **Ejemplo 2.11** Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

su ecuación característica asociada con (2.13) es dada por

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

cuyas raíces complejas son este caso $\lambda_1 = 3 + i$, $\lambda_1 = 3 - i$. Tomando $\alpha = 3$ y $\beta = 1$, se tiene que el sistema fundamental de soluciones es $sfs = \left\{e^{3x}\cos x, e^{3x}\operatorname{sen}x\right\}$ ■

■ **Ejemplo 2.12** Sea $\beta > 0$ y la ecuación diferencial $y'' + \beta^2 y = 0$. La ecuación característica según la transformación (2.15) es en este caso $\lambda^2 + \beta^2 = 0$, cuyas raíces son $\lambda = \pm\beta i$, como $\alpha = 0$, entonces el sistema fundamental de soluciones está dado por $sfs = \{\cos\beta x, \operatorname{sen}\beta x\}$, de donde su solución general es $y(x) = c_1\cos\beta x + c_2\operatorname{sen}\beta x$. ■

Lo hecho para el caso de orden 2, se generaliza para el caso de una ecuación diferencial de orden n. Así, las soluciones linealmente independientes de (2.12) van a depender de cómo sean las raíces de (2.14), para ilustrar esto, vamos a desarrollar los siguientes ejemplos:

■ **Ejemplo 2.13** Para k constante, resuelva la ecuación diferencial

$$y''' - 3ky'' + 3k^2y' - k^3y = 0$$

■

Resolución

Con la transformación (2.13) la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es $\lambda^3 - 3k\lambda^2 + 3k^2\lambda - k^3 = 0$, la cual equivale a:

$$(\lambda - k)^3 = 0$$

Como podemos ver la única raíz de la ecuación característica es $\lambda = k$(multiplicidad 3), con la cual se obtiene la solución $y_1(x) = e^{kx}$. Pero de acuerdo al teorema 1.1.4, la ecuación de nuestro ejemplo debe tener tres soluciones linealmente independientes, es así que para determinar la solución de esta ecuación diferencial aplicamos **el método de reducción de orden** que aparece en la deducción de la fórmula de Liouville, según el cual, si ya conocemos la solución y_1, hacemos

$$y(x) = v(x)e^{kx} \tag{2.18}$$

y esta función $y(x)$ debe ser solución de la ecuación diferencial. Calculamos $y'(x)$, $y''(x)$ y $y'''(x)$, teniendo así:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= v'(x)e^{kx} + kv(x)e^{kx} \\
y''(x) &= v''(x)e^{kx} + 2kv'(x)e^{kx} + k^2v(x)e^{kx} \\
y'''(x) &= v'''(x)e^{kx} + 3kv''(x)e^{kx} + 3k^2v'(x)e^{kx} + k^3v(x)e^{kx}
\end{aligned}$$

Ponemos $y'(x)$, $y''(x)$ y $y'''(x)$ en la ecuación diferencial, luego simplificamos y se obtiene una ecuación demasiado sencilla: $v'''(x)e^{kx} = 0$, de donde

$$v'''(x) = 0$$

Resolviendo esto último por integración consecutiva encontramos que

$$v(x) = ax^2 + bx + c$$

luego reemplazando en (2.18) vemos que

$$y(x) = (ax^2 + bx + c)e^{kx} = ax^2e^{kx} + bxe^{kx} + ce^{kx}$$

donde es fácil reconocer que las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial son $y_1(x) = e^{kx}$, $y_2(x) = xe^{kx}$ y $y_3(x) = x^2e^{kx}$. Aquí el lector debe verificar que y_1, y_2 y y_3 son soluciones de la ecuación diferencial, cuyo Wronskiano es diferente de cero. Finalmente, $sfs = \{e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}\}$.

Observación

En general[12], si una raíz de la ecuación característica es $\lambda = \lambda_0$ (multiplicidad m), entonces las soluciones fundamentales correspondientes a dicha raíz son: $e^{\lambda_0 x}$, $xe^{\lambda_0 x}$, $\cdots$, $x^{m-1}e^{\lambda_0 x}$.

■ **Ejemplo 2.14** La ecuación diferencial $y^{(4)} - 2y''' + \frac{3}{2}y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 0$ tiene como ecuación característica a $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} = 0$, factorizando esto se tiene $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^4 = 0$, así se obtiene la raíz $\lambda = \frac{1}{2}$ (multiplicidad 4), luego con lo explicado en la observación anterior, el sistema fundamental de soluciones es $sfs = \left\{e^{\frac{x}{2}}, xe^{\frac{x}{2}}, x^2e^{\frac{x}{2}}, x^3e^{\frac{x}{2}}\right\}$, y con esto la solución general de la ecuación diferencial es $y(x) = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2xe^{\frac{x}{2}} + c_3x^2e^{\frac{x}{2}} + c_4x^3e^{\frac{x}{2}}$. ■

■ **Ejemplo 2.15** La ecuación diferencial $y^{(8)} - 8y^{(6)} + 128y'' - 256y = 0$ tiene asociada la ecuación característica $\lambda^8 - 8\lambda^6 + 128\lambda^2 - 256 = 0$, factorizando esto se obtiene:

$$(\lambda - 2)^3(\lambda + 2)^3(\lambda^2 + 4) = 0$$

de donde las raíces son $\lambda = 2$ (multiplicidad 3), $\lambda = -2$ (multiplicidad 3), $\lambda = \pm 2i$. Luego las soluciones que corresponden a cada una de las raíces se hallan de la siguiente manera:

Para $\lambda = 2$ (multiplicidad 3), le corresponde las soluciones:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{2x} \\ y_2(x) &= xe^{2x} \\ y_3(x) &= x^2e^{2x} \end{aligned}$$

Para $\lambda = -2$ (multiplicidad 3), le corresponde las soluciones:

$$\begin{aligned} y_4(x) &= e^{-2x} \\ y_5(x) &= xe^{-2x} \\ y_6(x) &= x^2e^{-2x} \end{aligned}$$

Para $\lambda = \pm 2i$, le corresponde las soluciones:

$$\begin{aligned} y_7(x) &= \cos 2x \\ y_8(x) &= \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

Con estos resultados, el sistema fundamental de soluciones es:

$$sfs = \left\{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x\right\}$$

[12] si se tiene en cuenta lo ocurrido en el ejemplo 2.13.

Luego la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x} + c_4e^{-2x} + c_5xe^{-2x} + c_6x^2e^{-2x} + c_7\cos 2x + c_8 \operatorname{sen} 2x$$

■

■ **Ejemplo 2.16** El caso que veremos ahora es el de la ecuación diferencial $y^{(n)} = 0$, su ecuación característica asociada en este caso es $\lambda^n = 0$, cuya solución es $\lambda = 0$ (multiplicidad n). Usando la idea de la última observación se tiene que las soluciones correspondientes a dicha raíz son:

$y_1(x) = e^{0x} = 1$
$y_2(x) = xe^{0x} = x$
$y_3(x) = x^2e^{0x} = x^2$
$\vdots$
$y_n(x) = x^{n-1}e^{0x} = x^{n-1}$

Luego el sistema fundamental[13] es $sfs = \{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ y con esto la solución general de la ecuación diferencial está dada por

$$y(x) + c_1 + c_2x + c^3x^2 + \cdots + c_nx^{n-1}$$

■

■ **Ejemplo 2.17** La ecuación diferencial $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 15y''' = 0$ tiene como ecuación característica $\lambda^5 - 2\lambda^4 + 15\lambda^3 = 0$, cuya factorización nos dá $\lambda^3(\lambda^2 - 2\lambda + 15) = 0$. Las raíces en este caso son $\lambda = 0$ (multiplicidad 3) y $\lambda = 1 \pm \sqrt{14}i$, y así sus soluciones respectivas son:

Para $\lambda = 0$ (multiplicidad 3) le corresponde las soluciones[14] $\begin{cases} y_1(x) = 1 \\ y_2(x) = x \\ y_3(x) = x^2 \end{cases}$.

Para $\lambda = 1 \pm \sqrt{14}i$ le corresponde las soluciones $\begin{cases} y_4(x) = e^x\cos(\sqrt{14}x) \\ y_5(x) = e^x\operatorname{sen}(\sqrt{14}x) \end{cases}$.

Así se tiene que el sistema fundamental de soluciones es

$$sfs = \left\{1, x, x^2, e^x\cos(\sqrt{14}x), e^x\operatorname{sen}(\sqrt{14}x)\right\}$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es dada por:

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^x\cos(\sqrt{14}x) + c_5e^x\operatorname{sen}(\sqrt{14}x)$$

■

[13] Son linealmente independientes.
[14] Según el ejemplo 2.16.

■ **Ejemplo 2.18** Para la ecuación diferencial $y^{(4)}+64y=0$ su ecuación característica asociada es $\lambda^4+64=0$, cuya factorización es como sigue:

$$\begin{aligned}\lambda^4+64=0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda^4+16\lambda^2+64-16\lambda^2=0\\ &\Rightarrow \quad (\lambda^2+8)^2-(4\lambda)^2=0\\ &\Rightarrow \quad (\lambda^2+4\lambda+8)(\lambda^2-4\lambda+8)=0\end{aligned}$$

Desarrollando cada factor se obtienen las raíces: $\lambda=-2\pm 2i$, $\lambda=2\pm 2i$. Así:

Para $\lambda=-2\pm 2i$, corresponde las soluciones: $\begin{cases} y_1(x)=e^{-2x}\cos(2x)\\ y_2(x)=e^{-2x}\operatorname{sen}(2x)\end{cases}$.

Para $\lambda=2\pm 2i$, corresponde las soluciones: $\begin{cases} y_3(x)=e^{2x}\cos(2x)\\ y_4(x)=e^{2x}\operatorname{sen}(2x)\end{cases}$.

Luego el sistema fundamental de soluciones está dado por:

$$sfs=\left\{e^{-2x}\cos(2x),e^{-2x}\operatorname{sen}(2x),e^{2x}\cos(2x),e^{2x}\operatorname{sen}(2x)\right\}$$

y la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x)=c_1e^{-2x}\cos(2x)+c_2e^{-2x}\operatorname{sen}(2x)+c_3e^{2x}\cos(2x)+c_4e^{2x}\operatorname{sen}(2x)$$

■

■ **Ejemplo 2.19** En la ecuación diferencial

$$y^{(6)}-6y^{(5)}+42y^{(4)}-128y'''+420y''-600y'+1000y=0$$

su ecuación característica es

$$\lambda^6-6\lambda^5+42\lambda^4-128\lambda^3+420\lambda^2-600\lambda+1000=0$$

Agrupando convenientemente[15] los términos de la ecuación característica la expresión factorizada es

$$(\lambda^2-2\lambda+10)^3=0$$

Con esto, las raíces de la ecuación característica están dadas por $\lambda=1\pm 3i$ (multiplicidad 3), a lo cual corresponden las siguientes soluciones:

$y_1(x)=e^x\cos(3x)$

---

[15]Un método muy efectivo para resolver estas ecuaciones cuando los extremos son cubos perfectos, es asumir que

$$\left(\lambda^2+a\lambda+10\right)^3=\lambda^6-6\lambda^5+42\lambda^4-128\lambda^3+420\lambda^2-600\lambda+1000$$

Desarrollando el cubo y comparando términos se ve fácilmente que $a=-2$.

$y_1(x) = e^x \operatorname{sen}(3x)$

Multiplicando por x a las soluciones anteriores, se obtienen las siguientes:

$y_3(x) = xe^x \cos(3x)$

$y_4(x) = xe^x \operatorname{sen}(3x)$

Multiplicando por x nuevamente a las soluciones que preceden, se obtienen las siguientes:

$y_5(x) = x^2e^x \cos(3x)$

$y_6(x) = x^2e^x \operatorname{sen}(3x)$

De esta manera y_1, y_2, $\cdots$, y_6 constituyen el sistema fundamental de soluciones. ■

■ **Ejemplo 2.20** En la ecuación diferencial

$$y^{(6)} + 27y^{(4)} + 243y'' + 729y = 0$$

su ecuación característica es $\lambda^6 + 27\lambda^4 + 243\lambda^2 + 729 = 0$. En este caso la expresión factorizada es

$$(\lambda^2 + 9)^3 = 0$$

Con esto, las raíces de la ecuación característica están dadas por $\lambda = \pm 3i$ (multiplicidad 3), a lo cual corresponden las siguientes soluciones:

$y_1(x) = \cos(3x)$

$y_1(x) = \operatorname{sen}(3x)$

Multiplicando por x a las soluciones anteriores, se obtienen las siguientes:

$y_3(x) = x\cos(3x)$

$y_4(x) = x\operatorname{sen}(3x)$

Multiplicando por x nuevamente a las soluciones que preceden, se obtienen las siguientes:

$y_5(x) = x^2 \cos(3x)$

$y_6(x) = x^2 \operatorname{sen}(3x)$

De esta manera y_1, y_2, $\cdots$, y_6 constituyen el sistema fundamental de soluciones. ■

2.3 Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

Hasta aquí hemos desarrollado algunos métodos para determinar la solución de una ecuación diferencial homogénea. Ahora, si la ecuación es no homogénea, entonces se procede a determinar la solución de la ecuación complementaria[16] asociada a la ecuación no homogénea, esta solución la denotaremos con $y_c(x)$ (o también $y_h(x)$). Nuestro objetivo en esta sección es

[16]Esta no es más que la ecuación homogénea.

determinar la solución particular asociada a la ecuación diferencial no homogénea. En efecto, sea la ecuación diferencial no homogénea definida en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{2.19}$$

donde $a_{n-1}, \cdots, a_0$ y f son funciones definidas en I, aclarando además que $f \neq 0$ en I. Como decíamos antes, primero se determina la solución complementaria $y_c(x)$ de la ecuación:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{2.20}$$

luego se determinará la solución particular $y_p(x)$ de (2.19) asociada a $f(x)$, y de acuerdo al teorema 1.1.5 la solución total (o general) de (2.19) es $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$.

Para determinar la solución particular de (2.19) vamos a desarrollar dos métodos muy importantes, el método de coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetros.

2.3.1 Método de coeficientes indeterminados

Este método se aplica cuando la ecuación diferencial no homogénea es de coeficientes constantes y la función $f(x)$ en (2.19) y todas sus derivadas son generadas por un número finito de funciones al cual lo llamaremos **generador** y lo denotaremos con G. Para ser más explícitos, esta función $f(x)$ debe ser combinación lineal de funciones de la forma: $\operatorname{sen}(\alpha x)$, $\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$, $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}P_n(x)$, $\operatorname{sen}(\alpha x)P_n(x)$, $\cos(\alpha x)P_n(x)$, etc. donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n. El método consiste en determinar el generador, y según este generador y el sistema fundamental de soluciones tengan elementos comunes o no, procedemos de la siguiente manera:

1. **Cuando el generador y el sistema fundamental de soluciones no tienen elementos comunes**
   En este caso, la solución particular se asume como combinación lineal de los elementos del generador, ilustramos esto en los siguientes ejemplos:

   ■ **Ejemplo 2.21** Tomemos la ecuación diferencial:

$$y'' + y' - 2y = e^x\cos(2x) + x^2 \tag{2.21}$$

Como se ha explicado antes, primero se determina la solución complementaria de $y'' + y' - 2y = 0$. En este caso, la ecuación característica es $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, cuyas raíces son $\lambda = 1$, $\lambda = -2$, y con estas raíces el sistema fundamental de soluciones es

$$sfs = \{e^x, e^{-2x}\}$$

luego la solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

A continuación se procede a determinar la solución particular, para esto analizamos $f(x)$ y sus derivadas, y el conjunto de funciones elementales que involucran, en efecto
$f(x) = e^x\cos(2x) + x^2$, $\{e^x\cos(2x), x^2\}$.
$f'(x) = e^x\cos(2x) + 2e^x\operatorname{sen}(2x) + 2x$, $\{e^x\cos(2x), e^x\operatorname{sen}(2x), x\}$.
$f''(x) = -3e^x\cos(2x) - 4e^x\operatorname{sen}(2x) + 2$, $\{e^x\cos(2x), e^x\operatorname{sen}(2x), 1\}$.
$f'''(x) = -11e^x\cos(2x) + 2e^x\operatorname{sen}(2x)$, $\{e^x\cos(2x), e^x\operatorname{sen}(2x)\}$.
Si se continua derivando en forma indefinida, vemos que el generador es:

$$G = \{e^x\cos(2x), e^x\cos(2x), x^2, x, 1\}$$

Como G y el sfs no poseen elementos comunes, entonces asumimos la solución particular como

$$y_p = Ae^x\cos(2x) + Be^x\operatorname{sen}(2x) + Cx^2 + Dx + E \tag{2.22}$$

Reemplazamos y_p, y_p' y y_p'' en (2.21), luego simplificamos y se obtiene:

$$\begin{aligned}(6B-4A)e^x\cos(2x) - (6A+4B)e^x\operatorname{sen}(2x) \quad - \quad & 2Cx^2 + (2C-2D)x \\ +(2C-2E) \quad = \quad & e^x\cos(2x) + x^2\end{aligned}$$

que comparando coeficientes debe ocurrir que $\begin{cases} 6B-4A = 1 \\ 6A+4B = 0 \\ -2C = 1 \\ 2C-2D = 0 \\ 2C-2E = 0 \end{cases}$. Resolviendo este sistema se obtiene $A = -\frac{1}{13}$, $B = \frac{3}{26}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$ y $E = -\frac{3}{4}$; poniendo estos resultados en (2.22), la solución particular es

$$y_p(x) = -\frac{1}{13}e^x\cos(2x) + \frac{3}{26}e^x\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, es decir:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{13}e^x\cos(2x) + \frac{3}{26}e^x\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

■

Ejemplo 2.22 En la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 10y = 9e^x\left(x^2 + 4x - 4\right) + 85\cos(x) \tag{2.23}$$

para determinar su solución general se procede a encontrar primero su solución complementaria, luego su solución particular.
En primer lugar la ecuación complementaria asociada a (2.23) es:

$$y'' - 2y + 10y = 0 \tag{2.24}$$

cuya ecuación característica es $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, resolviendo esta ecuación se obtiene $\lambda = 1 \pm 3i$ de donde las soluciones linealmente independientes son $y_1(x) = e^x\cos(3x)$, $y_2(x) = e^x\operatorname{sen}(3x)$, y así el sistema fundamental de soluciones de (2.24) está dado por

$$sfs = \{e^x\cos(3x), e^x\operatorname{sen}(3x)\}$$

luego la solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1e^x\cos(3x) + c_2e^x\operatorname{sen}(3x) \tag{2.25}$$

Ahora, para determinar la solución particular nos fijamos en $f(x) = 9e^x\left(x^2 + 4x - 4\right) + 85\cos(x) \equiv 9x^2e^x + 36xe^x - 36e^x + 85\cos(x)$. Si procedemos a calcular las derivadas de $f(x)$, es fácil darse cuenta que el generador[17] G está dado por

$$G = \{x^2e^x, xe^x, e^x, \cos(x), \operatorname{sen}(x)\}$$

Como G y sfs no poseen elementos comunes, entonces asumimos la solución particular como

$$y_p(x) = Ax^2e^x + Bxe^x + Ce^x + D\cos(x) + E\operatorname{sen}(x) \tag{2.26}$$

derivando dos veces y_p se tiene:
$y_p'(x) = Ax^2e^x + (2A+B)xe^x + (B+C)e^x - D\operatorname{sen}(x) + E\cos(x)$
$y_p''(x) = Ax^2e^x + (4A+B)xe^x + (2A+2B+C)e^x - D\cos(x) - E\operatorname{sen}(x)$
Ponemos y_p, y_p' y $y_p''(x)$ en (2.23), simplificamos y se obtiene:

$$\begin{aligned} 9Ax^2e^x + 9Bxe^x + (2A+9C)e^x \quad &+ \quad (9D-2E)\cos(x) \\ +(9E+2D)\operatorname{sen}(x) \quad &= \quad 9x^2e^x + 36xe^x - 36e^x + 85\cos(x) \end{aligned}$$

[17] No olvide que este conjunto consta de todas las funciones de las cuales f y todas sus derivadas son combinación lineal.

Aquí comparamos coeficientes para obtener el sistema:

$$\begin{cases} 9A = 9 \\ 9B = 36 \\ 2A + 9C = -36 \\ 9D - 2E = 85 \\ 9E + 2D = 0 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema y las soluciones son $A = 1$, $B = 4$, $C = -\frac{38}{9}$, $D = 9$ y $E = -2$. Reemplazando estos valores en (2.26) la solución particular es

$$y_p(x) = x^2e^x - 4xe^x - \frac{38}{9}e^x + 9\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1e^x\cos(3x) + c_2e^x\operatorname{sen}(3x) + x^2e^x + 4xe^x - \frac{38}{9}e^x + 9\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)$$

■

■ **Ejemplo 2.23** En la ecuación diferencial

$$y'' + 64y = 2700x^2\cos(2x) \tag{2.27}$$

para determinar su solución general empezamos primero determinando su solución complementaria, luego su solución particular.
La solución complementaria (u homogénea) se halla de la ecuación complementaria asociada a (2.27), la cual es:

$$y'' + 64y = 0$$

Aquí es fácil ver que ecuación característica es $\lambda^2 + 64 = 0$, de cuya resolución se obtiene $\lambda = \pm 8i$, con estas raíces las soluciones linealmente independientes son $y_1(x) = \cos(8x)$, $y_2(x) = \operatorname{sen}(8x)$, y con estas funciones el sistema fundamental de soluciones de (2.23) está dado por

$$sfs = \{\cos(8x), \operatorname{sen}(8x)\}$$

asimismo, la solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1\cos(8x) + c_2\operatorname{sen}(8x) \tag{2.28}$$

Ahora para determinar la solución particular nos fijamos en

$$f(x) = 2700x^2\cos(2x)$$

Calculando en forma indefinida las derivadas de $f(x)$, es fácil darse cuenta que el generador G está dado por

$$G = \{x^2\cos(2x), x^2\operatorname{sen}(2x), x\cos(2x), x\operatorname{sen}(2x), \cos(2x), \operatorname{sen}(2x)\}$$

Como G y sfs no poseen elementos comunes, entonces asumimos la solución particular como

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ax^2\cos(2x) + Bx^2\operatorname{sen}(2x) + Cx\cos(2x) + Dx\operatorname{sen}(2x) \\ &+ E\cos(2x) + F\operatorname{sen}(2x) \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

Ahora, derivando dos veces y_p se tiene:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Bx^2\cos(2x) - 2Ax^2\operatorname{sen}(2x) + (2A+2D)x\cos(2x) \\ &+ (2B-2C)x\operatorname{sen}(2x) + (2F+C)\cos(2x) + (D-2E)\operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= -4Ax^2\cos(2x) - 4Bx^2\operatorname{sen}(2x) + (8B-4C)x\cos(2x) \\ &- (8A+4D)x\operatorname{sen}(2x) + (2A+4D-4E)\cos(2x) \\ &+ (2B-4C-4F)\operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

Ponemos y_p, y_p', $y_p''(x)$ en (*), luego simplificamos y se obtiene:

$$\begin{aligned} 60Ax^2\cos(2x) &+ 60Bx^2\operatorname{sen}(2x) + (8B+60C)x\cos(2x) \\ &+ (60D-8A)x\operatorname{sen}(2x) + (2A+4D+60E)\cos(2x) \\ &+ (2B-4C+60F)\operatorname{sen}(2x) = 2700x^2\cos(2x) \end{aligned}$$

En esta igualdad comparamos coeficientes para obtener el sistema: $\begin{cases} 60A = 2700 \\ 60B = 0 \\ 8B+60C = 0 \\ 60D-8A = 0 \\ 2A+4D+60E = 0 \\ 2B-4C+60F = 0 \end{cases}$. Resolvemos este sistema y las soluciones son $A = 45$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 6$, $E = -\frac{19}{10}$ y $F = 0$. Reemplazando estos valores en (*) la solución particular es

$$y_p(x) = 45x^2\cos(2x) + 6x\operatorname{sen}(2x) - \frac{19}{10}\cos(2x)$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1 \cos(8x) + c_2 \operatorname{sen}(8x) + 45x^2 \cos(2x) + 6x \operatorname{sen}(2x) - \frac{19}{10} \cos(2x)$$

■

2. **Cuando el generador y el sistema fundamental de soluciones tienen elementos comunes**
   Este caso acontece cuando al determinar el generador G de f y sus derivadas tiene elementos que pertenecen al sistema fundamental de soluciones. Lo que se hace en este caso es identificar el género de funciones que se repiten en el sistema fundamental de soluciones, y solamente a esos elementos multiplicarlos por x^α, donde α es el mínimo número natural para el cual dichos elementos ya no se repiten en el sistema fundamental de soluciones; hecho esto, la solución particular se toma como combinación lineal de todos los elementos resultantes de G. Ilustramos esto en los siguientes ejemplos:

■ **Ejemplo 2.24** Se tiene la ecuación diferencial no homogénea

$$y'' + y' - 6y = 1875x^2 e^{2x} - 78 \operatorname{sen}(3x) \tag{2.29}$$

Para determinar su solución complementaria nos fijamos justamente en la ecuación complementaria u homogénea $y'' + y' - 6y = 0$ asociada a (2.29). La ecuación característica asociada a esta ecuación complementaria es $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, cuyas raíces son $\lambda = 2$, $\lambda = -3$, y así el sistema fundamental de soluciones está dado por $sfs = \left\{e^{2x}, e^{-3x}\right\}$, de esto la solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Ahora, para determinar la solución particular de (2.29) nos fijamos en

$$f(x) = 1875x^2 e^{2x} - 78 \operatorname{sen}(3x)$$

Procediendo a calcular las derivadas[18] se tiene:

$$f'(x) = 3750xe^{2x} + 3750x^2 e^{2x} - 234 \cos(3x)$$

$$f''(x) = 3750e^{2x} + 15000xe^{2x} + 7500x^2 e^{2x} + 702 \operatorname{sen}(3x)$$

[18] En este ejemplo, aunque los cálculos no son agradables, los realizamos por motivos de explicación.

$$f'''(x) = 22500e^{2x} + 45000xe^{2x} + 15000x^2e^{2x} + 2106\cos(3x)$$

$$f^{(4)}(x) = 90000e^{2x} + 120000xe^{2x} + 30000x^2e^{2x} - 6318\,\text{sen}(3x)$$

Si seguimos derivando $f(x)$ nos damos cuenta que f y todas las derivadas circulan en torno a las funciones x^2e^{2x}, xe^{2x}, e^{2x}, $\cos(3x)$ y $\text{sen}(3x)$. Es decir, el generador de f y sus derivadas en este caso es

$$G = \left\{x^2e^{2x}, xe^{2x}, e^{2x}, \cos(3x), \text{sen}(3x)\right\}$$

Aquí vemos que la función e^{2x} se repite en el sistema fundamental de soluciones, y esta función procede de derivar x^2e^{2x}, de esta manera las funciones x^2e^{2x}, xe^{2x} y e^{2x} **conforman un género de funciones**. Según lo que nos sugiere arriba, hay que multiplicar a todos los elementos de dicho género[19] de funciones por x^α, haciendo esto se obtiene $x^{2+\alpha}e^{2x}$, $x^{1+\alpha}e^{2x}$ y $x^\alpha e^{2x}$. Aquí podemos ver que el menor número natural de α para el cual ninguno de dichos elementos se repite el sfs es $\alpha = 1$, así tenemos: x^3e^{2x}, x^2e^{2x} y xe^{2x}, luego el generador se convierte en

$$G^* = \left\{x^3e^{2x}, x^2e^{2x}, xe^{2x}, \cos(3x), \text{sen}(3x)\right\}$$

Con esto, la solución particular es de la forma:

$$y_p(x) = Ax^3e^{2x} + Bx^2e^{2x} + Cxe^{2x} + D\cos(3x) + E\,\text{sen}(3x) \qquad (2.30)$$

Calculando las derivadas de y_p se tiene:

$$y_p'(x) = 2Ax^3e^{2x} + (3A+2B)x^2e^{2x} + (2B+2C)xe^{2x} + Ce^{2x} - 3D\,\text{sen}(3x) + 3E\cos(3x)$$

$$y_p''(x) = 4Ax^3e^{2x} + (12A+4B)x^2e^{2x} + (6A+8B+4C)xe^{2x} + (2B+4C)e^{2x} - 9D\cos(3x) - 9E\,\text{sen}(3x)$$

Reemplazamos $y_p(x)$, $y_p'(x)$ y $y_p''(x)$ en (2.29), luego simplificamos y llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} 15Ax^2e^{2x} &+ (6A+10B)xe^{2x} + (2B+5C)e^{2x} + (3E-15D)\cos(3x) \\ &- (15E+3D)\,\text{sen}(3x) = 1875x^2e^{2x} - 78\,\text{sen}(3x) \end{aligned}$$

[19] Tenga en cuenta que la parte trigonométrica conforma otro género de funciones para las cuales no hay problema de repetición de términos en el sfs.

comparando coeficientes se tiene el sistema: $\begin{cases} 15A = 1875 \\ 6A + 10B = 0 \\ 2B + 5C = 0 \\ 3E - 15D = 0 \\ -(15E + 3D) = -78 \end{cases}$.

Resolviendo este sistema se obtiene: $A = 125$, $B = -75$, $C = 30$, $D = 1$ y $E = 5$, ponemos estos valores en (2.30) y vemos que la solución particular de (2.29) es:

$$y_p(x) = 125x^3e^{2x} - 75x^2e^{2x} + 30xe^{2x} + \cos(3x) + 5\,\text{sen}(3x)$$

Luego la solución general[20] es

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} + \left(125x^3 - 75x^2 + 30x\right)e^{2x} + \cos(3x) + 5\,\text{sen}(3x)$$

■

■ **Ejemplo 2.25** Si tomamos la ecuación diferencial

$$y''' + 6y'' + 9y' = 243x^2e^{-3x} + 27x^2 \tag{2.31}$$

Para determinar la solución complementaria, vemos que la ecuación complementaria asociada a (2.31) es $y''' + 6y'' + 9y' = 0$, con ecuación característica $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$, de cuya resolución se obtienen las raíces $\lambda = -3$ (multiplicidad 2), $\lambda = 0$, con las cuales el sistema fundamental de soluciones es:

$$sfs = \left\{e^{-3x}, xe^{-3x}, 1\right\}$$

de donde la solución complementaria es dada por

$$y_c(x) = c_1 + c_2e^{-3x} + c_3xe^{-3x}$$

Ahora, para determinar la solución particular tomamos $f(x) = 243x^2e^{-3x} + 27x^2$, si calculamos las derivadas de $f(x)$ vemos lo siguiente:

$$f'(x) = -729x^2e^{-3x} + 486xe^{-3x} + 54x$$

[20]No olvide que la solución general es según teorema 1.1.5 dada por: $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$.

$$f''(x) = 2187x^2e^{-3x} - 2916xe^{-3x} + 486e^{-3x} + 54$$

$$f'''(x) = -6561x^2 + 13122xe^{-3x} - 4374e^{-3x}$$

Si seguimos calculando las derivadas observamos que éstas se escriben como combinación de x^2e^{-3x}, xe^{-3x} y e^{-3x}. Luego el generador G de $f(x)$ y sus derivadas consiste de $G = \left\{x^2e^{-3x}, xe^{-3x}, e^{-3x}, x^2, x, 1\right\}$. Aquí podemos ver dos géneros de funciones; uno que consiste de x^2e^{-3x}, xe^{-3x}, e^{-3x}, que proceden de la derivación de x^2e^{-3x}; y el otro que consiste de x^2, x, 1, que proceden de la derivación de x^2. Se observa que del primer género las funciones e^{-3x} y xe^{-3x} se repiten en el sistema fundamental de soluciones; asimismo, del segundo género se repite la función constante 1. A continuación aplicamos la sugerencia del método, para esto, a los elementos del primer género los multiplicamos por x^{α_1} y a los elementos del segundo género por x^{α_2}, así tenemos[21]:

Para el primer género: $x^{2+\alpha_1}e^{-3x}$, $x^{1+\alpha_1}e^{-3x}$, $x^{\alpha_1}e^{-3x}$, no hay repetición de términos en el sfs para $\alpha_1 = 2$, con lo cual se tiene x^4e^{-3x}, x^3e^{-3x} y x^2e^{-3x}.

Para el segundo género:$x^{2+\alpha_2}$, $x^{1+\alpha_2}$, x^{α_2}, en este caso no hay repetición de términos en el sfs para $\alpha_2 = 1$, con lo cual se tiene x^3, x^2 y x.

Luego tenemos el nuevo conjunto

$$G^* = \left\{x^4e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3, x^2, x\right\}$$

De aquí se asume que la solución particular es

$$y_p(x) = Ax^4e^{-3x} + Bx^3e^{-3x} + Cx^2e^{-3x} + Dx^3 + Ex^2 + Fx \tag{2.32}$$

Calculamos $y_p'(x)$ y $y_p''(x)$, luego reemplazamos en (2.31) para obtener previa simplificación la expresión:

$$\begin{aligned} -36Ax^2e^{-3x} &+ (24A - 18B)xe^{-3x} + (6B - 6C)e^{-3x} + 27Dx^2 \\ &+ (18E + 36D)x + (6D + 12E + 9F) = 243x^2e^{-3x} + 27x^2 \end{aligned}$$

Ahora, para que esta igualdad tenga sentido, comparando coeficientes

[21] No olvide que aquí α_1 y α_2 son los menores números naturales para los cuales los elementos del generador ya no se repiten en el SFS.

se tiene el siguiente sistema: $\begin{cases} -36A = 243 \\ 24A - 18B = 0 \\ 6B - 6C = 0 \\ 27D = 27 \\ 18E + 36D = 0 \\ 6D + 12E + 9F = 0 \end{cases}$, resolviendo este sistema se tiene: $A = -\frac{27}{4}$, $B = -9$, $C = -9$, $D = 1$, $E = -2$ y $F = 2$; luego poniendo estos valores en (2.32) se tiene

$$y_p(x) = -\frac{27}{4}x^4e^{-3x} - 9x^3e^{-3x} - 9x^2e^{-3x} + x^3 - 2x^2 + 2x$$

con lo cual, la solución general de (2.31) está dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 + c_2e^{-3x} + c_3xe^{-3x} - \frac{27}{4}x^4e^{-3x} - 9x^3e^{-3x} - 9x^2e^{-3x} \\ &+ x^3 - 2x^2 + 2x \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.26** Se tiene la ecuación diferencial:

$$y'' + 16y = 768x^2\cos(4x) \tag{2.33}$$

Para determinar su solución general, procedemos como en los ejemplos precedentes. Primero determinamos su solución complementaria a partir de $y'' + 16y = 0$. Podemos ver aquí que la ecuación característica es $\lambda^2 + 16 = 0$ cuyas raíces son $\lambda = \pm 4i$, luego el sistema fundamental de soluciones es

$$sfs = \{\cos(4x), \operatorname{sen}(4x)\}$$

y de esto la solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1\cos(4x) + c_2\operatorname{sen}(4x)$$

Para determinar la solución particular tomamos $f(x) = 768x^2\cos(4x)$, luego calculamos sus derivadas para determinar su conjunto generador, en efecto:

$$f'(x) = -3072x^2\operatorname{sen}(4x) + 1536x\cos(4x)$$

$$f''(x) = -12288x^2\cos(4x) - 12288x\operatorname{sen}(4x) + 1536\cos(4x)$$

$$f'''(x) = 49152x^2\operatorname{sen}(4x) - 73728x\cos(4x) - 18432\operatorname{sen}(4x)$$

Si seguimos derivando, nos damos cuenta que $f(x)$ y todas sus derivadas circulan en torno a las funciones $x^2\cos(4x)$, $x^2\operatorname{sen}(4x)$, $x\cos(4x)$, $x\operatorname{sen}(4x)$, $\cos(4x)$ y $\operatorname{sen}(4x)$; las cuales serán provisionalmente los elementos del generador. Aquí todos estos elementos conforman un solo género de funciones, porque todos ellos provienen de la derivación de $x^2\cos(4x)$. Comparando con el sistema fundamental de soluciones, vemos que $\cos(4x)$ y $\operatorname{sen}(4x)$ son elementos comunes, luego para evitar la repetición de términos multiplicamos por x^α, dónde es fácil ver que esto ocurre con $\alpha = 1$, así el nuevo generador es

$$G = \left\{x^3\cos(4x), x^3\operatorname{sen}(4x), x^2\cos(4x), x^2\operatorname{sen}(4x), x\cos(4x), x\operatorname{sen}(4x)\right\}$$

Con este conjunto, la solución particular está dada por la expresión:

$$\begin{aligned} y_p(x) = Ax^3\cos(4x) &+ Bx^3\operatorname{sen}(4x) + Cx^2\cos(4x) \\ &+ Dx^2\operatorname{sen}(4x) + Ex\cos(4x) + Fx\operatorname{sen}(4x) \end{aligned}$$

que es equivalente a:

$$y_p(x) = \left(Ax^3 + Cx^2 + Ex\right)\cos(4x) + \left(Bx^3 + Dx^2 + Fx\right)\operatorname{sen}(4x) \tag{2.34}$$

Calculamos y_p', y_p'', luego los reemplazamos en (2.33), hacemos simplificación y se obtiene:

$$\begin{aligned} & 24Bx^2\cos(4x) - 24Ax^2\operatorname{sen}(4x) + (6A + 16D)x\cos(4x) \\ + \quad & (6B - 16C)x\operatorname{sen}(4x) + (2C + 8F)\cos(4x) + (2D - 8E)\operatorname{sen}(4x) \\ = \quad & 768x^2\cos(4x) \end{aligned}$$

Comparando coeficientes para que la igualdad sea una identidad se llega al sistema de ecuaciones $\begin{cases} 24B = 768 \\ -24A = 0 \\ 6A + 16D = 0 \\ 6B - 16C = 0 \\ 2C + 8F = 0 \\ 2D - 8E = 0 \end{cases}$, de cuya resolución se obtiene $A = 0$, $B = 32$, $C = 12$, $D = 0$, $E = 0$ y $F = -3$. Ponemos estos valores en (2.34) y la solución particular es:

$$y_p(x) = 12x^2\cos(4x) + \left(32x^3 - 3x\right)\operatorname{sen}(4x)$$

Finalmente la solución general de (2.33) es:

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \operatorname{sen}(4x) + 12x^2 \cos(4x) + \left(32x^3 - 3x\right) \operatorname{sen}(4x)$$

■

2.3.2 Método de variación de parámetros

Este es un método general que sirve para determinar la solución particular de cualquier ecuación diferencial lineal de la forma[22] (2.19), ya sea que los coeficientes sean variables o constantes. Para ver como funciona, hacemos a continuación una breve explicación del método de resolución y cuáles son los pasos cruciales para determinar la solución particular.

En primer lugar hay que determinar el sistema fundamental de soluciones de la ecuación complementaria u homogénea (2.20). En este caso suponemos que dicho sistema fundamental de soluciones está dado como en (1.14) por

$$sfs = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$$

Luego se asume la solución particular como

$$y_p(x) = A_1(x)y_1(x) + A_2(x)y_2(x) + \cdots + A_n(x)y_n(x) \tag{2.35}$$

Observe (2.35) y note que hemos asumido que A_1, A_2, $\cdots$, A_n son funciones dependientes de x y además derivables como veremos más adelante. El objetivo de este método es determinar tales funciones[23], y para eso se debe disponer de n ecuaciones, las cuales se consiguen de la siguiente manera:

Se determina la derivada de $y_p(x)$ en (2.35), así tenemos:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A_1'(x)y_1(x) + A_2'(x)y_2(x) + \cdots + A_n'(x)y_n(x) \\ &+ A_1(x)y_1'(x) + A_2(x)y_2'(x) + \cdots + A_n(x)y_n'(x) \end{aligned}$$

En esta expresión tomamos

$$A_1'(x)y_1(x) + A_2'(x)y_2(x) + \cdots + A_n'(x)y_n(x) = 0 \tag{2.36}$$

quedándonos así:

$$y_p'(x) = A_1(x)y_1'(x) + A_2(x)y_2'(x) + \cdots + A_n(x)y_n'(x) \tag{2.37}$$

[22] Tomando $a_n(x) = 1$, $\forall x \in I$ en (1.1)

[23] El método de variación de parámetros también es conocido como **método de Lagrange**, porque fue creado por Joseph-Louis de Lagrange para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

Volvemos a derivar (2.37) para obtener:

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= A_1'(x)y_1'(x)+A_2'(x)y_2'(x)+\cdots+A_n'(x)y_n'(x) \\ &+ A_1(x)y_1''(x)+A_2(x)y_2''(x)+\cdots+A_n(x)y_n''(x) \end{aligned}$$

Aquí tomamos

$$A_1'(x)y_1'(x)+A_2'(x)y_2'(x)+\cdots+A_n'(x)y_n'(x)=0 \tag{2.38}$$

y nos queda:

$$y_p''(x)=A_1(x)y_1''(x)+A_2(x)y_2''(x)+\cdots+A_n(x)y_n''(x) \tag{2.39}$$

Derivamos otra vez (2.39) para obtener:

$$\begin{aligned} y_p'''(x) &= A_1'(x)y_1''(x)+A_2'(x)y_2''(x)+\cdots+A_n'(x)y_n''(x) \\ &+ A_1(x)y_1'''(x)+A_2(x)y_2'''(x)+\cdots+A_n(x)y_n'''(x) \end{aligned}$$

Tomamos

$$A_1'(x)y_1''(x)+A_2'(x)y_2''(x)+\cdots+A_n'(x)y_n''(x)=0 \tag{2.40}$$

y nos queda:

$$y_p'''(x)=A_1(x)y_1'''(x)+A_2(x)y_2'''(x)+\cdots+A_n(x)y_n'''(x) \tag{2.41}$$

Procediendo en forma similar a los pasos anteriores, seguimos derivando hasta llegar al orden $n-1$, y aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} y_p^{(n-1)}(x) &= A_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+A_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+\cdots+A_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) \\ &+ A_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+A_2(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+A_n(x)y_n^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Tomamos finalmente

$$A_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+A_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+\cdots+A_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0 \tag{2.42}$$

y nos queda:

$$y_p^{(n-1)}(x)=A_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+A_2(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+A_n(x)y_n^{(n-1)}(x) \tag{2.43}$$

En (2.43) derivamos por última vez para obtener:

$$\begin{aligned} y_p^{(n)}(x) &= A_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+A_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+A_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) \\ &+ A_1(x)y_1^{(n)}(x)+A_2(x)y_2^{(n)}(x)+\cdots+A_n(x)y_n^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Reemplazamos $y_p^{(n)}(x)$ y las derivadas que le anteceden (2.43), (2.41), (2.39), (2.37) y (2.35), en la ecuación diferencial (2.19), hacemos las simplificaciones correspondientes[24] y nos queda:

$$A_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+A_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+A_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x) \qquad (2.44)$$

Recuerde que para determinar las funciones $A_1, \cdots, A_n$, se menciona más arriba que era necesario tener n ecuaciones. Pues esas n ecuaciones provienen de (2.36), (2.38), (2.40), (2.42) y (2.44); así tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l}
A_1'(x)y_1(x)+A_2'(x)y_2(x)+\cdots+A_n'(x)y_n(x)=0\\
A_1'(x)y_1'(x)+A_2'(x)y_2'(x)+\cdots+A_n'(x)y_n'(x)=0\\
A_1'(x)y_1''(x)+A_2'(x)y_2''(x)+\cdots+A_n'(x)y_n''(x)=0\\
\vdots\\
A_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+A_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+\cdots+A_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0\\
A_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+A_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+A_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x)
\end{array} \qquad (2.45)$$

Si este sistema de ecuaciones lo llevamos a la forma matricial se obtiene la ecuación (matricial)

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x)\\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1'(x)\\ A_2'(x)\\ \vdots\\ A_n'(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 0\\ f(x)\end{bmatrix} \qquad (2.46)$$

En la ecuación (2.46), las funciones $A_1'(x), \cdots, A_n'(x)$ se determinan aplicando la regla de Cramer[25] u otro método, y de allí por integración, las funciones $A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x)$. Observe, que el determinante de la matriz que aparece en la izquierda de (2.46) es el Wronskiano de $y_1, \cdots, y_n$.

■ **Ejemplo 2.27** Deducir la solución particular de la ecuación diferencial

$$y''+a_1y'(x)+a_0(x)y(x)=f(x) \qquad (2.48)$$

[24] Aquí debemos considerar que $y_1, y_2, \cdots, y_n$ son soluciones de (2.20).

[25] La regla de cramer consiste en lo siguiente:
Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_1\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_1\end{cases}$$

Resolución

Para determinar la solución particular de (2.48), procedemos de acuerdo al método explicado antes, para ello suponemos que el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + a_1 y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

es $sfs = \{y_1(x), y_2(x)\}$, a partir del cual, asumimos la solución particular (2.35) mediante la expresión

$$y_p(x) = A_1(x)y_1(x) + A_2(x)y_2(x) \tag{2.49}$$

Para determinar las funciones A_1 y A_2 de (2.49), nos fijamos en el sistema de ecuaciones (2.45), según el cual para nuestro ejemplo está dado por:

$$\begin{cases} A_1'(x)y_1(x) + A_2'(x)y_2(x) = 0 \\ A_1'(x)y_1'(x) + A_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{2.50}$$

Expresando este sistema en matrices se tiene

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

Si expresamos este sistema en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, entonces (2.47) tiene solución única, donde para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ resulta que:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n2} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \cdots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Aquí en (2.51) vemos que el determinante de la matriz que aparece a la izquierda, es el Wronskiano de y_1, y_2, en este caso dicho Wronskiano es

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

el cual es diferente se cero[26]. Luego aplicando regla de Cramer se obtiene:

$$A_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} \Rightarrow A_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx$$

$$A_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \Rightarrow A_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx$$

Ponemos $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en (2.49) y se obtiene la solución particular de (2.48) dada por[27]:

$$y_p(x) = \left(-\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx\right)y_1(x) + \left(\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx\right)y_2(x) \qquad (2.52)$$

■

■ **Ejemplo 2.28** Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + \alpha^2 y = \beta \tan(\alpha x), \ \alpha \neq 0 \text{ y } \beta \neq 0 \qquad (2.53)$$

Resolución

En primer lugar, la ecuación característica asociad a la ecuación diferencial homogénea

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

es

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0$$

cuyas raíces son $\lambda = \pm\alpha i$. Con estas raíces el sistema fundamental de soluciones es $sfs = \{\cos(\alpha x), \operatorname{sen}(\alpha x)\}$, luego la solución complementaria está dada por

$$y_c(x) = c_1\cos(\alpha x) + c_2\operatorname{sen}(\alpha x)$$

[26] Recuerde que los elementos del sfs son linealmente independientes.

[27] Un detalle importante que se debe tener en cuenta es que en el proceso de integración para determinar A_1 y A_2 no se considera las constantes de integración.

Para determinar la solución particular, suponemos que ésta se escribe como

$$y_p(x) = A_1(x)\cos(\alpha x) + A_2(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x) \tag{2.54}$$

donde según (2.50), las funciones $A_1(x)$ y $A_2(x)$ se determinan resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} A_1'(x)\cos(\alpha x) + A_2'(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x) = 0 \\ -\alpha A_1'(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x) + \alpha A_2'(x)\cos(\alpha x) = \beta\tan(\alpha x) \end{cases}$$

Este sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} A_1'(x)\cos(\alpha x) + A_2'(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x) = 0 \\ -A_1'(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x) + A_2'(x)\cos(\alpha x) = \frac{\beta}{\alpha}\tan(\alpha x) \end{cases}$$

Matricialmente esto sería:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha x) & \mathrm{sen}(\alpha x) \\ -\mathrm{sen}(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{\alpha}\tan(\alpha x) \end{bmatrix}$$

Aplicando regla de Cramer se tiene:

$$\begin{aligned} A_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{sen}(\alpha x) \\ \frac{\beta}{\alpha}\tan(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\alpha x) & \mathrm{sen}(\alpha x) \\ -\mathrm{sen}(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{vmatrix}} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\mathrm{sen}^2(\alpha x)}{\cos(\alpha x)}, \text{ luego} \\ A_1(x) &= -\frac{\beta}{\alpha}\int \frac{\mathrm{sen}^2(\alpha x)}{\cos(\alpha x)}dx \\ &= \frac{\beta}{\alpha}\left[\int \cos(\alpha x)dx - \int \sec(\alpha x)dx\right] \\ &= \frac{\beta}{\alpha^2}\,\mathrm{sen}(\alpha x) - \frac{\beta}{\alpha^2}\ln|\sec(\alpha x) + \tan(\alpha x)| \end{aligned}$$

En forma similar

$$\begin{aligned} A_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} \cos(\alpha x) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\alpha x) & \frac{\beta}{\alpha}\tan(\alpha x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\alpha x) & \mathrm{sen}(\alpha x) \\ -\mathrm{sen}(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{vmatrix}} = \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{sen}(\alpha x), \text{ luego} \\ A_2(x) &= \frac{\beta}{\alpha}\int \mathrm{sen}(\alpha x)dx = -\frac{\beta}{\alpha^2}\cos(\alpha x) \end{aligned}$$

Ponemos $A_1(x)$ y $A_2(x)$ en (2.54) y resulta

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \left[\frac{\beta}{\alpha^2}\operatorname{sen}(\alpha x) - \frac{\beta}{\alpha^2}\ln|\sec(\alpha x)+\tan(\alpha x)|\right]\cos(\alpha x) \\ &\quad -\frac{\beta}{\alpha^2}\cos(\alpha x)\operatorname{sen}(\alpha x) \\ &= -\frac{\beta}{\alpha^2}\cos(\alpha x)\ln|\sec(\alpha x)+\tan(\alpha x)| \end{aligned}$$

así tenemos la solución particular

$$y_p(x) = -\frac{\beta}{\alpha^2}\cos(\alpha x)\ln|\sec(\alpha x)+\tan(\alpha x)| \tag{2.55}$$

Luego la solución general de (2.53) está dada por

$$y(x) = c_1\cos(\alpha x) + c_2\operatorname{sen}(\beta x) - \frac{\beta}{\alpha^2}\cos(\alpha x)\ln|\sec(\alpha x)+\tan(\alpha x)|$$

■

■ **Ejemplo 2.29** Para $x > 1$ considere la ecuación diferencial

$$\left(x^4 - x^3\right)y'' + \left(2x^3 - 2x^2 - x\right)y' - y = \frac{(x-1)^2}{x}$$

Determine la solución particular y general de la ecuación diferencial.

<u>Resolución</u>

La expresión equivalente de la ecuación diferencial es:

$$y'' + \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2}y' - \frac{1}{x^4-x^3}y = \frac{x-1}{x^4}$$

En primer lugar, es necesario tener el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2}y' - \frac{1}{x^4-x^3}y = 0$$

pero esto ya lo conseguimos en la resolución del ejemplo 2.1, según el cual se obtuvo que

$$sfs = \left\{e^{\frac{1}{x}}, \frac{1}{x}\right\}$$

y tomando en cuenta este conjunto, la solución complementaria de la ecuación diferencial propuesta, según (2.7) está dada por

$$y_c(x) = c_1 e^{\frac{1}{x}} + c_2 \frac{1}{x}$$

Para determinar la solución particular, aplicamos el método de variación de parámetros, para lo cual asumimos que esta solución está dada por

$$y_p(x) = A_1(x) e^{\frac{1}{x}} + A_2(x) \frac{1}{x} \tag{2.56}$$

teniéndose según (2.50) el sistema:

$$\begin{cases} A_1'(x) e^{\frac{1}{x}} + A_1'(x) \frac{1}{x} = 0 \\ A_1'(x) \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} - A_2'(x) \frac{1}{x^2} = -\frac{x-1}{x^4} \end{cases}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{cases} A_1'(x) e^{\frac{1}{x}} + A_1'(x) \frac{1}{x} = 0 \\ A_1'(x) e^{\frac{1}{x}} + A_2'(x) = -\frac{x-1}{x^2} \end{cases}$$

Resolviendo este último sistema con la regla de Cramer, se tiene:

$$\begin{aligned} A_1'(x) &= \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \Longrightarrow A_1(x) = \int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = e^{-\frac{1}{x}} \\ A_2'(x) &= -\frac{1}{x} \Longrightarrow A_2(x) = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln x \end{aligned}$$

Con estos resultados en (2.56), la solución particular es:

$$y_p(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}}\right) e^{\frac{1}{x}} + (-\ln x) \frac{1}{x} = 1 - \frac{\ln x}{x}$$

Luego la solución general está dada por

$$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{x}} + c_2 \frac{1}{x} + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

■

■ **Ejemplo 2.30** Determine la solución general de la ecuación diferencial:

$$x\left(1+3x^2\right) y'' + 2y' - 6xy = \left(1+3x^2\right)^2,\ x \neq 0$$

Resolución

La expresión equivalente de la ecuación diferencial es:

$$y'' + \frac{2}{x(1+3x^2)}y' - \frac{6y}{1+3x^2} = \frac{1+3x^2}{x}$$

Para determinar la solución complementaria de la ecuación propuesta, nos fijamos en el sistema fundamental de la ecuación homogénea:

$$y'' + \frac{2}{x(1+3x^2)}y' - \frac{6y}{1+3x^2} = 0$$

el cual ya fue conseguido en el ejemplo 2.7. Según este ejemplo, el sistema fundamental de soluciones está dado por:

$$\text{sfs} = \left\{ \frac{1}{x}, 1+x^2 \right\}$$

y de allí, la solución complementaria de la ecuación diferencial es:

$$y_c(x) = c_1\frac{1}{x} + c_2(1+x^2)$$

Ahora sólo queda hallar la solución particular, para lo cual aplicamos el método de variación de parámetros, para esto asumimos que la solución particular está dada por:

$$y_p(x) = A_1(x)\frac{1}{x} + A_2(x)(1+x^2) \tag{2.57}$$

De acuerdo a (2.50), las funciones A_1 y A_2 se determinan del sistema

$$\begin{cases} \frac{A_1'(x)}{x} + (1+x^2)A_2'(x) = 0 \\ \\ -\frac{A_1'(x)}{x^2} + 2xA_2'(x) = \frac{1+3x^2}{x} \end{cases}$$

Pero este sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} A_1'(x) + (x+x^3)A_2'(x) = 0 \\ \\ -A_1'(x) + 2x^3A_2'(x) = x+3x^3 \end{cases}$$

Aquí, aplicamos la regla de Cramer y se obtiene:

$$\begin{aligned} A_1'(x) &= -x-x^3 \Rightarrow A_1(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \\ A_2'(x) &= 1 \Rightarrow A_2(x) = x \end{aligned}$$

Ponemos $A_1(x)$ y $A_2(x)$ en (2.57) y se obtiene que la solución particular es:

$$y_p(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\frac{1}{x} + (x)\,(1+x^2) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^3 \tag{2.58}$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial propuesta es:

$$y(x) = c_1\frac{1}{x} + c_2(1+x^2) + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^3$$

■

■ **Ejemplo 2.31** Resuelva la ecuación diferencial:

$$xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = \operatorname{sen}(2x),\ x > 0$$

Resolución

La ecuación diferencial propuesta es equivalente a:

$$y'' + \frac{2(1-x)}{x}y' + \frac{x-2}{x}y = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x},\ x > 0 \tag{2.59}$$

En este caso, para determinar la solución complementaria de (2.59) nos remitimos al ejemplo 2.8, según el cual, el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea:

$$y'' + \frac{2(1-x)}{x}y' + \frac{x-2}{x}y = 0$$

está dado por:

$$\text{sfs} = \left\{e^x, \frac{e^x}{x}\right\}$$

y de allí, la solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1e^x + c_2\frac{e^x}{x}$$

Ahora, para determinar la solución particular aplicamos el método de variación de parámetros, así asumimos que:

$$y_p(x) = A_1(x)e^x + A_2(x)\frac{e^x}{x} \tag{2.60}$$

De acuerdo a (2.50), las funciones A_1 y A_2 se determinan del sistema

$$\begin{cases} A_1'(x)e^x + \frac{e^x}{x}A_2'(x) = 0 \\ \\ A_1'(x)e^x + \frac{x-1}{x^2}e^xA_2'(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} \end{cases}$$

Pero este sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} xA_1'(x)+A_2'(x)=0 \\ \\ x^2A_1'(x)+(x-1)A_2'(x)=xe^{-x}\operatorname{sen}(2x) \end{cases}$$

Escribiendo este último sistema en matrices se tiene:

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ x^2 & x-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ xe^{-x}\operatorname{sen}(2x) \end{bmatrix}$$

Aquí aplicamos la regla de Cramer y se obtiene:

$$A_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ xe^{-x}\operatorname{sen}(2x) & x-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & x-1 \end{vmatrix}} = \frac{-xe^{-x}\operatorname{sen}(2x)}{x(x-1)-x^2} = e^{-x}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\Rightarrow A_1(x) = \int e^{-x}\operatorname{sen}(2x)dx = -\frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x)-\frac{1}{5}e^{-x}\operatorname{sen}(2x)$$

$$A_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ x^2 & xe^{-x}\operatorname{sen}(2x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & x-1 \end{vmatrix}} = \frac{x^2e^{-x}\operatorname{sen}(2x)}{x(x-1)-x^2} = -xe^{-x}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_2(x) &= -\int xe^{-x}\operatorname{sen}(2x)dx \\ &= \left(\frac{2x}{5}+\frac{4}{25}\right)e^{-x}\cos(2x)+\left(\frac{x}{5}-\frac{3}{25}\right)e^{-x}\operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

Ponemos $A_1(x)$ y $A_2(x)$ en (2.60) y se obtiene que la solución particular es:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \left(-\frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x)-\frac{1}{5}e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\right)e^x \\ &\quad +\left[x\left(\frac{2x}{5}+\frac{4}{25}\right)e^{-x}\cos(2x)+\left(\frac{x}{5}-\frac{3}{25}\right)e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\right]\frac{e^x}{x} \\ &= \frac{1}{25x}\left(4\cos(2x)-3\operatorname{sen}(2x)\right) \end{aligned}$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial propuesta es:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 \frac{e^x}{x} + \frac{1}{25x}(4\cos(2x) - 3\,\mathrm{sen}(2x))$$

■

■ **Ejemplo 2.32** Determine la solución general de $y'' + \alpha^2 y = \beta \csc(\alpha x)$, con $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$.

Resolución

Acá es fácil determinar la solución complementaria por ser la ecuación diferencial de coeficientes constantes, sin más preámbulos, el sistema fundamental de soluciones y la solución complementaria son respectivamente $sfs = \{\cos(\alpha x), \mathrm{sen}(\alpha x)\}$ y

$$y_c(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \,\mathrm{sen}(\alpha x)$$

Para determinar la solución particular procedemos según el método de variación de parámetros[28], así suponemos que está dada por la expresión

$$y_p(x) = A_1(x)\cos(\alpha x) + A_2(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x) \tag{2.61}$$

donde las funciones $A_1(x)$ y $A_2(x)$ se determinan según (2.50) resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} A_1'(x)\cos(\alpha x) + A_2'(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x) = 0 \\ \\ -\alpha A_1'(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x) + \alpha A_2'(x)\cos(\alpha x) = \beta\csc(\alpha x) \end{cases}$$

donde $f(x) = \beta\csc(\alpha x)$. Simplificando este sistema se tiene

$$\begin{cases} A_1'(x)\cos(\alpha x) + A_2'(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x) = 0 \\ \\ -A_1'(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x) + A_2'(x)\cos(\alpha x) = \frac{\beta}{\alpha}\csc(\alpha x) \end{cases}$$

Luego expresando este último sistema en matrices se tiene la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha x) & \mathrm{sen}(\alpha x) \\ -\mathrm{sen}(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{\alpha}\csc(\alpha x) \end{bmatrix}$$

[28] El método de coeficientes indeterminados aquí no es aplicable porque la función de la derecha y sus derivadas no son generadas por un número finito de funciones.

En esta ecuación aplicamos la regla de Cramer y se obtiene:

$$A_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}(\alpha x) \\ \frac{\beta}{\alpha}\csc(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\alpha x) & \operatorname{sen}(\alpha x) \\ -\operatorname{sen}(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{vmatrix}} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Rightarrow A_1(x) = -\int \frac{\beta}{\alpha} dx = -\frac{\beta}{\alpha} x$$

$$A_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(\alpha x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\alpha x) & \frac{\beta}{\alpha}\csc(\alpha x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\alpha x) & \operatorname{sen}(\alpha x) \\ -\operatorname{sen}(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{vmatrix}} = \frac{\beta}{\alpha}\cos(\alpha x)\csc(\alpha x) = \frac{\beta}{\alpha}\cot(\alpha x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_2(x) &= \int \frac{\beta}{\alpha}\cot(\alpha x) dx \\ &= \frac{\beta}{\alpha^2}\ln|\operatorname{sen}(\alpha x)| \end{aligned}$$

Ponemos $A_1(x)$ y $A_2(x)$ en (2.61) y se obtiene que la solución particular:

$$y_p(x) = -\frac{\beta}{\alpha}\cos(\alpha x) + \frac{\beta}{\alpha^2}\operatorname{sen}(\alpha x)\ln|\operatorname{sen}(\alpha x)|$$

Luego la solución general de la ecuación propuesta es:

$$y(x) = c_1\cos(\alpha x) + c_2\operatorname{sen}(\alpha x) - \frac{\beta x}{\alpha}\cos(\alpha x) + \frac{\beta}{\alpha^2}\operatorname{sen}(\alpha x)\ln|\operatorname{sen}(\alpha x)|$$

■

■ **Ejemplo 2.33** Halle la solución de la ecuación: $y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = \beta\sec^3(\alpha x)$, siendo α y β constantes reales distintas de cero.

Resolución

La ecuación característica de la ecuación diferencial complementaria es: $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 = 0$, de donde se tiene $\lambda = \alpha$ (multiplicidad 2), luego el sistema fundamental de soluciones está dado por

$$sfs = \{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}\}$$

y de allí la solución complementaria

$$y_c(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}$$

Para encontrar la solución particular aplicamos el método de variación de parámetros[29], para esto suponemos que la solución particular está dada por

$$y_p(x) = A_1(x)e^{\alpha x} + A_2(x)xe^{\alpha x} \tag{2.62}$$

Donde $A_1(x)$ y $A_2(x)$ se determinan según (2.50) del sistema

$$\begin{cases} A_1'(x)e^{\alpha x} + A_2'(x)xe^{\alpha x} = 0 \\ \\ \alpha A_1'(x)e^{\alpha x} + A_2'(x)(1+\alpha x)e^{\alpha x} = \beta \sec^3(\alpha x) \end{cases}$$

siendo en este caso, $f(x) = \beta \sec^3(\alpha x)$. Simplificando este sistema se tiene

$$\begin{cases} A_1'(x) + A_2'(x)x = 0 \\ \\ \alpha A_1'(x) + A_2'(x)(1+\alpha x) = \beta e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x) \end{cases}$$

Luego expresando este último sistema en matrices se tiene la ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ \alpha & 1+\alpha x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x) \end{bmatrix}$$

En esta ecuación aplicamos la regla de Cramer y se obtiene:

$$\begin{aligned} A_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ \beta e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x) & 1+\alpha x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ \alpha & 1+\alpha x \end{vmatrix}} = -\beta x e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x) \\ \\ \Rightarrow A_1(x) &= -\beta \int x e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x) dx \end{aligned}$$

$$A_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ \alpha & 1+\alpha x \end{vmatrix}} = \beta e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x)$$

[29]Pues $f(x) = \beta \sec^3(\alpha x)$ y sus derivadas no son generadas por un número finito de términos.

$$\Rightarrow A_2(x) \quad = \quad \beta \int e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x)dx$$

Ponemos $A_1(x)$ y $A_2(x)$ en (2.62) y se obtiene que la solución particular está dada por:

$$y_p(x) = \left(-\beta \int xe^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x)dx\right) e^{\alpha x} + \left(\beta \int e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x)dx\right) xe^{\alpha x}$$

Aquí las integrales quedan implícitas, porque las funciones no son integrables. Volvemos a escribir la solución particular con algunas simplificaciones, teniendo así:

$$y_p(x) = \beta e^{\alpha x} \left[x \int e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x)dx - \int xe^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x)dx\right]$$

Luego la solución general de la ecuación diferencial propuesta es:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 xe^{\alpha x} + \beta e^{\alpha x} \left[x \int e^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x)dx - \int xe^{-\alpha x} \sec^3(\alpha x)dx\right]$$

■

■ **Ejemplo 2.34** Resuelva la ecuación diferencial

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x, \; x > 1 \tag{2.63}$$

<u>Resolución</u>

Para resolver (2.63), escribimos en su forma equivalente

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = (x-1)e^x, \; x > 1 \tag{2.64}$$

Aquí, es fácil ver que $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación complementaria

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

luego, la segunda solución de la ecuación complementaria se obtiene aplicando la fórmula de Liouville (2.6), así tenemos:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx, \;\; \text{donde} \;\; p(x) = -\frac{x}{x-1} \\
&= e^x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x-1}dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{x+\ln(x-1)}}{x^2} dx = x \int \frac{(x-1)e^x}{x^2} dx \\
&= x\left(\frac{e^x}{x}\right), \;\; \text{aquí: } d\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{x-1}{x^2} e^x dx \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Con esto, el sistema fundamental de soluciones y la solución complementaria son respectivamente $sfs = \{x, e^x\}$ y

$$y_c(x) = c_1 x + c_2 e^x$$

Para determinar la solución particular de (2.64), suponemos que su solución particular está dada por

$$y_p(x) = A_1(x)x + A_2(x)e^x \tag{2.65}$$

donde $f(x) = (x-1)e^x$. En este caso, las funciones A_1 y A_2 se obtienen según (2.50) del sistema

$$\begin{cases} A_1'(x)x + A_2'(x)e^x = 0 \\ \\ A_1'(x) + A_2'(x)e^x = (x-1)e^x \end{cases}$$

Expresando en matrices este sistema se tiene:

$$\begin{bmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (x-1)e^x \end{bmatrix}$$

Luego aplicamos regla de Cramer para determinar $A_1(x)$ y $A_2(x)$, teniendo así:

$$A_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ (x-1)e^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}} = -\frac{(x-1)e^{2x}}{(x-1)e^x} = -e^x$$

$$\Rightarrow A_1(x) = -\int e^x dx = e^x$$

$$A_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & (x-1)e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}} = \frac{x(x-1)e^x}{(x-1)e^x} = x$$

$$\Rightarrow A_2(x) = \int dx = \frac{x^2}{2}$$

Ponemos $A_1(x)$ y $A_2(x)$ en (2.65) y se obtiene:

$$y_p(x) = -xe^x + \frac{x^2}{2}e^x$$

luego la solución general es:

$$y(x) = c_1 x + c_2 e^x - xe^x + \frac{x^2}{2} e^x$$

■

■ **Ejemplo 2.35** Resuelva la ecuación diferencial

$$x^2 y'' - (x^2 + 2x)y' + (x+2)y = x^3 \tag{2.66}$$

<u>Resolución</u>

La resolución de la ecuación diferencial homogénea (o complementaria) asociada a (2.66) fue realizada en el ejemplo 2.6, podemos ver allí que el sistema fundamental de soluciones consistía en

$$sfs = \{x, xe^x\}$$

por lo que la solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1 x + c_2 xe^x$$

El problema aquí es encontrar la solución particular, por lo que aplicamos el método de variación de parámetros, así asumimos que la solución particular está dada por:

$$y_p(x) = A_1(x)x + A_2(x)xe^x \tag{2.67}$$

donde A_1 y A_2 se determinan según (2.50), del sistema :

$$\begin{cases} A_1'(x)x + A_2'(x)xe^x = 0 \\ \\ A_1'(x) + A_2'(x)(x+1)e^x = x \end{cases} \tag{2.68}$$

Escribiendo el sistema en matrices se tiene

$$\begin{bmatrix} x & xe^x \\ 1 & (x+1)e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$$

Aplicando regla de Cramer y se obtiene:

$$\begin{aligned} A_1'(x) &= -1 \Longrightarrow A_1(x) = -x \\ A_2'(x) &= e^{-x} \Longrightarrow A_2(x) = -e^{-x} \end{aligned}$$

Reemplazamos estos resultados en (2.67), y resulta que la solución particular está dada por:

$$y_p(x) = -x^2 - x \tag{2.69}$$

Finalmente, la solución general de (2.66) está dada por

$$y(x) = c_1 x + c_2 x e^x - x - x^2$$

■

■ **Ejemplo 2.36** En la ecuación diferencial

$$xy'' - (1+x)y' + y = x^2 e^{2x},\ x > 0 \tag{2.70}$$

1. determine el sistema fundamental de soluciones, sabiendo que una de las soluciones de la ecuación complementaria asociada a (2.70) es de la forma $y_1(x) = e^{mx}$.
2. determine la solución particular y solución general de la ecuación diferencial.
3. determine la curva integral que pasa por los puntos $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $(1,0)$.

<u>Resolución</u>

1. En primer lugar la ecuación diferencial (2.70) es equivalente a

$$y'' - \frac{(1+x)}{x} y' + \frac{1}{x} y = x e^{2x} \tag{2.71}$$

cuya ecuación diferencial complementaria es

$$y'' - \frac{(1+x)}{x} y' + \frac{1}{x} y = 0$$

Aquí se nos dice que una de las soluciones de esta ecuación es: $y_1(x) = e^{mx}$. Reemplazando se tiene:

$$m^2 e^{mx} - m \frac{1+x}{x} e^{mx} + \frac{e^{mx}}{x} = 0$$

de donde se obtiene $m(m-1)x + (1-m) = 0$, $\forall x > 0$; por la independencia lineal de $\{x, 1\}$ debe acontecer que $m(m-1) = 0$ y $1 - m = 0$, con lo cual $m = 1$. Así se tiene que la primera solución de la ecuación complementaria asociada a (2.71) es:

$$y_1(x) = e^x$$

Para determinar la segunda solución aplicamos la fórmula de Liouville (2.6), siendo así:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx, \ \text{donde } p(x) = -\frac{1+x}{x} \\ &= e^x \int \frac{e^{\int \frac{1+x}{x}dx}}{e^{2x}}dx = e^x \int xe^{-x}dx = e^x(-xe^{-x} - e^{-x}) \\ &= -(x+1) \end{aligned}$$

luego, el sistema fundamental de soluciones y la solución complementaria son respectivamente $sfs = \{e^x, x+1\}$ y

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2(x+1)$$

2. Ahora, asumimos que la solución particular de (2.71), está dada por

$$y_p(x) = A(x)e^x + B(x)(x+1) \tag{2.72}$$

donde las funciones $A(x)$ y $B(x)$ se obtienen según (2.50) del sistema

$$\begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)(x+1) = 0 \\ \\ A'(x)e^x + B'(x) = xe^{2x} \end{cases}$$

Expresando en matrices este sistema se tiene:

$$\begin{bmatrix} e^x & 1+x \\ e^x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ xe^{2x} \end{bmatrix}$$

Aplicamos regla de Cramer y se obtiene:

$$A'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x+1 \\ xe^{2x} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x+1 \\ e^x & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x(x+1)e^{2x}}{xe^x} = (1+x)e^x$$

$$\Rightarrow A(x) = \int (1+x)e^x dx = xe^x$$

$$B'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & xe^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x+1 \\ e^x & 1 \end{vmatrix}} = \frac{xe^{3x}}{-xe^x} = -e^{2x}$$

$$\Rightarrow A_2(x) \quad = \quad \int -e^{2x}dx = -\frac{1}{2}e^{2x}$$

Ponemos $A(x)$ y $B(x)$ en (2.72) y se obtiene la solución particular $y_p(x) = e^x(xe^x) - \frac{1}{2}e^{2x}(x+1)$, que equivale a:

$$y_p(x) = \frac{x-1}{2}e^{2x}$$

Con estos resultados, la solución de (2.70) es:

$$y(x) = c_1e^x + c_2(x+1) + \frac{x-1}{2}e^{2x} \tag{2.73}$$

3. Si la curva pasa por los puntos $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $(1,0)$, entonces (2.73) satisface $y(0) = \frac{1}{2}$ y $y(1) = 0$. Aplicando estas condiciones de frontera se obtiene $c_1 = \frac{2}{2-e}$ y $c_2 = \frac{e}{e-2}$, luego la curva integral que pasa por dichos puntos es
$$y(x) = \frac{2}{2-e}e^x + \frac{e}{e-2}(x+1) + \frac{x-1}{2}e^{2x},\ x \geq 0$$

■

2.3.3 Método de Los operadores Inversos

Cuando intentamos resolver una ecuación diferencial lineal, generalmente uno solo puede resolver de forma analítica las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, la forma de hacerlo es proponer la solución como una exponencial para resolver la parte homogénea, tal propuesta nos conduce a resolver una ecuación algebraica, esto es, la determinación de las raíces de la ecuación característica. La parte no homogénea se resuelve con el método llamado coeficientes indeterminados, el cual solo funciona para algunas funciones bien conocidas; polinomios de x, senos y cosenos, exponenciales o una combinación lineal de ellas o a lo más, algunos productos de las mismas.

El método más general que nos permite resolver los casos antes descritos y en general, cualquier tipo de función en la parte no homogénea, es el método de variación de parámetros. El resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables, es muy limitado, con algunos casos particulares que pueden ser resueltos, como la ecuación de Cauchy-Euler o la ecuación lineal de Legendre.

El **Método de los Operadores inversos de Heaviside** nos ofrece una forma de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, más abreviada, menos tediosa que otros métodos, la motivación principal de usar este método es proponer una forma alternativa de resolver las ecuaciones lineales e incluso proponerlo como una opción general y suprimir los tópicos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros. La elección está en sus manos.

Consideremos la ecuación diferencial de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

dividiendo entre $a_n(x)$ (donde $a_n(x) \neq 0$) se tiene

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}y^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_1(x)}{a_n(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_n(x)}y = \frac{g(x)}{a_n(x)}$$

o en forma equivalente

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = F(x) \tag{2.74}$$

Escribiendo (2.74) en términos de operador tenemos

$$\phi(D)y = F(x) \tag{2.75}$$

donde $\phi(D)$ es el operador polinómico lineal, con $D := \frac{d}{dx}$, esto es

$$\phi(D) \equiv D^n + b_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + b_1(x)D + b_0(x).$$

Resolviendo (2.75) formalmente para y se obtiene:

$$y = \frac{1}{\phi(D)}F(x) \tag{2.76}$$

Aquí $\frac{1}{\phi(D)}$ representa una operación a ser aplicada sobre $F(x)$. Una pregunta muy natural que surge es: ¿Que tipo de operación es esta?. Para tener una idea consideremos una ecuación diferencial que sea lo más simple posible, como por ejemplo:

$$y' = 0$$

Obviamente, la solución de esta ecuación es la función $y = \displaystyle\int 0dx$. Si expresamos con operador la ecuación diferencial, esto es

$$Dy = 0$$

la resolución de esta ecuación nos conduce a pensar en un operador inverso $\frac{1}{D}$ tal que actuando sobre D nos permita despejar y. Suponiendo que tal operador existe y es $\frac{1}{D}$, entonces se tiene que

$$\frac{1}{D}[Dy] = \frac{1}{D}0$$
$$y = \frac{1}{D}[0]$$

Por lo que se observa, el operador inverso de la derivada debe ser obviamente la integral. En este caso, la integral de cero nos proporciona una constante, la cual satisface la ecuación diferencial propuesta. De este resultado se concluye que

$$\frac{1}{D}[0] = \int (0)dx = C$$

El aplicar el operador inverso a cero tiene sentido, puesto que el operador "actúa sobre cero", no se multiplica. Este simple enfoque nos permite usarlo en las ecuaciones homogéneas.

Supongamos ahora que la ecuación a resolver es $y' = k$, la solución de esta ecuación es $\int kdx = kx + C$. Con operador, esta ecuación diferencial se escribe como

$$Dy = k$$

Al igual que en el caso anterior, se aplica el operador inverso para obtener

$$y = \frac{1}{D}[k].$$

Así

$$\frac{1}{D}[k+0] = \int kdx = kx + C.$$

Tomemos ahora la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2.77}$$

donde $p(x)$ es una función integrable. La resolución de esta ecuación diferencial nos conduce a la solución:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{2.78}$$

Escribiendo la ecuación (2.77) con operador, se tiene

$$(D + p(x))y = 0,$$

si pretendemos despejar y de esta ecuación, tendríamos que postular la existencia de un operador $\frac{1}{(D+p(x))}$ que al ser aplicado a la ecuación anterior se obtenga

$$\frac{1}{(D+p(x))}(D+p(x))y = \frac{1}{(D+p(x))}[0]$$

y nos conceda como resultado

$$y = \frac{1}{(D+p(x))}[0]$$

Este operador al actuar sobre cero, según el resultado ya conocido en (2.78), nos debe proporcionar que

$$\frac{1}{(D+p(x))}[0]=y=e^{-\int p(x)dx}C.$$

Con este resultado se aprecia como actúa el operador sobre cero.

Ahora tomemos una ecuación más general, sea la ecuación lineal

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{2.79}$$

cuya solución usando factor integrante o variación de parámetros es

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)+C\right]$$

Si usamos operadores, la ecuación (2.79) se puede escribir como

$$(D+p(x))y=q(x)$$

y aplicando el operador inverso se tendrá

$$y=\frac{1}{(D+p(x))}[q(x)].$$

Por lo tanto este operador debe actuar como

$$\frac{1}{(D+p(x))}[q(x)]=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)+C\right]$$

Entonces proponemos lo siguiente: El operador $\frac{1}{(D+p(x))}$ sobre una función $q(x)$ actúa de la siguiente manera

$$\frac{1}{(D+p(x))}[q(x)]=\frac{1}{(D+p(x))}[q(x)+0]\equiv e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}(q(x)+0)dx\right]$$

que da como resultado a

$$\frac{1}{(D+p(x))}[q(x)]=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)+C\right]$$

Este operador también puede actuar sobre cero, puesto que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(D+p(x))}[0] &= e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}(0)dx\right]\\
&= e^{-\int p(x)dx}\left[\int (0)dx\right]\\
\frac{1}{(D+p(x))}[0] &= e^{-\int p(x)dx}C
\end{aligned}$$

así, esta forma de abordar el operador inverso no solamente servirá para ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, si no también para ecuaciones con coeficientes variables, además de permitir aplicarse también a ecuaciones homogéneas.

Vale aclarar que cuando $p(x)$ es constante, este enfoque se reduce a lo que todos sabemos de los operadores inversos encontrados en la mayoría de textos convencionales.

El operador no conmuta. Solo lo hace cuando $p(x)$ es una constante. Puesto que en general

$$[D+p_2(x)][D+p_1(x)] \neq [D+p_1(x)][D+p_2(x)]$$

se debe tener cuidado al aplicarlo. Con todo lo expuesto proponemos el siguiente teorema

Teorema 2.3.1 Si la ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

se puede expresar de la forma

$$[D+p_n(x)][D+p_{n-1}(x)][D+p_{n-2}(x)]\cdots[D+p_2(x)][D+p_1(x)]y = \frac{g(x)}{a_n(x)}$$

entonces, esta se puede resolver usando los operadores inversos de la siguiente manera

$$y = \left[\frac{1}{(D+p_1(x))}\left[\frac{1}{(D+p_2(x))}\left[\cdots\left[\frac{1}{(D+p_n(x))}\frac{g(x)}{a_n}\right]\cdots\right]\right]\right]$$

Observación

Debemos observar bien en este teorema la forma de operar.

Iniciamos dando un ejemplo que puede ser resuelto también por variación de parámetros, pero lo resolveremos usando los operadores inversos

■ **Ejemplo 2.37** Resuelva la ecuación diferencial:

$$y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$$

<u>Resolución</u>

Claramente esta ecuación puede ser escrita en términos de operadores de la siguiente forma

$$(D+1)(D+2)y = \operatorname{sen}(e^x)$$

aplicando el operador inverso de $(D+1)$ tenemos

$$\frac{1}{(D+1)}(D+1)(D+2)y = \frac{1}{(D+1)}[\operatorname{sen}(e^x)]$$

que nos conduce a

$$\begin{aligned}
(D+2)y &= \frac{1}{(D+1)}[\operatorname{sen}(e^x)] \\
&= e^{-\int(1)dx}\left[\int e^{\int(1)dx}(\operatorname{sen}(e^x))dx\right] \\
&= e^{-x}\left[\int e^x \operatorname{sen}(e^x)dx\right] \\
&= e^{-x}[-\cos(e^x)+C_1] \\
(D+2)y &= -e^{-x}\cos(e^x)+C_1e^{-x}.
\end{aligned}$$

Seguido aplicamos el operador inverso de $(D+2)$ a ambos miembros

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(D+2)}(D+2)y &= \frac{1}{(D+2)}[-e^{-x}\cos(e^x)+C_1e^{-x}] \\
y &= \frac{1}{(D+2)}[-e^{-x}\cos(e^x)+C_1e^{-x}] \\
y &= e^{-\int(2)dx}\left[\int e^{\int(2)dx}[-e^{-x}\cos(e^x)+C_1e^{-x}]dx\right] \\
y &= e^{-2x}\left[\int e^{2x}[-e^{-x}\cos(e^x)+C_1e^{-x}]dx\right] \\
y &= e^{-2x}\left[-\int e^{2x}e^{-x}\cos(e^x)dx+C_1\int e^{2x}e^{-x}dx\right] \\
y &= e^{-2x}\left[-\int e^{x}\cos(e^x)dx+C_1\int e^{x}dx\right]
\end{aligned}$$

integrando encontramos la solución

$$y = e^{-2x}[-\operatorname{sen}(e^x)+C_1e^x+C_2]$$

o bien

$$y = -e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

■

Este primer ejemplo muestra lo sencillo que es usar los operadores inversos.

■ **Ejemplo 2.38** Resuelva la ecuación diferencial:

$$xy'' - (x\tan x + 1)y' + (\tan x - x\sec^2 x)y = x^2, x \neq 0$$

<u>Resolución</u>

Dividiendo entre x tenemos

$$\begin{aligned} y'' - (\tan x + \frac{1}{x})y' + (\frac{\tan x}{x} - \sec^2 x)y &= x \\ y'' - y'\tan x - \frac{1}{x}y' + \frac{\tan x}{x}y - y\sec^2 x &= x \end{aligned}$$

Pero, como $D(y\tan x) = y\sec^2 x + y'\tan x$, la ecuación anterior podemos escribirla como

$$\begin{aligned} D(y') - D(y\tan x) - \frac{1}{x}y' + \frac{\tan x}{x}y &= x \\ D(y' - y\tan x) - \frac{1}{x}(y' - y\tan x) &= x \\ (D - \frac{1}{x})(y' - y\tan x) &= x \\ (D - \frac{1}{x})(D - \tan x)y &= x \end{aligned}$$

Aplicando el operador inverso de $(D - \frac{1}{x})$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D - \frac{1}{x})}\left[(D - \frac{1}{x})(D - \tan x)y\right] &= \frac{1}{(D - \frac{1}{x})}[x] \\ (D - \tan x)y &= e^{\int \frac{dx}{x}}\left[\int e^{-\int \frac{dx}{x}}(x+0)dx\right] \\ &= x[\int dx + C_1] \\ &= x[x + C_1] \\ (D - \tan x)y &= x^2 + C_1 x \end{aligned}$$

Nuevamente, aplicando el operador inverso de $(D - \tan x)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{(D-\tan x)}[x^2 + C_1 x] \\
y &= \frac{1}{(D-\tan x)}[x^2 + C_1 x + 0] \\
y &= e^{\int \tan x dx}\left[\int e^{-\int \tan x dx}(x^2 + C_1 x + 0)dx\right] \\
y &= \sec x\left[\int x^2 \cos x dx + C_1 \int x \cos x dx + C_2\right] \\
y &= \sec x[x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C_1 x \operatorname{sen} x + C_1 \cos x + C_2]
\end{aligned}$$

Finalmente, la solución es

$$y(x) = x^2 \tan x + 2x - 2\tan x + C_1 x \tan x + C_1 + C_2 \sec x$$

■

2.4 Ecuaciones diferenciales especiales con coeficientes variables

Se trata de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

donde a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_1 y a_0 no son todas funciones constantes. Para determinar la solución general de estas ecuaciones, en algunos casos funciona aplicar ciertas transformaciones (cambios de variable), como veremos a continuación

2.4.1 Ecuación de Cauchy - Euler

Esta ecuación es de la forma:

$$c_n x^n y^{(n)} + c_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + c_1 x y' + c_0 y = f(x),\ x > 0 \tag{2.80}$$

donde c_n, $\cdots$, c_1 y c_0 son constantes ($c_n \neq 0$). El proceso de resolución de (2.80) consiste en aplicar una transformación o cambio de variable adecuado para convertir (2.80) en una ecuación diferencial de coeficientes constantes. Aquí, en este caso aplicamos la transformación

$$x = e^t \tag{2.81}$$

de donde resulta que

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \quad t = \ln x \tag{2.82}$$

Con esta transformación, la tarea consiste en llevar la ecuación (2.80) que está en función de la variable x, a una ecuación diferencial donde la variable independiente sea t, lo cual implica que las derivadas sean expresdas en la nueva variable aplicando la regla de la cadena y la derivada de la función inversa. En efecto:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dt}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\begin{aligned}
y''(x) &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dx}\frac{dt}{dt} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right] = \frac{1}{e^t}\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right] \\
&= e^{-t}\left[-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right] = e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] \\
&= e^{-2t}\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt} - 1\right](y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'''(x) &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dx}\frac{dt}{dt} = \frac{dy''}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] \\
&= \frac{1}{e^t}\left[-2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + e^{-2t}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] \\
&= e^{-3t}\left[-2\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right] \\
&= e^{-3t}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right] \\
&= e^{-3t}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)(y)
\end{aligned}$$

Si persistimos en seguir calculando las derivadas que siguen, para el caso n encontraremos[30] la siguiente relación[31]:

$$y^{(n)}(x) = e^{-nx}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\cdots\left(\frac{d}{dt} - (n-1)\right)(y) \tag{2.83}$$

[30] Por proceso de inducción.

[31] También puede ser escrita como

$$y^{(n)}(x) = e^{-nx}D(D-1)(D-2)\cdots(D-(n-1))(y)$$

donde $D = \frac{d}{dt}$.

Ponemos la expresiones de $y^{(n)}(x), \cdots, y''(x), y'(x)$ en (2.80) y nos queda una ecuación diferencial de coeficientes constantes. Ilustramos este hecho en los siguientes ejemplos.

■ **Ejemplo 2.39** Para $x \neq 0$, resuelva la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 3xy' - y = 0$$

<u>Resolución</u>

Aplicando la transformación (2.81) se tiene:

$$y'(x) = e^{-t}\frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad y''(x) = e^{-2t}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)(y)$$

Ponemos estas derivadas en la ecuación diferencial y se tiene:

$$e^{2t}e^{-2t}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)(y) + 3e^te^{-t}\frac{dy}{dt} - y = 0$$

de donde nos queda la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - y = 0$$

cuya ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$. Resolviendo esta ecuación se obtiene las raíces $\lambda = \sqrt{2} - 1, -1 - \sqrt{2}$, de donde el sistema fundamental de soluciones está dado por

$$sfs = \left\{e^{(\sqrt{2}-1)t}, e^{-(1+\sqrt{2})t}\right\}$$

y así su solución es

$$y(t) = c_1e^{(\sqrt{2}-1)t} + c_2e^{-(1+\sqrt{2})t}$$

Pero aquí debemos tener en cuenta de que se tiene que volver a la variable x, de tal manera que usando nuevamente la transformación (2.81), la solución de la ecuación diferencial propuesta es:

$$y(t) = c_1x^{\sqrt{2}-1} + c_2x^{-(1+\sqrt{2})}$$

■

■ **Ejemplo 2.40** Halle la solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - xy' + 4y = 0, \; x \neq 0 \tag{2.84}$$

Resolución

Aplicando la transformación (2.81) en (2.84) se tiene

$$e^{2z}\left\{e^{-2z}\left[\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right]\right\}-e^{-z}\left[e^{-z}\frac{dy}{dz}\right]+4y=0$$

que simplificando se transforma en la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dz^2}-2\frac{dy}{dz}+4y=0 \tag{2.85}$$

La ecuación característica asociada a (2.85) es

$$\lambda^2-2\lambda+4=0$$

de donde $\lambda=1\pm\sqrt{3}i$, con lo cual se tiene el sistema fundamental de soluciones $sfs=\left\{e^z\cos(\sqrt{3}z), e^z\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}z)\right\}$, y con esto la solución general de (2.85) es

$$y=c_1e^z\cos(\sqrt{3}z)+c_2e^z\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}z)$$

Ahora, para llegar a la solución de (2.84) usamos nuevamente (2.81) y resulta que

$$y=c_1x\cos(\sqrt{3}\ln x)+c_2x\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\ln x)$$

■

■ **Ejemplo 2.41** Resuelva la ecuación diferencial:

$$(x+2)^2y''+(x+2)y'+y=\ln^2(x+2)-x-6,\ x>-2$$

Resolución

También podemos escribir la ecuación diferencial en la forma:

$$(x+2)^2y''+(x+2)y'+y=\ln^2(x+2)-(x+2)-4 \tag{2.86}$$

Aparentemente la ecuación diferencial (2.86) no es una ecuación de Cauchy - Euler[32], sin embargo, es muy parecida y la técnica de resolución es la misma, por eso aplicamos la transformación

$$x+2=e^t$$

[32]**Augustin-Louis Cauchy**, matemático francés que nació en París el 21 de Agosto de 1789. Tuvo una niñez difícil por la situación de la revolución que se vivía en aquellos años en Francia. Su producción matemática es extraordinaria, cabe destacar que hizo la primera introducción rigurosa en el *análisis matemático*, y el otro gran aporte tiene que ver con la *teoría de grupos*. En lo personal, fue gran amigo de Joseph-Louis de Lagrange y Pierre Simon Laplace. Sus estudios los realizó en la Escuela politécnica de París, donde se graduó como ingeniero. Durante buen

De esta transformación se tiene

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}Dy, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}D(D-1)y, \text{ donde } D = \frac{d}{dt}$$

Con estos resultados en (2.86), se obtiene la ecuación diferencial de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = t^2 - e^t - 4 \tag{2.87}$$

cuya ecuación complementaria asociada es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

. Resolviendo esta ecuación vemos que el sistema fundamental de soluciones correspondiente es: $sfs = \{\cos t,\ \operatorname{sen} t\}$ y la solución complementaria está dada por

$$y_c(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$$

Ahora, para determinar la solución particular de (2.87), tomamos $f(t) = t^2 - e^t - 4$. Esta función y sus derivadas tienen como generador al conjunto

---

tiempo prestó sus servicios a la campaña de napoleón Bonaparte, siendo después nombrado profesor de mecánica en la École Polytechnique en 1816. Poco después fue designado miembro de la Academia Francesa de las Ciencias en reemplazo de Gaspard Monge, quien había sido destituido por cuestiones políticas. Habiendo llegado la decadencia de la era napoleónica, pronto tuvo serios problemas políticos con el nuevo régimen de gobierno, por lo que fue exiliado; estuvo prestando sus servicios en varios lugares de Europa hasta el año 1838 en que regresa a París. Murió el 23 de Mayo de 1857 en Sceaux, poco antes de morir se arrepentiría de no haberse dedicado más, a la matemática.

Leonhard Paul Euler, matemático suizo, nació en Basilea el 15 de abril de 1707, es uno de los matemáticos más prolíficos de aquella época. Vivió en Rusia y Alemania e hizo grandes aportes en el cálculo, análisis matemático, teoría de grafos, mecánica, óptica y astronomía. El padre de Leonhard Euler fue un pastor calvinista. Su educación superior la desarrolló en la Universidad de Basilea, habiendo recibido el título de maestro en filosofía. Su pasión por la matemática aparece cuando empezó a recibir clases particulares de Johann Bernoulli todos los sábados por la tarde, es así que empieza a dedicarse a las matemáticas y finaliza un doctorado sobre propagación del sonido. En 1727, Euler llega a Rusia, a trabajar en la academia de San Petersburgo, donde hizo una gran labor educativa y de investigación durante varios años. En 1741 Euler regresa a Alemania, pues Federico II el Grande, rey de Prusia, le ofrece un cargo en la Academia de Berlín, vivió veinticinco años en Berlín, en donde escribe muchos artículos de investigación, sobre todo en matemática. Entre sus principales obras que publica tenemos: la Introductio in analysin infinitorum, un texto acerca de las funciones matemáticas publicado en 1748, y la Institutiones calculi differentialis,13 publicada en 1755 y contenía temas sobre el cálculo diferencial. Euler comenzó a tener problemas de la vista y quedó completamente ciego, sin embargo esto no afectó su productividad intelectual. En 1766, Euler regresa a Rusia invitado por Catalina la Grande. Aquí en Rusia pasó el resto de sus días, hasta el 18 de septiembre de 1783, en que fallece en la ciudad de San Petersburgo.

$G = \{t^2,\ t,\ 1,\ e^t\}$, así que aplicamos el método de coeficientes indeterminados y asumimos que la solución particular está dada por:

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C + De^t \tag{2.88}$$

Reemplazamos $y_p(t)$ en (2.87) y se tiene:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[At^2 + Bt + C + De^t\right] + At^2 + Bt + C + De^t = t^2 - e^t - 4$$

calculamos las derivadas y hacemos las simplificaciones correspondientes para obtener:

$$At^2 + Bt + (C + 2A) + 2De^t = t^2 - 4 - e^t$$

Aquí, comparamos coeficientes y obtenemos: $A = 1, B = 0, C = -6$ y $D = -\frac{1}{2}$, luego la solución particular (2.87) es:

$$y_p(t) = t^2 - 6 - \frac{1}{2}e^t$$

Determinadas las soluciones complementaria y particular, la solución general de (2.87) está dada por:

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t) + t^2 - 6 - \frac{1}{2}e^t$$

Ahora, para llegar a la solución de(2.86) simplemente volvemos a la variable x según la transformación implicada y se obtiene finalmente que:

$$y(x) = c_1 \cos \ln(x+2) + c_2 \operatorname{sen} \ln(x+2) + \ln^2(x+2) - 6 - \frac{1}{2}(x+2)$$

■

Observación

Cualquier ecuación diferencial de la forma:

$$a_n(ax+b)^n y^{(n)} + \cdots + a_2(ax+b)^2 y'' + a_1(ax+b)y' + a_0 y = 0,\ a \neq 0 \text{ y } x \neq -\frac{b}{a} \tag{2.89}$$

donde $a_n, \cdots, a_0$, a y b son constantes, no es una ecuación de Cauchy - Euler, sin embargo puede resolverse de manera similar, haciendo

$$ax + b = e^z$$

con la condición de que $ax + b > 0$.

■ **Ejemplo 2.42** Para $x > -\frac{3}{2}$, determine la solución general de la ecuación diferencial

$$(2x+3)^2y'' + (2x+3)y' - 2y = 12x^2 - 6x$$

Resolución

Haciendo algunos arreglos a la ecuación diferencial se tiene que ésta es equivalente a

$$(2x+3)^2y'' + (2x+3)y' - 2y = 3(2x+3)^2 - 21(2x+3) + 36 \tag{2.90}$$

Procedemos como se indica en la observación anterior, para lo cual hacemos

$$2x+3 = e^z$$

Con esto, expresamos las derivadas $y'(x)$ y $y''(x)$ en la nueva variable z, teniendo así:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dz} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{\frac{dx}{dz}} = \frac{1}{\frac{e^z}{2}}\frac{dy}{dz} \\ &= 2e^{-z}\frac{dy}{dz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dx}\frac{dz}{dz} = \frac{dy'}{dz}\frac{1}{\frac{dx}{dz}} = \frac{1}{\frac{e^z}{2}}\frac{d}{dz}\left[2e^{-z}\frac{dy}{dz}\right] \\ &= 4e^{-z}\left[e^{-z}\frac{d^2y}{dz^2} - e^{-z}\frac{dy}{dz}\right] \\ &= 4e^{-2z}\left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right] \end{aligned}$$

Ponemos estos resultados en (2.90) para obtener:

$$e^{2z}\cdot 4e^{-2z}\left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right] + e^z\cdot 2e^{-z}\frac{dy}{dz} - 2y = 3e^{2z} - 21e^z + 36$$

simplificamos y se tiene una ecuación diferencial de coeficientes constantes dada por:

$$4\frac{d^2y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} - 2y = 3e^{2z} - 21e^z + 36$$

que es equivalente a

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dz} - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}e^{2z} - \frac{21}{4}e^z + 4 \tag{2.91}$$

Aquí, la ecuación característica de la ecuación homogénea es $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$, cuyas raíces son $\lambda = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, y con estas raíces se tiene que el sistema fundamental de soluciones está dado por

$$sfs = \left\{ e^z, e^{-\frac{z}{2}} \right\}$$

luego la solución complementaria respectiva[33] es:

$$y_c(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-\frac{z}{2}}$$

Ahora, para determinar la solución particular de la ecuación diferencial asociada a $f(z) = \frac{3}{4}e^{2z} - \frac{21}{4}e^z + 4$, aplicamos el método de coeficientes indeterminados, según el cual asumimos que

$$y_p(z) = Ae^{2z} + Bze^z + C \tag{2.92}$$

Aquí, al termino e^z lo hemos multiplicado por z, pues se repite en el sistema fundamental de soluciones. Hallando las derivadas de $y_p(z)$ se tiene:

$$y_p'(z) = 2Ae^{2z} + Bze^z + Be^z$$

$$y_p''(z) = 4Ae^{2z} + Bze^z + 2Be^z$$

Ponemos estas derivadas en (2.91), hacemos las simplificaciones respectivas y se obtiene:

$$\frac{5}{2}Ae^{2z} + \frac{3}{2}Be^z - \frac{1}{2}C = \frac{3}{4}e^{2z} - \frac{21}{4}e^z + 4$$

Para que esta igualdad tenga sentido debe ocurrir que $A = \frac{3}{10}$, $B = -\frac{7}{2}$ y $c = -8$. Ponemos estas constantes en (2.92) y vemos que la solución particular está dada por

$$y_p(z) = \frac{3}{10}e^{2z} - \frac{7}{2}ze^z - 8$$

Luego la solución general de (2.91) es

$$y(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-\frac{z}{2}} + \frac{3}{10}e^{2z} - \frac{7}{2}ze^z - 8$$

Ahora, para llegar a la solución de (2.90) hay que pasar a la variable x, haciendo esto se tiene que dicha solución es:

$$y(x) = c_1(2x+3) + \frac{c_2}{\sqrt{2x+3}} + \frac{3}{10}(2x+3)^2 - \frac{7}{2}(2x+3)\ln(2x+3) - 8$$

■

[33] No olvide que es la solución de la ecuación homogénea $\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dz} - \frac{1}{2}y$.

■ **Ejemplo 2.43** Resuelva la ecuación diferencial:

$$x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x),\ x > 0 \tag{2.93}$$

<u>Resolución</u>

Aplicando la transformación $x = e^t$, sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

luego, poniendo estos resultados en (2.93) y haciendo las simplificaciones respectivas se tiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \sec t \tag{2.94}$$

Aquí, es fácil ver que el sistema fundamental de soluciones es $sfs = \{\cos(t), \operatorname{sen}(t)\}$, de donde la solución complementaria está dada por

$$y_c = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$$

Para determinar la solución particular, aplicamos el método de coeficientes indeterminados, para lo cual asumimos que la solución particular es

$$y_p(t) = A(t)\cos(t) + B(t)\operatorname{sen}(t) \tag{2.95}$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ se determinan partir del sistema

$$\begin{cases} A'(t)\cos(t) + B'(t)\operatorname{sen}(t) = 0 \\ -A'(t)\operatorname{sen}(t) + B'(t)\cos(t) = \sec(t) \end{cases}$$

Matricialmente es:

$$\begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sec t \end{bmatrix}$$

Aplicando regla de Cramer se tiene:

$$A'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} t \\ \sec t & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix}} \Longrightarrow A'(t) = -\tan t \Longrightarrow A(t) = \ln \cos t$$

y

$$B'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & \sec t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix}} \Longrightarrow B'(t) = 1 \Longrightarrow B(t) = 1$$

Poniendo $A(t)$ y $B(t)$ en (2.95) se obtiene la solución particular dada por:

$$y_p(t) = \cos t \ln \cos t + t \operatorname{sen} t$$

Finalmente la solución particular de (2.94) es:

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \cos t \ln \cos t + t \operatorname{sen} t$$

Para determinar la solución de (2.93) hay que regresar a la variable x, así se tiene:

$$y(x) = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x) \ln(\cos \ln x) + \ln(x) \operatorname{sen}(\ln x)$$

■

2.4.2 Transformaciones diversas

Hay ecuaciones diferenciales de coeficientes variables que se resuelven con transformaciones adecuadas, la idea consiste en convertir una ecuación de coeficientes variables, en una de coeficientes constantes. A continuación, se ilustra esto con algunos ejemplos.

■ **Ejemplo 2.44** Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + (\tan x)y' + (\cos^2 x)y = \operatorname{sen}(2x)\left[\frac{1}{2}\cos(x)\, e^{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen}(2x)\right]$$

usando la transformación $z = \operatorname{sen} x$.

<u>Resolución</u>

Antes de empezar con la resolución de la ecuación diferencial, nos fijamos en la función del lado derecho, si expresamos esta función en términos del ángulo x, vemos que:

$$\operatorname{sen}(2x)\left[\frac{1}{2}\cos(x)\, e^{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen}(2x)\right] \equiv \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\left[e^{\operatorname{sen} x} + 4\operatorname{sen}(x)\right]$$

Luego, la ecuación diferencial propuesta es equivalente a

$$y'' + (\tan x)y' + (\cos^2 x)y = \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\left[e^{\operatorname{sen} x} + 4\operatorname{sen}(x)\right] \tag{2.96}$$

Procedemos ahora a resolver (2.96). En este caso, tenemos que expresar la ecuación diferencial con variable independiente x, en otra ecuación que esté en función de la variable z, aplicando la transformación sugerida

$$z = \operatorname{sen} x$$

Según esta transformación vemos que:

$$\frac{dz}{dx} = \cos x, \qquad \cos x = \sqrt{1-z^2}, \qquad \tan x = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \tag{2.97}$$

A continuación, expresamos $y'(x)$ y $y''(x)$ en la variable z, para lo cual se tiene

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \sqrt{1-z^2}\frac{dy}{dz} = \sqrt{1-z^2}\frac{dy}{dz} \\ y''(x) &= \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{dy'(x)}{dz}\frac{dx}{dz} = \sqrt{1-z^2}\frac{d}{dz}\left(\sqrt{1-z^2}\frac{dy}{dz}\right) \\ &= (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz} \end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones de $y'(x)$, $y''(x)$ y (2.97) en la ecuación diferencial (2.96) se tiene

$$\begin{aligned} (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz} + \left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)\sqrt{1-z^2}\frac{dy}{dz} \quad &+ \quad (\sqrt{1-z^2})^2 y \\ &= \quad z(\sqrt{1-z^2})^2\,[e^z + 4z] \end{aligned}$$

que al simplificar, se convierte en la ecuación de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = ze^z + 4z^2 \tag{2.98}$$

El sistema fundamental de soluciones de la ecuación complementaria de (2.98) está dado por $sfs = \{\cos z, \operatorname{sen} z\}$, de allí que la solución complementaria sea

$$y_c(z) = c_1 \cos z + c_2 \operatorname{sen} z$$

Para determinar la solución particular de (2.98), aplicamos el método de coeficientes indeterminados. Si nos fijamos en $f(z) = ze^z + 4z^2$, que es la función de la derecha que aparece en (2.98), es fácil darse cuenta de que el conjunto generador de f y sus derivadas está dado por $G = \{ze^z, e^z, z^2, z, 1\}$, según el cual asumimos que la solución particular[34] es:

$$y_p(z) = Aze^z + Be^z + Cz^2 + Dz + E \tag{2.99}$$

Derivamos dos veces esta función para obtener:

[34] Acá hay que tener en cuenta que tanto G y sfs no tienen elementos comunes.

$$y_p'(z) = Aze^z + (A+B)e^z + 2cz + D$$

$$y_p''(z) = Aze^z + (2A+B)e^z + 2C$$

Ponemos ahora $y_p(z)$, $y_p'(z)$ y $y_p''(z)$ en (2.98), hacemos las simplificaciones y llegamos a la expresión:

$$2Aze^z + (2A+2B)e^z + cz^2 + Dz + 2C + E = ze^z + 4z^2$$

Para que esta igualdad sea cierta, los coeficientes deben satisfacer el sistema:
$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A+2B = 0 \\ C = 4 \\ D = 0 \\ 2C+E = 0 \end{cases}$. Resolviendo este sistema se obtiene $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 4$, $D = 0$ y $E = -8$. Ponemos estos valores en (2.99) y se obtiene que la solución particular está dada por:

$$y_p(z) = \frac{1}{2}ze^z - \frac{1}{2}e^z + 4z^2 - 8$$

Con estos resultados, la solución general de (2.98) está dada por

$$y(z) = c_1 \cos z + c_2 \operatorname{sen} z + \frac{1}{2}ze^z - \frac{1}{2}e^z + 4z^2 - 8$$

Ahora, para llegar a la solución de (2.96), volvemos a la variable x, para lo cual usamos la transformación y sus equivalencias en (2.97), así tenemos que la solución general de la ecuación diferencial dada al inicio es:

$$y(x) = c_1 \cos(\operatorname{sen} x) + c_2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\, e^{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{2}e^{\operatorname{sen} x} + 4\operatorname{sen}^2(x) - 8$$

■

■ **Ejemplo 2.45** Dada la ecuación diferencial:

$$(x^2+1)^2y'' + 2x(x^2+1)y' + 4y = \frac{2x}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1 \tag{2.100}$$

Usando la transformación $x = \tan t$, demuestre que la ecuación se convierte en una de coeficientes constantes, luego halle su solución

<u>Resolución</u>

En primer lugar, hay que expresar $y'(x)$ y $y''(x)$ en términos de la variable t vía la transformación indicada. En efecto:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sec^2(t)}\frac{dy}{dt} = \cos^2(t)\frac{dy}{dt} \\
& \quad \text{y} \\
y''(x) &= \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy'(x)}{dt} = \frac{1}{\sec^2(t)}\frac{d}{dt}\left[\cos^2(t)\frac{dy}{dt}\right] \\
&= \cos^2(t)\left[\cos^2(t)\frac{d^2y}{dt^2} - 2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)\right] \\
&= \cos^4(t)\frac{d^2y}{dt^2} - 2\,\mathrm{sen}(t)\cos^3(t)\frac{dy}{dt}
\end{aligned}
$$

Reemplazando estas expresiones y la transformación indicada en (2.100) se tiene:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \tan(2t) \tag{2.101}$$

la cual es una ecuación diferencial de coeficientes constantes. A continuación procedemos a resolver (2.101). Acá tenemos que la ecuación característica de la ecuación complementaria de (2.101) es: $\lambda^2 + 4 = 0$, cuyas raíces son $\lambda = \pm 2i$. Con estas raíces las soluciones l.i de la ecuación homogénea son:

$$y_1(t) = \cos(2t) \quad \text{y} \quad y_2(t) = \mathrm{sen}(2t)$$

Luego el sistema fundamental de soluciones es:

$$\mathrm{sfs} = \{\cos(2t), \mathrm{sen}(2t)\}$$

y con esto la solución complementaria es dada por:

$$y_c(t) = c_1\cos(2t) + c_2\,\mathrm{sen}(2t) \tag{2.102}$$

Ahora, para determinar la solución particular nos fijamos en el ejemplo 2.28, siguiendo el mismo procedimiento[35] y usando (2.55), la solución particular está dada por[36]:

$$y_p(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t)\ln|\sec(2t) + \tan 2t|$$

[35] En dicho ejemplo se aplicó el método de variación de parámetros

[36] Acá $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

Luego la solución general de (2.101) está dada por

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{4}\cos(2t)\ln|\sec(2t) + \tan 2t|$$

Pero para tener la solución de (2.100) tenemos que regresar[37] a la variable x, así la solución general de la ecuación propuesta es:

$$y(x) = c_1 \frac{1-x^2}{1+x^2} + 2c_2 \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{4}\frac{1-x^2}{1+x^2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

■

■ **Ejemplo 2.46** Dada la ecuación

$$2x^3y'' + 3x^2y' + 2y = 2\tan\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right),\ x > 0 \tag{2.103}$$

Aplicando la transformación $x = \frac{1}{t^2}$ convierta (2.103) en una ecuación diferencial de coeficientes constantes, luego de allí determine su solución.

<u>Resolución</u>

Con la transformación que se nos sugiere se tiene:

$$x = \frac{1}{t^2} \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{t^4},\ x^3 = \frac{1}{t^6} \text{ y } \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{t^3}$$

[37] La transformación que hemos empleado aquí es:

$$x = \tan t$$

donde $-1 < x < 1$. Según esta transformación se tiene que:

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{y} \quad \cos(t) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Luego

$$\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t \cos t = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\sec(2t) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$\tan(2t) = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{\cos(2t)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

Luego, usando estas equivalencias expresamos las derivadas de y en la nueva variable t, así tenemos:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy}{dt} = -\frac{t^3}{2}\frac{dy}{dt}$$

y

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy'(x)}{dt} = -\frac{t^3}{2}\frac{d}{dt}\left[-\frac{t^3}{2}\frac{dy}{dt}\right] \\ &= \frac{t^5}{4}\left[3\frac{dy}{dt} + t\frac{d^2y}{dt^2}\right] \end{aligned}$$

Usando la transformación y las derivadas de y en la nueva variable t, la ecuación diferencial se convierte en:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 4\tan(2t) \tag{2.104}$$

Como podemos ver, con la transformación indicada la ecuación diferencial de coeficientes variables propuesta en este problema, se ha convertido en una de coeficientes constantes, fácil de resolver. El proceso de resolución de (2.104) es similar al de los ejemplos 2.28 y 2.45; de esta manera, no hacemos más esfuerzos y ponemos los resultados más relevantes. Así tenemos que el sistema fundamental de soluciones y la solución complementaria son respectivamente $sfs\{\cos(2t), \text{sen}(2t)\}$ y

$$y_c(t) = c_1\cos(2t) + c_2\,\text{sen}(2t)$$

Asimismo, la solución particular[38] de acuerdo a (2.55) está dada por[39]:

$$y_p(t) = -\cos(2t)\ln|\sec(2t) - \tan(2t)|$$

Luego, la solución general de la ecuación diferencial (2.104) es

$$y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\,\text{sen}(2t) - \cos(2t)\ln|\sec(2t) - \tan(2t)|$$

Ahora, para llegar a la solución de (2.103) simplemente hay que pasar a la variable x, obteniendo así:

$$y(x) = c_1\cos\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) + c_2\,\text{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) - \cos\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\ln\left|\sec\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) - \tan\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right|$$

■

[38] Si se quiere hacer todo el proceso, esto se hace aplicando el método de variación de parámetros

[39] Aquí $\alpha = 2$ y $\beta = 4$

■ **Ejemplo 2.47** Resuelva la ecuación diferencial

$$x(1-x^2)y'' - x^2y' + xy = \sqrt{1-x^2}, \;\; x \in \langle 0,1\rangle \tag{2.105}$$

aplicando la transformación $x = \cos t$.

Resolución

Como en los ejemplos anteriores, expresamos $y'(x)$ y $y''(x)$ en la variable t según la transformación sugerida. Veamos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\operatorname{sen} t}\frac{dy}{dt} = -\csc t\frac{dy}{dt}$$

luego

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy'(x)}{dt} = -\frac{1}{\operatorname{sen} t}\frac{d}{dt}\left[-\csc t\frac{dy}{dt}\right] = \csc^2 t\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \cot t\frac{dy}{dt}\right]$$

poniendo estas derivadas en la ecuación diferencial (2.105) se obtiene la ecuación diferencial de coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \tan t \tag{2.106}$$

Cómo podemos ver, la ecuación (2.106) es similar a la de los ejemplo 2.28, y a los dos ejemplos anteriores, por lo que ponemos los resultados más relevantes, así tenemos que el sistema fundamental de la ecuación complementaria está dado por $sfs = \{\cos t,\ \operatorname{sen} t\}$ y su solución complementaria por

$$y_c(t) = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t \tag{2.107}$$

La solución particular se obtiene aplicando variación de parámetros y usando[40] directamente (2.55) vemos que ésta es:

$$y_p(t) = -\cos t\ln(\sec t + \tan t)$$

Luego la solución general de (2.106) es:

$$y(t) = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t - \cos t\ln(\sec t + \tan t)$$

Finalmente, para llegar a la solución de (2.105) expresamos la solución anterior en la variable[41] x y se tiene:

$$y(x) = c_1 x + c_2\sqrt{1-x^2} - x\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

■

[40] Acá $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.

[41] Como $x = \cos(t)$, $0 < x < 1$, entonces $\operatorname{sen}(t) = \sqrt{1-x^2}$, $\sec(t) = \frac{1}{x}$ y $\tan(t) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

2.4.3 Casos especiales

A continuación resolvemos algunas ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, en las cuales adaptamos algunas técnicas ya estudiadas.

■ **Ejemplo 2.48** Halle el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$$x^3y''' - 6x^2y'' + x(x^2+18)y' - 2(x^2+12)y = 0,\ x \neq 0 \tag{2.108}$$

teniendo en cuenta que una de sus soluciones es de la forma $y_1(x) = x^n$. Finalmente halle la solución general.

<u>Resolución</u>

Se nos propone la solución de la forma $y_1(x) = x^n$, reemplazando en (2.108) se tiene

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}x^3 - 6n(n-1)x^2x^{n-2} + nx(x^2+18)x^{n-1} - 2(x^2+12)x^n = 0$$

de donde:

$$n(n-1)(n-2)x^n - 6n(n-1)x^n + n(x^2+18)x^n - 2(x^2+12)x^n = 0$$

simplificando más se llega a la expresión

$$x^n\left[(n-2)x^2 + (n-2)(n-3)(n-4)\right] = 0$$

luego

$$(n-2)x^2 + (n-2)(n-3)(n-4) = 0,\ \ \forall x \neq 0$$

Aquí, la igualdad es consistente para $n = 2$, de esta manera la primera solución de (2.108) es

$$y_1(x) = x^2$$

Para determinar las otras soluciones, aplicamos la reducción de orden explicado en esta sección, asumiendo en este caso que la siguiente solución de (2.108) es de la forma:

$$y(x) = x^2v(x) \tag{2.109}$$

Efectuando las derivadas se tiene:

$$y'(x) = 2xv + x^2v'$$

$$y''(x) = 2v + 4xv' + x^2v''$$

$y'''(x) = 6v' + 6xv'' + x^2v'''$

Poniendo estas derivadas en (2.108) y simplificando se obtiene:

$$x^3\left[\frac{d^3v}{dx^3} + \frac{dv}{dx}\right] = 0$$

como $x \neq 0$, entonces

$$\frac{d^3v}{dx^3} + \frac{dv}{dx} = 0 \tag{2.110}$$

Como se observa, la ecuación (2.110) es una ecuación diferencial de coeficientes constantes, cuya ecuación característica es $\lambda^3 + \lambda = 0$; procedemos a determinar sus raíces, y éstas son $\lambda = 0$ y $\lambda = \pm i$. Según estás raíces, las soluciones correspondientes de (2.110) son $v = v_1(x) = 1$, $v = v_2(x) = \cos(x)$ y $v = v_3(x) = \operatorname{sen}(x)$. Ponemos estas funciones en (2.109) y resulta que las soluciones de(2.108) son:

$$y_1(x) = x^2, \qquad y_2(x) = x^2\cos(x), \qquad y_3(x) = x^2\operatorname{sen}(x)$$

Estas soluciones son linealmente independientes, por lo cual el sistema fundamental de soluciones de (2.108) es:

$$sfs = \{x^2, x^2\cos(x), x^2\operatorname{sen}(x)\}$$

luego la solución general de la ecuación diferencial propuesta es:

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^2\cos(x) + c_3x^2\operatorname{sen}(x)$$

■

■ **Ejemplo 2.49** Dada la ecuación diferencial:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.111}$$

1. Demuestre que (2.111) se transforma en la ecuación $u'' + f(x)u = 0$, haciendo $y = u(x)v(x)$ y escogiendo v apropiadamente.
2. Aplique el procedimiento del ítem anterior para resolver la ecuación

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$$

■

Resolución

1. Si hacemos $y = u(x)v(x)$ como se nos sugiere, entonces

   $$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \text{ y } y''(x) = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)$$

   Con estos resultados la ecuación (2.111) se transforma en

   $$\begin{aligned} u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x) \quad &+ \quad p(x)[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] \\ &+ \quad q(x)u(x)v(x) = 0 \end{aligned}$$

   Aquí dividimos por v y agrupamos convenientemente para obtener:

   $$u'' + \left(2\frac{v'(x)}{v(x)} + p(x)\right)u' + \left(\frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{p(x)v'(x)}{v(x)} + q(x)\right)u = 0 \tag{2.112}$$

   Hacemos

   $$g(x) = 2\frac{v'(x)}{v(x)} + p(x)$$

   y

   $$f(x) = \frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{p(x)v'(x)}{v(x)} + q(x)$$

   Para conseguir lo que se nos pide, debe acontecer que $g(x) = 0$, resolviendo esto se tiene

   $$2\frac{v'(x)}{v(x)} + p(x) = 0$$

   de donde vemos que

   $$\ln v(x) = -\frac{1}{2}\int p(x)dx \Rightarrow v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$

   tomando luego

   $$v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} \tag{2.113}$$

   se tiene $g(x) = 0$, y así (2.112) se convierte en

   $$u'' + f(x)u = 0$$

2. Ahora, para resolver la ecuación diferencial

   $$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$$

   con el procedimiento que acabamos de demostrar, tenemos que encontrar $v(x)$. En la ecuación diferencial se tiene que $p(x) = 4x$, luego con (2.113) encontramos que

   $$v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int 4xdx} = e^{-x^2}$$

Si hacemos

$$y(x) = u(x)e^{-x^2} \tag{2.114}$$

se obtiene, $g(x) = 0$ y $f(x) = 1$. Luego, la ecuación diferencial se transforma en

$$u'' + u = 0$$

cuya solución es $u(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x)$. Reemplazando esto en (2.114), la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = [c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x)]e^{-x^2}$$

■ **Ejemplo 2.50** Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + 2(y')^2 + 2 = 0 \tag{2.115}$$

aplicando alguna sustitución apropiada.

<u>Resolución</u>

La ecuación diferencial (2.115) no es lineal, sin embargo puede resolverse con alguna sustitución apropiada. Intentaremos la sustitución

$$z = y'$$

Con esto, vemos que (2.115) se convierte en

$$2z' + 2z^2 + 2 = 0$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables; equivalente a

$$\frac{dz}{dx} = -2(z^2 + 1)$$

de cuya integración se obtiene:

$$\arctan z = c_1 - 2x$$

de donde vemos que $y' = z = \tan(c_1 - 2x)$. Integramos nuevamente y resulta que la solución de (2.115) está dada por la función:

$$y(x) = c_2 - \frac{1}{2} \ln|\sec(c_1 - 2x)|$$

■

■ **Ejemplo 2.51** Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{(x+1)^2}y = 0,\ x \in \langle 0, +\infty \rangle$$

aplicando la transformación $u(x) = ye^{\frac{1}{2}\int \frac{2}{x}dx}$.

Resolución

Se sugiere la transformación[42] $u(x) = ye^{\frac{1}{2}\int \frac{2}{x}dx}$, desarrollando la integral se tiene

$$u(x) = xy$$

De donde es fácil ver que $y = \frac{u}{x}$, derivando esto se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2}u \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}u - \frac{2}{x^2}\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}\frac{d^2u}{dx^2}$$

Ponemos estos resultados en la ecuación diferencial, y esta se convierte en la nueva ecuación

$$(x+1)^2\frac{d^2u}{dx^2} - 2u = 0 \tag{2.116}$$

Si aquí hacemos nuevamente la transformación $x+1 = e^z$, vemos que

$$\frac{du}{dx} = e^{-z}\frac{du}{dz} \quad \text{y} \quad \frac{d^2u}{dz^2} = e^{-2z}\left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{du}{dz}\right)$$

Ponemos estos resultados en (2.116) y llegamos a la nueva ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{du}{dz} - 2u = 0$$

cuya ecuación característica y sistema fundamental de soluciones son respectivamente: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ y $sfs = \left\{e^{2z}, e^{-z}\right\}$.

Así la solución general en la variable z es

$$u = c_1e^{2z} + c_2e^{-z}$$

y en la variable x será:

$$u = c_1(x+1)^2 + \frac{c_2}{x+1}$$

[42]En este caso la transformación en forma general es de la forma $u(x) = ye^{\frac{1}{2}\int p(x)dx}$

Finalmente la solución general de la ecuación diferencial planteada al inicio es:

$$y(x) = c_1\frac{(x+1)^2}{x} + c_2\frac{1}{x(x+1)}$$

■

■ **Ejemplo 2.52** Dada la ecuación diferencial:

$$y'' + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)y' + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)y = 0 \tag{2.117}$$

(a) Determine la función $\theta(x)$ con la cual la transformación

$$y = ze^{\int \theta(x)dx} \tag{2.118}$$

convierte a la ecuación diferencial (2.117) en

$$z'' + a(x)z = 0$$

(b) Halle la solución total de

$$y'' + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)y' + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = e^{\frac{x}{2}}e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{2.119}$$

<u>Resolución</u>

(a) Derivando respecto de x la igualdad (2.118), se tiene

$$\begin{aligned}
y' &= z'e^{\int \theta(x)dx} + z\theta(x)e^{\int \theta(x)dx}\\
&= [z' + \theta(x)z]e^{\int \theta(x)dx}\\
y'' &= [z'' + z'\theta(x) + z\theta'(x)]e^{\int \theta(x)dx} + \theta(x)[z' + \theta(x)z]e^{\int \theta(x)dx}\\
&= \left[z'' + 2\theta(x)z' + \theta^2(x)z + \theta'(x)z\right]e^{\int \theta(x)dx}
\end{aligned}$$

Ponemos las expresiones de y, y' e y'' en (2.117) para obtener:

$$\left[z'' + 2\theta(x)z' + \theta^2(x)z + \theta'(x)z\right]e^{\int \theta(x)dx} + [z' + \theta(x)z]e^{\int \theta(x)dx}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)ze^{\int \theta(x)dx} = 0$$

En esto último cancelamos la exponencial, agrupamos términos, y se tiene:

$$\begin{aligned}
z'' &+ \left[2\theta(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]z'\\
&+ \left[\theta'(x) + \theta^2(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\theta(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]z = 0
\end{aligned}$$

Como la transformación indicada debe convertir (2.117) en una ecuación diferencial[43] que carece de z', entonces debe acontecer que

$$2\theta(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \tag{2.120}$$

luego, haciendo

$$a(x) = \theta'(x) + \theta^2(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\theta(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \tag{2.121}$$

se obtiene la ecuación diferencial $z'' + a(x)z = 0$.
Resolviendo (2.120) se tiene que

$$\theta(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Al reemplazar esta expresión en (2.121) se obtiene:

$$\begin{aligned}
a(x) &= -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Con estos resultados nos queda la ecuación diferencial:

$$z'' - \frac{1}{4}z = 0$$

cuya solución es:

$$z(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{x}{2}}$$

[43]La ecuación diferencial a la que se pretende llegar, es de la forma:

$$z'' + a(x)z = 0$$

Como ya disponemos de $z(x)$, volvemos nuevamente a la transformación para determinar $y(x)$, así tenemos:

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x)e^{\int \theta(x)dx} = \left[c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{x}{2}}\right] e^{\int -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx} \\ &= \left[c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{x}{2}}\right] e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución de (2.117) es:

$$y(x) = \left[c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{x}{2}}\right] e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{2.122}$$

(b) En este caso, la solución de (2.117) se convierte en la solución complementaria de (2.119), es decir:

$$y_c(x) = \left[c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{x}{2}}\right] e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Aquí es fácil ver que el sistema fundamental de soluciones de la ecuación complementaria asociada a (2.119) es:

$$sfs = \left\{ e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}}, e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}} \right\}$$

Con esto, asumimos que la solución particular[44] de (2.119) está dada por:

$$y_p(x) = A(x)e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}} + B(x)e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}} \tag{2.123}$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ se determinan a partir del sistema:

$$\begin{cases} A'(x)e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}} + B'(x)e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}} = 0 \\ A'(x)\frac{d}{dx}\left[e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}}\right] + B'(x)\frac{d}{dx}\left[e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}}\right] = f(x) \end{cases}$$

Ponemos[45] $f(x) = e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}}$ y se tiene:

$$\begin{cases} A'(x)e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}} + B'(x)e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}} = 0 \\ -A'(x)\left[\frac{1+\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}\right]e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}} + B'(x)\left[\frac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}\right]e^{\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}} \end{cases}$$

cancelamos $e^{\cos\frac{x}{2}}$

$$\begin{cases} A'(x)e^{-\frac{x}{2}} + B'(x)e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ -A'(x)\left(1+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} + B'(x)\left(1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

[44] Aquí aplicamos el método de variación de parámetros.
[45] Es la función que aparece a la derecha de (2.119).

agrupamos convenientemente en la segunda ecuación

$$\begin{cases} A'(x)e^{-\frac{x}{2}} + B'(x)e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ -A'(x)e^{-\frac{x}{2}} + B'(x)e^{\frac{x}{2}} - \underbrace{\left[A'(x)e^{-\frac{x}{2}} + B'(x)e^{\frac{x}{2}}\right]}_{=0 \text{ por la primera ecuación}} \operatorname{sen}\frac{x}{2} = 2e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

Finalmente nos queda el sistema:

$$\begin{cases} A'(x)e^{-\frac{x}{2}} + B'(x)e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ -A'(x)e^{-\frac{x}{2}} + B'(x)e^{\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

En este último sistema aplicamos la regla de Cramer y tenemos:

$$A'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{\frac{x}{2}} \\ 2e^{\frac{x}{2}} & e^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} & e^{\frac{x}{2}} \\ -e^{-\frac{x}{2}} & e^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix}} = e^{-x} \Longrightarrow A(x) = -e^{x}$$

y

$$B'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} & 0 \\ -e^{-\frac{x}{2}} & 2e^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-\frac{x}{2}} & e^{\frac{x}{2}} \\ -e^{-\frac{x}{2}} & e^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix}} = 1 \Longrightarrow B(x) = x$$

Ponemos estos resultados en (2.123) y se tiene:

$$y_p(x) = -e^{x}e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}} + xe^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}}$$

arreglamos esto y se tiene que la solución particular está dada por la función

$$y_p(x) = (x-1)e^{\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$$

Juntamos la solución complementaria y la solución particular para obtener finalmente la solución general de (2.119) dada por

$$y(x) = \left[c_1e^{-\frac{x}{2}} + c_2e^{\frac{x}{2}}\right]e^{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + (x-1)e^{\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$$

■

■ **Ejemplo 2.53** Dada la ecuación diferencial de coeficientes variables

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.124}$$

(a) Aplicando la transformación $z = \phi(x)$, determine la ecuación diferencial en la variable z.
(b) Imponga condiciones para $\phi(x)$ con las cuales la ecuación diferencial encontrada en (a) tenga solución.
(c) Aplique los resultados de (a) y (b) para resolver la ecuación diferencial

$$\operatorname{sen}(x)y'' + \left(3\operatorname{sen}^2 x - \cos x\right)y' + 2\operatorname{sen}^3(x)y = 0,\ x \in \langle 0, \pi\rangle \qquad (2.125)$$

Resolución

(a) Para determinar la ecuación diferencial en la variable z hay que expresar $y'(x)$ e $y''(x)$ en función de la variable z, para esto procedemos de la siguiente manera. Como $z = \phi(x)$, entonces aplicando regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dz} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} \\ &= z'\frac{dy}{dz}, \text{ donde } z' = \phi'(x) \end{aligned}$$

en forma similar

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dx}\frac{dz}{dz} = \frac{dz}{dx}\frac{d}{dz}[y'(x)] \\ &= z'\frac{d}{dz}\left[z'\frac{dy}{dz}\right] = z'\left[\frac{dz'}{dz}\frac{dy}{dz} + z'\frac{d^2y}{dz^2}\right] \\ &= z'\left[\frac{dz'}{dz}\frac{dx}{dx}\frac{dy}{dz} + z'\frac{d^2y}{dz^2}\right] = z'\left[\frac{dz'}{dx}\frac{1}{\frac{dz}{dx}}\frac{dy}{dz} + z'\frac{d^2y}{dz^2}\right] \\ &= z'\left[z''\frac{1}{z'}\frac{dy}{dz} + z'\frac{d^2y}{dz^2}\right], \text{ donde } \frac{dz'}{dx} = \phi''(x) = z'' \\ &= z''\frac{dy}{dz} + (z')^2\frac{d^2y}{dz^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y'(x) = z'\frac{dy}{dz} \quad \text{e} \quad y''(x) = z''\frac{dy}{dz} + (z')^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

Luego ponemos estas equivalencias de $y'(x)$ e $y''(x)$ en (2.124) para obtener lo siguiente:

$$z''\frac{dy}{dz} + (z')^2\frac{d^2y}{dz^2} + p(x)\left[z'\frac{dy}{dz}\right] + q(x)y = 0$$

agrupamos esto convenientemente y se obtiene:

$$(z')^2\frac{d^2y}{dz^2}+(z''+z'p(x))\frac{dy}{dz}+q(x)y=0$$

de donde

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{z''+z'p(x)}{(z')^2}\frac{dy}{dz}+\frac{q(x)}{(z')^2}y=0$$

o también

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P\frac{dy}{dz}+Qy=0,\text{ con }P(z)=\frac{z''+pz'}{(z')^2}\text{ y }Q(z)=\frac{q}{(z')^2} \tag{2.126}$$

(b) Para que la ecuación diferencial (2.126) sea resoluble, debemos procurar que esta sea de coeficientes constantes, así podemos establecer los siguientes casos:

- Primero, podemos suponer que $Q(z)$ es constante, es decir: $Q(z)=\frac{q(x)}{(z')^2}=c$ (c es constante), con esto se tiene que $z'=\pm\sqrt{\frac{q(x)}{c}}$, de donde

$$z=\pm\int\sqrt{\frac{q(x)}{c}}dx$$

  El método tendría éxito si al escoger apropiadamente z se tiene que $P(z)$ también es constante.
- Segundo, podemos suponer que $P(z)$ es constante, es decir: $P(z)=\frac{z''+pz'}{(z')^2}=c$ (c es constante), con esto se tiene que resolver la ecuación diferencial

$$z''+p(x)z'=c(z')^2$$

  la cual es no lineal y probablemente muy complicada de resolver; en cambio si tomamos $c=0$, entonces nos quedaría

$$z''+p(x)z'=0$$

  de donde $\frac{z''}{z'}=-p(x)$. Integrando esto se obtiene $\ln z'=-\int p(x)dx$, y de aquí vemos que $z'=e^{-\int p(x)dx}$, que al integrar nuevamente se tiene

$$z=\int e^{-\int p(x)dx}dx$$

  Nuevamente aquí habría éxito si $Q(z)$ fuera constante.

(c) Antes de proceder a resolver la ecuación diferencial (2.125), dividimos esta por $\operatorname{sen} x$ y se obtiene la ecuación equivalente

$$y'' + \frac{3\operatorname{sen}^2 x - \cos x}{\operatorname{sen} x} y' + 2\operatorname{sen}^2(x) y = 0 \tag{2.127}$$

Aplicamos en (2.127) la transformación $z = \phi(x)$ como en la parte (a), con cuyos resultados vemos que (2.127) se convierte en

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{(z')^2}\left[z'' + \frac{3\operatorname{sen}^2 x - \cos x}{\operatorname{sen} x} z'\right] y' + 2\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{(z')^2} y = 0 \tag{2.128}$$

donde $P(z) = \frac{1}{(z')^2}\left[z'' + \frac{3\operatorname{sen}^2 x - \cos x}{\operatorname{sen} x} z'\right]$ y $Q(z) = 2\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{(z')^2}$. Si hacemos que $Q(z)$ sea constante e igual a 2, nos queda $2\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{(z')^2} = 2$, de donde $(z')^2 = \operatorname{sen}^2 x$, y de aquí $z' = \pm \operatorname{sen} x$ y $z = \mp \cos x$. Poniendo estos resultados en (2.128) se tiene

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\left[\pm \cos x + \frac{3\operatorname{sen}^2 x - \cos x}{\operatorname{sen} x}(\pm \operatorname{sen} x)\right] y' + 2y = 0$$

Con cualquiera de los dos signos vemos que nos queda

$$\frac{d^2y}{dz^2} \pm 3y' + 2y = 0$$

Nos evitamos confusión y simplemente escogemos $z = \cos x$, y con esto la ecuación diferencial correspondiente es $\frac{d^2y}{dz^2} - 3y' + 2y = 0$, cuya solución es

$$y(z) = c_1 e^z + c_2 e^{2z}$$

y como estamos tomando $z = \cos x$, entonces la solución final[46] de (2.125) es

$$y(x) = c_1 e^{\cos x} + c_2 e^{2\cos x}$$

■

2.5 Caso especial de ecuaciones diferenciales no homogéneas

Un caso especial que no debemos dejar pasar sin tratarlo, es el de ecuaciones diferenciales (2.19) donde la función $f(x)$ está definida por partes[47],

[46] Se obtiene el mismo resultado si tomamos $z = -\cos x$.

[47] Este caso será tratado más adelante con transformada de Laplace

explicamos este caso en los siguientes ejemplos con ecuaciones fáciles de manipular, de tal manera que el lector tenga la idea de como poder afrontar este tipo de problemas.

■ **Ejemplo 2.54** Halle la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + y' - 2y = f(x)$$

donde $f(x) = \begin{cases} x, \; x < 0 \\ 1, \; x \geq 0 \end{cases}$

<u>Resolución</u>

Aquí, es fácil ver que el sistema fundamental de soluciones es $sfs = \{e^x, e^{-2x}\}$. Para determinar la solución de la ecuación dada, nos fijamos en el dominio de f, así vemos que se tiene dos casos: $x < 0$ y $x \geq 0$; según los cuales trabajamos la ecuación diferencial independientemente. Veamos

Cuando $x < 0$, nos queda la ecuación diferencial

$$y'' + y' - 2y = x \tag{2.129}$$

cuya solución complementaria es $y_{c1}(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x}$. Si procedemos con el método de coeficientes indeterminados, su solución particular es de la forma[48] $y_{p1}(x) = Ax + B$, que al reemplazar en (2.129) resulta $A = -\frac{1}{2}$ y $B = -\frac{1}{4}$, por lo que nos queda la solución particular

$$y_{p1}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Así, con estos resultados se tiene que la solución de (2.129) es

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \; x < 0$$

En forma similar, cuando $x \geq 0$, nos queda la ecuación diferencial

$$y'' + y' - 2y = 1 \tag{2.130}$$

cuya solución complementaria es $y_{c2}(x) = c_3e^x + c_4e^{-2x}$. Procediendo con el método de coeficientes indeterminados, su solución particular es de la forma $y_{p2}(x) = C$, que al reemplazar en (2.130) resulta $C = -\frac{1}{2}$, por lo que en este caso nos queda la solución particular

$$y_{p2}(x) = -\frac{1}{2}$$

[48] El conjunto generador en este caso es $G = \{x, 1\}$.

Luego tenemos que la solución de (2.130) está dada por

$$y(x) = c_3e^x + c_4e^{-2x} - \frac{1}{2},\ x \geq 0$$

Con estos dos resultados, la solución de la ecuación diferencial propuesta es:

$$y(x) = \begin{cases} c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4},\ x < 0 \\ \\ c_3e^x + c_4e^{-2x} - \frac{1}{2},\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2.131}$$

Aquí en (2.131) vemos cuatro parámetros o constantes, de los cuales debemos depurar dos; es decir, la solución general de la ecuación diferencial propuesta debe contener solo dos parámetros. Para reducir los parámetros debemos considerar el hecho de que la función $y(x)$ debe ser dos veces derivable[49] en todo $\mathbb{R}$, y esto, implica que tanto y como y' deben ser continuas en $\mathbb{R}$, en particular en $x = 0$. Así se tiene que $y(0^-) = y(0^+)$ y $y'(0^-) = y'(0^+)$.

En (2.131) desarrollamos $y(0^-) = y(0^+)$ para obtener:

$$c_1 + c_2 - \frac{1}{4} = c_3 + c_4 - \frac{1}{2}$$

de donde

$$c_1 + c_2 - c_3 - c_4 = -\frac{1}{4} \tag{2.132}$$

Derivamos $y(x)$ en (2.131) para obtener: $y'(x) = \begin{cases} c_1e^x - 2c_2e^{-2x} - \frac{1}{2},\ x < 0 \\ \\ c_3e^x - 2c_4e^{-2x},\ x \geq 0 \end{cases}$,

aquí aplicamos $y'(0^-) = y'(0^+)$ y se tiene que $c_1 - 2c_2 - \frac{1}{2} = c_3 - 2c_4$, de donde se obtiene:

$$c_1 - 2c_2 - c_3 + 2c_4 = \frac{1}{2} \tag{2.133}$$

Restando (2.133) de (2.132) se obtiene $c_2 - c_4 = -\frac{1}{4}$, y con esto vemos que $c_4 = c_2 + \frac{1}{4}$. Así mismo, si multiplicamos por 2 a (2.132) y sumamos con (2.133) resulta que $c_3 = c_1$. Con estos dos resultados en (2.131) vemos finalmente que la solución general[50] de la ecuación diferencial propuesta está dada por la función

$$y(x) = \begin{cases} c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4},\ x < 0 \\ \\ c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x},\ x \geq 0 \end{cases}$$

[49] Para que satisfaga la ecuación diferencial de segundo orden, debe ser dos veces derivable.

[50] Para determinar c_1, c_2 se debe imponer condiciones iniciales o de frontera a la ecuación diferencial.

Si imponemos las condiciones $y(0) = y'(0)$ la solución sería[51]:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{12}e^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4},\ x < 0 \\ \\ \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{6}e^{-2x} - \frac{1}{2},\ x \geq 0 \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 2.55** Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = f(x),\ x \in \mathbb{R} \tag{2.134}$$

donde $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < \pi \\ \\ e^x,\ x \geq \pi \end{cases}$.

Resolución

A diferencia del ejemplo anterior, este lo vamos a resolver aplicando el método de variación de parámetros. En primer lugar, el sistema fundamental de soluciones y la solución complementaria son respectivamente $sfs = \{e^x \cos x, e^x \operatorname{sen} x\}$ y $y_c(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x$. La solución particular lo asumimos de la forma:

$$y_p(x) = A_1(x)e^x \cos x + A_2(x)e^x \operatorname{sen} x \tag{2.135}$$

donde $A_1(x)$ y $A_2(x)$ se determinan a partir del sistema de ecuaciones[52]:

$$\begin{cases} A_1'(x)e^x \cos x + A_2'(x)e^x \operatorname{sen} x = 0 \\ \\ A_1'(x)[e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x] + A_2'(x)[e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos(x)] = f(x) \end{cases}$$

Este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} A_1'(x)\cos x + A_2'(x)\operatorname{sen} x = 0 \\ \\ A_1'(x)[\cos x - \operatorname{sen} x] + A_2'(x)[\operatorname{sen} x + \cos(x)] = \frac{f(x)}{e^x} \end{cases}$$

que expresado con matrices se convierte es:

$$\begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x - \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x + \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{e^x} \end{bmatrix} \tag{2.136}$$

[51] Pedimos al lector haga esta comprobación
[52] Vea (2.50)

Aquí aplicamos regla de Cramer y se tiene lo siguiente:

$$A_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \frac{f(x)}{e^x} & \operatorname{sen} x + \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x - \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x + \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{\operatorname{sen} x}{e^x} f(x)$$

de donde

$$\begin{aligned} A_1(x) &= -\int_\pi^x \frac{\operatorname{sen} z}{e^z} f(z)dz = \begin{cases} -\int_\pi^x \frac{\operatorname{sen} z}{e^z} 0dz, \ x < \pi \\ -\int_\pi^x \frac{\operatorname{sen} z}{e^z} e^z dz, \ x \geq \pi \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, \ x < \pi \\ 1 + \cos x, \ x \geq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

En forma similar se tiene que

$$A_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \cos x - \operatorname{sen} x & \frac{f(x)}{e^x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x - \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x + \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\cos x}{e^x} f(x)$$

de donde

$$\begin{aligned} A_2(x) &= \int_\pi^x \frac{\cos z}{e^z} f(z)dz = \begin{cases} \int_\pi^x \frac{\cos z}{e^z} 0dz, \ x < \pi \\ \int_\pi^x \frac{\cos z}{e^z} e^z dz, \ x \geq \pi \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, \ x < \pi \\ \operatorname{sen} x, \ x \geq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

Ponemos $A_1(x)$ y $A_2(x)$ que acabamos de encontrar en (2.135) para obtener:

$$y_p(x) = \cos(x) \begin{cases} 0, \ x < \pi \\ 1 + \cos x, \ x \geq \pi \end{cases} + \operatorname{sen}(x) \begin{cases} 0, \ x < \pi \\ \operatorname{sen} x, \ x \geq \pi \end{cases}$$

y de esta manera la solución particular es:

$$y_p(x) = \begin{cases} 0, \ x < \pi \\ 1 + \cos x, \ x \geq \pi \end{cases}$$

Como ya disponemos de la solución complementaria y solución particular, entonces la solución general de (2.134) es:

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x + \begin{cases} 0, \ x < \pi \\ \\ 1 + \cos x, \ x \geq \pi \end{cases}$$

o también

$$y(x) = \begin{cases} c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x, \ x < \pi \\ \\ c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x + 1 + \cos x, \ x \geq \pi \end{cases}$$

■

2.6 EJERCICIOS PROPUESTOS 2

1. Determine el sistema fundamental de soluciones y la solución general de $2xy'' + y' + y = 0$, si una de sus soluciones es $y_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{2x})$.
2. Dada la ecuación diferencial:

$$g(x)y'' - \alpha(x)\left(x + \frac{k}{m}\right)y' + \alpha(x)y = 0$$

demuestre que $\phi(x) = mx + k$ es solución, donde m y k son números reales.
3. Dada la ecuación diferencial

$$x^2(x-1)y'' - x(x-2)y' + (x-2)y = 0, \ x > 1$$

   a) Demuestre que $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación diferencial.
   b) Encuentre la segunda solución fundamental, luego la solución general.
4. Dada la ecuación diferencial

$$x^2 \tan(x)y'' - x(2\tan(x) + x\sec^2(x))y' + (2\tan(x) + x\sec^2(x))y = 0, \ x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

   a) Demuestre que $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación diferencial.
   b) Encuentre la segunda solución fundamental, luego la solución general.
5. Dada la ecuación diferencial

$$x^2(x^2 - 4)y'' + 8xy' - 8y = 0, \ 0 < x < 2$$

a) Demuestre que $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación diferencial.
b) Encuentre la segunda solución fundamental, luego la solución general.

6. Determine el sistema fundamental de soluciones y la solución general de

$$(2x+1)y'' + y' + 4y = 0,\ 2x+1 > 0$$

si una de sus soluciones es $y_1(x) = \cos(2\sqrt{2x+1})$.

7. Resuelva la ecuación diferencial $y'' + (1+t)y' - 2y = 0$, si una de sus soluciones es de la forma $y_1(t) = at^2 + bt + c$.
8. Halle el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $xy'' + 4(x-1)y' - 4y = 0$, $x > 0$, si una de las soluciones es de la forma $y_1(x) = ax + b$.
9. Halle el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $x^2y'' + (x-1)y' - 4y = 0$, $x > 0$, si una de las soluciones es de la forma $y_1(x) = ax^2 + bx + c$.
10. Dada la ecuación diferencial $(x^2+1)y'' + (x - 2\sqrt{x^2+1})y' + y = 0$
    a) Halle la solución general, si una de sus soluciones fundamentales es de la forma$y_1(x) = ax + b\sqrt{x^2+1}$.
    b) A partir de la solución general, halle aquella función que satisface las condiciones $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$.
11. Dada la ecuación diferencial $y'' - 2(\tanh t)y' + \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 t}\right) y = 0$
    a) Halle la solución general, si una de sus soluciones fundamentales es $y_1(x) = \cosh t$.
    b) A partir de la solución general, halle aquella función que satisface las condiciones $y(0) = -2$ y $y'(0) = 0$.
12. Halle el sistema fundamental de soluciones y la solución general de las ecuaciones:
    a) $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$
    b) $y^{(6)} + 14y^{(4)} + 49y'' + 36y = 0$
    c) $y^{(6)} + 12y^{(4)} + 48y'' + 64y = 0$
    d) $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$
    e) $y^{(6)} - 6y^{(5)} + 24y^{(4)} - 56y''' + 96y'' - 96y' + 64y = 0$
    f) $y^{(6)} - 4y^{(5)} - 6y^{(4)} + 32y''' + y'' - 60y' + 36y = 0$
    g) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$
13. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:
    a) $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 500t\,\mathrm{sen}(t)$
    b) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 9t + 100te^t$
    c) $y'' - 2y' + 10y = 108te^t\,\mathrm{sen}(3t)$
    d) $y^{(4)} + y''' - 2y'' = 24x^2 - 54xe^x$

e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^3 - 60x^2 e^x$
f) $y^{(4)} - 2y'' + y = \operatorname{senh}(x)$
g) $y'' - 4y = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$
h) $y'' - 2y' + 2y = e^x \tan x$

14. Para determinar la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales, plantee correctamente dicha solución, si el método a aplicar es el de coeficientes indeterminados.
a) $y'' - 2y' + 4y = xe^x \cos(\sqrt{3}x) + x^3$
b) $y^{(6)} + 48y^{(4)} + 768y'' + 4096y = x \operatorname{sen}(4x)$
c) $y^{(6)} - 3y^{(5)} - 15y^{(4)} + 35y''' + 90y'' - 108y' - 216y = x^3 e^{-2x} + xe^{3x} + \operatorname{sen} x$
d) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = x^2 e^x + x^3$

15. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones dadas
a) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(-1) = y'(0) = 0$
b) $y'' - y = x + \operatorname{sen} x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$
c) $y'' + 4y = 16 \sec^3(2x)$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$
d) $y'y'' = x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ (sugerencia: haga $z = y'$)
e) $2y'' = 3y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ (sugerencia: haga $z = y'$)
f) $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$, $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = \omega_0$ (oscilación del péndulo)
g) $y''' + y'' = x + e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$
h) $y^{(4)} - y = 5$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

16. Dada la ecuación diferencial $y^{(4)} - y''' - y'' - y' - 2y = 8x^5$
a) Halle el sistema fundamental de soluciones, la solución particular y solución general.
b) Halle la solución que satisface $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

17. Dada la ecuación diferencial $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = x$
a) Halle el sistema fundamental de soluciones, si una de sus soluciones de la ecuación complementaria es $y_1(x) = x$.
b) Encuentre la solución particular y solución general.

18. Haga el cambio de variable $z = y'$ para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, indique además el sistema fundamental de soluciones.
a) $x(x-1)y'' - (3x-4)y' = 0$
b) $(x^2 - 4)y'' - 2y' = 0$
c) $(x^2 + 4)y'' - 2xy' = 0$

19. Teniendo en cuenta el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial del ejercicio 8, resuelva:
a) $xy'' + 4(x-1)y' - 4y = 2$, $x > 0$.
b) $xy'' + 4(x-1)y' - 4y = x^2 e^{-4x}$, $x > 0$

20. Teniendo en cuenta el sistema fundamental de soluciones de la ecuación

diferencial del ejercicio 9, resuelva:

a) $x^2y'' + (x-1)y' - 4y = 2$, $x > 0$.

b) $x^2y'' + (x-1)y' - 4y = x$, $x > 0$.

21. Dada la ecuación diferencial $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2+1)^2$

    a) Halle el sistema fundamental de soluciones, si una de sus soluciones fundamentales de la ecuación complementaria es de la forma[53] $y_1(x) = x^n$.

    b) Encuentre la solución particular y solución general.

    c) A partir de la solución general, determine aquella función que satisface las condiciones $y(0) = -1$ y $y'(0) = 1$.

22. Determine la solución de la ecuación diferencial $x^5y'' + 2x^4y + xy = -1$, $x > 0$, si una de las soluciones fundamentales de su ecuación complementaria es $y_1(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

23. Usando el método de los Operadores inversos, encuentre la solución general de cada ecuación.

    a) $(D^2 - D)y = 1$ b) $(D^2 - 2D + 1)y = e^x$.

    c) $(D^2 + 3D + 2)y = e^x - e^{-x}$ d) $(D^2 - 1)y = 2x^4 - 3x + 1$.

    e) $(D^2 + D)y = 4x^3 - 2e^{2x}$ f) $(D^2 + 2D + 1)y = x^2e^{-x} + 1$.

    g) $(D^2 - 4D + 4)y = e^{2x}\operatorname{sen} 3x$ h) $(D^3 - D)y = 1 + x^5$.

24. Si $\phi(D)$ es un operador polinómico en D con coeficientes constantes, y m es cualquier constante, muestre que $\phi(D)e^{mx} = \phi(m)e^{mx}$. Luego, muestre que una solución de $\phi(D)y = 0$ es $y = e^{mx}$, donde m puede tomar valores que satisfacen $\phi(m) = 0$. Note que $\phi(m) = 0$ es la ecuación auxiliar.

25. Si a y b son constantes y y_1, y_2 son funciones apropiadas de x, muestre que
$$\frac{1}{\phi(D)}(ay_1 + by_2) = a\frac{1}{\phi(D)}y_1 + b\frac{1}{\phi(D)}y_2$$
Esto demuestra que $\frac{1}{\phi(D)}$ es un operador lineal.

26. Muestre que si se omiten constantes arbitrarias
$$\frac{1}{\phi(D)}e^{mx} = \frac{1}{\phi(m)}(e^{mx}),\ \phi(m) \neq 0.$$
Así, evalúe $\frac{1}{D^2-2D-3}e^{4x}$ y obtenga la solución general de
$$(D^2 - 2D - 3)y = e^{4x}.$$

[53] Tiene que determinar el valor de n.

27. Obtenga una solución particular de $(D^3+3D^2-4D-12)y = 2e^{3x} - 4e^{-5x}$. Tambien encuentre la solución general.

28. **a)** Demuestre que si m es una constante y F es diferenciable,

$$D(e^{mx}F) = e^{mx}(D+m)F, \quad D^2(e^{mx}F) = e^{mx}(D+m)^2F$$

b) Por inducción matemática, extienda los resultados de **a)** a $D^n(e^{mx}F) = e^{mx}(D+m)^nF.$

29. Utilice el ejercicio 28 para demostrar que $\phi(D)(e^{mx}F) = e^{mx}\phi(D+m)F$ donde $\phi(D)$ es un polinomio en D con coeficientes constantes. El resultado se llama ***"Teorema de cambio de Operador"***.

30. Use el teorema de cambio de operador del Ejercicio 29 para mostrar que la ecuación $(D-m)^py = 0$ tiene la solución general $y = e^{mx}(c_1 + c_2x + \cdots + c_px^{p-1})$.

31. Use el teorema de cambio de operador para mostrar que

$$\frac{1}{\phi(D)}(e^{mx}G) = e^{mx}\frac{1}{\phi(D+m)}G.$$

32. Usando el Ejercicio 31, evalúe

a) $\dfrac{1}{D^2-4D+3}(x^3e^{2x})$ y obtenga una solución particular de

$$(D^2-4D+3)y = x^3e^{2x}.$$

b) $\dfrac{1}{D^2+2D+1}(2x^2e^{-2x}+3e^{2x})$ y obtenga una solución particular de

$$(D^2+2D+1)y = 2x^2e^{-2x}+3e^{2x}.$$

33. Muestre que si ϕ es un polinomio con coeficientes constantes,

$$\phi(D^2)(\operatorname{sen} ax) = \phi(-a^2)(\operatorname{sen} ax), \quad \phi(D^2)(\cos ax) = \phi(-a^2)(\cos ax)$$

así, derive los resultados,

$$\frac{1}{\phi(D^2)}(\operatorname{sen} ax) = \frac{1}{\phi(-a^2)}(\operatorname{sen} ax), \quad \frac{1}{\phi(D^2)}(\cos ax) = \frac{1}{\phi(-a^2)}(\cos ax),$$

donde $\phi(-a^2) \neq 0$.

34. Usando el Ejercicio 33 evalúe

a) $\dfrac{1}{D^2+1}(\operatorname{sen} 3x)$

b) $\dfrac{1}{D^4-3D^2+2}(2\cos 2x - 4\operatorname{sen} 2x)$

35. Los resultados del Ejercicio 34 se pueden usar para encontrar soluciones particulares de $\phi(D^2)y = \operatorname{sen} ax$ ó $\phi(D^2)y = \cos ax$, pero no funcionan para las ecuaciones $\phi(D)y = \operatorname{sen} ay$ ó $\phi(D)y = \cos ay$.

a) Muestre que $\phi(D)$ siempre se puede escribir como $F_1(D^2)+DF_2(D^2)$. Considere

$$[F_1(D^2)+DF_2(D^2)]y = \operatorname{sen} ax.$$

Opere a ambos lados por $F_1(D^2)-DF_2(D^2)$ para obtener

$$[F_1(D^2)]^2 - D^2[F_2(D^2)]^2 y = F_1(-a^2)\operatorname{sen} ax - aF_2(-a^2)\cos ax$$

y por tanto muestre que una solución particular es

$$\frac{F_1(-a^2)\operatorname{sen} ax - aF_2(-a^2)\cos ax}{[F_1(-a^2)]^2 + a^2[F_2(-a^2)]^2}$$

b) Finalmente obtenga el resultado en **a)** escribiendo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\phi(D)}\operatorname{sen} ax &= \frac{1}{F_1(D^2)+DF_2(D^2)}\operatorname{sen} ax \\
&= \frac{F_1(D^2)-DF_2(D^2)}{[F_1(D^2)+DF_2(D^2)][F_1(D^2)-DF_2(D^2)]}\operatorname{sen} ax \\
&= \frac{F_1(-a^2)-DF_2(-a^2)}{[F_1(-a^2)]^2+a^2[F_2(-a^2)]^2}\operatorname{sen} ax \\
&= \frac{F_1(-a^2)\operatorname{sen} ax - aF_2(-a^2)\cos ax}{[F_1(-a^2)]^2+a^2[F_2(-a^2)]^2}
\end{aligned}$$

Llegue a un resultado similar para $\frac{1}{\phi(D)}\cos ax$

36. Use los resultados del Ejercicio 35 para encontrar soluciones particulares de:

a) $(D^2-3D+2)y = \operatorname{sen} 3x$.

b) $(2D^3+D^2-2D-1)y = 3\operatorname{sen} 2x + 4\cos 2x$.

37. Combinando el teorema de cambio de Operador del Ejercicio 31 y los resultados del Ejercicio 35, evalúe

a) $\dfrac{1}{D^2+D-2}(e^{2x}\operatorname{sen} 3x)$

b) $\dfrac{1}{D^3+2D^2-1}(e^{-x}\cos 2x)$.

38. Muestre cómo las identidades $\operatorname{senh}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$, $\cosh\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ se pueden emplear para obtener los resultados de los ejercicios de 33 - 36.

39. Usando los métodos de los Ejercicios 24-37 evalúe:
    a) $\frac{1}{D^2+2D-5}(e^{3x})$ b) $\frac{1}{D^3-1}(x^5+3x^4-2x^3)$
    c) $\frac{1}{D^2+1}(x^2e^{2x})$ d) $\frac{1}{D^2+D}(8\operatorname{sen}4x)$
    e) $\frac{1}{D^3+1}(\operatorname{sen}x+\cos x)$ f) $\frac{1}{(D-3)^3}(e^{3x}\cos 4x)$
    g) $\frac{1}{D^2-4D+3}[e^x(2\operatorname{sen}x-3\cos x)]$ h) $\frac{1}{(D+2)^2(D+1)^3}(x^3e^{-x}+e^{-x}\operatorname{sen}x)$
    i) $\frac{1}{D^3+D^2-D-1}(x^2+3\operatorname{sen}x)$ j) $\frac{1}{(D^3-D^2+D)}(x^2e^x-4x^4)$.

40. Aplicando el método del ejemplo 2.53, halle la solución de la ecuación diferencial
$$x^4y''+2x^3y'+y=\frac{1}{x^2},\ x>0$$

41. Aplicando el método del ejemplo 2.53, halle la solución de la ecuación diferencial
$$xy''-y'-4x^3y=0,\ x>0$$

42. Teniendo en cuenta de que $t\in\langle 0,+\infty\rangle$, halle la solución de las siguientes ecuaciones de Cauchy-Euler:
    a) $ty''+y'-\frac{4}{t}y=24\left(t+t^3\right)$.
    b) $t^3y'''+2t^2y''-ty'+y=0$.
    c) $t^2y''+3ty'+2y=10t+10$, con $y(1)=y'(1)=0$.
    d) $t^4y^{(4)}+5t^3y'''+8t^2y''=0$.
    e) $t^4y^{(4)}+7t^3y'''+4t^2y''-18ty'-12y=t^2$.
    f) $t^4y^{(4)}+6t^3y'''+7t^2y''+ty'+4y=1+t$.
    g) $2t^3y'''+19t^2y''+39ty'+9y=0$.
    h) $t^2y''-4ty'+6y=t^2(2t^2+1)$.

43. Demuestre que haciendo $\alpha t+\beta=e^z$ se obtiene que
$$y^{(n)}(t)=\alpha^n e^{-nz}D[D-1][D-2]\cdots[D-(n-1)]y$$
donde $D^r=\frac{d^r}{dz^r}$.

44. Aplicando el ejercicio 43, halle la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:
    a) $(2t-1)^2y''-2(2t-1)y'+3y=2t+4,\ t>\frac{1}{2}$.
    b) $(3t-5)^2y''+(15t-25)y'-3y=-24t,\ t>\frac{5}{3}$.
    c) $(t+1)^2y''+5(t+1)y'+8y=13t,\ t>-1$.
    d) $(2t-3)^3y'''+4(2t-3)^2y''-5(2t-3)y'+6y=0,\ t>\frac{3}{2}$.

e) $(5t+3)^2y''' + 15(5t+3)y'' + 50y' = 0,\ t > -\frac{3}{5}$.

45. Dada la ecuación diferencial:

$$tx'' - [2 + t\cot(t)]\,x' + \left[\frac{2}{t} + \cot(t)\right]x = -t^2\cot(t),\ t > 0$$

a) Halle el sistema fundamental de soluciones y la solución complementaria de la ecuación dada, teniendo en cuenta que una de sus soluciones fundamentales es de la forma $x_1(t) = t^n + rt$, donde n y r son constantes.

b) Halle la solución total.

46. Dada la ecuación diferencial:

$$y'' + (\tan x - 3\cot x)y' + 3\cot^2(x)\,y = 3\tan^3 x$$

a) Sean y_1, y_2 soluciones fundamentales de la ecuación diferencial dada, determine el sistema fundamental de soluciones, teniendo en cuenta que $y_1 = y_2^3$.

b) Halle la solución general o total de la ecuación diferencial dada.

47. Use los resultados de 46 para resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + (\tan x - 3\cot x)y' + 3\cot^2(x)\,y = 3\cot^2 x$$

48. Dada la ecuación diferencial:

$$(1-x)\left[yy'' - (y')^2\right] + x^2y^2 = 0 \tag{2.137}$$

a) Demuestre que aplicando la transformación $y = e^{z(x)}$, (2.137) se transforma en una ecuación de la forma $z'' = \phi(x)$.

b) A partir de la ecuación anterior, halle la solución de (2.137)

49. En la ecuación diferencial $xy'' = (2y-1)y'$, aplique el cambio de variable $x = e^u$ y determine las diferentes familias de soluciones.

50. Halle la solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 8y = f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ 0 \le x < \pi \\ e^{2x},\ x \ge \pi \end{cases}$$

51. Halle la solución del ejercicio 50, si satisface las condiciones $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

52. Resuelva el problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + 9y = f(x), x > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$, siendo $f(x) = \begin{cases} 18\,\mathrm{sen}(3x),\ 0 \le x < 2\pi \\ 8\cos(3x),\ x \ge 2\pi \end{cases}$.

53. Resuelva el problema de valor inicial $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = f(x), \ x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$,

siendo $f(x) = \begin{cases} 36e^{-2x}, \ x < 0 \\ 36e^{4x}, \ x \geq 0 \end{cases}$.

54. Dada la ecuación diferencial $xy'' + 2y' + xy = x^2 \operatorname{sen} x$
    a) Aplicando el método del ejemplo 2.49 halle la solución complementaria.
    b) Halle la solución total de la ecuación diferencial.
55. Aplicando el método de los operadores inversos resuelva:
    a) $y'' + y' - 2y = e^x \operatorname{sen} 2x$
    b) $y'' - 3y' + 2y = \cos 3x$
    c) $y''' + 4y'' + 6y' + 4y = e^{-2x} \cos 2x$
    d) $y''' - 4y'' - 4y' + 16y = \operatorname{sen}(2t) + 3\cos(2t)$
    e) $y'' + 4y = t\cos(2t)$
    f) $y'' - 5y' + 4y = 2te^{4x} + e^x \cos(2x)$
56. Aplicando la transformación $z = \cos(2x)$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, la ecuación diferencial

$$\csc^2(2x)y'' - 2\csc(2x)[1 + \csc(2x)\cot(2x)]y' - 8y = 216\cos(2x)e^{\cos(2x)}$$

se convierte en una de coeficientes constantes, halle su solución general.
57. Aplicando la transformación $z = e^{(x+1)^2}$, $x \in \langle 0, +\infty \rangle$, la ecuación diferencial

$$(x+1)y'' - \left(2x^2 + 4x + 3\right)y' + 36(x+1)^3 e^{2(x+1)^2} y = 4(x+1)^3 e^{3(x+1)^2}$$

se convierte en una de coeficientes constantes, halle su solución general.
58. Aplicando la transformación $z = \ln(\operatorname{sen} x)$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, la ecuación diferencial

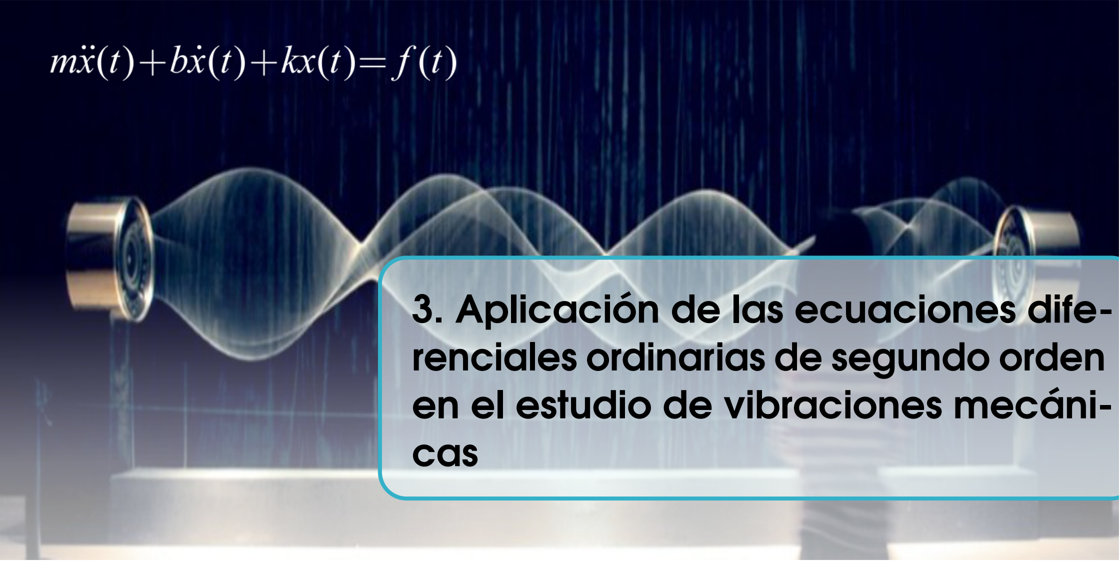
$$y'' + 2\csc(2x)y' - 9\cot^2(x)y = 8\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

se convierte en una de coeficientes constantes, halle su solución general.
59. Aplicando la transformación $z = \arctan(e^x)$, la ecuación diferencial

$$\left(1 + e^{2x}\right)y'' + \left(e^{2x} - 2e^x - 1\right)y' = \frac{5e^{2x}}{(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$$

se convierte en una de coeficientes constantes, halle su solución general.

60. Aplicando el procedimiento del ejemplo 2.53 resuelva las ecuaciones diferenciales:
   a) $y'' - \frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}y' + (e^x+1)^2 y = 0$
   b) $y'' - \frac{2x^2+1}{x^3+x}y' - \frac{1}{16}x^2(x^2+1)y = 0$, $x > 0$
   c) $y'' + \left[1 + \operatorname{sen} x - \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\right] y' - 2(1+\operatorname{sen} x)^2 y = 0$
   d) $y'' - \frac{1}{x^2-x}y' + 16\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 y = 0$, $x > 1$
   e) $y'' + \frac{2+2x}{1+x^2}y' + \frac{1}{(1+x^2)^2}y = 0$
   f) $y'' + \left(2xe^{x^2} - 2x - \frac{1}{x}\right) y' + x^2 e^{2x^2} y = 0$
61. Aplicando el procedimiento del ejemplo 2.49 resuelva las ecuaciones diferenciales:
   a) $y'' - \frac{4x}{1+x^2}y' + \frac{x^4+26x^2-7}{4\left(1+x^2\right)^2}y = 0$
   b) $y'' - \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}y' + \frac{y}{1+\operatorname{sen} x} = 0$, $0 < x < \pi$
   c) $y'' + \frac{2}{x+x^3}y' + \frac{x^4+2x^2-2}{(1+x^2)^2}y = 0$, $x > 0$



3. Aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en el estudio de vibraciones mecánicas

Cuando se estudia ecuaciones diferenciales, el interés del estudiante se centra en conocer el tipo de fenómenos físicos dónde esta teoría se puede aplicar para su estudio; pues bien, a continuación hacemos el estudio de las vibraciones u oscilaciones y su relación con las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Según **Hewitt, P (2007)**, todo lo que va y viene, va de un lado a otro y regresa, entra y sale, se enciende y apaga, es fuerte y débil, sube y baja, está vibrando. Una vibración es una oscilación en el tiempo. Un vaivén tanto en el espacio como en el tiempo es una *onda*, la cual se extiende de un lugar a otro. La luz y el sonido son vibraciones que se propagan en el espacio en forma de ondas; sin embargo, se trata de dos clases de ondas muy distintas. El sonido es la propagación de vibraciones a través de un medio material sólido, líquido o gaseoso. Si no hay un medio que vibre, entonces no es posible el sonido. El sonido no puede viajar en el vacío. No obstante la luz sí puede viajar en el vacío, pues, es una vibración de campos eléctricos y magnéticos, una vibración de energía pura. La fuente de todas las ondas, de sonido, de luz o de lo que sea, es algo que vibra. Asimismo, si colgamos una piedra de un cordón tendremos un péndulo simple. Los péndulos se balancean, y van y vienen con tal regularidad que, durante mucho tiempo se usaron para controlar el movimiento de la mayoría de relojes. Galileo descubrió que el tiempo que tarda un péndulo en ir y venir en distancias cortas sólo depende de la longitud del péndulo. Es sorprendente que el tiempo de una oscilación de ida y vuelta, llamado periodo, no depende de la masa del péndulo ni del tamaño del arco en el cual oscila.

Un péndulo largo tiene un periodo más largo que un péndulo corto; esto es, oscila de ida y vuelta con menos frecuencia. El movimiento vibratorio de ir y venir (movimiento oscilatorio) de un péndulo que describe un arco pequeño se llama *movimiento armónico simple*. La lenteja de un péndulo. Un contrapeso que esté fijo a un resorte, que tenga movimiento armónico simple vertical aumentado de la dimensión tiempo (t), describe una curva senoide, la cual es una representación gráfica de una onda, como se observa en la figura 3.1. Al igual que con una onda de agua, a los puntos más altos más altos de

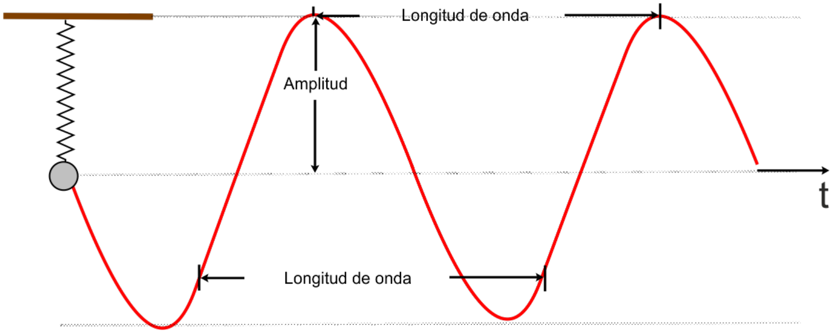


Figura 3.1: A la oscilación le añadimos el eje del tiempo y se genera una onda senoide.

la senoide se les llama *crestas*; y a los puntos más bajos *valles*. Se aplica el término *amplitud* para indicar la distancia de la línea media a la cresta (o valle) de la onda, mientras que la longitud de la onda está dada por la distancia entre dos crestas sucesivas[1].

El estudio de la oscilación en un resorte es muy importante para estudiantes de ingeniería porque les permite comprender situaciones más complejas como las vibraciones en un muelle, un puente o cualquier otra estructura que esté sometida a vibración. Como nos interesa la modelación matemática, analizamos el siguiente problema:

■ **Ejemplo 3.1** Una pesa de masa m pende del extremo de un resorte vertical. Si se hala la pesa una longitud a y se suelta, ésta empieza a oscilar; encuentre la ecuación diferencial del movimiento.

<u>Resolución</u>

Para resolver este problema es necesario ver algunos aspectos de la física que intervienen en este problema. Para empezar, en el resorte interviene la

[1] El lector puede profundizar más sobre este tema en [8].

propiedad de **elasticidad**[2] y según la *ley de* Hooke[3] ocurre

$$F = k \triangle x$$

o también

$$F_r = k \triangle x \tag{3.1}$$

Donde F_r es la *fuerza de restitución del resorte*[4] debido a la masa m que pende de él, $\triangle x$ es la cantidad de estiramiento y k es la constante del resorte.

Otro elemento que debemos considerar en el proceso del movimiento es la fuerza debida a la **fricción**[5] con el aire o también producida por un dispositivo de amortiguación que se añade al sistema resorte-masa, motivo por el cual en nuestro texto la llamamos **fuerza de amortiguación**[6] y la denotamos como F_a.

[2]Cuando un objeto se somete a fuerzas externas, sufre cambios de tamaño o de forma, o de ambos. Tales cambios dependen del arreglo de los átomos y su enlace en el material. Por ejemplo, un resorte puede estirarse y comprimirse por fuerzas externas. En nuestro problema, la pesa estira el resorte. Si se llegara a colgar más peso, se estira más. Si se quitaran las pesas, el resorte regresa a su longitud original. Entonces decimos que el resorte es elástico. Por lo tanto, **la elasticidad es la propiedad de cambiar de forma cuando actúa una fuerza de deformación sobre un objeto, y éste regresa a su forma original cuando cesa la deformación.** Los materiales que no tienen esa propiedad se llaman **inelásticos**. Ver **[8]**

[3]Cuando se cuelga una pesa a un resorte, actúa sobre ella la fuerza de gravedad. El estiramiento es directamente proporcional a la fuerza aplicada. Esta relación fue reconocida a mediados del siglo XVI por el físico inglés **Robert Hooke**, contemporáneo de Isaac Newton, y se le llama **ley de Hooke**. La cantidad de estiramiento o de compresión (cambio de longitud), $\triangle x$, es directamente proporcional a la fuerza aplicada, F. En notación abreviada,

$$F \sim \triangle x$$

Si un material elástico se estira o se comprime más allá de cierta cantidad, ya no regresa a su estado original, y permanece deformado. La distancia más allá de la cual se presenta la distorsión permanente se llama *límite elástico*. La ley de Hooke sólo es válida mientras la fuerza no estire ni se comprima el material más allá de su límite elástico. Ver [8]

[4]También podemos entender esto, como la fuerza con la cual el resorte tiende a recuperar su longitud natural, por eso en el texto le llamaremos fuerza de restitución del resorte y lo denotamos con F_r.

[5]La fricción no sólo se restringe a sólidos que se deslizan entre sí. También se presenta en líquidos y gases, que colectivamente se llaman fluidos (porque fluyen). La fricción de los fluidos ocurre cuando un objeto aparta el fluido a través del cual se mueve. La fricción de los fluidos es significativa incluso a rapideces bajas. Una forma muy común de fricción de fluidos para algo que se mueve a través del aire es la *resistencia del aire*, también llamada *resistencia aerodinámica*. Por lo común no nos damos cuenta de la resistencia del aire cuando estamos caminando o trotando; pero sí la notamos al ir a mayor rapidez, por ejemplo, cuando vamos en bicicleta. La resistencia del aire se incrementa conforme aumenta la rapidez. Tomado de [8]

[6]Respecto de la amortiguación debemos comentar dos tipos de amortiguamiento: *amortiguamiento viscoso* y *amortiguamiento newtoniano*. En el amortiguamiento viscoso, la magnitud de la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la magnitud de la velocidad, es decir:

$$F_a = bv$$

Como ilustración, en la figura 3.2 se muestra los tres estados del sistema resorte masa. En el primer caso se tiene el sistema libre, el cual consta sólo del resorte

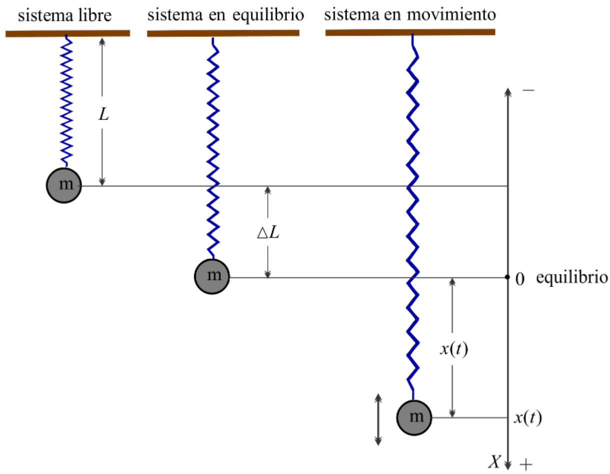


Figura 3.2: La figura muestra los tres estados del sistema resorte - masa

cuya longitud es L. En el segundo caso se tiene el sistema en equilibrio, vemos que el cuerpo de masa m está pendiendo del resorte y el efecto es estirarlo una magnitud $\triangle L$; pero como la masa no está en movimiento, la fuerza de restitución del resorte $F_r = k \triangle L$ se compensa con el peso del cuerpo[7] mg. Es decir:

$$k \triangle L = mg \tag{3.2}$$

Por último, en el tercer caso la pesa está en movimiento ya sea por un impulso inicial que se le da o por efecto de moverla a partir de su posición de equilibrio. Como la pesa hace un movimiento oscilatorio vertical, tomamos como sistema de referencia una línea vertical, en la cual denotamos con $x(t)$ la posición de la pesa en cualquier instante t, haciendo corresponder con $x = 0$ a la posición de equilibrio. Asumimos también posiciones positivas abajo del equilibrio y posiciones negativas arriba del mismo.

---

mientras que en el amortiguamiento newtoniano, la magnitud de la fuerza de amortiguamiento es proporcional al cuadrado de la magnitud de la velocidad, es decir:

$$F_a = bv^2$$

En ambos casos la fuerza de amortiguamiento actúa en dirección opuesta a la dirección del movimiento

[7] Nos estamos refiriendo a la pesa de masa m.

Si la pesa se mueve en un fluido (que puede ser el aire) o tiene algún dispositivo de amortiguación, la fuerza de amortiguación para este problema es tomada como $F_a = b\dot{x}(t)$, donde $\dot{x}(t)$ es la velocidad de la pesa y b la constante de amortiguación. Tomando el sistema global, las fuerzas que intervienen en el movimiento son: el peso, la fuerza de restitución del resorte y la fuerza de amortiguación, veamos el diagrama de la figura 3.3: De acuerdo a la *segunda*

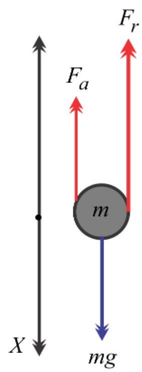


Figura 3.3: Diagrama de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo cuando está en movimiento.

ley de Newton[8] se tiene que la aceleración del movimiento de la pesa está dada por:

$$\ddot{x}(t) = \frac{F}{m} \tag{3.3}$$

donde la fuerza neta F del sistema según la figura 3.3 es:

$$F = mg - F_a - F_r \tag{3.4}$$

Puesto que $F_a = b\dot{x}(t)$ y $F_r = k(\triangle L + x(t))$, reemplazando en (3.4) se tiene:

$$F = mg - b\dot{x}(t) - k\triangle L - kx(t) \tag{3.5}$$

[8]Esta ley afirma lo siguiente: la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, tiene la dirección de la fuerza neta y es inversamente proporcional a la masa del objeto. Visto como ecuación se tiene:

$$\text{Aceleración} = \frac{\text{fuerza neta}}{\textit{masa}}$$

Ver [8]

Aplicando el resultado de (3.2) en (3.5), la fuerza neta es finalmente dada por la expresión:

$$F = -b\dot{x}(t) - kx(t)$$

Ponemos esto último en (3.3) y se obtiene la ecuación diferencial

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{3.6}$$

donde $\dot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$ son respectivamente la velocidad y aceleración de la pesa en cualquier instante t. Esta última ecuación es lo que llamamos la ecuación diferencial del movimiento. Si el movimiento en el sistema resorte - masa hubiera sido afectado por una fuerza externa $f(t)$, entonces la ecuación (3.6) se convierte en

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{3.7}$$

Puesto que al inicio la masa se hala una distancia a y se suelta, entonces las condiciones iniciales asociadas a (3.6) o (3.7) son $x(0) = a$ y $\dot{x}(0) = 0$ ∎

Estas dos últimas ecuaciones son muy importantes en física, al momento de estudiar vibraciones mecánicas[9].

3.1 Movimiento armónico simple

En este tipo de movimiento, la oscilación se da en un medio (ideal) que no ofrece amortiguación y en ausencia de alguna fuerza externa, por lo que $b = 0$ y $f(t) \equiv 0$, con estas condiciones la ecuación (3.7) se convierte en $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$. Si dividimos por m, esta ecuación diferencial se transforma en:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \tag{3.8}$$

Para determinar la solución general de (3.8), asociamos su ecuación característica $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$, cuyas raíces están dadas por $\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$. Como las raíces son números imaginarios, entonces el sistema fundamental de soluciones está dado por

$$sfs = \left\{ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right\}$$

Luego la solución general de (3.8) es:

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{3.9}$$

[9] También se tiene una ecuación diferencial análoga para estudiar circuitos eléctricos.

Aquí en (3.9) las constantes c_1, c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales, siendo estas, la posición inicial y la velocidad inicial de la masa. Para hacer un análisis más completo del comportamiento de esta solución, hacemos los siguientes cálculos. Tomemos $\phi = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$ y $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
&= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left[\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] \\
&= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left[\operatorname{sen}\phi \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \cos\phi \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] \\
&= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)
\end{aligned}$$

Con esto se tiene que (3.9) es equivalente a

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \tag{3.10}$$

Aquí en (3.10) identificamos los siguientes elementos:

1. Amplitud: $a(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Vemos que el valor de la amplitud dependerá de las condiciones iniciales que se impongan al movimiento.
2. Período: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.
3. Frecuencia: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. La frecuencia indica el número de oscilaciones que se dan en una unidad de tiempo y ésta depende de la masa m y de la constante de elasticidad del resorte k. Para una masa determinada m, vemos que la frecuencia de las oscilación (u onda) aumenta (o disminuye) si la constante de elasticidad del resorte aumenta (o disminuye); mientras que, para un resorte específico con constante de elasticidad k, la frecuencia de la oscilación aumenta (o disminuye), si la masa disminuye (o aumenta).
4. Ángulo de fase: $\phi = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$. El ángulo de fase, está relacionado con el desplazamiento de la oscilación (u onda) respecto del origen. Vemos que este ángulo depende de las condiciones iniciales que se impongan al movimiento.

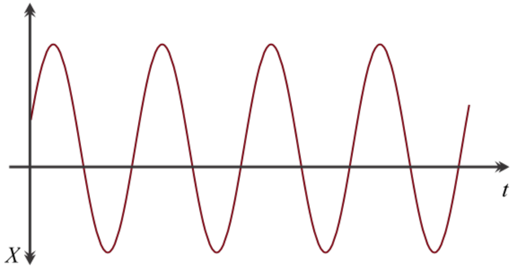


Figura 3.4: La oscilación típica de un movimiento armónico simple.

La curva de la oscilación la ilustramos en la figura 5.18.

■ **Ejemplo 3.2** Una masa que pesa 4 libras estira un resorte 3 pulgadas al llegar al reposo en equilibrio. Se tira luego de la masa 6 pulgadas debajo del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad de $\sqrt{2}$ pies por segundo dirigida hacia abajo. Despreciando todas las fuerzas de amortiguación y externas que puedan estar presentes,

1. determine la ecuación de movimiento de la masa. Asimismo, determine la amplitud, frecuencia y ángulo de fase natural del movimiento.
2. ¿cuánto tiempo transcurre desde que se suelta la masa hasta que pase la posición de equilibrio?

<u>Resolución</u>

1. De acuerdo a los datos del problema no interviene la amortiguación (por eso $b = 0$), así el movimiento es armónico simple. La masa y el coeficiente de elasticidad son respectivamente $m = \frac{1}{8}$ y $k = 16$, luego la ecuación diferencial correspondiente es: $\frac{1}{8}\ddot{x}(t) + 16x(t) = 0$, que lo expresamos en la forma

$$\ddot{x}(t) + 128x(t) = 0$$

La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es:

$$\lambda^2 + 128 = 0$$

cuyas raíces son $\lambda = \pm 8\sqrt{2}i$. Según estas raíces, el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial es $sfs = \{\cos(8\sqrt{2}), \operatorname{sen}(8\sqrt{2})\}$, de donde se obtiene la solución general:

$$x(t) = c_1 \cos(8\sqrt{2}) + c_2 \operatorname{sen}(8\sqrt{2}) \tag{3.11}$$

Para determinar c_1 y c_2 aplicamos las condiciones iniciales $x(0) = \frac{1}{2}$ y $\dot{x}(0) = \sqrt{2}$, obteniéndose así:$c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = \frac{1}{8}$. Poniendo estos valores en (3.11) se obtiene:

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos(8\sqrt{2}t) + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(8\sqrt{2}t)$$

que también lo podemos escribir como

$$x(t) = \frac{1}{8}\sqrt{17}\operatorname{sen}(8\sqrt{2}t + \phi), \quad \phi = \arctan(4) \approx 1,3258\ rad \tag{3.12}$$

De (3.12) se tiene: amplitud$= a = \frac{1}{8}\sqrt{17}$, frecuencia$= f = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$ y ángulo de fase$= \phi \approx 1,3258 rad$.

2. Si t^* es el instante en que la masa pasa por primera vez por el punto de equilibrio, entonces debe ocurrir que $8\sqrt{2}t^* + \phi = \pi$, de donde se tiene que

$$t^* = \frac{\sqrt{2}}{16}(\pi - \arctan(4)) \approx 0,1605 \text{ segundos}$$

Con esto se tiene que la masa pasa por primera vez por la posición de equilibrio al cabo de $t^* \approx 0,1605$ segundos.

■

3.2 Movimiento amortiguado no forzado

Aquí la oscilación de la masa se da en un medio que ofrece resistencia al movimiento, que puede ser por la presencia de un fluido (aire, agua, etc.), o un dispositivo que hace de amortiguador. En general, según las características del medio, el módulo de la fuerza de resistencia (o de amortiguación) del medio f_a es proporcional al módulo de v^α, es decir, $|f_a| = b|v|^\alpha$. En este texto, asumiremos $\alpha = 1$. Ahora, si b es la constante de amortiguación y el movimiento es libre, es decir, sin fuerzas externas que lo modifiquen, entonces la ecuación diferencial es:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{3.13}$$

Para determinar las soluciones (3.13), vemos que su ecuación característica asociada es:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0 \tag{3.14}$$

donde las raíces de (3.14) están dadas por

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \tag{3.15}$$

Acá en (3.15) vemos que el tipo de soluciones linealmente independientes de (3.13) van a depender del signo de $\triangle = b^2 - 4mk$; así tenemos tres casos:

1. Cuando $\triangle = b^2 - 4mk > 0$: este tipo de oscilación se llama **SOBRE-AMORTIGUADA**, las raíces de (3.14) son reales y distintas, y están dadas por:
$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2m} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2m}$$
luego las soluciones linealmente independientes asociadas a estas raíces son:
$$x_1(t) = e^{-\frac{b+\sqrt{\triangle}}{2m}t} \quad \text{y} \quad x_2(t) = e^{\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2m}t}$$
Con estas soluciones, el sistema fundamental de soluciones de (3.13) es el conjunto
$$sfs = \left\{ e^{-\frac{b+\sqrt{\triangle}}{2m}t}, e^{\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2m}t} \right\}$$
y con esto, la solución general de (3.13) es:
$$x(t) = c_1 e^{-\frac{b+\sqrt{\triangle}}{2m}t} + c_2 e^{\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2m}t},\ t \geq 0 \tag{3.16}$$
Otro detalle importante aquí es que $x_1(t) \longrightarrow 0$, cuando $t \longrightarrow +\infty$, asimismo, también ocurre[10] que $x_2(t) \longrightarrow 0$, cuando $t \longrightarrow +\infty$. Con estos resultados en (3.16) se tiene que
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$$
Este resultado nos dice que la oscilación es estable a 0 en el tiempo, es decir, pasado un tiempo apropiado (relativamente grande) el cuerpo deja de oscilar y se detiene, es lo que observamos en la figura 3.5.
2. Cuando $\triangle = b^2 - 4mk = 0$: Se dice que la oscilación está **CRÍTICAMENTE AMORTIGUADA**, en este caso, (3.14) tiene solo una raíz real dada por:
$$\lambda = -\frac{b}{2m}$$
luego las soluciones linealmente independientes asociadas a esta raíz son:
$$x_1(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \quad \text{y} \quad x_2(t) = te^{\frac{b}{2m}t}$$

[10]Observe aquí las siguientes cuentas: Puesto que $-mk < 0$, entonces
$$b^2 - mk < b^2 \Longrightarrow \sqrt{\triangle} < b \Longrightarrow -b + \sqrt{\triangle} < 0$$

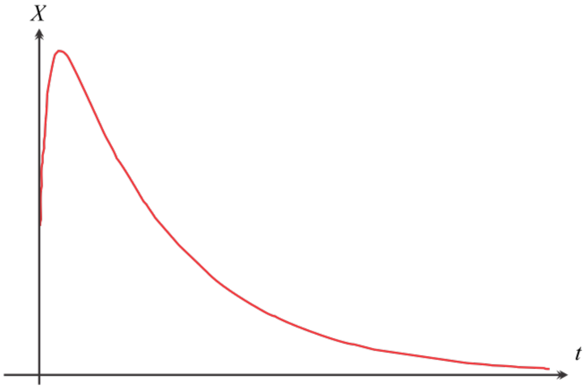


Figura 3.5: La curva de oscilación tiende a cero para un tiempo grande.

de donde el sistema fundamental de soluciones de (3.13) es el conjunto

$$sfs = \left\{ e^{-\frac{b}{2m}t}, te^{-\frac{b}{2m}t} \right\}$$

y con esto, la solución general de (3.13) es:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{b}{2m}t},\ t \geq 0 \tag{3.17}$$

Al igual que en el caso anterior, aquí también vemos que:

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = \lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{b}{2m}t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{\frac{b}{2m}t}} = 0$$

Con estos resultados en (3.17), se obtiene

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$$

Es decir, la oscilación también es estable a 0 en el tiempo; así, podemos ver en la figura 3.6, que para un tiempo apropiado (relativamente grande) el cuerpo deja de oscilar y se detiene.

3. Cuando $\triangle = b^2 - 4mk < 0$: el tipo de oscilación es **SUBAMORTIGUADA**, en este caso, (3.14) tiene dos raíces complejas dadas por:

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2m} - \frac{\sqrt{-\triangle}}{2m}i \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2m} + \frac{\sqrt{-\triangle}}{2m}i$$

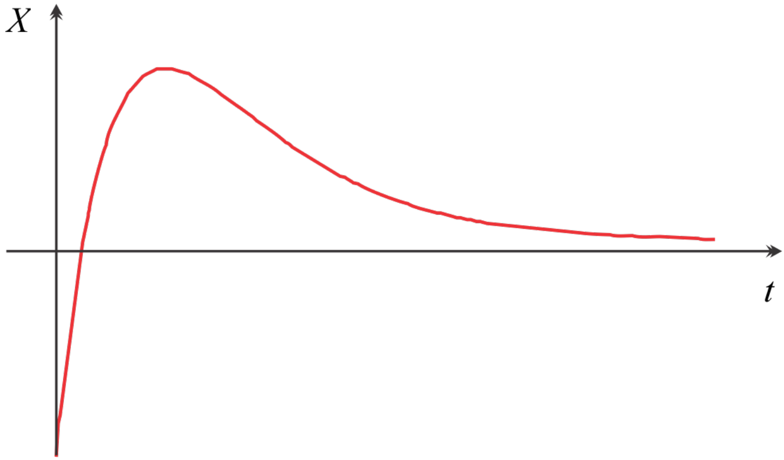


Figura 3.6: La curva de oscilación tiende a cero para un tiempo grande.

luego las soluciones linealmente independientes asociadas a estas raíces son:

$$x_1(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right) \quad \text{y} \quad x_2(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right)$$

de donde el sistema fundamental de soluciones de (3.13) es el conjunto

$$sfs = \left\{e^{-\frac{b}{2m}t}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right), e^{-\frac{b}{2m}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right)\right\}$$

y con esto, la solución general de (3.13) es:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right) + c_2 e^{-\frac{b}{2m}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right), \ t \geq 0 \quad (3.18)$$

Si en (3.18) hacemos $\phi = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$, entonces (3.18) es equivalente a

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, e^{-\frac{b}{2m}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t + \phi\right), \ t \geq 0 \quad (3.19)$$

Aquí en (3.19) identificamos los siguientes elementos de la oscilación:

a) Amplitud: está dada por $a(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, e^{-\frac{b}{2m}t}$ y satisface que:

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = \lim_{t\to+\infty}\sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, e^{-\frac{b}{2m}t} = 0$$

Puesto que la función seno es acotada, entonces

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \sqrt{c_1^2+c_2^2}e^{-\frac{b}{2m}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t+\phi\right) = 0$$

Luego, al igual que en los casos anteriores, se tiene que la solución $x(t)$ de (3.13) es estable a 0 en el tiempo, como podemos ver en la figura 3.7.

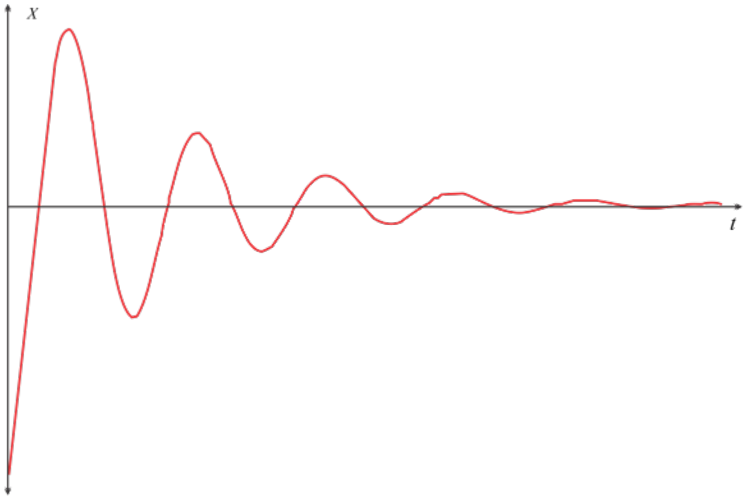


Figura 3.7: La curva de oscilación de un sistema sub-amortiguado.

b) Período: $T = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{-\Delta}}$. En algunos textos lo llaman cuasiperiodo

c) Frecuencia: está dada por $f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{4\pi m}$.

d) Ángulo de fase: $\phi = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$.

Este tipo de oscilación la encontramos en el sistema de suspensión de los automóviles.

Los primeros casos de amortiguación (sobreamortiguado y amortiguamiento crítico), los encontramos en las zapatas que se diseñan en la base de los edificios. Según la calidad del terreno y el tamaño de la estructura, los ingenieros diseñan sistemas de amortiguación (zapatas) en la base de dicha estructura para disipar (estabilizar a 0) la oscilación por efecto de sismos.

■ **Ejemplo 3.3** De un resorte con constante de elasticidad k se suspende verticalmente un cuerpo de masa m. Si se jala dicho cuerpo una distancia x_0

por debajo de su posición de equilibrio y se le impone a la vez una velocidad v_0 hacia abajo, éste se pone en movimiento. Determine la ecuación de movimiento del cuerpo si su masa es $m=\frac{b^2}{4k}$, y además el medio ofrece una resistencia igual a bv, donde v es la velocidad instantánea. Determine el alcance máximo de la oscilación y el tiempo en que éste ocurre.

Resolución

Según los datos que se nos provee en el enunciado del problema, la ecuación diferencial del movimiento del cuerpo está dada por

$$\frac{b^2}{4k}\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+kx(t)=0$$

la cual es equivalente a

$$\ddot{x}(t)+\frac{4k}{b}\dot{x}(t)+\frac{4k^2}{b^2}x(t)=0$$

luego con sus condiciones iniciales nos queda el problema:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t)+\frac{4k}{b}\dot{x}(t)+\frac{4k^2}{b^2}x(t)=0,\ t>0 \\ x(0)=x_0 \\ \dot{x}(0)=v_0 \end{cases} \tag{3.20}$$

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es:

$$\lambda^2+\frac{4k}{b}\lambda+\frac{4k^2}{b^2}=0$$

que es equivalente a $\left(\lambda+\frac{2k}{b}\right)^2=0$, es decir, se tiene la raíz $\lambda=-\frac{2k}{b}$ (multiplicidad 2). De esto, el sistema fundamental de soluciones está dado por $sfs=\left\{e^{-\frac{2k}{b}t},te^{-\frac{2k}{b}t}\right\}$ de donde la solución general es

$$x(t)=c_1e^{-\frac{2k}{b}t}+c_2te^{-\frac{2k}{b}t} \tag{3.21}$$

Para determinar las constantes c_1 y c_2, aplicamos las condiciones iniciales de (3.20). Aplicando la condición $x(0)=x_0$ en (3.21) se tiene $c_1=x_0$, con lo cual (3.21) se convierte en

$$x(t)=x_0e^{-\frac{2k}{b}t}+c_2te^{-\frac{2k}{b}t}$$

Derivamos esta expresión para obtener:

$$\dot{x}(t)=-2\frac{x_0k}{b}e^{-\frac{2k}{b}t}+c_2e^{-\frac{2k}{b}t}-\frac{2c_2k}{b}te^{-\frac{2k}{b}t}$$

luego con la condición $\dot{x}(0) = v_0$, se obtiene $c_2 = \frac{2x_0k+v_0b}{b}$. Obtenidas las constantes, nos queda la solución del problema dada por:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{2k}{b}t} + \frac{2x_0k + v_0b}{b} t e^{-\frac{2k}{b}t} \tag{3.22}$$

Para determinar el alcance máximo de la oscilación, calculamos la derivada de $x(t)$ en (3.22), teniendo así:

$$\dot{x}(t) = \frac{v_0b^2 - 2kv_0bt - 4x_0k^2t}{b^2} e^{-\frac{2k}{b}t}$$

Resolviendo $\dot{x}(t) = 0$, se obtiene $t = \frac{1}{2}\frac{v_0b^2}{k(v_0b+2x_0k)}$. Por lo tanto, el alcance máximo de la oscilación acontece cuando $t = t^* = \frac{1}{2}\frac{v_0b^2}{k(v_0b+2x_0k)}$; y éste está dado por:

$$x_{\text{máx}} = x(t^*) = \frac{v_0b + 2x_0k}{2k} e^{-\frac{v_0b}{v_0b+2x_0k}}$$

Algo más que debemos destacar en este problema es el hecho de que $x_0 > 0$ y $v_0 > 0$, por lo cual $x(t) > 0$, $\forall t \geq 0$; es decir, el cuerpo nunca atraviesa la posición de equilibrio, pero si hay estabilidad respecto de dicha posición[11], puesto que se trata de un sistema con amortiguamiento crítico donde $x(t) \to 0$, cuando $t \to +\infty$. ■

3.3 Movimiento forzado

Este tipo de movimiento oscilatorio acontece cuando aparte de la fuerza de restitución del resorte y la amortiguación (si es que lo hay) del medio que lo rodea, la oscilación es afectada por una fuerza externa[12], que aquí lo representaremos por $f(t)$. Veamos los siguientes casos:

3.3.1 Movimiento forzado no amortiguado

En este caso, la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio está dado por:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

[11] Esto significa también que pasado un tiempo apropiado, prácticamente el cuerpo se detiene o queda en reposo, pues

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$$

[12] Es una función no nula.

o también

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = F(t) \tag{3.23}$$

donde $F(t) = \frac{1}{m}f(t)$. Si hacemos $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$, entonces (3.23) se convierte en

$$\ddot{x}(t) + \beta^2 x(t) = F(t) \tag{3.24}$$

El sistema fundamental de soluciones de la ecuación complementaria[13] de (3.24) es:

$$sfs = \{\cos(\beta t), \operatorname{sen}(\beta t)\}$$

y con esto la solución complementaria es:

$$x_c(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t) \tag{3.25}$$

Para determinar la solución particular $x_p(t)$ de (3.24), dependiendo de la naturaleza de $f(t)$ procedemos con cualquiera de los métodos estudiados en la sección 2.3 del capítulo anterior.

■ **Ejemplo 3.4** La oscilación en un sistema resorte - masa no amortiguado está dada por la ecuación diferencial:

$$\ddot{x}(t) + \beta^2 x(t) = F_0 \cos(at) \tag{3.26}$$

donde $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $F_0 \neq 0$ y $\alpha \neq 0$.

1. Resuelva (3.26) asumiendo que $\beta \neq a$.
2. Resuelva (3.26) asumiendo que $\beta = a$. Haga una análisis de la amplitud de su solución y explique su comportamiento cuando $t \to +\infty$.

<u>Resolución</u>

1. Como ya vimos, en (3.24) la solución complementaria está dada por[14]:

   $$x_c(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)$$

   donde el sistema fundamental de soluciones está dado por el conjunto $sfs = \{\cos(\beta t), \operatorname{sen}(\beta t)\}$. Para determinar la solución particular procedemos con el método de coeficientes indeterminados. Aquí se tiene que $F(t) = F_0 \cos(at)$ y todas sus derivadas están generadas por

[13] Nos referimos a la ecuación diferencial

$$\ddot{x}(t) + \beta^2 x(t) = 0$$

[14] Vea (3.25)

$G = \{\cos(at), \operatorname{sen}(at)\}$, como $a \neq \beta$, entonces ninguna de estas funciones se repite en el sistema fundamental de soluciones; por esto, asumimos que la solución particular está dada por

$$x_p(t) = A\cos(at) + B\operatorname{sen}(at) \tag{3.27}$$

Si ponemos (3.27) en (3.26) se obtiene:

$$-a^2A\cos(at) - a^2B\operatorname{sen}(at) + \beta^2[A\cos(at) + B\operatorname{sen}(at)] = F_0\cos(at),\ t \geq 0$$

de donde vemos que

$$\left[A(\beta^2 - a^2) - F_0\right]\cos(at) + B(\beta^2 - a^2)\operatorname{sen}(at) = 0,\ t \geq 0$$

Aquí, la igualdad acontece[15], si y solo si, ambos coeficientes son cero; así se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A(\beta^2 - a^2) - F_0 = 0 \\ B(\beta^2 - a^2) = 0 \end{cases}$$

De la resolución de este sistema se obtiene $A = \frac{F_0}{\beta^2 - a^2}$ y $B = 0$. Ponemos estos resultados en (3.27) y se tiene que la solución particular de (3.26) es:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\beta^2 - a^2}\cos(at)$$

Luego la solución general de (3.26) es:

$$x(t) = c_1\cos(\beta t) + c_2\operatorname{sen}(\beta t) + \frac{F_0}{\beta^2 - a^2}\cos(at)$$

En este caso, las ondas de la oscilación natural con las de la fuerza externa se superponen y como resultado se tiene una nueva oscilación con un comportamiento regular, parecido a lo que ilustramos en la figura 3.8.

2. Como $\beta = a$, entonces (3.26) se convierte en

$$\ddot{x}(t) + \beta^2 x(t) = F_0\cos(\beta t) \tag{3.28}$$

El sistema fundamental de soluciones y la solución complementaria de (3.28) son los mismos que los del ítem anterior. Solo queda determinar

[15] La razón por la que los coeficientes son ambos iguales a cero, es porque las funciones $\operatorname{sen}(at)$ y $\cos(t)$ son linealmente independientes.

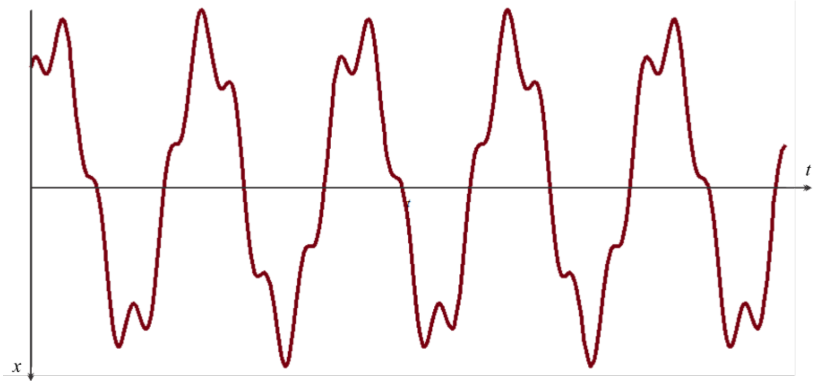


Figura 3.8: Onda generada por la superposición de las ondas de la solución complementaria y solución particular.

la solución particular; si procedemos con el método de coeficientes indeterminados, vemos que $F(t) = F_0\cos(\beta t)$ y todas sus derivadas son generadas por $G = \{\cos(\beta t), \operatorname{sen}(\beta t)\}$, como estas funciones se repiten en el sistema fundamental de soluciones, entonces la solución particular lo asumimos como

$$x_p(t) = At\cos(\beta t) + Bt\operatorname{sen}(\beta t) \tag{3.29}$$

Ponemos (3.29) en (3.28) para obtener:

$$\begin{aligned}\beta(2B - \beta At)\cos(\beta t) \quad &- \quad \beta(2A + \beta Bt)\operatorname{sen}(\beta t)\\ &+ \quad \beta^2\left[At\cos(\beta t) + Bt\operatorname{sen}(\beta t)\right] = F_0\cos(\beta t)\end{aligned}$$

simplificando esto llegamos a la igualdad

$$(2\beta B - F_0)\cos(\beta t) - 2\beta A\operatorname{sen}(\beta t) = 0,\ t \geq 0$$

Igualando a cero cada uno de los coeficientes[16] se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2\beta B - F_0 = 0 \\ -2\beta A = 0 \end{cases}$$

De este sistema vemos que $B = \frac{F_0}{2\beta}$ y $A = 0$, ponemos estos resultados en (3.29), y nos queda que la solución particular está dada por la función

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2\beta}t\operatorname{sen}(\beta t)$$

[16]Por la independencia lineal de $\operatorname{sen}(\beta t)$ y $\cos(\beta t)$.

Como ya disponemos de $x_c(t)$ y $x_p(t)$, entonces la solución general de (3.28) es:

$$x(t) = c_1\cos(\beta t) + c_2\,\mathrm{sen}(\beta t) + \frac{F_0}{2\beta}t\,\mathrm{sen}(\beta t) \tag{3.30}$$

Para analizar el comportamiento de $x(t)$ en (3.30), hacemos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1\cos(\beta t) + c_2\,\mathrm{sen}(\beta t) + \frac{F_0}{2\beta}t\,\mathrm{sen}(\beta t)\\
&= c_1\cos(\beta t) + \left[c_2 + \frac{F_0}{2\beta}t\right]\mathrm{sen}(\beta t),\ \theta = \frac{F_0}{2\beta}\\
&= c_1\cos(\beta t) + (c_2+\theta t)\,\mathrm{sen}(\beta t);\ \phi(t) = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2+\theta t}\right)\\
&= \sqrt{c_1^2 + (c_2+\theta t)^2}\,\mathrm{sen}\left(\beta t + \phi(t)\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + (c_2+\theta t)^2}\,\mathrm{sen}\left(\beta t + \phi(t)\right)$$

Aquí la función de amplitud está dada por

$$a(t) = \sqrt{c_1^2 + (c_2+\theta t)^2},\ t \geq 0$$

de donde se obtiene que:

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = \lim_{t\to+\infty}\sqrt{c_1^2 + (c_2+\theta t)^2} = +\infty$$

Esto significa que a medida que transcurre el tiempo la amplitud se hace muy grande (observe la figura 3.9). Como se trata de un sistema oscilante, una amplitud con esta característica hace que colapse el sistema, este fenómeno se conoce como **resonancia mecánica**. Algo muy importante que debemos indicar aquí es que este fenómeno acontece porque la frecuencia natural del sistema coincide con la frecuencia de la fuerza externa. A pesar de que la fuerza externa aplicada pueda ser relativamente pequeña, sin embargo, es su frecuencia la que hace que el sistema resorte - masa responda con una oscilación cuya amplitud se haga cada vez más grande.

■

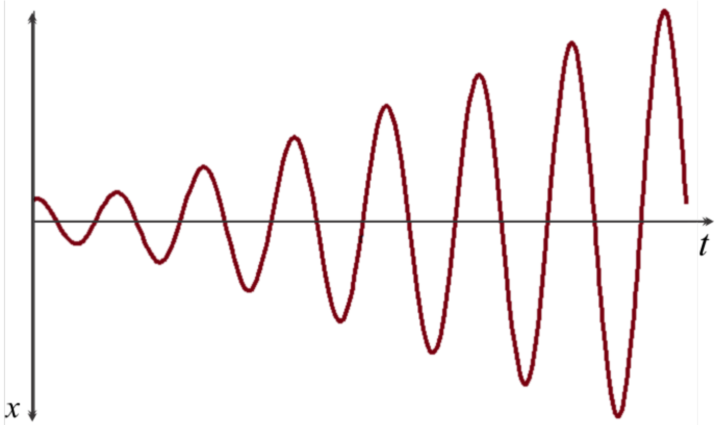


Figura 3.9: La amplitud de onda de la oscilación crece a medida que transcurre el tiempo.

■ **Ejemplo 3.5** Dado el problema: $\begin{cases} m\ddot{x}+kx=F(t),\ t>0 \\ x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases}$

1. Deducir la solución y muestre que está dada por:

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\int_0^t F(u)\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right)du$$

2. Determine $x(t)$, cuando $F(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 2 \\ 0, & t>2 \end{cases}$
3. Usando la primera parte y tomando $\varepsilon>0$, halle $x(t)$ en el caso que $F(t)=\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon},\ 0\le t\le\varepsilon \\ \\ 0,\ t>\varepsilon \end{cases}$. Discuta el caso en que $\varepsilon\to 0$, ¿cómo interpreta físicamente este hecho?

Resolución

1. La ecuación diferencial equivalente a la dada en el problema es:

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}F(t) \tag{3.31}$$

Es fácil ver que el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial complementaria asociada a (3.31) es:

$$sfs = \left\{ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right\}$$

con el cual se tiene la solución complementaria de (3.31)

$$x_c(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{3.32}$$

Para determinar la solución particular de (3.31) aplicamos el método de variación de parámetros, para lo cual asumimos que esta solución[17] está dada por:

$$x_p(x) = A_1(t) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + A_2(t) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{3.33}$$

donde aplicando (2.50), las funciones A_1 y A_2 se determinan a partir del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A_1'(t)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + A_2'(t)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = 0 \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}A_1'(t)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{k}{m}}A_2'(t)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = \frac{1}{m}F(t) \end{cases}$$

el cual es equivalente a:

$$\begin{cases} A_1'(t)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + A_2'(t)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = 0 \\ -A_1'(t)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + A_2'(t)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = \frac{1}{\sqrt{mk}}F(t) \end{cases} \tag{3.34}$$

[17] Vea el ejemplo 2.27

Aplicamos regla de Cramer en (3.34) para obtener:

$$\begin{aligned}
A_1'(t) &= -\frac{1}{\sqrt{mk}}F(t)\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
&\Rightarrow \quad A_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{mk}}\int_0^t F(u)\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}u\right)du \\
A_2'(t) &= \frac{1}{\sqrt{mk}}F(t)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
&\Rightarrow \quad A_2(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}}\int_0^t F(u)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}u\right)du
\end{aligned}$$

Ponemos estas expresiones de $A_1(t)$ y $A_2(t)$ en (3.33), y conseguimos la solución particular:

$$x_p(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}}\int_0^t F(u)\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right)du$$

Como ya disponemos de la solución complementaria y particular de (3.31), entonces la solución general está dada por:

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{mk}}\int_0^t F(u)\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right)du
\end{aligned}$$

Usando la condición inicial $x(0) = 0$ se tiene que $c_1 = 0$, quedando de esta manera:

$$x(t) = c_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{1}{\sqrt{mk}}\int_0^t F(u)\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right)du$$

calculamos la derivada de esta última expresión y vemos que:

$$\dot{x}(t) = c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{1}{m}\int_0^t F(u)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right)du$$

Aquí aplicamos la condición $\dot{x}(0) = 0$, para obtener $c_2 = 0$. Quedando así que la solución del problema está dada por la función:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}}\int_0^t F(u)\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right)du \tag{3.35}$$

2. Ponemos $F(t)$ en (3.35) y se tiene lo siguiente:

Para $t \in [0;2]$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\sqrt{mk}} \int_0^t u \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{mk}} \left\{ \sqrt{\frac{m}{k}} u \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) + \frac{m}{k} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) \right\}_0^t \\
&= \frac{1}{k} t - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k^3}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)
\end{aligned}
$$

Para $t > 2$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\sqrt{mk}} \int_0^t u \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{mk}} \int_0^2 u \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{mk}} \left\{ \sqrt{\frac{m}{k}} u \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) + \frac{m}{k} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right) \right\}_0^2 \\
&= \frac{2}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-2)\right) + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k^3}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-2)\right) \\
&\quad - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k^3}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)
\end{aligned}
$$

Luego la función $x(t)$ está dada por:

$$
x(t) = \begin{cases}
\frac{1}{k} t - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k^3}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \ t \in [0,2] \\[2em]
\frac{2}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-2)\right) + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k^3}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-2)\right) \\[1em]
- \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k^3}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \ t > 2
\end{cases}
$$

3. Ahora ponemos $F(t)$ en (3.35) para obtener lo siguiente:

   Para $0 \leq t \leq \varepsilon$:

$$x(t) = \frac{1}{k\varepsilon}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]$$

   Para $t > \varepsilon$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{mk}}\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-u)\right)du \\ &= \frac{1}{k\varepsilon}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(\varepsilon - t)\right) - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] \end{aligned}$$

   Con estos dos resultados vemos que:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{k\varepsilon}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right], \ 0 \leq t \leq \varepsilon \\ \\ \frac{1}{k\varepsilon}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(\varepsilon - t)\right) - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right], \ t > \varepsilon \end{cases}$$

   Haciendo $\varepsilon \to 0$ y aplicando L'Hopital se obtiene[18]:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{km}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \ \ t > 0 \tag{3.36}$$

   Físicamente este resultado nos dice, que en el instante $t = 0$, el sistema recibe un impulso muy grande, el cual hace que la masa se ponga a oscilar con un movimiento armónico simple dado por (3.36)

■

■ **Ejemplo 3.6** Un resorte en posición vertical con constante de 4 libras por pie, tiene acoplado un peso de 32 libras. Se aplica una fuerza dada por $F(t) = 16\operatorname{sen}(2t)$ libras, $t \geq 0$. Asumiendo que en $t = 0$ el peso está 6 pulgadas abajo de la posición de equilibrio y se le golpea para darle una velocidad de 4 pies por segundo hacia arriba.

[18] Haciendo los cálculos en forma detallada se tiene:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{k\varepsilon}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(\varepsilon - t)\right) - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(\varepsilon - t)\right)}{k} = \frac{1}{\sqrt{mk}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

1. Determine la posición y velocidad de peso en cualquier tiempo.
2. Determine la amplitud, período y frecuencia del movimiento.
3. Demuestre si hay resonancia.

Resolución

1. De los datos del problema se deduce que $m = 4$, $b = 0$ y $k = 4$. De este modo se tiene el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4x = 16\,\text{sen}(2t)\ t > 0 \\ x(0) = \frac{1}{2} \\ \dot{x}(0) = -4 \end{cases} \tag{3.37}$$

Es fácil ver que el sistema fundamental de soluciones y la solución complementaria son respectivamente:

$$sfs = \{\cos(2t), \text{sen}(2t)\}$$

y

$$x_c(t) = c_1 \cos(2t) + c_2\,\text{sen}(2t)$$

Para determinar la solución particular[19], ésta se asume como

$$x_p(t) = (A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t))\,t$$

reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene que $A = -4$ y $B = 0$, de donde

$$x_p(t) = -4t\cos(2t)$$

luego la solución general es:

$$x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2\,\text{sen}(2t) - 4t\cos(2t)$$

A continuación hay que determinar las constantes usando las condiciones iniciales. En efecto, siendo $x(0) = \frac{1}{2}$ se obtiene $c_1 = \frac{1}{2}$. En forma similar, calculando la derivada y usando la condición $\dot{x}(0) = -4$, se obtiene $c_2 = 0$. Por lo tanto la solución del problema (o la posición del peso) en cualquier tiempo $t \geq 0$ es:

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) - 4t\cos(2t) \tag{3.38}$$

asimismo la velocidad

$$\dot{x}(t) = (8t - 1)\,\text{sen}(2t) - 4\cos(2t)$$

[19] Se usará el método de coeficientes indeterminados.

2. La expresión en (3.38) es equivalente a:

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} - 4t\right)\cos(2t)$$

de donde:
amplitud: $A(t) = \frac{1}{2} - 4t$.
periodo: $T = \pi$
frecuencia: $f = \frac{1}{\pi}$

3. En este caso se tiene que $|A(t)| \to \infty$, si $t \to \infty$. Por lo tanto, existe resonancia. Observe figura 3.10.

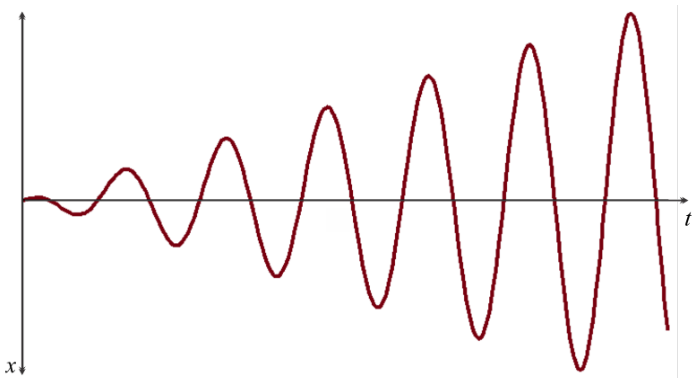


Figura 3.10: Curva de resonancia.

■

■ **Ejemplo 3.7** Un sistema resorte-masa se comporta según la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \beta^2 x = \operatorname{sen}^3(wt)$$

Determine los valores de w para los cuales existe resonancia.

<u>Resolución</u>

En este caso, el sistema fundamental de soluciones es $sfs = \{\cos(\beta t), \operatorname{sen}(\beta t)\}$, donde es fácil ver que la frecuencia natural del sistema es $f = \frac{\beta}{2\pi}$. Para determinar la frecuencia con la que actúa la fuerza externa $F(t) = \operatorname{sen}^3(wt)$ sobre el sistema, degradamos el exponente del seno; en efecto se tiene:

$$\begin{aligned} F(t) &= \operatorname{sen}^3(wt) = \operatorname{sen}(wt)\frac{1-\cos(2wt)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(wt) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(wt)\cos(2wt) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(wt) - \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(3wt) - \operatorname{sen}(wt)] \\ &= \frac{3}{4}\operatorname{sen}(wt) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3wt) \end{aligned}$$

De esto, afirmamos que ocurre resonancia cuando $w = \beta$ o cuando $w = \frac{\beta}{3}$.

En el primer caso, si $w = \beta$, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = \left(c_1 - \frac{3}{8\beta}t\right)\cos(\beta t) + \left(c_2 + \frac{3}{16\beta^2}\right)\operatorname{sen}(\beta t) + \frac{1}{32\beta^2}\operatorname{sen}(3\beta t)$$

Y en el caso de $w = \frac{\beta}{3}$, la solución general es:

$$x(t) = \left(c_1 + \frac{1}{8\beta}t\right)\cos(\beta t) + \left(c_2 - \frac{1}{16\beta^2}\right)\operatorname{sen}(\beta t) + \frac{27}{32\beta^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{3}t\right)$$

Siendo en ambos casos, c_1 y c_2 constantes. ■

■ **Ejemplo 3.8** En el ejemplo 3.2, si sobre el sistema resorte masa empezara actuar una fuerza externa $f(t) = \operatorname{sen}\omega t$, ¿para qué valor de ω ocurriría resonancia?

Resolución

Observando la ecuación diferencial del ejemplo 3.2, afirmamos que ocurre resonancia cuando $\omega = 8\sqrt{2}$. ■

■ **Ejemplo 3.9** Un resorte con constante de elasticidad de 9 lb/pie. está suspendido verticalmente por uno de sus extremos y tiene acoplado un cuerpo cuyo peso es de 32 lb. Asumiendo que en el instante $t = 0$ el peso se desplaza 6 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y se le imprime una velocidad de 4 pies/s. hacia arriba; determine la posición y velocidad del cuerpo en cualquier instante t, considerando además que en todo tiempo $t \geq 0$ el movimiento del cuerpo es afectado por una fuerza externa dada por $F(t) = 16\operatorname{sen}(3t)$ libras. Verifique además que existe resonancia.

Resolución

De acuerdo a los datos que se nos brinda en este problema, se tiene que $k = 9$. Además, siendo su peso $32 = mg$, entonces[20] $m = 1$. Teniendo en cuenta de que no se menciona amortiguamiento, el modelo matemático para el movimiento del cuerpo queda así:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 9x = 16\operatorname{sen}(3t),\ t > 0 \\ x(0) = \frac{1}{2} \\ \dot{x}(0) = -4 \end{cases} \tag{3.39}$$

El sistema fundamental de soluciones para la ecuación diferencial de (3.39) es $sfs = \{\operatorname{sen}(3t), \cos(3t)\}$, de donde la solución complementaria está dada por:

$$x_c(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \operatorname{sen}(3t)$$

Para determinar la solución particular nos fijamos en $F(t) = 16\operatorname{sen}(3t)$, esta función y todas sus derivadas son generadas por $G = \{\operatorname{sen}(3t), \cos(3t)\}$, que son las mismas funciones que aparecen en el sistema fundamental de soluciones, por esto, la solución particular lo asumimos como

$$x_p(t) = At\cos(3t) + Bt\operatorname{sen}(3t) \tag{3.40}$$

Ponemos $x_p(t)$ en la ecuación diferencial, hacemos las simplificaciones respectivas y se obtiene que $A = -\frac{8}{3}$ y $B = 0$. Ponemos estos valores en (3.40) y se obtiene la solución particular

$$x_p(t) = -\frac{8}{3}t\cos(3t)$$

Como ya disponemos de la solución complementaria y particular, entonces la solución general es

$$x(t) = c_1\cos(3t) + c_2\operatorname{sen}(3t) - \frac{8}{3}t\cos(3t)$$

Ahora,si aplicamos las condiciones iniciales, obtenemos $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = -\frac{4}{9}$. Luego la posición del cuerpo en cualquier instante $t \geq 0$ está dada por la función

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos(3t) - \frac{4}{9}\operatorname{sen}(3t) - \frac{8}{3}t\cos(3t)$$

de donde su velocidad en cualquier instante $t \geq 0$ es:

$$\dot{x}(t) = 8t\operatorname{sen}(3t) - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(3t) - 4\cos(3t)$$

Acá en este problema también debemos enfatizar que ocurre resonancia[21];

[20] La gravedad en este caso es $g = 32$ pies/s^2.

[21] la frecuencia natural coincide con la frecuencia de la fuerza externa

para ver esto, ponemos $\tan\phi = \frac{48t-9}{8}$ y llevamos $x(t)$ a su forma equivalente, así tenemos:

$$x(t) = -\sqrt{\left(\frac{8t}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{16}{81}}\operatorname{sen}(3t+\phi)$$

donde la amplitud de onda del movimiento está dada por la función

$$a(t) = -\sqrt{\left(\frac{8t}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{16}{81}}$$

aquí se comprueba que

$$\lim_{t\to+\infty}|a(t)| = +\infty$$

■

3.3.2 Movimiento forzado amortiguado

En este caso el modelo es:

$$m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+kx(t) = f(t) \tag{3.41}$$

donde $f(t)$ es la fuerza externa que actúa sobre el sistema a partir del tiempo $t \geq 0$. Como se trata de un movimiento amortiguado, entonces $b \neq 0$. Determinar la solución complementaria $x_c(t)$ de (3.41) es sencillo[22], la dificultad aquí radica en encontrar la solución particular $x_p(t)$; dependiendo de como esté dada $f(t)$, aplicamos el método más apropiado para determinarla, ya sea, con el método de coeficientes indeterminados, método de variación de parámetros u otro.

Como vimos en la sección 3.2 de este capítulo, la ecuación diferencial complementaria $m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+kx(t) = 0$ asociada a (3.41) puede ser sobreamortiguada, con amortiguamiento crítico o subamortiguada; y en cualquiera de dichos casos, hemos visto que su solución es estable a cero, es decir, a medida que el tiempo transcurre, dicha solución se aproxima a cero, que en términos físicos significa que el cuerpo que estaba en oscilación se detiene o deja de moverse. Matemáticamente esto es

$$\lim_{t\to+\infty} x_c(t) = 0 \tag{3.42}$$

[22] Es el mismo método que hemos tratado en el movimiento amortiguado no forzado. Aquí debemos tener en cuenta que según el coeficiente de amortiguación, el movimiento puede ser **sobre amortiguado**, con **amortiguamiento crítico** o **subamortiguado**.

Si se conoce la solución complementaria $x_c(t)$ y solución particular $x_p(t)$ de (3.41), entonces la solución general (o función de posición de la masa en oscilación) es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t),\ t \geq 0 \tag{3.43}$$

Puesto que según (3.42) el efecto de la solución complementaria es transitorio(o breve), entonces denominamos a dicha solución como **solución transitoria**. Así, para un tiempo relativamente grande, como el efecto de la solución transitoria se anula, entonces nos quedamos solo con el efecto de la solución particular, esto significa que para un tiempo grande, es el efecto de la solución particular el que determina la oscilación de la masa, por eso a la solución particular, la denominamos **solución estacionaria**. Escribimos

$$x(t) = \underbrace{x_c(t)}_{\text{solución transitoria: } x_T(t)} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{solución estacionaria: } x_E(t)}$$

y

$$x(t) = x_p(t), \text{ para un tiempo } t \text{ grande}$$

En la figura 3.11 ilustramos el efecto de la solución transitoria para una fuerza externa con un comportamiento regular. Tal efecto lo podemos identificar por el hecho de que hay una cierta distorsión o irregularidad en los primeros instantes, que luego desaparece a medida que transcurre el tiempo y queda así un comportamiento regular[23] para el resto del tiempo. A continuación resolvemos algunos problemas que ilustran este caso.

■ **Ejemplo 3.10** Una masa de 2 kg. se sujeta a un resorte suspendido del techo, lo que ocasiona que dicho resorte se estire $\frac{196}{125}$ m. al llegar al reposo en equilibrio. En el instante $t = 0$, la masa se desplaza 1 m. hacia abajo y se suelta. En el mismo instante se aplica una fuerza externa $f(t) = \frac{195}{14}\cos(t)$ Newton al sistema. Si el medio ofrece una resistencia de 6 N s/m. y la gravedad la tomamos como $g = 9,8$ m/s^2,

1. determine el desplazamiento $x(t)$ de la masa en cualquier instante $t > 0$; además, identifique la solución transitoria y estacionaria.
2. determine la rapidez máxima del movimiento para un tiempo grande.

Resolución

1. Según los datos del problema, los coeficientes de masa, amortiguación y elasticidad son respectivamente: $m = 2$, $b = 6$ y $k = \frac{25}{2}$. Luego la

[23]Tenga en cuenta que estamos asumiendo que la fuerza externa tiene un comportamiento regular, podríamos decir que esta fuerza es una función sinusoidal.

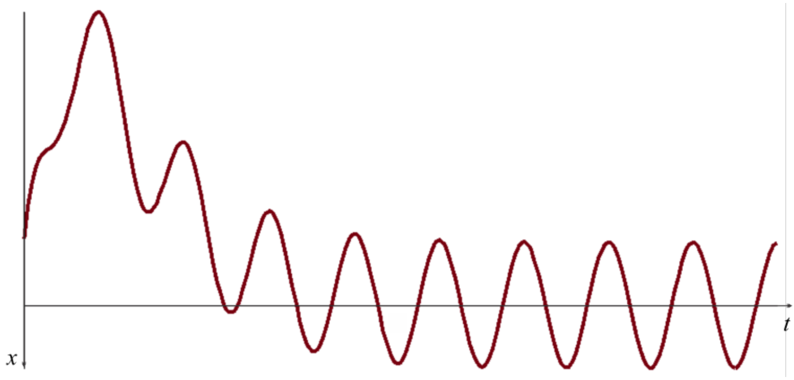


Figura 3.11: En la primera parte de la oscilación hay una distorsión que se debe al efecto de la solución transitoria y que a medida que transcurre el tiempo este efecto se disipa, quedando solo el efecto de la solución estacionaria.

ecuación diferencial de movimiento es:

$$2\ddot{x}(t)+6\dot{x}(t)+\frac{25}{2}x(t)=\frac{195}{14}\cos t$$

que también lo podemos escribir como

$$\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+\frac{25}{4}x(t)=\frac{195}{28}\cos t \tag{3.44}$$

El sistema fundamental de soluciones de la ecuación complementaria asociada a (3.44) es $sfs=\left\{e^{-\frac{3}{2}t}\cos(2t),\ e^{-\frac{3}{2}t}\operatorname{sen}(2t)\right\}$, con lo cual la solución complementaria es:

$$x_c(t)=c_1e^{-\frac{3}{2}t}\cos(2t)+c_2e^{-\frac{3}{2}t}\operatorname{sen}(2t) \tag{3.45}$$

Para determinar la solución particular vemos que la fuerza externa en (3.44) es la función $f(t)=\frac{195}{28}\cos t$, que junto con sus derivadas vemos que son generadas por $G=\{\cos t,\ \operatorname{sen} t\}$. De este modo si asumimos que la solución particular está dada por $x_p(t)=A\cos t+B\operatorname{sen} t$ y reemplazamos en (3.44) se obtiene $A=1$ y $B=\frac{4}{7}$, de donde la solución particular es:

$$x_p(t)=\cos 7+\frac{4}{7}\operatorname{sen} t$$

Como ya disponemos de la solución complementaria y solución particular, entonces la solución general de (3.44) es:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{3}{2}t}\cos(2t) + c_2 e^{-\frac{3}{2}t}\operatorname{sen}(2t) + \cos t + \frac{4}{7}\operatorname{sen} t \tag{3.46}$$

Las condiciones iniciales del problema para determinar c_1 y c_2 en (3.46) son: $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$. De la primera se obtiene $c_1 = 0$ y de la segunda $c_2 = -\frac{2}{7}$. Por lo tanto la función desplazamiento es finalmente dada por la función

$$x(t) = -\frac{2}{7}e^{-\frac{3}{2}t}\operatorname{sen} 2t + \cos t + \frac{4}{7}\operatorname{sen} t$$

Su gráfica se ilustra en la figura 3.12. La solución transitoria y estacio-

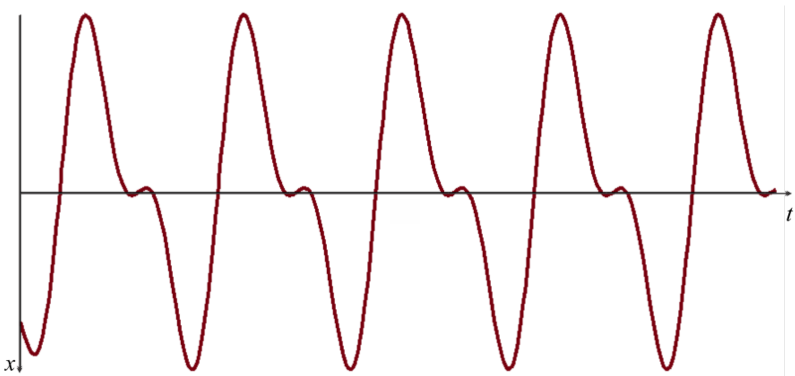


Figura 3.12: Aquí casi no es notorio el efecto de la solución transitoria.

naria son respectivamente

$$x_T(t) = -\frac{2}{7}e^{-\frac{3}{2}t}\operatorname{sen} 2t \qquad \text{y} \qquad x_E(t) = \cos t + \frac{4}{7}\operatorname{sen} t$$

2. Para valores grandes de t ya explicamos antes que la función $x(t)$ se comporta como la solución estacionaria, es decir $x(t) = \cos t + \frac{4}{7}\operatorname{sen} t$, cuya derivada es $\dot{x}(t) = \frac{4}{7}\cos t - \operatorname{sen} t$. Esto último lo escribimos también como

$$\dot{x}(t) = \frac{\sqrt{65}}{7}\operatorname{sen}(\phi - t), \;\; \tan\phi = \frac{4}{7}$$

Luego $|\dot{x}(t)| \leq \frac{\sqrt{65}}{7}$, de donde vemos que la rapidez máxima es de $\frac{\sqrt{65}}{7}$ m/s.

■

■ **Ejemplo 3.11** Un cuerpo cuya masa es de $0,2$ kilos que está adherido a un resorte con constante de elasticidad $k = 2$ N/m. oscila en un medio cuyo coeficiente de amortiguación es de $b = 1,2$ kg/s. Además, la oscilación está afectada por una fuerza externa $f(t) = 5\cos(4t)$ N. Si el cuerpo en oscilación se liberó desde una posición ubicada a 50 centímetros por debajo de la posición de equilibrio,

1. encuentre su posición en cualquier instante t para un tiempo largo.
2. determine su rapidez máxima para un tiempo largo.

<u>Resolución</u>

1. Según los datos del problema: $m = 0,2$, $b = 1,2$ y $k = 2$; luego la ecuación diferencial de movimiento es: $0,2\ddot{x} + 1,2\dot{x} + 2x = 5\cos(4t)$, que es equivalente a: $\ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = 25\cos(4t)$. Con esto, la ecuación diferencial del movimiento con sus condiciones iniciales queda como:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = 25\cos(4t) \\ x(0) = \frac{1}{2} \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.47}$$

En vista que nos pide la posición para un tiempo t grande, entonces dicha posición queda determinada por la solución estacionaria[24] $x_E(t)$, es decir la solución particular. En efecto; la función $f(t) = 25\cos(4t)$ y sus derivadas están generadas por $G = \{\cos(4t), \operatorname{sen}(4t)\}$, a partir de lo cual se asume que la solución particular es:

$$x_E(t) = x_p(t) = A\cos(4t) + B\operatorname{sen}(4t)$$

reemplazando esto en la ecuación diferencial de (3.47) se obtiene: $A = -\frac{25}{102}$ y $B = \frac{50}{51}$. Luego la posición de la masa para t grande es:

$$x(t) = x_E(t) = -\frac{25}{102}\cos(4t) + \frac{50}{51}\operatorname{sen}(4t)$$

2. Considerando que t es grande, la velocidad de la masa está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{50}{51}\operatorname{sen}(4t) + \frac{200}{51}\cos(4t) \\ &= \frac{\sqrt{42500}}{51}\operatorname{sen}(4t + \phi), \text{ donde } \phi = \arctan(4) \\ &= \frac{50\sqrt{17}}{51}\operatorname{sen}(4t + \phi) \end{aligned}$$

[24] Recuerde que esta solución proviene de la solución particular.

Calculando el módulo de la velocidad se tiene:

$$|\dot{x}(t)| = \left| \frac{50\sqrt{17}}{51} \operatorname{sen}(4t+\phi) \right| \leq \frac{50\sqrt{17}}{51}$$

por lo tanto la rapidez máxima que puede alcanzar la masa es: $\frac{50\sqrt{17}}{51}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 4{,}0423\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

■

■ **Ejemplo 3.12** Un resorte se estira 10 cm. por una fuerza de 500 dinas. Una masa de 2 g. está suspendida del resorte y se le permite que llegue al equilibrio. Luego se le aplica una fuerza dada en dinas por $F(t) = 200 \operatorname{sen} 5t$, $t \geq 0$. Asumiendo que hay una fuerza amortiguadora dada numéricamente en dinas por $20v$, donde v es la velocidad instantánea en centímetros por segundo,

1. determine la posición de la masa en cualquier instante t.
2. determine la posición de la masa y su rapidez máxima para un tiempo largo.

<u>Resolución</u>

Asumimos que $x(t)$ es la posición de la masa en cualquier instante t; así, su velocidad instantánea estaría dada por $v(t) = \dot{x}(t)$. De acuerdo a los datos:

$$|500| = k|10| \Longrightarrow k = 50, \text{ asimismo } m = 2 \text{ y } b = 20$$

Luego se tiene el problema

$$\begin{cases} 2\ddot{x}(t) + 20\dot{x}(t) + 50x(t) = 200\operatorname{sen}(5t),\ t > 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.48}$$

1. En (3.48) la ecuación diferencial equivalente es

$$\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 25x(t) = 100\operatorname{sen}(5t) \tag{3.49}$$

a) Para hallar la solución complementaria, la ecuación característica asociada a (3.49) es: $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$, la cual tiene como raíz a $\lambda = -5$ (raíz repetida, por lo que el sistema resorte masa está críticamente amortiguado). Esto implica que el sistema fundamental de soluciones está dado por el conjunto $sfs = \left\{e^{-5t}, te^{-5t}\right\}$, de donde solución complementaria es

$$x_c(t) = c_1e^{-5t} + c_2te^{-5t}$$

b) Viendo la función de la derecha en (3.49), vemos que ésta y sus derivadas son generadas por $G = \{\cos(5t), \operatorname{sen}(5t)\}$; así podemos aplicar el método de coeficientes indeterminados, para lo cual se asume que la solución particular está dada por:

$$x_p(t) = A\cos(5t) + B\operatorname{sen}(5t)$$

reemplazando esto en (3.49), se obtiene:

$$x_p(t) = -2\cos(5t)$$

Luego la solución general de (3.49) está dada por:

$$x(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 t e^{-5t} - 2\cos(5t) \tag{3.50}$$

Para determinar c_1, c_2 en (3.50) se usa las condiciones iniciales del problema (3.48), teniéndose de este modo que:

$$x(t) = \underbrace{2e^{-5t} + 10te^{-5t}}_{\text{solución transitoria}} \quad \underbrace{-2\cos(5t)}_{\text{solución estacionaria}} \tag{3.51}$$

La cual viene a ser la función de posición de la masa en cualquier instante $t \geq 0$. Ilustramos esta función en la figura 3.13.

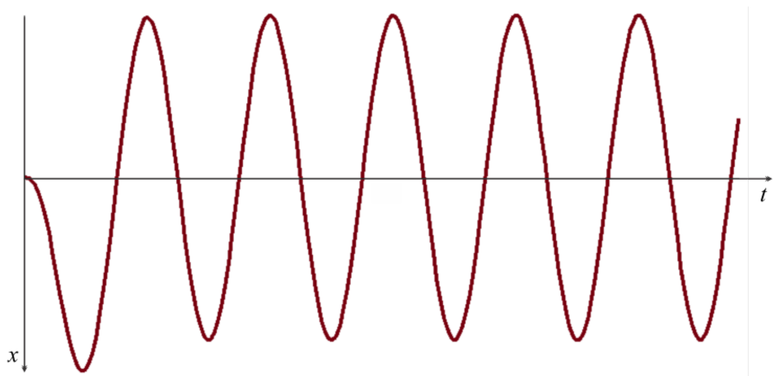


Figura 3.13:

2. Para establecer la posición y rapidez de la masa cuando el tiempo t es grande, se usa el hecho que el efecto de la solución transitoria es cero,

de tal manera que sólo se tiene el efecto de la solución estacionaria, quedando de esta manera como posición de la masa

$$x(t) = -2\cos(5t)$$

y velocidad

$$\dot{x}(t) = 10\,\mathrm{sen}(5t)$$

A partir de lo cual se obtiene que 10 cm/s es la rapidez máxima del movimiento.

■

■ **Ejemplo 3.13** Una masa que pesa 8 libras al suspenderse de un resorte lo alarga $\frac{32}{5}$ pies. Cuando la masa está en equilibrio se le impulsa con una velocidad ascendente de 2 pies por segundo. Si el medio en el que se mueve la masa ofrece una fuerza de amortiguamiento igual 1 veces su velocidad instantánea y en todo tiempo actúa sobre la masa una fuerza externa en libras igual a $f(t) = 2\cos t$,

1. halle la posición de la masa en cualquier tiempo.
2. halle la frecuencia, ángulo de fase y rapidez máxima del movimiento para un tiempo grande.

<u>Resolución</u>

1. Aquí es fácil ver $m = \frac{1}{4}$, $k = \frac{5}{4}$ y $b = 1$, quedando la ecuación diferencial del movimiento como: $\frac{1}{4}\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + \frac{5}{4}x(t) = 2\cos t$, donde $x(t)$ es la posición de la masa en el instante t. Expresando en una forma equivalente y aplicando las condiciones iniciales se tiene el problema de movimiento:

$$(P): \begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 8\cos t,\ t > 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -2 \end{cases}. \tag{3.52}$$

Aquí, es fácil ver que el sistema fundamental de soluciones asociado a la ecuación diferencial homogénea de (3.52) está dado por el conjunto $sfs = \left\{e^{-2t}\cos t, e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,t\right\}$, de donde inferimos que la solución complementaria[25] está dada por

$$x_c(t) = c_1 e^{-2t}\cos t + c_2 e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,t \tag{3.53}$$

[25] Aquí podemos ver que se trata de un sistema sub amortiguado.

Para determinar la solución particular vemos que $F(t) = 8\cos t$ y sus derivadas están generadas por $G = \{\cos t, \operatorname{sen} t\}$, esto sugiere que la solución particular[26] es de la forma $x_p(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t$. Reemplazando $x_p(t)$ en la ecuación diferencial de (3.52) se obtiene $A = B = 1$, de esta manera la solución particular está dada por

$$x_p(t) = \cos t + \operatorname{sen} t \tag{3.54}$$

Con (3.54) y (3.53) la solución general de la ecuación diferencial en (3.52) está dada por:

$$x(t) = c_1 e^{-2t}\cos t + c_2 e^{-2t}\operatorname{sen} t + \cos t + \operatorname{sen} t \tag{3.55}$$

Aplicando las condiciones iniciales de (3.52) en (3.55) se obtiene $c_1 = -1$ y $c_2 = -5$. Por lo tanto la solución de problema es:

$$x(t) = -e^{-2t}\cos t - 5e^{-2t}\operatorname{sen} t + \cos t + \operatorname{sen} t \tag{3.56}$$

Es fácil ver que la solución transitoria y estacionaria son respectivamente

$$\begin{aligned} x_T(t) &= -e^{-2t}\cos t - 5e^{-2t}\operatorname{sen} t \\ x_E(t) &= \cos t + \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

2. Para un tiempo grande la masa oscila según la función de la solución estacionaria, es decir: $x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t \equiv \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. Acá vemos que la frecuencia es $f = \frac{1}{2\pi}$, y el ángulo de fase es $\phi = \frac{\pi}{4}$. Derivando se tiene $\dot{x}(t) = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, de donde se infiere que la rapidez máxima es
$$\dot{x}_{\text{máx}} = \sqrt{2}$$

■

■ **Ejemplo 3.14** Un sistema resorte-masa se comporta según el problema:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = f(t),\ t > 0 \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.57}$$

1. Deducir la solución de (3.57) y muestre si dicha solución está dada por $x(t) = \int_0^t e^{z-t}\operatorname{sen}(t-z)f(z)dz$.
2. Encuentre la respuesta del sistema oscilante (solución), si la fuerza externa está dada por la función $f(t) = \begin{cases} e^{-t},\ 0 \le t \le \pi \\ 0,\ t > \pi \end{cases}$.

[26] Se entiende que vamos a aplicar el método de coeficientes indeterminados.

3. Grafique la solución.

Resolución

1. Acá es fácil ver que el sistema fundamental de soluciones está dado por $sfs = \{e^{-t}\cos t, e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t\}$ y con esto la solución complementaria es:

$$x_c(t) = c_1 e^{-t}\cos(t) + c_2 e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) \tag{3.58}$$

Ahora para determinar la solución particular, aplicamos el método de variación de parámetros, para lo cual suponemos que

$$x_p(t) = A(t)e^{-t}\cos(t) + B(t)e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) \tag{3.59}$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ se encuentran resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} A'(t)e^{-t}\cos(t) + B'(t)e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) = 0 \\ -A'(t)e^{-t}[\cos(t)+\mathrm{sen}(t)] + B'(t)e^{-t}[\cos(t)-\mathrm{sen}(t)] = f(t) \end{cases}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} A'(t)\cos(t) + B'(t)\,\mathrm{sen}(t) = 0 \\ -A'(t)[\cos(t)+\mathrm{sen}(t)] + B'(t)[\cos(t)-\mathrm{sen}(t)] = e^t f(t) \end{cases}$$

En matrices sería

$$\begin{bmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -\cos(t)-\mathrm{sen}(t) & \cos(t)-\mathrm{sen}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t f(t) \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

Aplicando regla de Cramer

$$\begin{aligned} A'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{sen}(t) \\ e^t f(t) & \cos(t)-\mathrm{sen}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -\cos(t)-\mathrm{sen}(t) & \cos(t)-\mathrm{sen}(t) \end{vmatrix}} = -e^t\,\mathrm{sen}(t)f(t) \\ &\Longrightarrow A(t) = -\int_0^t e^z\,\mathrm{sen}(z)f(z)dz \\ B'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} \cos(t) & 0 \\ -\cos(t)-\mathrm{sen}(t) & e^t f(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -\cos(t)-\mathrm{sen}(t) & \cos(t)-\mathrm{sen}(t) \end{vmatrix}} = e^t\cos(t)f(t) \\ &\Longrightarrow B(t) = \int_0^t e^z\cos(z)f(z)dz \end{aligned}$$

Ponemos $A(t)$ y $B(t)$ en (3.59) y se tiene que la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$x_p(t) = -e^{-t}\cos(t)\int_0^t e^z \operatorname{sen}(z)f(z)dz + e^{-t}\operatorname{sen}(t)\int_0^t e^z\cos(z)f(z)dz \tag{3.61}$$

Juntamos (3.58) y (3.61) para obtener la solución general

$$\begin{aligned} x(t) = \quad & c_1e^{-t}\cos(t)+c_2e^{-t}\operatorname{sen}(t) \\ & +e^{-t}\operatorname{sen}(t)\textstyle\int_0^t e^z\cos(z)f(z)dz - e^{-t}\cos(t)\int_0^t e^z\operatorname{sen}(z)f(z)dz \end{aligned} \tag{3.62}$$

Aquí en (3.62) aplicamos las condiciones iniciales del problema (3.57) para obtener $c_1 = c_2 = 0$, de donde (3.62) se reduce a

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}\operatorname{sen}(t)\int_0^t e^z\cos(z)f(z)dz - e^{-t}\cos(t)\int_0^t e^z\operatorname{sen}(z)f(z)dz \\ &= \int_0^t e^{z-t}\operatorname{sen}(t)\cos(z)f(z)dz - \int_0^t e^{z-t}\operatorname{sen}(z)\cos(t)f(z)dz \\ &= \int_0^t e^{z-t}\operatorname{sen}(t-z)f(z)dz \end{aligned}$$

teniendo finalmente[27]

$$x(t) = \int_0^t e^{z-t}\operatorname{sen}(t-z)f(z)dz \tag{3.63}$$

2. Para determinar la función de respuesta del sistema frente a $f(t)$, usamos (3.63) y tomamos los siguientes casos:

   Cuando $t \in [0,\pi]$, se tiene:

$$x(t) = \int_0^t e^{z-t}\operatorname{sen}(t-z)e^{-z}dz = e^{-t}(1-\cos(t))$$

   Cuando $t > \pi$, se tiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{z-t}\operatorname{sen}(t-z)f(z)dz \\ &= \int_0^\pi e^{z-t}\operatorname{sen}(t-z)e^{-z}dz + x(t) + \int_\pi^t e^{z-t}\operatorname{sen}(t-z)\cdot 0dz \\ &= -2e^{-t}\cos(t) \end{aligned}$$

[27]Como podemos ver, coincide con la fórmula propuesta

Por lo tanto:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}(1-\cos(t)),\ 0 \leq t \leq \pi \\ \\ -2e^{-t}\cos(t),\ t \geq \pi \end{cases}$$

3. La curva de la oscilación $x(t)$ la podemos observar en la figura 3.14.

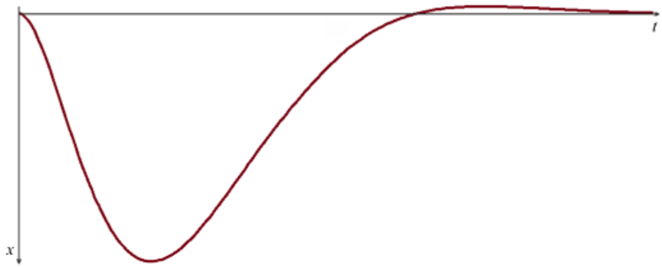


Figura 3.14:

■

■ **Ejemplo 3.15** Una pesa de 8 libras se suspende de un resorte y lo estira 32/20 pies. En el instante $t = 0$, se sumerge la pesa en un líquido que impone una resistencia de β libras por pies por segundo y se aplica una fuerza externa de $f(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(wt)$ libras.

1. Determine la variación de β para que la solución complementaria (o transitoria) se comporte como sub amortiguada, críticamente amortiguada y sobre amortiguada.
2. Para $\beta = 1$, determine la posición $x(t)$ del cuerpo en función del tiempo, si $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.
3. En el ítem anterior, determine el valor de w que maximice la amplitud de la solución estacionaria, además indique la solución del problema para dicho valor de w

<u>Resolución</u>

1. Analizando las condiciones del problema es fácil ver que $m = \frac{1}{4}$, $b = \beta$ y $k = 5$; de esta manera la ecuación diferencial del movimiento está dada por: $\frac{1}{4}\ddot{x} + \beta\dot{x} + 5x = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(wt)$, la cual es equivalente a

$$\ddot{x} + 4\beta\dot{x} + 20x = \operatorname{sen}(wt) \tag{3.64}$$

Para determinar lo que nos pide analizamos la parte complementaria de la ecuación diferencial, es decir: $\ddot{x}+4\beta\dot{x}+20x=0$. La ecuación característica sería $\lambda^2+4\beta\lambda+20=0$. De esta ecuación el discriminantes es $\triangle = 16\beta^2-80$ y con esto se tiene lo siguiente:

a) El sistema es sub amortiguado, si y solo si, $0<\beta<\sqrt{5}$.

b) El sistema tiene amortiguación crítica, si y solo si, $\beta=\sqrt{5}$.

c) El sistema es sobre amortiguado, si y solo si, $\beta>\sqrt{5}$.

2. Con $\beta=1$ en (3.64), la ecuación diferencial nos queda así:

$$\ddot{x}+4\dot{x}+20x=\operatorname{sen}(wt) \tag{3.65}$$

Es fácil ver que la solución complementaria de (3.65) es

$$x_c(t)=c_1e^{-2t}\cos(4t)+c_2e^{-2t}\operatorname{sen}(4t)$$

Para determinar la solución particular de (3.65), suponemos que ésta está dada por:

$$x_p(t)=A\cos(wt)+B\operatorname{sen}(wt) \tag{3.66}$$

Ponemos (3.66) en (3.65) y se obtiene que el valor de las constantes A y B son respectivamente:

$$A=\frac{-4w}{(w^2-20)^2+(4w)^2} \quad \text{y} \quad B=\frac{20-w^2}{(w^2-20)^2+(4w)^2}$$

Luego con estos resultados en (3.66) se tiene que la solución particular es:

$$x_p(t)=\frac{-4w}{(w^2-20)^2+(4w)^2}\cos(wt)+\frac{20-w^2}{(w^2-20)^2+(4w)^2}\operatorname{sen}(wt)$$

o también

$$x_p(t)=\frac{1}{(w^2-20)^2+(4w)^2}\left[-4w\cos(wt)+(20-w^2)\operatorname{sen}(wt)\right]$$

luego la solución general de (3.65) es:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{-2t}\cos(4t)+c_2e^{-2t}\operatorname{sen}(4t) \\ &\quad +\frac{1}{(w^2-20)^2+(4w)^2}\left[-4w\cos(wt)+(20-w^2)\operatorname{sen}(wt)\right] \end{aligned}$$

Para determinar c_1 y c_2, aplicamos las condiciones iniciales $x(0)=0$ y $\dot{x}(0)=0$. En efecto, aplicando la primera condición se tiene:

$$x(0)=c_1-\frac{4w}{(w^2-20)^2+(4w)^2}=0$$

de donde $c_1 = \frac{4w}{(w^2-20)^2+(4w)^2}$, con lo cual reescribimos la solución general y nos queda

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4w}{(w^2-20)^2+(4w)^2}e^{-2t}\cos(4t)+c_2e^{-2t}\operatorname{sen}(4t) \\ &+\frac{1}{(w^2-20)^2+(4w)^2}\left[-4w\cos(wt)+(20-w^2)\operatorname{sen}(wt)\right] \end{aligned}$$

Aquí, calculamos la derivada[28] y aplicamos la condición $\dot{x}(0)=0$, de donde se obtiene que $c_2 = \frac{w(w^2-12)}{4[(w^2-20)^2+(4w)^2]}$; y con esto nos queda finalmente que la solución del problema es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4we^{-2t}\cos(4t)}{(w^2-20)^2+(4w)^2}+\frac{w(w^2-12)e^{-2t}\operatorname{sen}(4t)}{4[(w^2-20)^2+(4w)^2]} \\ &+\frac{1}{(w^2-20)^2+(4w)^2}\left[-4w\cos(wt)+(20-w^2)\operatorname{sen}(wt)\right] \end{aligned}$$

3. Como ya es sabido, la solución estacionaria es la solución particular, así se tiene que:

$$x_E(t)=x_p(t)=\frac{1}{(w^2-20)^2+(4w)^2}\left[-4w\cos(wt)+(20-w^2)\operatorname{sen}(wt)\right]$$

Aquí, hacemos algunos arreglos de tal manera que sea más compacta esta solución; para esto, tomemos $\arctan(\phi) = \frac{4w}{20-w^2}$ y llevando todo a la función seno vemos que

$$x_E(t) = \frac{1}{\sqrt{(w^2-20)^2+(4w)^2}}\sin(wt-\phi)$$

donde su amplitud es:

$$a(w) = \frac{1}{\sqrt{(w^2-20)^2+(4w)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(w^2-12)^2+256}}$$

Es fácil ver que la amplitud es máxima cuando $w^2-12=0$, es decir $w=2\sqrt{3}$. Tomando $w=2\sqrt{3}$, la solución del problema es:

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{32}e^{-2t}\cos(4t)-\frac{\sqrt{3}}{32}\cos(2\sqrt{3}t)+\frac{1}{32}\operatorname{sen}(2\sqrt{3}t)$$

[28] Invitamos al lector haga el cálculo de la derivada y haga la verificación respectiva del valor de c_2.

o también

$$x(t)=\frac{\sqrt{3}}{32}e^{-2t}\cos(4t)+\frac{1}{16}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{3}t-\frac{\pi}{3}\right)$$

■

■ **Ejemplo 3.16** Un resorte con constante de elasticidad de 5 lb/pie. que está suspendido verticalmente, tiene adherido en su parte inferior un cuerpo cuyo peso es de 16 libras. Inicialmente el cuerpo está en reposo en su posición de equilibrio, pero empieza a actuar sobre él una fuerza externa en libras dada por $F(t)=24\operatorname{sen}t$, $t\geq 0$, la cual lo pone en movimiento. Si el medio donde se realiza la oscilación ofrece una fuerza amortiguadora numéricamente en libras dada por $4v$, donde v es su velocidad instantánea,

1. determine la posición del cuerpo en cualquier tiempo $t\geq 0$.
2. indique la solución estacionaria y transitoria del movimiento.
3. Indique la amplitud, período y frecuencia de la solución estacionaria.

<u>Resolución</u>

1. En primer lugar, según los datos del problema se tiene que $k=5$, $m=\frac{1}{2}$ y $b=4$; por lo que la ecuación diferencial queda así:

$$\frac{1}{2}\ddot{x}+4\dot{x}+5x=24\operatorname{sen}t$$

o también

$$\ddot{x}+8\dot{x}+10x=48\operatorname{sen}t \tag{3.67}$$

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial complementaria es: $\lambda^2+8\lambda+10=0$, de donde afirmamos que se trata de un sistema sobremortiguado con raíces $\lambda=-4\pm\sqrt{6}$, luego el sistema fundamental de soluciones y la solución complementaria son respectivamente $sfs=\left\{e^{-(4+\sqrt{6})t},e^{(\sqrt{6}-4)t}\right\}$ y

$$x_c(t)=c_1e^{-(4+\sqrt{6})t}+c_2e^{(\sqrt{6}-4)t}$$

El generador de $f(t)=48\operatorname{sen}t$ y sus derivadas es el conjunto $G=\{\cos t,\operatorname{sen}t\}$, por lo cual[29] la solución particular es de la forma:

$$x_p(t)=A\cos t+B\operatorname{sen}t \tag{3.68}$$

[29] Aplicamos el método de coeficientes indeterminados.

Ponemos (3.68) en (3.67), hacemos las simplificaciones correspondientes y se obtiene $A = -\frac{384}{145}$ y $B = \frac{432}{145}$. Ponemos estos resultados en (3.68) y resulta la solución particular:

$$x_p(t) = -\frac{384}{145}\cos t + \frac{432}{145}\operatorname{sen} t$$

Luego la solución general de (3.67) está dada por:

$$x(t) = c_1 e^{-(4+\sqrt{6})t} + c_2 e^{(\sqrt{6}-4)t} - \frac{384}{145}\cos t + \frac{432}{145}\operatorname{sen} t \tag{3.69}$$

En el problema se nos indica que inicialmente el cuerpo está en la posición de equilibrio y en reposo, lo que significa que $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Aplicando estas condiciones en (3.69) se obtiene

$$c_1 = \frac{4}{145}(48 - 23\sqrt{6}) \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{4}{145}(23\sqrt{6} + 48)$$

Finalmente, con estos resultados la posición del cuerpo en cualquier tiempo $t \geq 0$ está dada por la función:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{145}(48 - 23\sqrt{6})e^{-(4+\sqrt{6})t} + \frac{4}{145}(23\sqrt{6} + 48)e^{(\sqrt{6}-4)t} \\ &\quad - \frac{384}{145}\cos t + \frac{432}{145}\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

o también (ver figura 3.15)

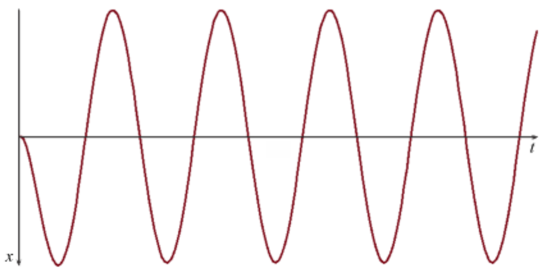


Figura 3.15: El sistema responde con este tipo de oscilación.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{145}(48 - 23\sqrt{6})e^{-(4+\sqrt{6})t} + \frac{4}{145}(23\sqrt{6} + 48)e^{(\sqrt{6}-4)t} \\ &\quad + \frac{48}{\sqrt{145}}\operatorname{sen}(t - \phi) \end{aligned}$$

donde $\tan\phi = \frac{8}{9}$.

2. La solución transitoria (ver figura 3.16) y estacionaria (ver figura 3.17) son respectivamente

$$x_T(t) = \frac{4}{145}(48 - 23\sqrt{6})e^{-(4+\sqrt{6})t} + \frac{4}{145}(23\sqrt{6} + 48)e^{(\sqrt{6}-4)t}$$

y

$$x_E(t) = \frac{48}{\sqrt{145}}\,\mathrm{sen}(t - \phi),\ \tan\phi = \frac{8}{9}$$

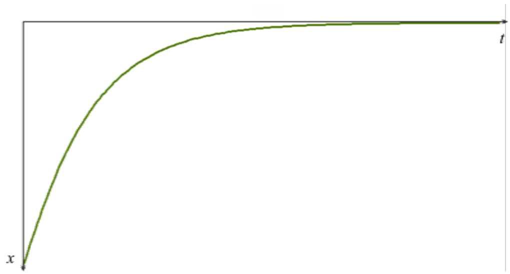


Figura 3.16: Efecto de la solución transitoria, la estabilidad de la solución se debe al hecho de ser un sistema sobre amortiguado.

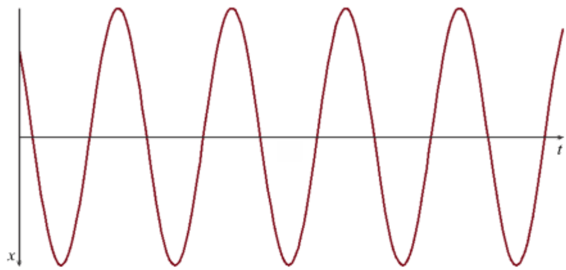


Figura 3.17: Efecto de la solución estacionaria

3. Respecto de la solución estacionaria se tiene:

Amplitud: $a = \frac{48}{\sqrt{145}}$

Período: $T = 2\pi$

Frecuencia: $f = \frac{1}{2\pi}$.

■

3.4 EJERCICIOS PROPUESTOS 3

1. Una masa que pesa 4 libras se suspende de un resorte y lo estira 24 pulgadas al llegar al reposo en equilibrio. Si se hala la masa 2,5 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta
   a) Establezca la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que describan el movimiento.
   b) Encuentre la función de posición y la velocidad de la masa en cualquier instante t.
   c) Encuentre la amplitud y frecuencia del movimiento.
   d) Determine el tiempo en que la masa pasa por segunda vez por la posición de equilibrio.
   e) Determine la rapidez máxima del movimiento.
2. Un cuerpo cuyo peso es de 4 libras al suspenderse por el extremo de un resorte que está fijo por su otro extremo, lo estira 0,64 pies. Cuando se alcanza el equilibrio el cuerpo se golpea hacia abajo imprimiéndole una velocidad inicial de 2,5 pies/s.
   a) Determine la función de posición y velocidad del cuerpo en cualquier instante t.
   b) Determine la frecuencia y amplitud del movimiento.
   c) Determine la velocidad y aceleración del cuerpo a 2 pulgadas por encima de su posición de equilibrio y se mueve hacia arriba.
3. Un resorte que se encuentra suspendido por uno de sus extremos, tiene constante de elasticidad[30] 10 lb/pie. Un peso de 4 libras se coloca en el extremo libre del resorte, de tal manera que cuando alcanza el equilibrio el peso se empuja 6 pulgadas por encima de la posición de equilibrio y una vez allí se golpea hacia abajo imprimiéndole una velocidad inicial de 3 pies/s. Determine la función de posición en cualquier instante t, luego determine el tiempo en que pasa por primera vez por la posición de equilibrio, asimismo, determine su rapidez máxima.
4. Un resorte es estirado 25 cm por una fuerza de 9 N. Si se fija el resorte por un extremo y se suspende de el un cuerpo con masa de 250 g, de tal manera que en el instante $t = 0$ se pone dicho cuerpo un metro más abajo de su posición de equilibrio y se le golpea hacia arriba para darle una velocidad inicial de 5 m/s.
   a) Encuentre la función de posición y velocidad del cuerpo en cualquier instante t.

[30] o también constante de Hooke.

   b) Encuentre la amplitud, período y frecuencia de la oscilación.
   c) Determine la velocidad y aceleración máxima del movimiento.
5. Una masa de 20 kilogramos se encuentra oscilando en un resorte sin amortiguación con una frecuencia de $\frac{2}{\pi}$ ciclos/s.
   a) Determine la constante de elasticidad del resorte.
   b) Tomando la constante de elasticidad del ítem anterior, determine la frecuencia de la oscilación si la masa se reemplaza por otra de 60 kilogramos.
6. Una fuerza de 100 libras estira un resorte 1/2 pie. Si se suspende de dicho resorte un cuerpo de 256 libras de tal manera que cuando llega al equilibrio se lo empuja hacia arriba para ponerlo a 4 pulgadas de su posición de equilibrio y luego se lo suelta
   a) Encuentre la función de posición y velocidad de dicho cuerpo en el instante t.
   b) En el instante $t = \frac{2\pi}{3}$ s. determine la posición del cuerpo y en qué dirección se está moviendo.
   c) Determine el instante en que el cuerpo se encuentra por segunda vez a 2 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio.
7. Una masa de 1,6 slugs se adhiere al extremo de un resorte con constante de elasticidad 40 lb/pie. Si dicha masa se pone a 4 pulgadas arriba de la posición de equilibrio y se le golpea dándole una velocidad descendente de 1,25 pie/s.
   a) Determine la función de posición de la masa y su amplitud.
   b) Determine la rapidez máxima del movimiento.
8. Un cuerpo que oscila en un resorte tiene período 1,5 s. Al añadirle un peso de 6 lb, el período de la oscilación aumenta en un segundo. Determine el peso del primer cuerpo.
9. Una bola de acero que pesa 4 libras al suspenderse de un resorte lo estira 24 pulgadas. La bola oscila al ser liberada del reposo desde una posición que está a 6 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio; si la oscilación se da en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual al doble de la velocidad instantánea,
   a) determine la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales para la oscilación.
   b) encuentre la función de posición de la bola en cualquier tiempo t.
   c) a partir de la función encontrada en el ítem anterior, determine si la bola cruza la posición de equilibrio.
10. Una bola de acero que pesa 4 libras al suspenderse de un resorte lo estira 24 pulgadas. La bola oscila al ser liberada del reposo desde una posición que está a 12 pulgadas por encima de su posición de equilibrio; si la

oscilación se da en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la velocidad instantánea,

a) establezca la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales para la oscilación.

b) encuentre la función de posición de la bola en cualquier tiempo t.

c) a partir de la función encontrada en el ítem anterior, determine si la bola cruza la posición de equilibrio.

11. Un resorte de 4 pies de largo llega a medir 4,5 pies cuando se suspende de el un peso de 8 libras. Si se jala el peso un pie por debajo de la posición de equilibrio y se le golpea hacia abajo transfiriéndole una velocidad inicial de 2 pie/s el peso se pone en movimiento. Considerando que el medio en el cual se realiza la oscilación ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual al dos veces su velocidad instantánea,

    a) establezca la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales para la oscilación.

    b) encuentre la función de posición $x(t)$ del peso en cualquier tiempo t.

    c) a partir de la función encontrada en el ítem anterior, determine el tiempo en que el peso cruza la posición de equilibrio por primera vez.

    d) determine el tiempo $t > 0$ en el cual $|x(t)|$ tiene su máximo valor.

    e) determine la función de amplitud $a(t)$, el período y el ángulo de fase de la oscilación.

12. Un cuerpo de masa 1 kilogramo se suspende de un resorte cuya constante de elasticidad es de 16 N/m. Si todo este sistema resorte-masa se encuentra en un medio que ofrece una resistencia de 10 N s/m y en el instante $t = 0$ se pone el cuerpo 1 m por debajo de la posición de equilibrio y se le imparte una velocidad ascendente de 10 m/s

    a) establezca la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales para la oscilación.

    b) encuentre la función de posición $x(t)$ del peso en cualquier tiempo t.

    c) a partir de la función encontrada en el ítem anterior, determine el tiempo en que el peso cruza la posición de equilibrio por primera vez.

    d) determine el valor máximo de $|x(t)|$ para $t > 0$.

13. Un cuerpo cuyo peso es de 20 N se suspende de un resorte y lo estira 125 cm. El cuerpo en mención una vez que está en el equilibrio se le imparte una velocidad hacia abajo de 10 m/s, sabiendo que el medio en el cual

oscila el cuerpo imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a dos veces su velocidad instantánea (considere g=10 m/s^2)

a) establezca la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales para la oscilación.

b) encuentre la función de posición $x(t)$ del peso en cualquier tiempo t.

c) a partir de la función encontrada en el ítem anterior, determine el tiempo en que el peso cruza la posición de equilibrio por segunda vez.

d) determine el mayor desplazamiento del cuerpo en oscilación respecto de su posición de equilibrio.

14. Un resorte que mide 1 m de largo llega a medir 1,20 m cuando se suspende de el un peso de 20 N. Si este peso se reemplaza por otro de 39,2 N y al sistema resorte-masa se le añade un dispositivo que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la velocidad instantánea (considere $g = 9,8m/s^2$)

    a) determine la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales, sabiendo que el peso se libera 50 cm por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 1 m/s.

    b) encuentre la función de posición del peso en cualquier tiempo t.

    c) encuentre el tiempo en que el peso pasa por la posición de equilibrio por tercera vez.

    d) determine la función de amplitud $a(t)$, período y frecuencia de la oscilación.

15. Un peso de 12 libras se suspende del extremo de un resorte y lo estira 6 pulgadas. Si dicho peso se pone a oscilar en el resorte en un medio que ofrece una fuerza de resistencia de β libras por cada pie por segundo de velocidad. Determine los valores de β para los cuales la oscilación es subamortiguada, sobre amortiguada y críticamante amortiguada. Describa la función de posición $x(t)$ en función de β en cada caso.

16. La oscilación de una masa m en un resorte se da según la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = 0$$

    Determine los valores de m para los cuales la oscilación es subamortiguada, sobre amortiguada y críticamante amortiguada. Describa la función de posición $x(t)$ en función de m en cada caso.

17. Un sistema resorte - masa forzado se comporta según el problema:

$$\begin{cases} \ddot{x}+64x=28\cos(6t),\ t\geq 0 \\ \\ x(0)=\dot{x}(0)=0 \end{cases}$$

   a) Interprete físicamente este problema
   b) Halle $x(t)$ y demuestre que $x(t)=2\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(7t)$. Si hace $a(t)=2\,\mathrm{sen}(t)$, esta se llama amplitud de tiempo variante mientras que la onda $\mathrm{sen}(9t)$ se llama amplitud modulada.
18. Al aplicar una fuerza de 7,5 libras a un resorte, este se estira 18 pulgadas. Un peso de 25,6 libras se suspende de dicho resorte y una vez que está en la posición de equilibrio se le aplica una fuerza en libras dada por $F(t)=11\,\mathrm{sen}(3t)$. Determine la función de posición $x(t)$ del peso e indique la frecuencia natural de la oscilación[31].
19. Un cuerpo cuyo peso es de 100 libras al suspenderse de un resorte lo estira una pulgada. Al estar dicho cuerpo en la posición de equilibrio se le aplica una fuerza en libras dada por $F(t)=F_0\cos(\omega t)$, $t\geq 0$. Indique para qué valor de ω acontece una oscilación de resonancia y halle dicha oscilación.
20. En el ejercicio 18, encuentre la función de posición $x(t)$ del peso, si en el tiempo $t=0$ dicho peso está 6 pulgadas debajo de su posición de equilibrio y además de actuar la fuerza externa se le proporciona una velocidad inicial de 2 pie/s hacia arriba.
21. De un resorte con constante de elasticidad 5,625 lb/pie se suspende un peso de 20 libras. Se aplica una fuerza externa $F(t)=15\cos(wt)$. Asumiendo que en $t=0$ el peso está en reposo en la posición de equilibrio
   a) establezca la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que describen el movimiento.
   b) encuentre la posición y la velocidad del peso en cualquier tiempo t cuando $w\neq 0$.
   c) encuentre la posición y la velocidad del peso en cualquier tiempo t cuando hay resonancia, además determine la amplitud $a(t)$.
22. Si en el ejercicio 21 en el tiempo $t=0$ el peso se coloca 4 pulgadas encima de la posición de equilibrio y se le golpea dándole una velocidad inicial de 3 pies/s hacia abajo
   a) establezca la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que describen el movimiento.
   b) encuentre la posición y la velocidad del peso en cualquier tiempo t cuando hay resonancia.

[31] Es aquella que proviene del sistema resorte - masa, mas no de la fuerza externa.

   c) determine la función de amplitud $a(t)$.

23. Un sistema resorte - masa se comporta según la ecuación diferencial

$$m\ddot{x}+kx=F(t)$$

   Determine los valores de ω para los cuales existe resonancia, si:
   a) $F(t)\,\mathrm{sen}^4(\omega t)$
   b) $F(t)=\mathrm{sen}^5(\omega t)$
   c) $F(t)=\mathrm{sen}^6(\omega t)$

24. La oscilación en un sistema resorte masa se da según la ecuación diferencial

$$\ddot{x}+16x=f(t),\; x(0)=\dot{x}(0)=0$$

   Halle $x(t)$, si
   a) $f(t)=\begin{cases} 8\cos(4t),\; 0\leq t<2\pi \\ 0,\; t\geq 2\pi \end{cases}$
   b) $f(t)=\begin{cases} 0,\; 0\leq t<2\pi \\ 8\cos(4t),\; t\geq 2\pi \end{cases}$
   c) $f(t)=\begin{cases} t^2,\; 0\leq t<\pi \\ 0,\; t\geq \pi \end{cases}$

25. La oscilación en un sistema resorte masa amortiguado se da según la ecuación diferencial

$$\ddot{x}+2\dot{x}+2x=f(t),\; x(0)=\dot{x}(0)=0$$

   Halle $x(t)$, si
   a) $f(t)=\begin{cases} e^{-t}\cos(t),\; 0\leq t<\pi \\ 0,\; t\geq \pi \end{cases}$
   b) $f(t)=\begin{cases} 0,\; 0\leq t<\pi \\ 2e^{-t}\cos(t),\; t\geq \pi \end{cases}$

26. Una masa de $\frac{5}{2}$ kg. que está suspendida de un resorte fijo en el techo, hace que este se estire $\frac{49}{20}$ m. al ponerse en reposo y en equilibrio. En el instante $t=0$, la masa se desplaza 1 m. arriba de su posición de equilibrio y se suelta. En ese mismo instante empieza a actuar una fuerza externa $f(t)=305\cos(3t)$ N. en el sistema. Si el medio ofrece una resistencia de 5 N s/m y la gravedad la tomamos como 9,8 $\frac{m}{s^2}$.
   a) Determine el desplazamiento $x(t)$ de la masa en cualquier instante $t>0$.
   b) Calcule la rapidez máxima y la amplitud del movimiento para un tiempo grande.

27. Una fuerza de 500 dinas estira un resorte 12 centímetros. Se pone dicho resorte en un soporte y se suspende de el una masa de 4 gramos a la cual se le permite que llegue al equilibrio; una vez allí, se aplica una fuerza en dinas dada por $f(t) = 300\,\mathrm{sen}(2t)$, $t \geq 0$. Asumiendo que hay un amortiguador adherido a la masa que proporciona una fuerza amortiguadora numéricamente en dinas igual a 24 v, donde v es la velocidad instantánea en centímetros por segundo
    a) determine la posición de la masa en cualquier instante t.
    b) determine la posición y la amplitud máxima del movimiento en un tiempo largo.
    c) determine la rapidez máxima del movimiento para un tiempo largo.
28. Una masa que pesa 12 libras al quedar suspendida de un resorte lo alarga 128 pulgadas. La masa se libera de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 3/2 pies por segundo. Si el medio en el cual se mueve la masa ofrece una fuerza de resistencia igual a 3/4 veces su velocidad instantánea y se aplica una fuerza externa en libras igual a $f(t) = 9\,\mathrm{sen}(3t)$, $t \geq 0$,
    a) halle la posición de la masa en cualquier tiempo; identifique la parte transitoria y estacionaria del movimiento.
    b) halle la frecuencia, ángulo de fase y amplitud máxima del movimiento en un tiempo grande.
    c) halle la rapidez máxima del movimiento para un tiempo grande
29. De un resorte cuya constante de elasticidad es de 10 lb/pie., se suspende cuerpo cuyo peso es 20 libras. Inicialmente el cuerpo se libera de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 1 pie/s, actuando además sobre dicho cuerpo una fuerza externa en libras dada por $F(t) = \frac{2581}{4}\,\mathrm{sen}(2t)$, $t \geq 0$. Si el medio donde el cuerpo oscila ofrece una fuerza amortiguadora numéricamente en libras dada por $41/8v$, donde v es su velocidad instantánea,
    a) determine la posición del cuerpo en cualquier tiempo $t \geq 0$.
    b) indique la solución estacionaria y transitoria del movimiento.
    c) indique la amplitud, frecuencia de la solución estacionaria.
30. Una pesa de 16 libras se suspende de un resorte y lo estira 8/5 pies. En el instante $t = 0$, se sumerge la pesa en un líquido que le proporciona una resistencia de β libras por pie por segundo, asimismo, empieza a actuar sobre el sistema resorte - masa, una fuerza en libras dada por $f(t) = \mathrm{sen}(wt)$.
    a) Determine los valores de β para los cuales la solución transitoria se comporta como sub amortiguada, críticamente amortiguada y sobre amortiguada.

b) Para $\beta = 1$, determine la posición $x(t)$ de la pesa, si $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

c) En el ítem anterior determine el valor de w para el cual la amplitud de la solución estacionaria tiene su máximo valor. Además indique la solución $x(t)$ para dicho calor de w.

d) Halle $x(t)$, cuando $w^2 = 20$.

31. Un cuerpo de masa m oscilando en un resorte, su posición $x(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen}(wt + \alpha)$$

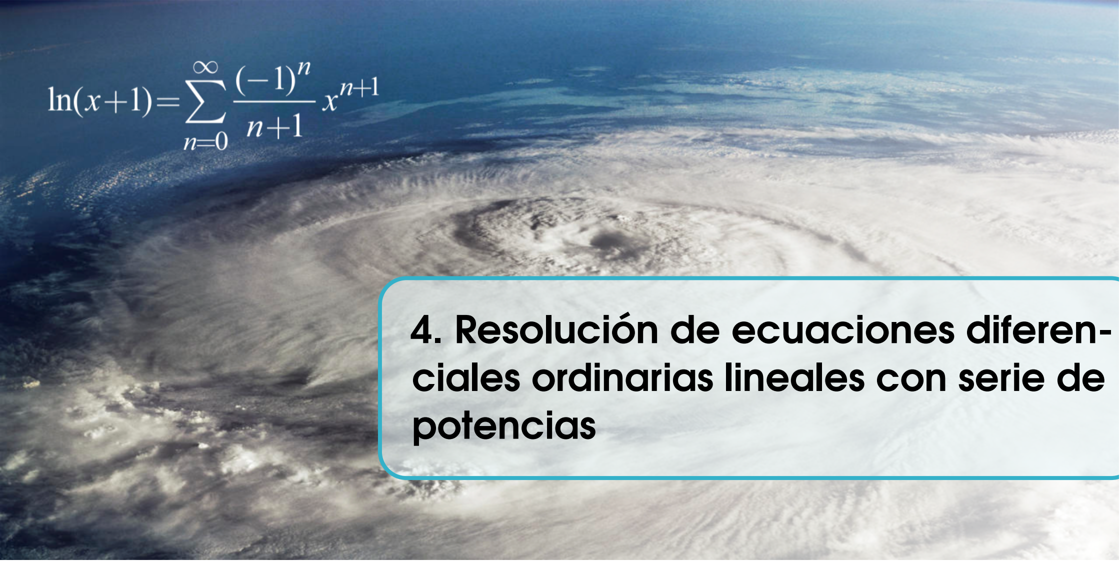
donde F_0, w y α son números reales no nulos.

a) Demuestre que existe ϕ tal que la solución estacionaria está dada por

$$x_E(t) = \frac{F_0 \operatorname{sen}(wt + \alpha + \phi)}{\sqrt{(k - w^2)^2 + 4b^2 w^2}}$$

b) Determine el valor de w para el cual la amplitud es máxima.

c) Analice la amplitud en el caso de que $w \to \sqrt{k}$ y $b \to 0$.



4. Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con serie de potencias

Antes de hacer el estudio de la resolución de las ecuaciones diferenciales mediante series, es bueno hacer un repaso acerca de la teoría de series de números reales y serie de potencias, mas que todo desarrollando los conceptos y teoremas principales relacionados a su convergencia.

4.1 Serie de números reales

Pongamos la función

$$\begin{aligned} a: \quad & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longrightarrow a(n) := a_n \end{aligned}$$

El conjunto $\{a_1, a_2, \cdots\}$, que denotaremos con $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, o $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o simplemente $\{a_n\}$ es lo que llamaremos sucesión. Ahora, con los elementos de esta sucesión podemos construir otra sucesión de la siguiente manera. Tomemos $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, y así sucesivamente, de tal manera que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{4.1}$$

Vemos que procediendo de esta manera se obtiene otra sucesión $\{s_n\}$ que llamamos **sucesión de sumas parciales** de los elementos de $\{a_n\}$. Si en (4.1) hacemos $n \to \infty$ se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4.2}$$

Que le llamaremos serie infinita o solamente serie. Si la sucesión $\{s_n\}$ converge hacia s, diremos que la serie converge a s y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s \tag{4.3}$$

Al número s se le llama suma de la serie, pero también debe entenderse como el límite de la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$, y que no es una simple adición.

De la convergencia de la sucesión (de sumas parciales) $\{s_n\}$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ si, y solo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N$, entonces $|s_n - s| < \varepsilon$. Pero aquí debemos tener en cuenta el siguiente detalle:

$$\text{para cada } n \in \mathbb{N},\ s - s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n+1}^{\infty} a_k$$

Así:

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_k\right| = |s_n - s| < \varepsilon$$

Por esto, la convergencia de una serie lo escribimos a continuación como:

Definición 4.1.1 La serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge al número s si, y solo si, dado $\varepsilon > 0$, existe el número natural N, tal que, si $n > N$, entonces $|\sum_n^{\infty} a_k| < \varepsilon$.

Observación

Escribiremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, simplemente como $\sum a_k$, excepto el caso en que haya un cambio en los índices.

■ **Ejemplo 4.1** Dada la sucesión $\{a_n\}$ donde $a_n = r^n$. Si tomamos $|r| < 1$, es fácil ver que $|a_n| = |r^n| < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Conocemos por cocientes notables que $\frac{r^{n+1}-1}{r-1} = r^n + r^{n-1} + \cdots + r + 1 = \sum_{k=0}^{n} r^k$, es decir:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

si hacemos $n \to \infty$, entonces ocurre que $a_n = r^n \to 0$, luego nos queda el siguiente resultado:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \tag{4.4}$$

■

Dando valores particulares al número a, obtenemos resultados interesantes, por ejemplo:

$$\text{Para } r = \frac{1}{2}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$$

$$\text{Para } r = \frac{1}{3}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{3}{2}$$

$$\text{Para } r = -\frac{1}{2}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{2}{3}$$

Es claro en el ejemplo anterior que si $r \geq 1$, entonces la serie es divergente

Teorema 4.1.1 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si, y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \varepsilon, \ \text{si } m \geq n \geq N$$

Demostración. Si se toma en cuenta de que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N$, entonces $|\sum_{k=n}^{\infty} a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $m \geq n$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| &= \left| \sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| + \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Luego tomando $m \geq n \geq N$ se cumple que

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Ahora, si suponemos que para cada $\varepsilon > 0$ se tiene $|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \varepsilon$ para m, n cualesquiera con $m \geq n \geq N$, entonces fijando n y haciendo $m \to \infty$ se obtiene:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| \leq \varepsilon$$

con lo cual afirmamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. ■

Teorema 4.1.2 Si $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración. En primer lugar debemos notar que para cada n se tiene que[a]:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = s_{n+1} - s_n \end{aligned}$$

Por hipótesis se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, esto significa que existe un número s tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. En término de sucesiones, esto equivale a decir que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ con $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, converge al número s. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|s_m - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ siempre que } m > N$$

de aquí aplicando desigualdad triangular se tiene que

$$|a_{m+1}| = |s_{m+1} - s_m| \leq |s_{m+1} - s| + |s_m - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

de donde se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

■

[a] Vea (4.1)

El recíproco del teorema no necesariamente es cierto. Es decir, que $a_n \to 0$ no es suficiente para que $\sum a_n$ converja. Por ejemplo tomemos $a_n = \frac{1}{n}$, a pesar que $a_n \to 0$, $n \to \infty$, sin embargo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \tag{4.5}$$

es divergente. Probaremos tal hecho más adelante. También es importante el teorema 4.1.2, porque nos brinda una condición esencial para que una serie diverja, esto es $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Teorema 4.1.3 Una serie de términos no negativos converge si, y solo si sus sumas parciales forman una sucesión acotada.

Teorema 4.1.4 — Criterio de comparación.
1. Si $|a_n| \leq c_n$, para $n \geq N$, donde $N \in \mathbb{N}$ es dado, y $\sum c_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.
2. Si $a_n \geq d_n \geq 0$ para $n \geq N$ y $\sum d_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge.

Demostración.

1. Se tiene que $|a_n| \leq c_n$, para $n \geq N$ (N dado), y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. Con esto se tiene que
$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < \infty$$
Luego aplicando el teorema 4.1.3, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, así $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
2. Como $0 \leq d_n \leq a_n$, para $n \geq N$, entonces $0 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$; pero $\sum_{n=N+1}^{\infty} d_n$ diverge, es decir $\sum_{n=N+1}^{\infty} d_n = +\infty$; por lo tanto $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = +\infty$. Con esto se tiene que
$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = +\infty$$
Así se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

■

■ **Ejemplo 4.2** Utilizando el teorema anterior podemos demostrar la divergencia de la serie en (4.5), en efecto: tomamos las sumas parciales de $\sum a_n$, con $a_n = \frac{1}{n}$. Observemos lo siguiente

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Así tenemos que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} < \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Haciendo $n \to \infty$ se tiene que $\sum \frac{1}{2}$ diverge, luego según el teorema 4.1.4, se tiene que $\sum \frac{1}{k}$ diverge. ■

A pesar de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, es importante el hecho de que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sí converge. Para esto tenemos el criterio de Leibniz el cual nos da las condiciones para que una serie alternada converja

Teorema 4.1.5 — Criterio de Leibniz. Considere la serie alternada; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión no creciente y $a_n \to 0$, $n \to +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge

De acuerdo a este teorema se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

Teorema 4.1.6 Dada la sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. La serie $\sum a_n$ converge si, y solo si la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \tag{4.6}$$

converge.

Teorema 4.1.7 La serie $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Teorema 4.1.8 Si $p > 1$, entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \tag{4.7}$$

converge. Si $p \leq 1$, la serie diverge.

Definición 4.1.2 En número e se define de la siguiente manera:

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{4.8}$$

Teorema 4.1.9 Dada la sucesión $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{4.9}$$

Un resultado importante es que $e \in \mathbb{I}$.

Definición 4.1.3 Si la serie $\sum |a_n|$ converge, entonces decimos que es absolutamente convergente.

Teorema 4.1.10 Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Teorema 4.1.11 — Criterio de la razón o de D'Alembert. Dada la serie $\sum a_n$, para la cual $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

1. Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.
2. Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie diverge.
3. Si $L = 1$, no se asegura la convergencia o no convergencia.

Demostración. 1. Como $L < 1$, entonces existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq L < \delta < 1$; asimismo, existirá $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \delta$, $\forall n \geq N$. De esta manera, tomando $n \geq N$ se tiene que

$$|a_{n+1}| < \delta |a_n| \tag{4.10}$$

Desarrollando (4.10) vemos que:

$$\begin{aligned}
|a_{N+1}| &< \delta |a_N| \\
|a_{N+2}| &< \delta |a_{N+1}| < \delta^2 |a_N| \\
|a_{N+3}| &< \delta |a_{N+2}| < \delta^3 |a_N| \\
|a_{N+4}| &< \delta |a_{N+3}| < \delta^4 |a_N|
\end{aligned}$$

Procediendo por inducción, se tiene que para $m \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|a_{N+m}| < \delta^m |a_N|$$

Como $0 < \delta < 1$, entonces

$$0 \leq \sum_{m=1}^{\infty} |a_{N+m}| < \sum_{m=1}^{\infty} |\delta^m a_N| = |a_N| \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m = \frac{|a_N|}{1-\delta}$$

De esto se concluye que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

2. Tomando $L > 1$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, $\forall n \geq N$. De esta manera:

$$|a_n| < |a_{n+1}|, \ \forall n \geq N$$

Con esto, es fácil ver que $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge (diverge)

■

Teorema 4.1.12 — Criterio de la raíz. Dada la serie $\sum a_n$, para la cual $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

1. Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.
2. Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie diverge.
3. Si $L = 1$, no se asegura la convergencia o no convergencia.

Teorema 4.1.13 Si $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$, entonces $\sum (a_n + b_n) = A + B$.

Teorema 4.1.14 Supongamos que $\sum a_n$ es absolutamente convergente, además $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, entonces

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB, \quad \text{donde} \ \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \tag{4.11}$$

4.2 Serie de potencias

Una serie de potencias alrededor de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es una suma infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{4.12}$$

Si para un x específico, tomamos la sucesión de sumas parciales $\{s_n(x)\}$, donde $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$, decimos que la serie (4.12) converge si existe

$s(x)$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k = s(x) \tag{4.13}$$

caso contrario diremos que es divergente. También es importante mencionar que la serie (4.12) es absolutamente convergente, si ocurre que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ converge.

Es fácil darse cuenta que para $x = x_0$ la serie converge, más si acontece que $x \neq x_0$, entonces la serie puede converger o diverger. Para determinar el conjunto de los x para los cuales la serie converge hacemos el siguiente análisis, para lo cual aplicamos el criterio de la razón indicado en el teorema 4.1.11. Para un número x hagamos $b_n = a_n(x-x_0)^n$, luego se tiene

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-x_0|$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Según el teorema 4.1.11, la convergencia ocurre cuando $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| < 1$, es decir

$$|x-x_0| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \text{o también} \quad |x-x_0| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Si hacemos

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{4.14}$$

se tiene que

$$|x-x_0| < R \quad \equiv \quad x \in \langle x_0 - R, x_0 + R\rangle$$

Llamamos a R el radio de convergencia de la serie. Según los valores que asuma R, ocurren tres casos para la convergencia de la serie (4.12).

1. Si R es un número real diferente de cero, entonces la serie converge para todo x en el intervalo $\langle x_0 - R, x_0 + R\rangle$, el cual es llamado intervalo de convergencia de la serie. Tener en cuenta que la serie diverge en $\langle -\infty, x_0 - R\rangle \cup \langle x_0 + R, +\infty\rangle$, mientras que en los puntos $x_0 - R$, $x_0 + R$, la serie podría converger o diverger.
2. Si $R = 0$, entonces la serie diverge para cualquier $x \in \mathbb{R}$, excepto para $x = x_0$.

3. Si $R = \infty$, entonces la serie converge para cualquier número real x.

■ **Ejemplo 4.3** Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n n^2}$. Hallar el conjunto donde converge la serie.

<u>Resolución</u>

En primer lugar calculamos el radio de convergencia. Tenemos que $a_n = \frac{1}{4^n n^2}$ y según (4.14) el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{4^n n^2}}{\frac{1}{4^{n+1}(n+1)^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4(n+1)^2}{n^2} \right| = 4 \lim_{n\to\infty} \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right| = 4$$

Luego la serie converge con seguridad en el intervalo $I = \langle 3-4, 3+4 \rangle = \langle -1, 7 \rangle$. Ahora veamos en los extremos

Para $x = -1$ tenemos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-3)^n}{4^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, la cual converge.

Para $x = 7$ tenemos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-3)^n}{4^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual converge.

Luego afirmamos que la serie converge en el conjunto $[-1, 7]$ y diverge en $\mathbb{R} - [-1, 7]$. ■

■ **Ejemplo 4.4** Determine el radio de convergencia y el conjunto de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$.

<u>Resolución</u>

En primer lugar $a_n = \frac{3^n}{n}$, luego el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3^n}{n}}{\frac{3^{n+1}}{n+1}} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

Así la serie converge para $|x| < \frac{1}{3}$ o también para $x \in \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$. Si tomamos $x = -\frac{1}{3}$, entonces se tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, la cual es convergente[1]. Ahora si se toma $x = \frac{1}{3}$, entonces se tiene la serie divergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$. Por lo tanto el conjunto de convergencia es $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$. ■

Algunas situaciones importantes que debemos mencionar respecto de las series son las siguientes:

supongamos que la serie (4.12) converge para $|x - x_0| < R$, denotamos su suma por $f(x)$ y se tiene:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \tag{4.15}$$

[1] Tener en cuenta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, sin embargo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente.

Si esto es así, entonces $f(x)$ es continua e infinitamente diferenciable en $|x-x_0|<R$. Las derivadas que se obtienen a partir de (4.15) son

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \cdots \\
f'''(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x-x_0)^{n-3} = 6a_3 + 24a_4(x-x_0) + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Otro aspecto importante es que si una función $f(x)$ continua admite derivadas de todos los órdenes en $|x-x_0|<R$, entonces según el teorema de Taylor f puede representarse mediante una serie de potencias de la forma

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Cuya convergencia es para $|x-x_0|<R$. Algunos desarrollos familiares usando serie de Taylor son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Usando la idea del ejemplo 4.1 encontramos que para $|x|<1$,

$$
\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \tag{4.16}
$$

de (4.16) podemos deducir varios resultados importantes, por ejemplo si reemplazamos x por $-x$ en (4.16) se obtiene:

$$
\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots, \quad |x|<1 \tag{4.17}
$$

Ahora si en (4.17) reemplazamos x por x^2, se obtiene

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1 \tag{4.18}$$

Integramos (4.17) para obtener

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad |x| < 1 \tag{4.19}$$

Asimismo integramos (4.18) para obtener

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1 \tag{4.20}$$

Teorema 4.2.1 Dada las series de potencias con sus respectivos radio de convergencia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R_1$$
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R_2$$

Tomando $R = \text{mín}(R_1, R_2)$ se cumplen las siguientes afirmaciones

1. Si $f(x) = g(x)$, entonces $a_n = b_n$, $\forall n$.
2. $cf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ca_n(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < R_1$, para cualquier constante c.
3. $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < R$.
4. $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < R$, donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
5. $\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, donde $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$ y $c_n = \frac{a_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_n b_{n-k}}{b_0}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ y $|x-x_0| < R'$, con $R' = \text{mín}(R, d)$, siendo d el mínimo entre la distancia de x_0 al cero de $g(x)$. Tener en cuenta que $g(x) \neq 0$.
6. $f(x)$ es infinitamente derivable en $|x-x_0| < R$, además

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \tag{4.21}$$

4.3 Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales alrededor de un punto ordinario

Definición 4.3.1 Una función f que admite un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

en algún entorno del punto x_0 se dice que es analítica en x_0.

Volvemos a enfatizar, que toda serie de potencias alrededor de x_0 con radio de convergencia R, define (o es) una función $f(x)$ en el intervalo $x_0 - R < x < x_0 + R$, y escribimos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

donde además $f(x)$ es infinitamente derivable en $\langle x_0 - R, x_0 + R\rangle$

Definición 4.3.2 Si la función $f(x)$ es analítica en x_0, entonces decimos que x_0 es un punto ordinario de $f(x)$.

Teorema 4.3.1 Dada la ecuación diferencial:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{4.22}$$

Si $x = x_0$ es un punto ordinario de las funciones $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ y f, entonces la ecuación (4.22) admite solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

A continuación se resuelve varias ecuaciones diferenciales mediante serie de potencias alrededor de un punto ordinario.

■ **Ejemplo 4.5** Resuelva la ecuación diferencial: $x'(t) = t^2 x$

Resolución

En este caso vemos que $t_0 = 0$ es un punto ordinario, por lo cual la solución es de la forma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

con

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene:

$$c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2 + \cdots = t^2(c_0 + c_1t + c_2t^2 + \cdots)$$

que expresada en sumatorias sería:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_nt^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-2}t^{n+2}$$

al uniformizar exponentes queda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}t^n$$

luego uniformizando índices se obtiene:

$$c_1 + 2c_2t + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n+1)c_{n+1} - c_{n-2}]\, t^n = 0 \qquad (*)$$

De (*) vemos que $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_{n+1} = \frac{c_{n-2}}{n+1},\ n = 2,3,4,\cdots \end{cases}$. De esta relación encontramos que

$$\begin{cases} c_1 = c_4 = c_7 = \cdots = c_{3k+1} = 0,\ k = 0,1,2,\cdots \\ c_2 = c_5 = c_8 = \cdots = c_{3k+2} = 0,\ k = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

Así también

$$\begin{cases} c_3 = \frac{c_0}{3} \\ c_6 = \frac{c_3}{6} = \frac{c_0}{6\cdot 3} = \frac{c_0}{3^2\cdot 2!} \\ c_9 = \frac{c_6}{9} = \frac{c_0}{9\cdot 6\cdot 3} = \frac{c_0}{3^3\cdot 3!} \\ c_{12} = \frac{c_9}{12} = \frac{c_0}{12\cdot 9\cdot 6\cdot 3} = \frac{c_0}{3^4\cdot 4!} \\ \vdots \\ c_{3n} = \frac{c_0}{3^n\cdot n!},\ n = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^n = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + c_5t^5 + \cdots \\ &= c_0 + c_3t^3 + c_6t^6 + c_9t^9 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0t^{3n}}{3^n\cdot n!} = c_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{t^3}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Entonces la solución de la ecuación diferencial es $x(t) = c_0e^{\frac{t^3}{3}}$. ∎

■ **Ejemplo 4.6** Resuelva: $\begin{cases} x''(t)+x(t)=0 \\ x(0)=0 \\ x'(0)=1 \end{cases}$.

<u>Resolución</u>

Suponer que la solución del problema es:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

aplicando las condición inicial $x(0)=0$ vemos que

$$c_0 = 0$$

asimismo también vemos que

$$x'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \cdots$$

que con la condición inicial $x'(0)=0$ se obtiene

$$c_1 = 1$$

Poniendo $x(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ en la ecuación diferencial se tiene:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0$$

Uniformizando el exponente de t, la ecuación se convierte en:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 0$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n\right] t^n = 0$$

de esto último se obtiene la fórmula de recurrencia

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{4.23}$$

Usando esta fórmula, calculamos los coeficientes de la serie para los primeros valores de n, así vemos que:

$$
\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{c_0}{2\cdot 1} = 0\\
c_3 &= -\frac{c_1}{3\cdot 2} = -\frac{1}{3!}\\
c_4 &= -\frac{c_2}{4\cdot 3} = 0\\
c_5 &= -\frac{c_3}{5\cdot 4} = \frac{1}{5!}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

De esta manera podemos ver que

$$c_{2n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

y

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Ahora como

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 + \cdots$$

entonces

$$x(t) = 0 + c_1 t + 0 + c_3 t^3 + 0 + c_5 t^5 + \cdots$$

luego

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} t^{2n+1}\\
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}\\
x(t) &= \operatorname{sen}(t)
\end{aligned}
$$

■

Con esto se demuestra que los métodos clásicos de resolución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden son equivalentes con el método de series de potencias. La ecuación diferencial que hemos resuelto aquí es de coeficientes constantes.

■ **Ejemplo 4.7** Resuelva: $\begin{cases} 3y''-y'+(x+1)y=1 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

<u>Resolución</u>

En este caso es fácil ver que $x_0=0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial por lo cual la solución es de la forma:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots \tag{4.24}$$

Aplicando las condiciones iniciales se obtiene que

$$c_0=c_1=0$$

Luego, poniendo la serie (4.24) en la ecuación diferencial vemos que

$$3\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)nc_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=1$$

entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty}3n(n-1)c_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nc^n=1$$

uniformizando exponentes se llega a la expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty}3(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=1$$

Uniformizando índices:

$$6c_2-c_1+c_0-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left[3(n+2)(n+1)c_{n+2}-(n+1)c_{n+1}+c_n+c_{n-1}\right]x^n=0$$

como $c_0=c_1=0$, entonces queda:

$$(6c_2-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[3(n+2)(n+1)c_{n+2}-(n+1)c_{n+1}+c_n+c_{n-1}\right]x^n=0$$

de esto último se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\begin{cases} c_2=\frac{1}{6} \\ 3(n+2)(n+1)c_{n+2}-(n+1)c_{n+1}+c_n+c_{n-1}=0, \;\; n=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

de esta fórmula vemos que

$$c_{n+2} = \frac{c_{n+1}}{3(n+2)} - \frac{c_n + c_{n-1}}{3(n+1)(n+2)}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Desarrollando para los primeros valores de n se tiene:

$$\begin{aligned}
c_3 &= \frac{c_2}{9} - \frac{c_1 + c_0}{3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{54} \\
c_4 &= \frac{c_3}{12} - \frac{c_2 + c_1}{36} = \frac{1}{54 \cdot 12} - \frac{1}{6 \cdot 36} = \frac{-1}{324} \\
c_5 &= \frac{c_4}{15} - \frac{c_3 + c_2}{60} = \frac{-1}{324 \cdot 15} - \frac{\frac{1}{54} + \frac{1}{6}}{60} = \frac{-4}{1215} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ponemos estos coeficientes en (4.24) y la solución del problema con sus primeros términos es:

$$y(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{54}x^3 - \frac{1}{324}x^4 - \frac{4}{1215}x^5 + \cdots$$

El comportamiento de esta solución alrededor de $x = 0$ se muestra en la figura 4.1 ■

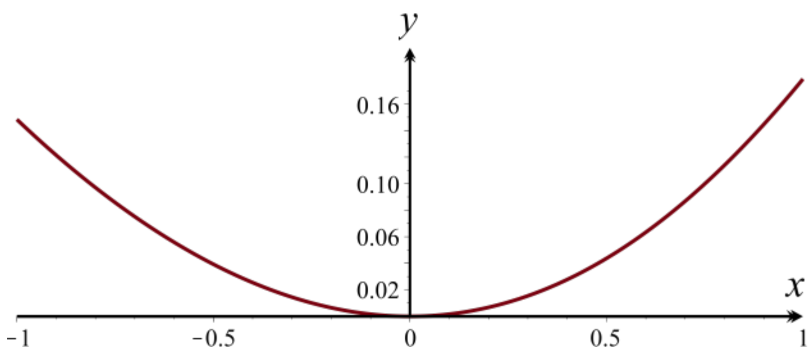


Figura 4.1: Comportamiento de la solución alrededor de $x = 0$.

■ **Ejemplo 4.8** Calcule la solución del problema: $\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$

Resolución

En este caso, la ecuación diferencial debería resolverse en serie de potencias alrededor de $x_0 = 1$ por ser punto ordinario y porque allí se dan las condiciones iniciales; sin embargo, evitaremos hacer esta labor resolviendo alrededor del 0, para lo cual se hace una traslación. Por eso, si hacemos $z = x - 1$ vemos que el problema se transforma de manera equivalente en:

$$\begin{cases} (z+1)y''(z) + y'(z) + (z+1)y(z) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \tag{4.25}$$

Como $z = 0$ es un punto ordinario, entonces la solución de (4.25) es de la forma:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \tag{4.26}$$

Reemplazamos esto en (4.25) y se tiene:

$$(z+1)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n z^{n-1} + (z+1)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = 0$$

Efectuamos los productos para obtener:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = 0$$

Uniformizamos exponentes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)c_{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)c_{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = 0$$

Desarrollamos para el índice $n = 0$ y se tiene:

$$2c_2 + c_1 + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)c_{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)c_{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n = 0$$

Juntamos en una sola serie y se obtiene:

$$2c_2 + c_1 + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)^2 c_{n+1} + c_n + c_{n-1}\right] z^n = 0$$

Para que esta igualdad sea verdadera, debe acontecer que

$$\begin{cases} 2c_2 + c_1 + c_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)^2 c_{n+1} + c_n + c_{n-1} = 0, \ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases} \tag{4.27}$$

Antes de empezar a procesar (4.27), aplicamos las condiciones iniciales. Puesto que

$$y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \ \text{ y } \ y(0) = 0$$

entonces $c_0 = 0$. Además

$$y'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n z^{n-1} = c_1 + 2c_2 z + 3c_2 z^2 + \cdots \ \text{ y } \ y'(0) = -1$$

entonces $c_1 = -1$. Usamos estos resultados en (4.27) y se tiene:

$$\begin{cases} c_2 = \frac{1}{2} \\ (n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)^2 c_{n+1} + c_n + c_{n-1} = 0, \ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases} \tag{4.28}$$

A continuación desarrollamos la fórmula de recurrencia[2] de (4.28) para obtener el valor de los coeficientes que siguen, así tenemos:

Para $n = 1$: $6c_3 + 4c_2 + c_1 + c_0 = 0$, entonces $c_3 = -\frac{1}{6}$.

Para $n = 2$: $12c_4 + 9c_3 + c_2 + c_1 = 0$, entonces $c_4 = \frac{1}{6}$.

Para $n = 3$: $20c_5 + 16c_4 + c_3 + c_2 = 0$, entonces $c_5 = -\frac{3}{20}$.

Ponemos estos primeros coeficientes en (4.26) y se obtiene que la solución con sus primeros términos de (4.25) está dada por:

$$y(z) = -z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 - \frac{3}{20}z^5 + \cdots$$

[2] Tenga en cuenta que ya conocemos $c_0 = 0$, $c_1 = -1$ y $c_2 = \frac{1}{2}$.

Ahora, para llegar a la solución del problema planteado, ponemos $z = x - 1$, y así la solución del problema es:

$$y(x) = 1 - x + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 - \frac{3}{20}(x-1)^5 + \cdots$$

El comportamiento de esta solución alrededor de $x = 1$ lo visualizamos en la figura 4.2 ■

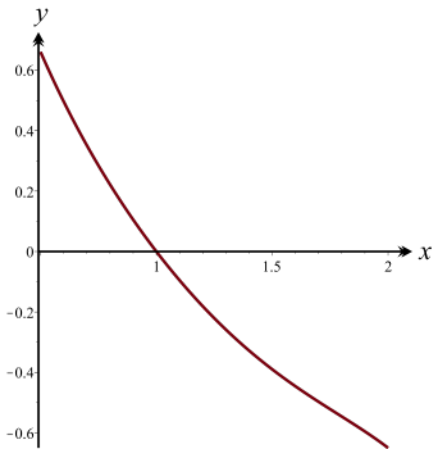


Figura 4.2: Comportamiento de la solución alrededor de $x = 1$.

■ **Ejemplo 4.9** Encuentre la solución general en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$. Obtenga la fórmula de recurrencia y el radio de convergencia de la solución:

$$(x^2 - 3)y'' + 2xy' = 0$$

Resolución

Para empezar tenemos que:

$$p(x) = \frac{2x}{x^2 - 3} \quad \text{y} \quad q(x) = 0$$

En este caso ambas funciones son analíticas[3] en $x_0 = 0$, por lo cual $x_0 = 0$ es un punto ordinario y de esta manera la solución de la ecuación diferencial está

[3]Es fácil ver que usando la serie $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $|x| < 1$, se obtiene que $p(x) = -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3^{n+1}}$. Es decir, $p(x)$ queda expresada como serie alrededor de $x_0 = 0$.

dada por:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots \tag{4.29}$$

además

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} \quad \text{y} \quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

Poniendo las series $y(x)$, $y'(x)$ y $y''(x)$ en la ecuación diferencial se tiene:

$$(x^2-3)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+2x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}=0$$

de donde es fácil llegar a la igualdad

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}3n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}2nc_nx^n=0$$

Aquí uniformizamos exponentes e índices para obtener:

$$-6c_2+(2c_1-18c_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)c_n-3(n+2)(n+1)c_{n+2}+2nc_n\right]x^n=0$$

Simplificando aun más se tiene:

$$-6c_2+(2c_1-18c_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n+1)c_n-3(n+2)(n+1)c_{n+2}\right]x^n=0 \tag{4.30}$$

Para que la igualdad en (4.30) sea verdadera debe acontecer que todos los coeficientes deben ser cero, es decir:

$$\begin{cases} c_2=0 \\ c_3=\frac{1}{9}c_1 \\ c_{n+2}=\frac{nc_n}{3(n+2)},\ n=2,3,\cdots \end{cases} \tag{4.31}$$

Desarrollando la fórmula de recurrencia en (4.31) se obtiene:

Para $n=2$: $c_4=\frac{2c_2}{3(4)}=0$.

Para $n=3$: $c_5=\frac{3c_3}{3(5)}=\frac{c_1}{5\cdot 3^2}$.

Para $n = 4$: $c_6 = \frac{4c_4}{3(6)} = 0$.

Para $n = 5$: $c_7 = \frac{5c_5}{3(7)} = \frac{c_1}{7 \cdot 3^3}$.

Para $n = 6$: $c_8 = \frac{6c_6}{3(8)} = 0$.

Para $n = 7$: $c_9 = \frac{7c_7}{3(9)} = \frac{c_1}{9 \cdot 3^4}$.

Para $n = 8$: $c_{10} = \frac{8c_8}{3(10)} = 0$.

Para $n = 9$: $c_{11} = \frac{9c_9}{3(11)} = \frac{c_1}{11 \cdot 3^5}$.

$\vdots$

De estos resultados se tiene que $c_{2n} = 0$ para $n \geq 1$ y $c_{2n+1} = \frac{c_1}{(2n+1)3^n}$, para todo $n \geq 0$. Luego en (4.29) se tiene:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \\ &= c_0 + \underbrace{\left(c_2 x^2 + c_4 x^4 + \cdots\right)}_{=0} + \left(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots\right) \\ &= c_0 + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)3^n} \\ &= c_0 + \sqrt{3} c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{3}^{2n+1}} \end{aligned}$$

La serie de potencias que aparece en el lado derecho es conocida[4], quedando así:

$$y(x) = c_0 + \sqrt{3} c_1 \operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

Teniendo en cuenta las singularidades de $p(x)$, el radio de convergencia de la serie es $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$. ■

■ **Ejemplo 4.10** La ecuación de Hermite[5] viene dada por $y'' - 2xy' + 2py = 0$, donde p es una constante.

[4]La serie de potencias alrededor de $x = 0$ de la función arcotangente hiperbólica su forma de serie es como sigue:

$$\operatorname{arctanh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

[5]Charles Hermite, nació en la ciudad francesa de Dieuze el 24 de diciembre de 1822. Fue profesor de Álgebra superior en la Facultad de Ciencias de París de 1871 a 1898, y profesor de Análisis en la École polytechnique de 1869 a 1878; siendo además miembro de la Academia

1. Resuelva la ecuación diferencial alrededor de $x_0 = 0$, e indique cada una de las soluciones linealmente independientes con sus primeros cuatro sumandos.
2. Es fácil darse cuenta que siendo p un entero no negativo, una de las soluciones linealmente independientes tiene un número finito de sumandos. Con esta observación determine las soluciones linealmente independientes cuando $p = 3$ y $p = 4$.

Resolución

En primer lugar es fácil ver que $x_0 = 0$ es un punto ordinario, por lo cual la solución de la ecuación diferencial es de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{4.32}$$

de donde

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Reemplazando las series $y(x)$, $y'(x)$ y $y''(x)$ en la ecuación diferencial, se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2p c_n x^n = 0$$

que uniformizando exponentes se convierte en

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2p c_n x^n = 0$$

finalmente, uniformizando índices se tiene:

$$2c_2 + 2pc_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} - 2n c_n + 2p c_n\right] x^n = 0$$

Luego igualando a cero cada uno de los coeficientes se obtiene:

$$c_2 = -pc_0 \quad \text{y} \quad c_{n+2} = \frac{2(n-p)c_n}{(n+2)(n+1)} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{4.33}$$

---

de Ciencias Francesa en 1856. Sus principales aportes los hizo en la teoría de números, formas cuadráticas, polinomios ortogonales y funciones elípticas; por eso, muchos resultados hacen referencia a él, así tenemos la interpolación polinómica de Hermite. Falleció el 14 de Enero de 1901 en París.

Desarrollando la fórmula recursiva de (4.33) para los primeros valores de n, se obtiene los coeficientes de la siguiente manera:

Para $n = 1$:

$$c_3 = -\frac{(p-1)c_1}{3} = -\frac{2(p-1)c_1}{3!}$$

Para $n = 2$:

$$c_4 = -\frac{(p-2)c_2}{2\cdot 3} = \frac{p(p-2)c_0}{2\cdot 3} = \frac{2^2 p(p-2)c_0}{4!}$$

Para $n = 3$:

$$c_5 = -\frac{(p-3)c_3}{5\cdot 2} = \frac{(p-1)(p-3)c_1}{5\cdot 3!} = \frac{2^2(p-1)(p-3)c_1}{5!}$$

Para $n = 4$:

$$c_6 = -\frac{(p-4)c_4}{5\cdot 3} = -\frac{2^2 p(p-2)(p-4)c_0}{3\cdot 5\cdot 4!} = -\frac{2^3 p(p-2)(p-4)c_0}{6!}$$

Para $n = 5$:

$$\begin{aligned} c_7 &= -\frac{(p-5)c_5}{7\cdot 3} = -\frac{2^2(p-1)(p-3)(p-5)c_1}{3\cdot 7\cdot 5!} \\ &= -\frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)c_1}{7!} \end{aligned}$$

$\vdots$

Como se observa, algunos coeficientes contienen a c_0 y otros a c_1.

1. Desarrollando (4.32) y agrupando los términos que contienen c_0 y c_1 respectivamente, se tiene que la solución general es:

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \cdots$$

y

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x - \frac{2(p-1)x^3}{3!} + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 \\ &\quad - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + \cdots \end{aligned}$$

2. Es fácil ver que si p_0 es cero o un entero positivo par, los primeros sumandos de $y_1(x)$ que no contienen el factor $(p-p_0)$ no son idénticos a cero, mientras que los restantes se anulan. Lo mismo ocurre en $y_2(x)$ cuando p_0 es un entero positivo impar. Con esta observación:
   a) Cuando $p=3$

$$y_1(x) = 1-3x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{30}x^6+\cdots$$
$$y_2(x) = x-\frac{2}{3}x^3$$

   b) Cuando $p=4$

$$y_1(x) = 1-4x^2+\frac{4}{3}x^4$$
$$y_2(x) = x-x^3+\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{210}x^7+\cdots$$

■

■ **Ejemplo 4.11** Resuelva alrededor de $x_0=0$ la ecuación diferencial

$$\left(x^2-1\right)y''-6xy'+10y=0 \tag{4.34}$$

Indique además el sistema fundamental de soluciones y el intervalo de convergencia.

Resolución

La ecuación equivalente a (4.34) está dada por

$$y''-\frac{6x}{x^2-1}y'+\frac{10}{x^2-1}y=0$$

donde $p(x)=-\frac{6x}{x^2-1}$ y $q(x)=\frac{10}{x^2-1}$ son analíticas en $x_0=0$, siendo así $x_0=0$ un punto ordinario de (4.34), por lo cual admite solución de la forma:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots \tag{4.35}$$

Reemplazando esta serie en (4.34) se tiene:

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-6x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+10\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

de donde

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 6nc_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 10c_nx^n = 0$$

uniformizando exponentes se tiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6nc_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 10c_nx^n = 0$$

de acá uniformizamos índices y vemos que

$$\begin{aligned} -2c_2 - 6c_3x \quad &- \quad 6c_1x + 10c_0 + 10c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n \\ &- \quad \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 6nc_nx^n + \sum_{n=2}^{\infty} 10c_nx^n = 0 \end{aligned}$$

luego simplificamos y queda:

$$10c_0 - 2c_2 + (4c_1 - 6c_3)x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n-5)(n-2)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2}]x^n = 0$$

de esto último se tiene la fórmula de recurrencia:

$$\begin{cases} c_2 = 5c_0 \\ c_3 = \frac{2}{3}c_1 \\ c_{n+2} = \frac{(n-5)(n-2)}{(n+2)(n+1)}c_n, \ n = 2, 3, 4, \cdots \end{cases} \tag{4.36}$$

En la fórmula de recurrencia determinamos los coeficientes que siguen, así se tiene:

Para $n = 2$: $c_4 = \frac{-3\cdot 0}{4\cdot 3}c_2 = 0$
Para $n = 3$: $c_5 = \frac{-2\cdot 1}{5\cdot 4}c_3 = -\frac{1}{10}c_3 = -\frac{1}{15}c_1$
Para $n = 4$: $c_6 = \frac{-1\cdot 2}{6\cdot 5}c_4 = 0$
Para $n = 5$: $c_7 = \frac{0\cdot 3}{7\cdot 6}c_5 = 0$
Para $n = 6$: $c_8 = \frac{1\cdot 4}{8\cdot 7}c_6 = 0$
Para $n = 7$: $c_9 = \frac{2\cdot 5}{9\cdot 8}c_7 = 0$
$\vdots$

Aquí vemos que $c_n = 0$, $\forall n \in \{4, 6, 7, 8, 9, \cdots\}$. Luego expandiendo (4.35) se tiene

$$y(x) = c_0 + c_1x + 5c_0x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + \cdots$$

que al usar los coeficientes obtenidos

$$y(x) = c_0 + c_1 x + 5c_0 x^2 + \frac{2}{3}c_1 x^3 + 0x^4 - \frac{1}{15}c_1 x^5 + 0x^6 + 0x^7 + 0x^8 + \cdots$$

luego agrupando convenientemente la solución general de (4.34) es

$$y(x) = c_0\left(1+5x^2\right) + c_1\left(x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{15}x^5\right)$$

En esto último podemos ver que $sfs = \left\{1+5x^2, x+\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{15}x^5\right\}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$.
■

■ **Ejemplo 4.12** 1. Aplicando la identidad (4.16), demuestre que

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} \tag{4.37}$$

2. Resuelva la ecuación diferencial

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0 \tag{4.38}$$

en serie de potencias alrededor del punto $x_0 = 0$, e indique además el intervalo de definición de su solución.
3. Aplicando (4.37), demuestre que la solución de la ecuación diferencial puede expresarse mediante:

$$y(x) = \frac{A}{(1-x^2)^2} + B\frac{x(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

<u>Resolución</u>

1. Si ponemos x^2 en lugar de x en la identidad (4.16), se obtiene:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}, \ \ |x|<1 \tag{4.39}$$

Luego desarrollando el producto se vemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x^2)^2} &= \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right) \\
&= \left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right)\left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right) \\
&= \left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right)+x^2\left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right) \\
&\quad +x^4\left(1+x^2+x^4+\cdots\right)+x^6\left(1+x^2+x^4+\cdots\right) \\
&\quad x^8\left(1+x^2+x^4+\cdots\right)+x^{10}\left(1+x^2+x^4+\cdots\right)+\cdots \\
&= \left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right)+\left(x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots\right) \\
&\quad +\left(x^4+x^6+x^8+\cdots\right)+\left(x^6+x^8+x^{10}+\cdots\right) \\
&\quad +\left(x^8+x^{10}+x^{12}+\cdots\right)+\left(x^{10}+x^{12}+x^{14}+\cdots\right) \\
&\quad +\cdots
\end{aligned}$$

Sumando términos semejantes de forma indefinida se obtiene:

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = 1+2x^2+3x^4+4x^6+5x^8+6x^{10}+\cdots$$

es decir[6]:

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}, \quad |x|<1$$

2. Para analizar los puntos regulares o singulares, llevamos (4.38) a su forma equivalente

$$y'' - \frac{6x}{1-x^2}y' - \frac{4}{1-x^2}y = 0$$

Aquí, podemos ver que $p(x) = -\frac{6x}{1-x^2}$ y $q(x) = -\frac{4}{1-x^2}$ no son analíticas en $x=\pm 1$, sin embargo, en $x_0 = 0$ sí lo son; es decir $x_0 = 0$ es un punto ordinario de (4.38), por tal motivo la ecuación diferencial admite una solución de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{4.40}$$

[6]También se obtiene lo mismo aplicando ítem 4.16 del teorema 4.2.1

Poniendo (4.40) en (4.38) se tiene

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 6x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Realizando los productos y llevando a cabo las simplificaciones respectivas se llega la expresión

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [-(n+4)(n+1)c_n + (n+2)(n+1)c_{n+2}]\, x^n = 0$$

Puesto que la igualdad es válida si, y solo si, los coeficientes son todos iguales a cero; se tiene que

$$-(n+4)(n+1)c_n + (n+2)(n+1)c_{n+2} = 0$$

de donde se llega a la fórmula de recurrencia

$$c_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}c_n,\ n = 0,1,2,3,\cdots \tag{4.41}$$

En seguida, desarrollamos (4.41) para los primeros valores de n.
Para $n = 0$: $c_2 = 2c_0$.

Para $n = 1$: $c_3 = \frac{5}{3}c_1$.

Para $n = 2$: $c_4 = \frac{6}{4}c_2 = 3c_0$.

Para $n = 3$: $c_5 = \frac{7}{5}c_3 = \frac{7}{3}c_1$.

Para $n = 4$: $c_6 = \frac{8}{6}c_4 = 4c_0$.

Para $n = 5$: $c_7 = \frac{9}{7}c_5 = \frac{9}{3}c_1$.

$\vdots$

Aplicando inducción se tiene una relación para el caso de coeficientes pares, y otra para los impares, así se tiene:

$$c_{2n} = (n+1)c_0 \quad \text{y} \quad c_{2n+1} = \frac{2n+3}{3}c_1 \tag{4.42}$$

Luego descomponiendo (4.40) en dos series, una de términos pares y otra de impares se tiene que la solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1}$$

Poniendo los coeficientes se tiene:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_0x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+3}{3}c_1x^{2n+1}$$

de donde

$$y(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+3}{3}x^{2n+1}$$

Puesto que los puntos singulares son -1 y 1, el intervalo de definición de la solución es $\langle -1, 1\rangle$.

3. Tomando en cuenta las identidades (4.37) y (4.39), vemos que la serie de la derecha en la solución obtenida se transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+3}{3}x^{2n+1} &= \frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+1)+1]x^{2n} \\
&= \frac{2}{3}x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} + \frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} \\
&= \frac{2x}{3}\frac{1}{(1-x^2)^2} + \frac{x}{3}\frac{1}{(1-x^2)} \\
&= \frac{x}{3}\left[\frac{2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{1-x^2}\right] \\
&= \frac{x}{3}\frac{3-x^2}{(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

Con este resultado concluimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} = \frac{1}{(1-x^2)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+3}{3}x^{2n+1} = \frac{x}{3}\frac{3-x^2}{(1-x^2)^2}$$

Luego, si tomamos $A = c_0$ y $B = \frac{c_1}{3}$, la solución de la ecuación diferencial puede escribirse de manera compacta como

$$y(x) = \frac{A}{(1-x^2)^2} + Bx\frac{3-x^2}{(1-x^2)^2}$$

■

■ **Ejemplo 4.13** Resuelva alrededor de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial

$$y'' - 2x^2y' - 6xy = 0 \tag{4.43}$$

y encuentre el intervalo máximo de definición de su solución.

Resolución

Acá es fácil ver que $x_0 = 0$ es un punto ordinario de (4.43), así se tiene que la solución de la ecuación diferencial es de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{4.44}$$

Ponemos (4.44) en (4.43) y se tiene lo siguiente:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 6x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

desarrollamos los productos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1} = 0$$

luego uniformizamos exponentes para obtener:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1)c_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6c_{n-1}x^n = 0$$

desarrollamos los primeros términos para uniformizar índices, teniendo así:

$$2c_2 + 6(c_3 - c_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2(n+2)c_{n-1}]x^n = 0$$

Ahora, para que esta igualdad sea válida, los coeficientes tienen que ser cero, así se tiene que

$$c_2 = 0, \;\; c_3 = c_0$$

y

$$c_{n+2} = \frac{2}{n+1} c_{n-1}, \; n = 2, 3, 4, \cdots \tag{4.45}$$

Desarrollando la fórmula de recurrencia (4.45) para los primeros valores de n se tiene:

Para $n = 2$: $c_4 = \frac{2}{3}c_1$.

Para $n = 3$: $c_5 = \frac{2}{4}c_2 = 0$.

Para $n = 4$: $c_6 = \frac{2}{5}c_3 = \frac{2}{5}c_0 = \frac{2^2}{2 \cdot 5}c_0$.

Para $n=5$: $c_7=\frac{2}{6}c_4=\frac{1}{3}\frac{2}{3}c_1=\frac{2}{3^2}c_1=\frac{2^2}{3^2\cdot 2!}c_1$.

Para $n=6$: $c_8=\frac{2}{7}c_5=0$.

Para $n=7$: $c_9=\frac{2}{8}c_6=\frac{1}{4}\frac{2}{5}c_0=\frac{1}{2\cdot 5}c_0=\frac{2^3}{2\cdot 5\cdot 8}c_0$.

Para $n=8$: $c_{10}=\frac{2}{9}c_7=\frac{2}{9}\frac{2}{3^2}c_1=\frac{2^2}{3^4}c_1=\frac{2^3}{3^3\cdot 3!}c_1$.

Para $n=9$: $c_{11}=\frac{2}{10}c_8=0$.

Para $n=10$: $c_{12}=\frac{2}{11}c_9=\frac{2}{11}\frac{1}{2\cdot 5}c_0=\frac{1}{5\cdot 11}c_0=\frac{2^4}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}c_0$.

Para $n=11$: $c_{13}=\frac{2}{12}c_{10}=\frac{1}{6}\frac{2^2}{3^4}c_1=\frac{2}{3^5}c_1=\frac{2^4}{3^4\cdot 4!}c_1$.

$\vdots$

Según esta información, los coeficientes se comportan como:

$$c_{3n-1}=0, \quad c_{3n}=\frac{2^n}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}c_0, \quad c_{3n+1}=\frac{2^n}{3^n\cdot n!}c_1,\ \forall n\geq 1 \quad (4.46)$$

Ahora, si expandimos (4.44) se tiene:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+c_7x^7+\cdots \\ &= \Big(c_0+c_3x^3+c_6x^6+c_9x^9+\cdots\Big)+\big(c_1x+c_4x^4+c_7x^7+c_{10}x^{10}+\cdots\big) \\ &\quad +\Big(c_2x^2+c_5x^5+c_8x^8+c_{11}x^{11}+\cdots\Big) \\ &= \left(c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_{3n}x^{3n}\right)+\left(c_1x+\sum_{n=1}^{\infty}c_{3n+1}x^{3n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}c_{3n-1}x^{3n-1} \end{aligned}$$

usando las fórmulas de recurrencia de (4.46) nos queda lo siguiente:

$$y(x)=\left(c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}c_0x^{3n}\right)+\left(c_1x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n\cdot n!}c_1x^{3n+1}\right)$$

de donde se tiene que:

$$y(x)=c_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}x^{3n}\right)+c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n\cdot n!}x^{3n+1} \qquad (4.47)$$

Pero transformando la serie de la derecha según la serie de la exponencial e^x, vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n\cdot n!}x^{3n+1} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n\cdot n!}x^{3n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{2x^3}{3}\right)^n\\ &= e^{\frac{2}{3}x^3}\end{aligned}$$

Luego se tiene finalmente que la solución (4.47) se transforma en:

$$y(x)=c_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}x^{3n}\right)+c_1e^{\frac{2}{3}x^3}$$

El radio de convergencia de la serie es $R=+\infty$, por lo que la serie converge en todo $\mathbb{R}$. ∎

▪ **Ejemplo 4.14** Resuelva la ecuación diferencial:

$$y''+xy'+y=0 \tag{4.48}$$

alrededor de $x_0=0$.

<u>Resolución</u>

Es fácil ver que $x_0=0$ es un punto ordinario de (4.48), por lo que la ecuación diferencial admite solución de la forma:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{4.49}$$

Ponemos la serie (4.49) en (4.48) y se obtiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

de donde:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

Ahora, si uniformizamos exponentes, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

luego uniformizamos índices y vemos que

$$(2c_2+c_0)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2}+(n+1)c_n]x^n=0 \tag{4.50}$$

Acá, la igualdad acontece si, y solo si, cada uno de los coeficientes en (4.50) es cero, es decir:

$$\begin{cases} 2c_2+c_0=0 \\ (n+2)(n+1)c_{n+2}+(n+1)c_n=0, \forall n=1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{4.51}$$

de (4.50) se tiene $c_2=-\frac{1}{2}c_0$ y

$$c_{n+2}=-\frac{c_n}{n+2},\ n=1,2,3,\cdots$$

Desarrollando esta fórmula de recurrencia podemos ver lo siguiente:

Para $n=1$, $c_3=-\frac{c_1}{3}=-\frac{2}{3\cdot 2}c_1=-\frac{2}{3!}$.

Para $n=2$, $c_4=-\frac{c_2}{4}=\frac{1}{4}\frac{1}{2}c_0=\frac{1}{4\cdot 2}c_0=\frac{1}{2^2\cdot 2!}c_0$.

Para $n=3$, $c_5=-\frac{c_3}{5}=\frac{1}{5}\frac{c_1}{3}=\frac{1}{5\cdot 3}c_1=\frac{4\cdot 2}{5!}c_1=\frac{2^2\cdot 2!}{5!}c_1$.

Para $n=4$, $c_6=-\frac{c_4}{6}=-\frac{1}{6}\frac{1}{4\cdot 2}c_0=-\frac{1}{6\cdot 4\cdot 2}c_0=-\frac{1}{2^3\cdot 3!}c_0$.

Para $n=5$, $c_7=-\frac{c_5}{7}=-\frac{1}{7}\frac{1}{5\cdot 3}c_1=-\frac{1}{7\cdot 5\cdot 3}c_1=-\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7!}c_1$.

Para $n=6$, $c_8=-\frac{c_6}{8}=\frac{1}{8}\frac{1}{6\cdot 4\cdot 2}c_0=\frac{1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}c_0=\frac{1}{2^4\cdot 4!}c_0$.

$\vdots$

Podemos ver que los coeficientes pares e impares se comportan de manera regular, así tenemos que

$$c_{2n+1}=\frac{(-1)^n 2^n\cdot n!c_1}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad c_{2n}=\frac{(-1)^n c_0}{2^n\cdot n!},\ n=1,2,3,\cdots \tag{4.52}$$

Si expandimos la serie en (4.49) vemos que:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\cdots \\ &= \left(c_0+c_2x^2+c_4x^4+\cdots\right)+\left(c_1x+c_3x^3+c_5x^5+\cdots\right) \\ &= c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}x^{2n}+c_1x+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n+1}x^{2n+1} \end{aligned}$$

Ahora, usando (4.52) se tiene:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0}{2^n \cdot n!} x^{2n} + c_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \cdot n! c_1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \cdot n!}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \cdot n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

o también[7]:

$$y(x) = c_0 e^{-\frac{x^2}{2}} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \cdot n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

■

■ **Ejemplo 4.15** Resuelva con serie de potencias el problema:

$$\begin{cases} y'' - e^x y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases} \tag{4.53}$$

Resolución

En este problema se nos da las condiciones iniciales en $x_0 = 0$, por esto debemos resolver en serie de potencias alrededor de dicho punto. Es fácil ver que 0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial, por lo que la solución es de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{4.54}$$

Si aplicamos la condición inicial $y(0) = 1$ en (4.54), entonces se obtiene $c_0 = 1$. Procedemos a derivar $y(x)$ y vemos que

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots$$

[7]Sabiendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, entonces

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

Luego de este resultado se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

luego aplicando la condición $y'(0) = 1$ se tiene $c_1 = 1$. Así tenemos que

$$c_0 = c_1 = 1$$

Para determinar $y(x)$, ponemos la serie de (4.54) en la ecuación diferencial de (4.53) y se tiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - e^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Asimismo, usamos el hecho de que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, luego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Para efectuar el producto de las series nos fijamos en el teorema 4.2.1 (ítem 4), de donde se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{(n-k)!} x^n = 0$$

Aquí factorizamos la serie y se llega a la expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{(n-k)!} \right] x^n = 0$$

En esta última expresión, la igualdad acontece si, y solo si:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{(n-k)!} = 0, \ n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

De donde

$$c_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{(n-k)!}$$

Desarrollamos esta fórmula de recurrencia para los primero valores de n, así vemos que:

Para $n = 0$, $c_2 = \frac{c_0}{2} = \frac{1}{2}$.

Para $n = 1$, $c_3 = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{1} \frac{c_k}{(1-k)!} = \frac{1}{6} [c_0 + c_1] = \frac{1}{3}$.

Para $n = 2$, $c_4 = \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{2}\frac{c_k}{(2-k)!} = \frac{1}{12}\left[\frac{c_0}{2} + c_1 + c_2\right] = \frac{1}{6}$.

$\vdots$

Ponemos los valores de estos coeficientes en (4.54) y se obtiene la solución de (4.53) con sus primeros cinco términos dada por

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + \cdots$$

cuya representación gráfica alrededor de $x = 0$ se muestra en la figura 4.3 ■

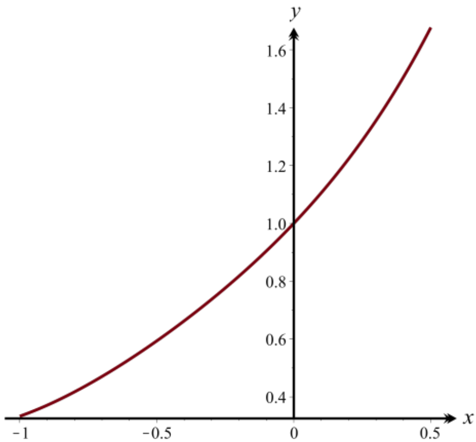


Figura 4.3: Comportamiento de la solución alrededor de $x = 0$.

4.4 Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales alrededor de un punto singular regular - método de Frobenius

Este método se aplica para resolver ecuaciones diferenciales usando series alrededor de un punto que no es ordinario.

Definición 4.4.1 Dada la ecuación diferencial

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = 0 \tag{4.55}$$

Decimos que $x = x_0$ es un punto singular de (4.55) si no es un punto ordinario.

La singularidad de $x = x_0$ la podemos ver desde dos puntos de vista, puede ser regular o irregular

Definición 4.4.2 Decimos que $x = x_0$ es un **punto singular regular** de (4.55), si las funciones $P(x) = (x - x_0)p(x)$ y $Q(x) = (x - x_0)q(x)$ son analíticas en $x = x_0$.

Otra forma de determinar si $x = x_0$ es un punto singular regular es si los límites

$$P_0 = \lim_{x\to x_0} P(x) \quad \text{y} \quad Q_0 = \lim_{x\to x_0} Q(x) \tag{4.56}$$

existen. En el caso de que $x = x_0$ sea un punto singular no regular, decimos que es irregular.

Teorema 4.4.1 — de Frobenius. Si $x = x_0$ es un punto singular regular de (4.55), entonces existe por lo menos una solución de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r} = c_0(x - x_0)^r + c_1(x - x_0)^{1+r} + \cdots \tag{4.57}$$

donde el número r es una constante por determinar. La serie (4.57) converge por lo menos en algún intervalo $\langle x_0, x_0 + R\rangle$. (R es el radio de convergencia)

Cuando se reemplaza la serie (4.57) en la ecuación diferencial, asumimos previamente que $c_0 \neq 0$, y el coeficiente del término con menor exponente igualado a cero nos da la **ecuación indicial**. Es fácil demostrar que dicha ecuación indicial está dada por:

$$r(r-1) + P_0 r + Q_0 = 0 \tag{4.58}$$

Sean r_1, r_2 las raíces de la ecuación indicial (4.58) tal que $r_1 \geq r_2$. Podemos identificar tres casos (según como sea su diferencia)

1. Si $r_1 \neq r_2$ y $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}^+$, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de (4.55) de la forma:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r_1}, \ c_0 \neq 0 \\ y_2(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}, \ b_0 \neq 0 \end{aligned} \tag{4.59}$$

2. Si $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}^+$, entonces (4.55) posee dos soluciones linealmente independientes de la forma:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r_1}, \ c_0 \neq 0 \\ y_2(x) &= C y_1(x) \ln(x - x_0) + \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r_2}, \ b_0 \neq 0 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Aquí C es una constante que se escoge de manera adecuada, en la mayoría de los casos ocurre que $C = 0$.

3. Si $r_1 = r_2$, entonces para (4.55) existen dos soluciones linealmente independientes de la forma:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r_1}, \ c_0 \neq 0 \\ y_2(x) &= y_1(x)\ln(x-x_0) + \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2}, \ b_0 \neq 0 \end{aligned} \tag{4.61}$$

En algunos casos cuando se obtiene que $y_1(x)$ es la serie de una función conocida, entonces para determinar la segunda solución, podemos intentar aplicando (2.6). Ilustraremos esto más adelante en algunos ejemplos.

■ **Ejemplo 4.16** Dada la ecuación

$$(x+2)x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$$

Analice el punto $x_0 = 0$, diga de qué tipo es, luego resuelva la ecuación diferencial mediante series, aplicando el tipo adecuado de serie en el punto x_0. (Nota: encuentre los cuatro primeros términos de la serie). ¿Qué opina de la convergencia de la serie?

<u>Resolución</u>

La ecuación diferencial es equivalente a escribir

$$y'' - \frac{1}{x(x+2)}y' + \frac{x+1}{x^2(x+2)}y = 0$$

Si hacemos

$$p(x) = -\frac{1}{x(x+2)}, \qquad q(x) = \frac{x+1}{x^2(x+2)}$$

tenemos que

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = -\frac{1}{2} = P_0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to 0} x^2q(x) = \frac{1}{2} = Q_0$$

Así se tiene que $x_0 = 0$ es un punto singular regular, luego la ecuación diferencial tiene solución en serie de Frobenius[8] de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r}$$

Con los valores de P_0 y Q_0, la ecuación indicial será:

$$r(r-1) - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} = 0$$

cuyas raíces son: $r = 1$, $r = \frac{1}{2}$ (donde $1 - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$). De esta manera la soluciones linealmente independientes son:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \qquad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\frac{1}{2}}$$

Para $r = 1$, ponemos $y_1(x)$ en la ecuación diferencial y se obtiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)na_n x^{n+1} \quad &- \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1} \\ &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0\end{aligned}$$

Procediendo a operar con los índices se tiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n-1)(n-2)+1]a_{n-2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}[2n(n-1)-n+1]a_{n-1}x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n^2-3n+3)a_{n-2} + (2n-1)(n-1)a_{n-1}]x^n = 0$$

Entonces:

$$(n^2-3n+3)a_{n-2} + (2n-1)(n-1)a_{n-1} = 0$$

[8]Ferdinand Georg Frobenius, nació en Berlín el 26 de Octubre de 1849, realizó sus estudios superiores de Matemática en la Universidad Humboldt de Berlín de donde egresó el año 1870, siendo sus principales aportes en el área de ecuaciones diferenciales y teoría de grupos. Respecto del área de ecuaciones diferenciales, se ocupó de desarrollar métodos para su solución, siendo parte de su investigación en su trabajo de tesis que estuvo dirigido por Karl Weierstrass. En lo que respecta a teoría de grupos, se destaca la demostración de los Teoremas de Sylow mediante grupos abstractos, y la creación de la teoría de los caracteres de grupo y de las representaciones de grupos.

Trabajó varios años en el Polytechnicum de Zurich hasta 1893, año que regresó a Berlín, siendo elegido miembro de la Academia de Ciencias Prusiana. Falleció el 3 de agosto 1917, dejando para la posteridad la ley de reciprocidad de Frobenius y los grupos de Frobenius.

de donde se obtiene la fórmula de recurrencia:

$$a_{n-1} = -\frac{n^2-3n+3}{(2n-1)(n-1)}a_{n-2}, \ \ n = 2,3,\cdots \tag{4.62}$$

Desarrollamos (4.62) para los primero valores de n y se tiene:

Para $n = 2$: $a_1 = -\frac{1}{3}a_0$.

Para $n = 3$: $a_2 = \frac{1}{10}a_0$.

Para $n = 4$: $a_3 = -\frac{1}{30}a_0$.

De esta manera se obtiene la primera solución:

$$y_1(x) = x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{30}x^4 + \cdots$$

Para $r = \frac{1}{2}$, ponemos la serie $y_2(x)$ en la ecuación diferencial y se obtiene la fórmula de recurrencia:

$$2n\left(n-\frac{1}{2}\right)a_n + \left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)+1\right]a_{n-1} = 0, \ n = 1,2,3,\cdots$$

Dando valores a n, a partir de esta fórmula de recurrencia se obtiene:

$$y_2(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{4}\sqrt{x^3} + \frac{7}{32}\sqrt{x^7} - \frac{133}{1920}\sqrt{x^9} + \cdots$$

De esta manera la solución de la ecuación diferencial con sus primeros términos[9] es:

$$\begin{aligned} y(x) = \quad & c_1\left(x - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{10}x^3 - \tfrac{1}{30}x^4 + \cdots\right) \\ & +c_2\left(\sqrt{x} - \tfrac{3}{4}\sqrt{x^3} + \tfrac{7}{32}\sqrt{x^7} - \tfrac{133}{1920}\sqrt{x^9} + \cdots\right) \end{aligned}$$

■

En este ejemplo hemos procedido a encontrar las soluciones de manera independiente, por eso hay dos fórmulas de recurrencia, sin embargo, pudo haberse resuelto para una sola serie, a partir de la cual se obtenía la ecuación indicial y una sola fórmula de recurrencia, en la cual usando las raíces de la ecuación indicial, se obtenía los coeficientes de las series y_1 y y_2.

[9]Por la convergencia de la serie de potencias, se tiene que los primeros sumandos de la serie, son los más significativos.

■ **Ejemplo 4.17** Resuelva en torno de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial:

$$2xy'' + 5y' + xy = 0 \tag{4.63}$$

<u>Resolución</u>

En este caso tenemos que

$$p(x) = \frac{5}{2x} \quad \text{y} \quad q(x) = \frac{1}{2} \tag{4.64}$$

De esta manera x_0 es un punto singular, pero las funciones

$$xp(x) = \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad x^2 q(x) = \frac{x^2}{2} \tag{4.65}$$

son analíticas en $x_0 = 0$. Por lo tanto $x_0 = 0$ es un punto singular regular con [10] $P_0 = \frac{5}{2}$ y $Q_0 = 0$, con los cuales se obtiene la ecuación indicial[11]: $r^2 + \frac{3}{2}r = 0$, cuyas raíces son: $r_1 = 0$ y $r_2 = -\frac{3}{2}$. Puesto que la solución de la ecuación diferencial es una serie de tipo Frobenius

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r},\ c_0 \neq 0 \tag{4.66}$$

Poniendo (4.66) en (4.63) se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 5c_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

uniformizamos exponentes

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)(2n+2r+5)c_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^{n+r} = 0$$

luego uniformizamos índices y se obtiene:

$$\begin{aligned} & r(2r+3)c_0x^{r-1} + (r+1)(2r+5)c_1x^r \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r+1)(2n+2r+5)c_{n+1} + c_{n-1}\right]x^{n+r} = 0,\ \ c_0 \neq 0 \end{aligned}$$

[10]Donde

$$P_0 = \lim_{x \to 0} xp(x) = \frac{5}{2}$$

y

$$Q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x) = 0$$

[11]Recuerde que la ecuación indicial es: $r(r-1) + P_0 r + Q_0 = 0$. Asimismo, tenga en cuenta que la ecuación indicial también la obtendremos a partir de la serie.

donde la igualdad es válida si, y solo si, todos los coeficientes son cero, es decir:

$$\begin{cases} r(2r+3)c_0 = 0, \;\; c_0 \neq 0 \text{ (ecuación indicial)} \\ \\ (r+1)(2r+5)c_1 = 0 \\ \\ (n+r+1)(2n+2r+5)c_{n+1} + c_{n-1} = 0, \; n = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{4.67}$$

Resolviendo la ecuación indicial[12] en (4.67) se tiene: $r_1 = 0$ y $r_2 = -\frac{3}{2}$, de donde vemos que $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$. Además, con estas raíces también se obtiene $c_1 = 0$. En seguida, resolvemos para cada una de las raíces de la ecuación indicial.

1. Si ponemos $r_1 = 0$, en la fórmula de recurrencia de (4.67), entonces se obtiene:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_{n+1} = \frac{-c_{n-1}}{(n+1)(2n+5)}, \;\; n = 1,2,\cdots \end{cases}$$

   Trabajando para cada valor de n y asumiendo que $c_0 = 1$ se tiene lo siguiente:

   Para $n = 1$: $c_2 = -\frac{1}{2\cdot 7}$.

   Para $n = 2$: $c_3 = 0$

   Para $n = 3$: $c_4 = -\frac{c_2}{4\cdot 11} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 7\cdot 11}$.

   Para $n = 4$: $c_5 = 0$

   Para $n = 5$: $c_6 = -\frac{c_4}{6\cdot 15} = -\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 11\cdot 15}$.

   Para $n = 6$: $c_7 = 0$.

   Para $n = 7$: $c_8 = -\frac{c_6}{8\cdot 19} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdot 19} = \frac{1}{2^4\cdot 4!\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdot 19}$.
   Generalizando se tiene:

$$c_{2n-1} = 0 \quad \text{y} \quad c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n! \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4n+3)}, \;\; n = 1,2,\cdots$$

[12] Observe, que esta ecuación es la misma ecuación indicial que se obtuvo al inicio de la resolución del problema.

Luego la primera solución está dada por

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4n+3)}$$

2. Si ponemos $r_2 = -\frac{3}{2}$ en (4.67), entonces se tiene:

$$c_1 = 0 \text{ y } c_{n+1} = -\frac{c_{n-1}}{(n+1)(2n-1)}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Desarrollando esto para cada valor de n vemos que:

Para $n = 1$: $c_2 = -\frac{1}{1 \cdot 2}$.

Para $n = 2$: $c_3 = 0$.

Para $n = 3$: $c_4 = -\frac{c_2}{5\dot{4}} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1}$.

Para $n = 4$: $c_5 = 0$.

Para $n = 5$: $c_6 = -\frac{c_4}{6 \cdot 9} = -\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9}$.

Para $n = 6$: $c_7 = 0$.

Para $n = 7$: $c_8 = -\frac{c_6}{8 \cdot 13} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13} = \frac{1}{2^4 \cdot 4! \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}$.

A partir de esta información, se induce que:

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n! \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$$

y así, la segunda solución es:

$$y_2(x) = x^{-\frac{3}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)} \right]$$

Finalmente la solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$\begin{aligned} y(x) = \quad & a \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4n+3)} \right] \\ & + b x^{-\frac{3}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)} \right] \end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.18 Resuelva en torno de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial:

$$xy'' + 2y' - xy = 0$$

<u>Resolución</u>

En este caso se tiene que $p(x) = \frac{2}{x}$ y $q(x) = -1$. Es fácil ver que $xp(x) = 2$ y $x^2q(x) = -x^2$ son analíticas en $x_0 = 0$. Luego la solución es del tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \tag{4.68}$$

Reemplazando esta serie en la ecuación diferencial se tiene:

$$x\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r-1)(n+r)x^{n+r-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r-1} - x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

luego uniformizamos exponentes e índices para obtener:

$$\begin{aligned} c_0 r(r+1)x^{r-1} \quad &+ \quad c_1(r+1)(r+2)x^r \\ &+ \quad \sum_{n=1}^{\infty} [c_{n+1}(n+r+1)(n+r+2) - c_{n-1}]x^{n+r} = 0, \;\; c_0 \neq 0 \end{aligned}$$

Aquí igualamos los coeficientes a cero y se obtiene las ecuaciones:

$$\begin{cases} r(r+1) = 0 \quad \text{ecuación indicial} \\ c_1(r+1)(r+2) = 0 \\ c_{n+1} = \frac{c_{n-1}}{(n+r+1)(n+r+2)}, \;\; n = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{4.69}$$

Si resolvemos la ecuación indicial de (4.69), se obtiene las raíces: $r_1 = 0$, $r_2 = -1$, donde es fácil ver que $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$.

Si ponemos $r = r_1 = 0$, en (4.69) se tiene:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_{n+1} = \frac{c_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \;\; n = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{4.70}$$

Desarrollando (4.70) para los primeros valores de n y tomando $c_0 = 1$ se tiene:

Cuando $n = 1$: $c_2 = \frac{c_0}{2\cdot 3} = \frac{1}{3!}$

Cuando $n = 2$: $c_3 = 0$

Cuando $n=3$: $c_4 = \frac{c_2}{4\cdot 5} = \frac{1}{5!}$

Cuando $n=4$: $c_5 = 0$

Cuando $n=5$: $c_6 = \frac{c_4}{6\cdot 7} = \frac{1}{7!}$

Procediendo de forma inductiva vemos que

$$c_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad c_{2n-1} = 0, \;\; n = 1, 2, \cdots$$

Luego la primera solución linealmente independiente es

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n} \end{aligned}$$

Ponemos el coeficiente c_{2n} en esta serie y nos queda la primera solución[13]:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{x}\operatorname{senh}(x)$$

Puesto que la primera solución es la serie de una función conocida, entonces para encontrar la segunda solución, aplicamos la fórmula de Liouville (2.6), según la cual $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx$. Desarrollando esto se tiene:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{1}{x}\operatorname{senh}(x)\int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{\left(\frac{\operatorname{senh}(x)}{x}\right)^2}dx \\ &= \frac{\operatorname{senh}(x)}{x}\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2(x)}dx \\ &= \frac{\cosh(x)}{x} \end{aligned}$$

[13]La expresión de las funciones seno y coseno hiperbólicas en forma de serie es la siguiente:

$$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Por lo tanto, se tiene que el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial es:

$$sfs = \left\{ \frac{\cosh(x)}{x}, \frac{\operatorname{senh}(x)}{x} \right\}$$

y con esto la solución general está dada por:

$$y(x) = a\frac{\cosh(x)}{x} + b\frac{\operatorname{senh}(x)}{x}$$

■

■ **Ejemplo 4.19** En la ecuación de Bessel[14] de orden $\frac{1}{2}$:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \ \ x > 0 \tag{4.71}$$

1. Determine el sistema fundamental de soluciones aplicando el método de Frobenius.
2. Determine la solución general.

<u>Resolución</u>

1. La ecuación diferencial (4.71) es equivalente a la ecuación:

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} y' + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)}_{q(x)} y = 0, \ \ x > 0$$

En este caso es fácil ver que $x_0 = 0$ es un punto singular regular, por lo que la resolución de la ecuación diferencial es con el método de Frobenius. En efecto, suponer que la solución es de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

reemplazando esta serie en la ecuación diferencial (4.71) se obtiene:

$$x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}\right) + x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}\right)$$
$$+ \quad \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r} = 0$$

[14] Una ecuación de Bessel de orden v es de la forma: $x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$.

que al hacer las operaciones con la simplificación respectiva, resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{4}x^{n+r} = 0$$

Aquí procedemos a uniformizar exponentes e índices, quedando la expresión:

$$\left(r^2-\frac{1}{4}\right)a_0x^r \quad + \quad \left[(r+1)^2-\frac{1}{4}\right]a_1x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left((n+r)^2-\frac{1}{4}\right)a_n + a_{n-2}\right]x^{n+r} = 0,\ a_0 \neq 0$$

Ahora, igualando a cero cada uno de los coeficientes se tiene:

$$\begin{cases} r^2-\frac{1}{4}=0 \text{ (ecuación indicial)} \\ \left[(r+1)^2-\frac{1}{4}\right]a_1 = 0 \\ \left[(n+r)^2-\frac{1}{4}\right]a_n + a_{n-2} = 0,\ n=2,3,4,\cdots \end{cases} \tag{4.72}$$

Resolviendo la ecuación indicial de (4.72), se obtiene las raíces $r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=-\frac{1}{2}$ (donde $r_1-r_2\in\mathbb{Z}$).
A continuación procedemos a determinar la primera solución $y_1(x)$. En efecto, si ponemos $r_1=\frac{1}{2}$ en (4.72) entonces se tiene:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)},\ n=2,3,4,\cdots \end{cases}$$

Desarrollando esta fórmula recursiva para los primero valores de n, encontramos los siguiente:

Para $n=2$: $a_2=-\frac{a_0}{3\cdot 2}=-\frac{a_0}{3!}$.

Para $n=3$: $a_3=-\frac{a_1}{4\cdot 3}=0$.

Para $n=4$: $a_4=-\frac{a_2}{5\cdot 4}=\frac{a_0}{5!}$.

Para $n=5$: $a_5=-\frac{a_3}{6\cdot 5}=0$.

Para $n=6$: $a_6=-\frac{a_4}{7\cdot 6}=-\frac{a_0}{7!}$.

Para $n = 7$: $a_7 = -\frac{a_5}{8\cdot 7} = 0$.

Aplicando inducción, vemos que todos los coeficientes están dados por:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad a_{2n-1} = 0, \;\; n = 1,2,3,\cdots$$

luego, determinados estos coeficientes, la primera solución se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots\right) \\
&= x^{\frac{1}{2}}\left(a_0 - \frac{a_0}{3!}x^2 + \frac{a_0}{5!}x^4 - \frac{a_0}{7!}x^6 + \cdots\right), \text{ asumiendo } a_0 = 1 \\
&= x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots\right) \\
&= x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

Por lo tanto la primera solución es:

$$y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen} x$$

Como la primera solución es la serie de una función conocida, entonces para determinar la segunda solución $y_2(x)$ omitimos el proceso de resolución con serie y aplicamos directamente la fórmula (2.6). En efecto:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx = \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}(x)\int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}(x)\int \csc^2(x)dx = -\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}(x)\cot(x) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x}}\cos(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la segunda solución[15] es:

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos x$$

[15] Puede o no usar el signo (-)

2. Como ya disponemos de $y_1(x)$ y $y_2(x)$, entonces el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial es:

$$\text{sfs} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} x \right\}$$

y con esto la solución general

$$y(x) = c_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$$

■

■ **Ejemplo 4.20** Aplicando el método de Frobenius resuelva la ecuación diferencial:

$$x(1-x)y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{4.73}$$

alrededor de $x_0 = 0$

Resolución

Aquí se tiene que la ecuación (4.73) es equivalente a

$$y'' - \frac{3}{x(1-x)} y' + \frac{2}{x(1-x)} y = 0$$

donde $p(x) = -\frac{3}{x(1-x)}$ y $q(x) = \frac{2}{x(1-x)}$. Es fácil ver que $x_0 = 0$ no es punto ordinario. Como $xp(x) = -\frac{3}{1-x}$ y $x^2 q(x) = \frac{2x}{1-x}$ son analíticas en dicho punto, entonces x_0 es un punto singular regular. Además $\lim_{x\to 0} xp(x) = -3$ y $\lim_{x\to} x^2 q(x) = 0$, entonces la ecuación indicial es $r(r-1) - 3r = 0$, de donde $r(r-4) = 0$, cuyas raíces son $r = r_1 = 4$ y $r = r_2 = 0$. Puesto que se trata de un punto singular regular, entonces la solución de la ecuación diferencial está dada por

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \tag{4.74}$$

Reemplazamos (4.74) en la ecuación (4.73) y se obtiene:

$$x(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r}$$
$$- \quad 3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

Aquí uniformizamos exponentes para obtener:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-1}^{\infty} c_{n+1}(n+r+1)(n+r)x^{n+r} \quad &- \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} \\ &- \quad \sum_{n=-1}^{\infty} 3c_{n+1}(n+r+1)x^{n+r} \\ &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+r} = 0\end{aligned}$$

luego uniformizamos índices y se llega a la expresión:

$$\begin{aligned}c_0r(r-1)x^{r-1} - 3c_0rx^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [c_{n+1}(n+r+1)(n+r)]\, x^{n+r} \\ - \sum_{n=0}^{\infty} [c_n(n+r)(n+r-1) - 3c_{n+1}(n+r+1) + 2c_n]\, x^{n+r} = 0\end{aligned}$$

que al simplificarla un poco más se obtiene:

$$\begin{aligned}c_0r(r-4)x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r-3)(n+r+1)c_{n+1} - (n+r-2)(n+r+1)c_n]\, x^{n+r} \\ = 0\end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes se tiene:

$$\begin{cases} c_0r(r-4) = 0, \;\; c_0 \neq 0 \;\; \text{(ecuación indicial)} \\ c_{n+1} = \frac{n+r-2}{n+r-3} c_n, \;\; n \geq 0 \end{cases} \tag{4.75}$$

Resolvemos la ecuación indicial de (4.75) y se obtiene las raíces $r = r_1 = 4$ y $r = r_2 = 0$, donde $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}^+$. Ahora, si ponemos $r_1 = 4$ en (4.75) se obtiene la fórmula de recurrencia:

$$c_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} c_n, \;\; n \geq 0$$

Desarrollando esta fórmula para los primeros valores de n vemos que:

Cuando $n = 0$, $c_1 = 2c_0$

Cuando $n = 1$, $c_2 = 3c_0$

Cuando $n = 2$, $c_3 = 4c_0$

Cuando $n = 3$, $c_4 = 5c_0$

$\vdots$

De esta manera, por inducción se obtiene la relación[16]

$$c_n = n+1, \text{ para } n = 0,1,2,3,\cdots$$

reemplazando en (4.74) se tiene que la primera solución de (4.73) está dada por

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+4} = x^4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \tag{4.76}$$

Pero si nos fijamos en (4.16), vemos que para $|x| < 1$ se tiene $\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n$, cuya derivada es: $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^\infty nx^{n-1} = \sum_{n=0}^\infty (n+1)x^n$. Con este resultado en (4.76), la primera solución de 4.73 es:

$$y_1(x) = \frac{x^4}{(1-x)^2}, \ 0 < x < 1$$

Para determinar la segunda solución ya no procedemos con series, sino mas bien con la fórmula de Liouville[17] (2.6), teniendo así:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} = y_1(x)\int \frac{\frac{x^3}{(x-1)^3}}{\left[\frac{x^4}{(1-x)^2}\right]^2}dx = y_1(x)\int \frac{x-1}{x^5}dx \\ &= \frac{x^4}{(1-x)^2}\left(\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{3x^3}\right) = \frac{3-4x}{12(1-x)^2} \end{aligned}$$

De esta manera el sistema fundamental de soluciones es sfs $= \left\{\frac{x^4}{(1-x)^2}, \frac{3-4x}{(1-x)^2}\right\}$ con lo cual la solución general de (4.73) está dada por

$$y(x) = a\frac{x^4}{(1-x)^2} + b\frac{3-4x}{(1-x)^2}, \ 0 < x < 1$$

■

[16] en este caso asumimos que $c_0 = 1$.

[17] Según esta fórmula se tiene que la segunda solución está dada por

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx$$

Donde $\int p(x)dx = \int \frac{-3}{x(1-x)}dx = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^3$ y de esta manera $e^{-\int p(x)dx} = \frac{x^3}{(x-1)^3}$

■ **Ejemplo 4.21** Aplicando Frobenius determine la solución de la ecuación diferencial:

$$\left(x^2-x\right)y''+(3x-1)y'+y=0 \tag{4.77}$$

alrededor de $x_0=0$.

<u>Resolución</u>

Si dividimos por $\left(x^2-x\right)$, se tiene que (4.77) es equivalente a

$$y''+\frac{3x-1}{x(x-1)}y'+\frac{y}{x(x-1)}=0$$

donde $p(x)=\frac{3x-1}{x(x-1)}$ y $q(x)=\frac{1}{x(x-1)}$. Es fácil ver que $x_0=0$ es un punto singular regular[18]. Además, $\lim_{x\to 0} xp(x)=1$ y $\lim_{x\to 0} x^2q(x)=0$, con lo cual se tiene la ecuación indicial $r(r-1)+r=0$ que es equivalente a $r^2=0$, y así se tiene $r=r_1=r_2=0$. Como el punto $x_0=0$ es singular regular, entonces la solución de la ecuación diferencial es de la forma:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} \tag{4.78}$$

Si ponemos 4.78 en (4.77), entonces se tiene

$$(x^2-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}+(3x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r+2)+1\right]c_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2c_nx^{n+r-1}=0$$

aquí, uniformizando exponentes e índices se llega a la expresión:

$$-r^2c_0x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r+2)+1\right]c_n-(n+r+1)^2c_{n+1}\right\}x^{n+r}=0$$

Ahora, para que la igualdad sea válida, igualamos los coeficientes a cero y se obtiene[19]:

$$\begin{cases} -r^2c_0=0,\ c_0\neq 0 \ \text{(ecuación indicial)} \\ \\ c_{n+1}=\frac{(n+r)(n+r+2)+1}{(n+r+1)^2}c_n,\ n\geq 0 \end{cases} \tag{4.79}$$

[18] Pues $xp(x)=\frac{3x-1}{x-1}$ y $q(x)=\frac{x}{x-1}$ son analíticas en $x_0=0$

[19] Recuerde que esto es por la independencia lineal de $\left\{\cdots,\frac{1}{x^2},\frac{1}{x},1,x,x^2,x^3,\cdots\right\}$.

De la resolución de la ecuación indicial se obtiene[20] $r=0$, poniendo este valor en la fórmula de recurrencia de (4.79) vemos que esta se convierte en:

$$c_{n+1}=c_n,\ \ n\geq 0$$

Así para $n=0$ se tiene $c_1=c_0$, para $n=1$ se tiene $c_2=c_1=c_0$, para $n=2$ se tiene $c_3=c_2=c_0,\cdots$. Y de esta manera $c_n=c_0$, para todo $n=1,2,3,\cdots$. Poniendo $c_0=1$, vemos que

$$c_n=1,\ n=0,1,2,3,\cdots$$

Luego poniendo estos resultados en (4.78), la primera solución está dada por

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ \ 0<x<1$$

En forma similar al ejemplo anterior, para determinar la segunda solución no aplicamos el método de serie, sino mas bien aplicamos la fórmula de Liouville (2.6)[21], en efecto, se tiene:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx=y_1(x)\int\frac{e^{-\int\frac{3x-1}{x(x-1)}dx}}{[y_1(x)]^2}dx\\
&= y_1(x)\int\frac{e^{-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)dx}}{[y_1(x)]^2}dx=y_1(x)\int\frac{1}{x}dx\\
&= \frac{\ln x}{1-x}
\end{aligned}$$

Así el sistema fundamental está dado por sfs $=\left\{\frac{1}{1-x},\frac{\ln x}{1-x}\right\}$, luego la solución de la (4.77) es

$$y(x)=\frac{a}{1-x}+b\frac{\ln x}{1-x},\ \ 0<x<1$$

■

■ **Ejemplo 4.22** Resuelva la ecuación diferencial

$$x(1-x)y''+2y'+2y=0 \tag{4.80}$$

en torno al punto $x_0=0$, identifique además el sistema fundamental de soluciones.

---

[20] Usted puede ver que es el mismo resultado que se obtuvo al inicio de la resolución del problema.

[21] Es más sencillo que hacerlo con el método de Frobenius, pues la primera solución es la serie de una función conocida.

Resolución

Aquí se tiene que (4.80) es equivalente a la ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{2}{x(1-x)}y' + \frac{2}{x(1-x)}y = 0 \tag{4.81}$$

donde $p(x) = \frac{2}{x(1-x)}$ y $q(x) = \frac{2}{x(1-x)}$. Se tiene que $x_0 = 0$ no es un punto ordinario sin embargo $xp(x) = \frac{1}{1-x}$ y $x^2q(x) = \frac{x}{1-x}$ son analíticas en $x_0 = 0$, por lo que afirmamos que es un punto singular regular, y de esta manera la solución[22] de (4.80) es

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \tag{4.82}$$

Reemplazando (4.82) en la ecuación diferencial se tiene:

$$\begin{aligned} x(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r-2} \quad &+ \quad 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} \\ &+ \quad 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+r-1)(n+r)+2(n+r)\}x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\{2-(n+r-1)(n+r)\}c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r+1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\{(n+r+2)-(n+r)^2\}c_n x^{n+r} = 0$$

Uniformizamos exponentes para obtener:

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r+2)c_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}\{(n+r+2)-(n+r)^2\}c_n x^{n+r} = 0$$

Ahora, en esto último uniformizamos índices y se tiene:

$$\begin{aligned} r(r+1)c_0 x^{r-1} \quad &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)(n+r+2)c_{n+1}x^{n+r} \\ &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty}\{(n+r+2)-(n+r)^2\}c_n x^{n+r} = 0, \ \ c_0 \neq 0 \end{aligned}$$

[22] Aquí aplicamos el teorema de Frobenius.

$$r(r+1)c_0x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r+1)(n+r+2)c_{n+1}-(n+r+1)(n+r-2)c_n\right]x^{n+r} = 0$$

$$r(r+1)c_0x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)\left[(n+r+2)c_{n+1}-(n+r-2)c_n\right]x^{n+r}=0$$

Igualando a cero cada uno de los coeficientes para que la igualdad sea válida se tiene:

$$\begin{cases} r(r+1)c_0=0,\ c_0\neq 0 \text{ (ecuación indicial)} \\ \\ (n+r+2)c_{n+1}-(n+r-2)c_n,\ n=0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{4.83}$$

Acá vemos que las raíces de la ecuación indicial son $r=r_1=0$ y $r=r_2=-1$ ($r_1-r_2=1\in\mathbb{Z}$). Para obtener la primera solución, ponemos $r=r_1=0$ en la fórmula de recurrencia de (4.83) y se obtiene que los coeficientes de la serie (4.82) satisfacen:

$$c_{n+1}=\frac{n-2}{n+2}c_n,\ \ n=0,2,3,4,\cdots \tag{4.84}$$

Resolviendo esta fórmula de recurrencia para distintos valores de n se tiene:

Para $n=0$: $c_1=-c_0=-1$. (Tomamos $c_0=1$)

Para $n=1$: $c_2=-\frac{1}{3}c_1=-\frac{1}{3}(-1)=\frac{1}{3}$.

Para $n=2$: $c_3=0c_2=0$.

Para $n=3$: $c_4=\frac{1}{4}c_3=0$.

Para $n=4$: $c_5=\frac{2}{5}c_4=0$.

$\vdots$

Vemos que $c_n=0$, $\forall n\in\{3,4,5,\cdots\}$. Luego expandiendo (4.82) con $r=r_1=0$ se tiene la primera solución

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+\cdots$$

de donde

$$y_1(x)=1-x+\frac{1}{3}x^2+0x^3+0x^4+0x^5+0x^6+\cdots$$

es decir, la primera solución linealmente independiente es:

$$y_1(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^2 \tag{4.85}$$

Para determinar la segunda solución de la ecuación diferencial procedemos con la fómula de Lioville (2.6), así tenemos:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx = \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)\int \frac{e^{-\int \frac{2}{x(1-x)}dx}}{\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)^2}dx \\
&= \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)\int \frac{e^{2\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)dx}}{\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)^2}dx \\
&= \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)\int \frac{e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}}{\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)^2}dx \\
&= \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)\int \frac{x^2 - 2x + 1}{\left(x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^2}dx \\
&= \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)\int \frac{d\left(x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)}{\left(x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^2} \\
&= \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)\frac{-1}{x - x^2 + \frac{1}{3}x^3} = \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)\frac{-1}{\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)x} \\
&= -\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema fundamental de soluciones está dado por el conjunto $sfs = \left\{\frac{1}{x}, 1 - x + \frac{1}{3}x^2\right\}$ y la solución general por la función

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2\right)$$

■

■ **Ejemplo 4.23** Dada la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' + 9xy = 0, \;\; x > 0 \tag{4.86}$$

1. Encuentre las dos soluciones linealmente independientes aplicando el método de Frobenius.

2. Exprese dichas series en funciones elementales[23].
3. Determine la solución general.

Resolución

1. Sin mas preámbulos, en esta ecuación diferencial el punto $x_0 = 0$ es singular regular, por lo tanto la solución de la ecuación diferencial es de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \tag{4.87}$$

Reemplazando (4.87) en (4.86) se tiene:

$$x\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right) + 2\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right) + 9x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

de donde

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} \quad &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r-1} \\ &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty} 9a_n x^{n+r+1} = 0\end{aligned}$$

uniformizando exponentes se tiene:

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+2)(n+r+1)a_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} 9a_{n-1}x^{n+r} = 0$$

luego desarrollando la primera serie para $n = -1$ y $n = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}r(r+1)a_0 x^{r-1} \quad &+ \quad (r+1)(r+2)a_1 x^r \\ &+ \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r+2)(n+r+1)a_{n+1} + 9a_{n-1}\right]x^{n+r} = 0\end{aligned}$$

Aquí, para que la igualdad sea válida, igualamos a cero cada uno de los coeficientes para obtener:

$$\begin{cases} r(r+1)a_0 = 0, \; a_0 \neq 0 \text{ (ecuación indicial)} \\ (r+1)(r+2)a_1 = 0 \\ (n+r+2)(n+r+1)a_{n+1} + 9a_{n-1} = 0, \;\; n = 1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{4.88}$$

[23]Recuerde que:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Las raíces de la ecuación indicial en (4.88) son $r_1 = 0$, $r_2 = -1$; de donde vemos que $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}^+$

Para obtener la primera solución y_1 de (4.86) desarrollamos la fórmula de recurrencia de (4.88) para $r_1 = 0$, así se tiene lo siguiente:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = -\frac{9a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \ n = 1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{4.89}$$

Desarrollamos la fórmula de recurrencia (4.89) para los primeros valores de n:

Para $n = 1$: $a_2 = -\frac{9a_0}{3 \cdot 2} = -\frac{3^2 a_0}{3!}$

Para $n = 2$: $a_3 = -\frac{9a_1}{4 \cdot 3} = 0$

Para $n = 3$: $a_4 = -\frac{9a_2}{5 \cdot 4} = \frac{3^4 a_0}{5!}$

Para $n = 4$: $a_5 = -\frac{9a_3}{6 \cdot 5} = 0$

Para $n = 5$: $a_6 = -\frac{9a_4}{7 \cdot 6} = -\frac{3^6 a_0}{7!}$
siguiendo el proceso por inducción se tiene que:

$$a_{2n-1} = 0, \qquad a_{2n} = \frac{(-1)^n 3^{2n} a_0}{(2n+1)!}, \ n = 1,2,3,\cdots \tag{4.90}$$

Luego, para $r_1 = 0$ se tiene que la primera solución de (4.86) será:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \cdots \\ &= a_0 - \frac{3^2 a_0}{3!} x^2 + \frac{3^4 a_0}{5!} x^4 - \frac{3^6 a_0}{7!} x^6 + \cdots, \text{ haciendo } a_0 = 3 \\ &= \frac{1}{x}\left(3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \equiv \frac{1}{x}\operatorname{sen}(3x) \end{aligned}$$

Para encontrar la segunda solución usamos la fórmula de Liouville[24]

[24] También se puede usar el método de serie, pero es más fácil aplicar la fórmula de Liouville,

(2.6) y se tiene:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{(y_1(x))^2}dx = \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}\int \frac{e^{\ln\frac{1}{x^2}}}{\left(\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}\right)^2}dx \\
&= \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}\int \csc^2(3x)dx = -\frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}\cot(3x) \\
&= -\frac{1}{3}\frac{\cos(3x)}{x}
\end{aligned}$$

No tomando en cuenta el coeficiente $-\frac{1}{3}$, la segunda solución de la ecuación diferencial es:

$$y_2(x) = \frac{\cos(3x)}{x} \equiv \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x)^{2n}}{(2n)!}$$

2. En este caso, el sistema fundamental de soluciones está dado por:

$$\text{sfs} = \left\{\frac{\cos(3x)}{x}, \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}\right\}$$

3. La solución general de (4.86) es:

$$y(x) = c_1\frac{\cos(3x)}{x} + c_2\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$$

■

■ **Ejemplo 4.24** Dada la ecuación diferencial

$$x^4y'' + \lambda y = 0 \tag{4.91}$$

1. Verifique que $x_0 = 0$ es un punto singular irregular de (4.91), luego transforme esta ecuación diferencial aplicando la sustitución $t = \frac{1}{x}$.
2. Verifique que en esta nueva ecuación diferencial $t_0 = 0$ es un punto singular regular y resuelva en torno a dicho punto aplicando serie de Frobenius. Muestre que la solución de esta ecuación está en términos de funciones elementales[25].

---

puesto que ya conocemos la primera solución como una función conocida. Para proceder con la fórmula (2.6) antes debemos ver que la ecuación diferencial (4.86) es equivalente a $y'' + \frac{2}{x}y' + 9y = 0$, $x > 0$, donde $p(x) = \frac{2}{x}$, donde $x > 0$.

[25] Recuerde que

$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{y} \qquad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$$

3. Con el resultado obtenido, halle la solución de (4.91)

Resolución

1. En este caso la ecuación diferencial equivalente es $y'' + \frac{\lambda}{x^4}y = 0$, de donde es fácil ver que $p(x) = 0$ y $q(x) = \frac{\lambda}{x^4}$; así $\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \infty$. Por lo tanto $x_0 = 0$ es un punto singular irregular. Ahora si se hace el cambio de variable
$$t = \frac{1}{x} \tag{4.92}$$
Llevamos las derivadas a la variable t y se tiene
$$\begin{aligned} y'(x) &= -t^2\frac{dy}{dx} \\ y''(x) &= t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt} \end{aligned}$$
Poniendo estos resultados en (4.91) se obtiene la ecuación diferencial
$$t\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \lambda t y = 0 \tag{4.93}$$

2. Acá en (4.93) podemos ver que $p(t) = \frac{2}{t}$ y $q(t) = \lambda$, y con esto es fácil ver que $t_0 = 0$ es un punto singular regular, por lo que podemos aplicar el teorema de Frobenius para su solución, de esta manera la solución está dada por
$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$$
que al reemplazar en (4.93) nos da:
$$t\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r-1} + \lambda t\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+r} = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)c_n t^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\lambda c_n t^{n+r+1} = 0$$
$$\sum_{n=-1}^{\infty}[(n+r+1)(n+r+2)c_{n+1}]t^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda c_{n-1}t^{n+r} = 0$$
$$\begin{aligned} r(r+1)c_0 t^{r-1} &+ (r+1)(r+2)t^r \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}[(n+r+1)(n+r+2)c_{n+1} + \lambda c_{n-1}]t^{n+r} = 0 \end{aligned}$$
De lo cual[26] igualando a cero cada uno de los coeficientes se llega a las

[26] por la independencia lineal de $\{t^{r-1}, t^r, t^{r+1}, \cdots\}$.

ecuaciones

$$\begin{cases} r(r+1)c_0 = 0,\ c_0 \neq 0\,(\text{ecuación indicial}) \\ \\ (r+1)(r+2)c_1 = 0 \qquad\quad (*) \\ \\ c_{n+1} = -\frac{\lambda c_{n-1}}{(n+r+1)(n+r+2)},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

De la ecuación indicial se tiene $r_1 = 0$ y $r_2 = -1$.
En primer lugar trabajamos para $r = r_1 = 0$, poniendo esto en (*) resulta $c_1 = 0$, luego en la fórmula de recurrencia se llega a lo siguiente[27]:

$$c_{n+1} = -\frac{\lambda c_{n-1}}{(n+1)(n+2)},\ n \in \mathbb{N} \tag{4.94}$$

Desarrollamos (4.94) para diferentes valores de n.

Para $n = 1$: se tiene $c_2 = -\frac{\lambda}{3!}$.

Para $n = 2$: se tiene $c_3 = -\frac{\lambda c_1}{(2)(3)} = 0$.

Para $n = 3$: se tiene $c_4 = -\frac{\lambda c_2}{(4)(5)} = \frac{\lambda^2}{5!}$.

Para $n = 4$: se tiene $c_5 = -\frac{\lambda c_3}{(5)(6)} = 0$.

Para $n = 5$: se tiene $c_6 = -\frac{\lambda c_4}{(6)(7)} = -\frac{\lambda^3}{7!}$.

$\vdots$

De esta manera vemos que:

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n \lambda^n}{(2n+1)!},\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad \text{y} \qquad c_{2n+1} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Con estos resultados, la primera solución linealmente independiente es:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \cdots \\ &= 1 + c_2 t^2 + c_4 t^4 + c_6 t^6 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n}{(2n+1)!} t^{2n} = \frac{1}{\sqrt{\lambda} t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{\lambda}^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}\, t} \operatorname{sen}(\lambda t) \end{aligned}$$

[27] Como $c_0 \neq 0$, suponemos que $c_0 = 1$.

luego, la primera solución es $y_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\,t}\operatorname{sen}(\lambda t)$. Para determinar la segunda solución aplicamos la fórmula de Liouville (2.6), así se tiene:

$$y_2(t) = y_1(t)\int \frac{e^{-\int \frac{2}{t}dt}}{[y_1(t)]^2}dt = y_1(t)\int \frac{\lambda t^2}{\operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda}t)}dt = -\frac{1}{t}\cos(\sqrt{\lambda}t)$$

Con estos resultados, el sistema fundamental de soluciones es

$$sfs = \left\{\frac{1}{t}\cos(\sqrt{\lambda}t), \frac{1}{t}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}t)\right\}$$

y así la solución general de (4.93) es

$$y(t) = \frac{a}{t}\cos(\sqrt{\lambda}t) + \frac{b}{t}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}t) \tag{4.95}$$

3. De (4.95), teniendo en cuenta que $t = \frac{1}{x}$, la solución general de la ecuación diferencial (4.91) es:

$$y(x) = ax\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\right) + bx\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\right)$$

■

■ **Ejemplo 4.25** Determine la solución en serie de potencias de la ecuación diferencial

$$4t^3y'' + 6t^2y' + y = 0,\ t > 0 \tag{4.96}$$

para t muy grande.

<u>Resolución</u>

Como t debe ser muy grande, si hacemos $x = \frac{1}{t}$, entonces el comportamiento alrededor de t lo llevamos alrededor de $x = 0$. A continuación convertimos (4.96) en una ecuación diferencial con variable independiente x, para esto se tiene lo siguiente:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}}\frac{dy}{dx} = -x^2\frac{dy}{dx}$$

$$y''(t) = \frac{dy'}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}}\frac{d}{dx}\left[-x^2\frac{dy}{dx}\right] = -x^2\left[-2x\frac{dy}{dx} - x^2\frac{d^2}{dx^2}\right] = 2x^3\frac{dy}{dx} + x^4\frac{d^2y}{dx^2}$$

Ponemos estas derivadas en (4.96) y obtenemos una ecuación diferencial en la variable x dada por:

$$4x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0,\ x > 0 \tag{4.97}$$

Así tenemos, que resolver en serie de potencias (4.96) alrededor de t grande, equivale a resolver (4.97) alrededor de $x=0$. Para esto, vemos que (4.97) también puede escribirse como:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4x}y=0$$

Si hacemos $p(x)=\frac{1}{2x}$ y $q(x)=\frac{1}{4x}$, entonces vemos que $P(x)=xp(x)=\frac{1}{2}$ y $Q(x)=x^2q(x)=\frac{x}{4}$ son analíticas en $x=0$, por lo que $x=0$ es un punto singular regular; así, (4.97) admite solución en serie de Frobenius .de la forma:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} \tag{4.98}$$

Ponemos (4.98) en (4.97) para obtener:

$$4x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_nx^{n+r-2}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

de esto

$$\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r-1)(n+r)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)c_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty}2c_n(n+r)[2(n+r-1)+1]x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

uniformizamos exponentes y se obtiene:

$$\sum_{n=-1}^{\infty}2c_{n+1}(n+r+1)(2n+2r+1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

luego uniformizamos índices y se tiene:

$$2c_0r(2r-1)x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[2c_{n+1}(n+r+1)(2n+2r+1)+c_n]x^{n+r}=0,\ c_0\neq 0$$

Aquí, como la igualdad se da para todo $x>0$, entonces debe acontecer que

$$\begin{cases} r(2r-1)=0 \ \ \text{(ecuación indicial)} \\ \\ c_{n+1}=-\frac{c_n}{2(n+r+1)(2n+2r+1)},\ n=0,1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{4.99}$$

En (4.99) tenemos que las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = 0$, para las cuales se verifica que $r_1 - r_0 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$, esto significa que hay que resolver independientemente para cada una de las raíces. Así tenemos que:

Para $r = r_1 = \frac{1}{2}$ en la fórmula de recurrencia de (4.99) resulta:

$$c_{n+1} = -\frac{c_n}{2(n+1)(2n+3)},\ n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Cuando $n = 0$, $c_1 = -\frac{1}{2\cdot 1\cdot 3}c_0 = -\frac{c_0}{2!\cdot 1!\cdot 3}$.

Cuando $n = 1$, $c_2 = -\frac{c_1}{2\cdot 2\cdot 5} = \frac{c_0}{2^2\cdot 2!\cdot 3\cdot 5}$.

Cuando $n = 2$, $c_3 = -\frac{c_2}{2\cdot 3\cdot 7} = -\frac{c_0}{2^3\cdot 3!\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$.

$\vdots$

Procediendo en forma inductiva se tiene

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(-1)^n c_0}{2^n\cdot n!\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)},\ \text{tomamos } c_0 = 1 \\ &= \frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)!} \\ &= \frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot n!}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!},\ n = 0, 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

Por lo tanto, si ponemos este resultado de c_n en (4.98), la primera solución (4.97) es

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^n$$

Para $r = r_2 = 0$ en la fórmula de recurrencia de (4.99) se tiene:

$$c_{n+1} = -\frac{c_n}{2(n+1)(2n+1)},\ n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Cuando $n = 0$, $c_1 = -\frac{1}{2\cdot 1\cdot 1}c_0 = -\frac{c_0}{2!}$.

Cuando $n = 1$, $c_2 = -\frac{c_1}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{c_0}{4!}$.

Cuando $n=2$, $c_3 = -\frac{c_2}{2\cdot 3\cdot 5} = -\frac{c_0}{6!}$.

$\vdots$

Procediendo en forma inductiva (tomamos $c_0 = 1$) se tiene

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!},\ n = 0,1,2,3,\cdots$$

Por lo tanto, ponemos este resultado de c_n en (4.98) para obtener la segunda solución

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$$

y con estas dos soluciones linealmente independientes, la solución general de (4.97) es:

$$y(x) = a\sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n + b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$$

Pero aquí, aun podemos hacer más arreglos, así tenemos:

$$y(x) = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sqrt{x}^{2n+1} + b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sqrt{x}^{2n}$$

y esto equivale[28] a:

$$y(x) = a\,\mathrm{sen}(\sqrt{x}) + b\cos(\sqrt{x})$$

Ahora para llegar a la solución de (4.96) alrededor de t muy grande, tomamos $x = \frac{1}{t}$ y nos queda:

$$y(t) = a\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + b\cos\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

■

■ **Ejemplo 4.26** Halle la solución de

$$x^2 y'' + x\left(x - \frac{1}{2}\right) y' + \frac{1}{2} y = 0,\ x > 0 \tag{4.100}$$

alrededor de $x_0 = 0$.

---

[28] Recuerde que:

$$\mathrm{sen}(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (ax)^{2n+1}$$

y

$$\cos(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (ax)^{2n}$$

Resolución

Aquí es fácil verificar que $x_0 = 0$ es un punto singular regular, por lo cual, (4.100) admite solución en serie de Frobenius de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

ponemos esta serie en (4.100) y se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r-2} \quad &+ \quad x\left(x-\frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} \\ &+ \quad \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

desarrollamos los productos y resulta

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+r)c_n x^{n+r} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} c_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

A continuación uniformizamos exponentes

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)c_{n-1} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+r)c_n x^{n+r} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} c_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

luego uniformizamos índices para obtener:

$$\begin{aligned} &\left[r(r-1) - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\right] c_0 x^r \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(n+r)(n+r-1) + \frac{1-(n+r)}{2}\right] c_n + (n+r-1)c_{n-1} \right\} x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

Aquí, la igualdad ocurre si, y solo si, todos los coeficientes son iguales a cero, por esto se tiene que[29]:

$$\begin{cases} r(r-1) - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} = 0 \text{ (ecuación indicial)} \\ c_n = -\frac{(n+r-1)c_{n-1}}{(n+r)(n+r-1) - \frac{1}{2}(n+r) + \frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases} \tag{4.101}$$

[29]Tenga en cuenta que siempre $c_0 \neq 0$.

Al resolver la ecuación indicial de (4.101) se tiene las raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1}{2}$, donde $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}^+$, esto significa que tenemos que determinar las soluciones independientemente para cada raíz, así tenemos:

Cuando $r = r_1 = 1$, la fórmula de recurrencia de (4.101) queda así:

$$c_n = -\frac{nc_{n-1}}{n(n+1) - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}} = -\frac{2c_{n-1}}{2n+1},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

En esta fórmula de recurrencia se tiene:

Para $n = 1$, $c_1 = -\frac{2}{3}c_0 = -\frac{2^2.1!}{3!}c_0$.

Para $n = 2$, $c_2 = \frac{2^2}{5 \cdot 3}c_0 = \frac{2^4.2!}{5!}c_0$.

Para $n = 3$, $c_3 = -\frac{2^3}{7 \cdot 5 \cdot 3}c_0 = \frac{2^6.3!}{7!}$.

$\vdots$

Tomando $c_0 = 1$, por inducción vemos que

$$c_n = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}$$

luego, la primera solución de la ecuación diferencial es:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^n$$

Cuando $r = r_2 = \frac{1}{2}$, la fórmula de recurrencia (4.101) se convierte en:

$$c_n = -\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right) c_{n-1}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(n+r) + \frac{1}{2}} = -\frac{c_{n-1}}{n},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

En esta fórmula de recurrencia se tiene:

Para $n = 1$, $c_1 = -c_0$.

Para $n = 2$, $c_2 = \frac{c_0}{2!}$.

Para $n = 3$, $c_3 = -\frac{c_0}{3!}$.

$\vdots$

Tomando $c_0 = 1$, por inducción vemos que

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

luego, la segunda solución de la ecuación diferencial es:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sqrt{x} e^{-x}$$

Como ya disponemos de las dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$, entonces la solución general es:

$$y(x) = ax \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^n + b\sqrt{x} e^{-x}$$

■

■ **Ejemplo 4.27** Determine la solución de la ecuación diferencial

$$xy'' + (1-x)y' - y = 0, \; x > 0 \tag{4.102}$$

alrededor de $x_0 = 0$.

<u>Resolución</u>

En primer lugar, es fácil verificar que $x_0 = 0$ es un punto singular regular de (4.102), por lo cual la ecuación diferencial admite solución en serie de tipo Frobenius de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \tag{4.103}$$

Ponemos esta serie en (4.102) y se tiene:

$$x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) c_n x^{n+r-2} + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

efectuamos los productos y agrupamos convenientemente para obtener:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1) c_n x^{n+r} = 0$$

donde uniformizando exponentes vemos que:

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)^2 c_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_n x^{n+r} = 0$$

luego uniformizando índices se tiene:

$$r^2 c_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)^2 c_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_n x^{n+r} = 0$$

de donde agrupando y tomando $c_0 = 1$ se obtiene

$$r^2 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)[(n+r+1)c_{n+1} - c_n]x^{n+r} = 0$$

Aquí, esta igualdad acontece si, y solo si, cada uno de los coeficientes se anula, es decir:

$$\begin{cases} r^2 = 0 \text{ (ecuación indicial)} \\ (n+r+1)[(n+r+1)c_{n+1} - c_n] = 0,\ n = 0,1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{4.104}$$

De la ecuación indicial, vemos que $r = r_1 = r_2 = 0$. Poniendo este valor en la fórmula de recurrencia (4.104) se tiene

$$c_{n+1} = \frac{a_n}{n+1},\ n = 0,1,2,3,\cdots$$

y con esto determinamos la primera solución de la ecuación diferencial. En efecto:

Para $n = 0$, $c_1 = c_0 = 1$.

Para $n = 1$, $c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{1}{2}$.

Para $n = 2$, $c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{1}{3!}$

Para $n = 3$, $c_4 = \frac{c_3}{4} = \frac{1}{4!}$

$\vdots$

Continuando con este proceso se tiene que

$$c_n = \frac{1}{n!},\ n = 0,1,2,3,\cdots$$

luego, poniendo este resultado en (4.103), obtenemos la primera solución de la ecuación diferencial dada por

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

Para determinar la segunda solución $y_2(x)$ procedemos con la fórmula de Liouville, así tenemos que[30]

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1(x))^2} dx = e^x \int \frac{e^{-\int \frac{1-x}{x} dx}}{e^{2x}} dx \\ &= e^x \int \frac{e^{x-\ln x}}{e^{2x}} dx = e^x \int \frac{e^{-x}}{x} dx \qquad (*) \end{aligned}$$

Como $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{x} &= \frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^4}{5!} + \cdots \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

de donde:

$$\int \frac{e^{-x}}{x} dx = \int \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} \right\} dx = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!\, n}$$

Ponemos este resultado en (*) y se tiene:

$$y_2(x) \quad = \quad e^x \left[\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!} \right]$$

Por lo tanto, la solución general de (4.102) es:

$$y(x) = ae^x + be^x \left(\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot n!} \right)$$

■

[30]Tenga en cuenta lo siguiente: que la ecuación diferencial (4.102) es equivalente a

$$y'' + \frac{1-x}{x} y' - \frac{1}{x} y = 0$$

donde se tiene que $p(x) = \frac{1-x}{x}$.

Observación

Un método alternativo para resolver una ecuación diferencial cuando las raíces de la ecuación indicial son iguales consiste en lo siguiente:

Encuentre una expresión $E(r)$ para la ecuación indicial, de modo que se tenga:

$$E(r) = 0$$

Cuando se reemplaza la serie de Frobenius[31] $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ en la ecuación diferencial, aparece de manera natural en la relación de los coeficientes la función E, por lo que se recomienda al lector esté pendiente de este suceso.

Luego, después de igualar los coeficientes a cero, se obtiene la fórmula de recurrencia para los coeficientes donde aparece la función E. Se desarrolla esta fórmula de recurrencia y se obtiene una fórmula para determinar el coeficiente $c_n(r)$.

Una vez obtenido el coeficiente $c_n(r)$, se procede a determinar la primera solución $y_1(x)$ de la ecuación diferencial. Para determinar la segunda solución, calculamos la derivada de $c_n(r)$ respecto de r, así la segunda solución de la ecuación diferencial es

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(r)x^{n+r}$$

Veamos el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 4.28** Resuelva la ecuación diferencial:

$$t^3y'' - t(1+3t)y' + 2(2t+1)y = 0,\ t > 0 \tag{4.105}$$

en serie de potencias para t muy grande.

<u>Resolución</u>

Como t debe ser muy grande, entonces haciendo $x = \frac{1}{t}$, el comportamiento alrededor de t lo trasladamos alrededor de $x_0 = 0$. Por esto, convertimos la ecuación diferencial en la variable t en una que dependa de la variable x

[31] En el caso de que se busque la solución alrededor del 0.

aplicando la transformación $t = \frac{1}{x}$. Así se tiene que $y'(t)$ y $y''(t)$ en la variable x están dadas según el ejemplo 4.25 por las siguientes expresiones:

$$y'(t) = -x^2\frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad y''(t) = x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx}$$

Ponemos estos resultados en (4.105) y se tiene

$$\frac{1}{x^3}\left[x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx}\right] - \frac{1}{x}\left(1 + \frac{3}{x}\right)\left[-x^2\frac{dy}{dx}\right] + 2\left(\frac{2}{x} + 1\right)y = 0,\ x > 0$$

Simplificamos esto para obtener:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x(x+5)\frac{dy}{dx} + 2(x+2)y = 0,\ x > 0 \qquad (4.106)$$

A continuación, procedemos a resolver (4.106); en esta ecuación diferencial vemos que $p(x) = \frac{x+5}{x}$ y $q(x) = \frac{2(x+2)}{x^2}$, donde $P(x) = xp(x) \equiv x+5$ y $Q(x) = x^2q(x) \equiv 2(x+2)$ son analíticas en $x_0 = 0$; además $P_0 = \lim_{x\to 0^+} P(x) = 5$ y $Q_0 = \lim_{x\to 0^+} Q(x) = 4$, y con esto la ecuación indicial[32] es

$$r(r-1) + 5r + 4 = 0$$

que es equivalente a $(r+2)^2 = 0$. Haciendo $E(r) = (r+2)^2$, se tiene que la ecuación indicial también puede ser escrita como

$$E(r) = 0$$

donde las raíces son iguales, es decir, $r = r_1 = r_2 = -2$. Con este análisis decimos que, $x_0 = 0$ es un punto singular regular de (4.106) y admite solución en serie de Frobenius alrededor de dicho punto, de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \qquad (4.107)$$

Ponemos esto en (4.106) y se tiene:

$$\begin{aligned} x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_nx^{n+r-2} \quad &+ \quad x(x+5)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} \\ &+ \quad 2(x+2)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

[32]Recuerde que la ecuación indicial es

$$r(r-1) + P_0r + Q_0 = 0$$

que al efectuar los productos se convierte en

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r} &+ \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}5(n+r)c_n x^{n+r}\\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}2c_n x^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}4c_n x^{n+r}=0\end{aligned}$$

Agrupamos convenientemente las series

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r-1)(n+r)+5(n+r)+4\right]c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)+2\right]c_n x^{n+r+1}=0$$

ahora uniformizamos exponentes

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r-1)(n+r)+5(n+r)+4\right]c_n x^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r+1)c_{n-1}x^{n+r}=0$$

luego uniformizamos índices[33] y se tiene:

$$E(r)c_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\{E(n+r)c_n+(n+r+1)c_{n-1}\}x^{n+r}=0$$

Si hacemos $c_0=1$ e igualamos los coeficientes a cero vemos que

$$\begin{cases}E(r)=(r+2)^2=0 \text{ (ecuación indicial)}\\ E(n+r)c_n+(n+r+1)c_{n-1}=0,\ n=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

Desarrollamos la fórmula de recurrencia para obtener:

$$c_n=-\frac{n+r+1}{E(n+r)}c_{n-1}=-\frac{n+r+1}{(n+r+2)^2}c_{n-1},\ n=1,2,3,\cdots$$

Para $n=1$, $c_1=-\frac{r+2}{(r+3)^2}c_0=-\frac{r+2}{(r+3)^2}$.

[33] Simplificamos el coeficiente de la serie de la izquierda

$$\begin{aligned}(n+r-1)(n+r)+5(n+r)+4&=(n+r)^2-(n+r)+5(n+r)+4=(n+r)^2+4(n+r)+4\\&=(n+r+2)^2\end{aligned}$$

usando la función $E(r)=(r+2)^2$ que fue definida más arriba en la ecuación indicial se tiene:

$$(n+r-1)(n+r)+5(n+r)+4=E(n+r)$$

Para $n=2$, $c_2=-\frac{r+3}{(r+4)^2}c_1=\frac{r+3}{(r+4)^2}\frac{r+2}{(r+3)^2}=\frac{r+2}{(r+3)(r+4)^2}$.

Para $n=3$, $c_3=-\frac{r+4}{(r+5)^2}c_2=-\frac{r+4}{(r+5)^2}\frac{r+2}{(r+3)(r+4)^2}=-\frac{r+2}{(r+3)(r+4)(r+5)^2}$.

Para $n=4$, $c_4=-\frac{r+5}{(r+6)^2}c_3=\frac{r+5}{(r+6)^2}\frac{r+2}{(r+3)(r+4)(r+5)^2}=\frac{r+2}{(r+3)(r+4)(r+5)(r+6)^2}$

$\vdots$

Siguiendo con este proceso y aplicando inducción encontramos la fórmula para determinar el coeficiente c_n. Como este depende de r, ponemos:

$$c_n(r):=c_n=\frac{(-1)^n(r+2)}{(r+3)(r+4)(r+5)\cdots(r+n+1)(r+n+2)^2},\ n=1,2,3,\cdots \tag{4.108}$$

Reemplazando $r=-2$ en (4.108) vemos que:

$$c_n=c_n(-2)=0,\ n=1,2,3,\cdots$$

luego ponemos esto en (4.107) y se tiene:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n-2}=c_0x^{-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{c_n}_{=0}x^{n-2}$$

luego tomando $c_0=1$, la primera solución de (4.106) es

$$y_1(x)=\frac{1}{x^2}$$

Para determinar la segunda solución procedemos como indica la observación anterior. Derivamos respecto de r la expresión de (4.108), antes aplicamos logaritmo[34]

$$\begin{aligned}\ln c_n(r) &= \ln(-1)^k+\ln(r+2)-\ln(r+3)-\ln(r+4)\\ &\quad -\cdots-\ln(n+r+1)-\ln(n+r+2)^2\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{c_n'(r)}{c_n(r)}=\frac{1}{r+2}-\frac{1}{r+3}-\frac{1}{r+4}-\cdots-\frac{1}{n+r+1}-\frac{2}{n+r+2}$$

[34] Aquí no debemos preocuparnos por la derivada de alguna expresión negativa, puesto que el logaritmo es complejo.

luego

$$c_n'(r) = c_n(r)\left[\frac{1}{r+2} - \frac{1}{r+3} - \frac{1}{r+4} - \cdots - \frac{1}{n+r+1} - \frac{2}{n+r+2}\right]$$

$$c_n'(r) = c_n(r)\frac{1}{r+2} - c_n(r)\left[\frac{1}{r+3} + \frac{1}{r+4} + \cdots + \frac{1}{n+r+1} + \frac{2}{n+r+2}\right]$$

Reemplazamos la expresión de $c_n(r)$ en el término de la izquierda donde aparece y se tiene

$$\begin{aligned} c_n'(r) &= \frac{(-1)^n}{(r+3)(r+4)(r+5)\cdots(n+4+1)(n+r+2)^2} \\ &\quad -c_n(r)\left[\frac{1}{r+3} + \frac{1}{r+4} + \cdots + \frac{1}{n+r+1} + \frac{2}{n+r+2}\right] \end{aligned}$$

Aquí ponemos $r = -2$ y se obtiene:

$$c_n'(-2) = \frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n^2} = \frac{(-1)^n}{n\cdot n!},\ n = 1,2,3,\cdots$$

Con esto la segunda solución es:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n'(-2)x^{n-2} \\ &= \frac{1}{x^2}\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot n!}x^{n-2} \\ &= \frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot n!}x^n \end{aligned}$$

Puesto que ya disponemos de $y_1(x)$ y y_2, la solución general de (4.106) es

$$y(x) = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2}\left[\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot n!}x^n\right]$$

y con esto, mediante el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ se tiene que la solución de la ecuación diferencial (4.105) alrededor de un t muy grande es:

$$y(t) = At^2 + Bt^2\left[\ln\left(\frac{1}{t}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot n!}\left(\frac{1}{t}\right)^n\right]$$

■

■ **Ejemplo 4.29** Resuelva la ecuación diferencial:

$$x^2y'' + x(x-1)y' + y = 0,\ x > 0 \tag{4.109}$$

en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$.

Resolución

Antes de proceder a resolver (4.109); vemos que haciendo $p(x) = \frac{x-1}{x}$ y $q(x) = \frac{1}{x^2}$, se tiene que $P(x) = xp(x) \equiv x-1$ y $Q(x) = x^2q(x) \equiv 1$, son analíticas en $x_0 = 0$; por lo que 0 es un punto singular ordinario. Además $P_0 = \lim_{x\to 0^+} P(x) = -1$ y $Q_0 = \lim_{x\to 0^+} Q(x) = 1$, y con esto la ecuación indicial es $r(r-1) - r + 1 = 0$, que es equivalente a $(r-1)^2 = 0$. Haciendo $E(r) = (r-1)^2$, la ecuación indicial también puede ser escrita como

$$E(r) = 0$$

Vemos que las raíces son iguales, es decir, $r = r_1 = r_2 = 1$. Como $x_0 = 0$ es un punto singular regular de (4.109), entonces la ecuación diferencial admite solución en serie de Frobenius alrededor de dicho punto, de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \tag{4.110}$$

Ponemos esta serie en (4.109) y se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r-2} \quad &+ \quad x(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} \\ &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

que al efectuar los productos se convierte en

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)c_n x^{n+r} \quad &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r} \\ &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

Agrupamos convenientemente las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r-1)(n+r) - (n+r) + 1]\, c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r+1} = 0$$

ahora uniformizamos exponentes para obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r-1)(n+r)-(n+r)+1]\,c_n x^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)\,c_{n-1}x^{n+r}=0$$

luego uniformizando índices[35] se tiene

$$E(r)c_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\{E(n+r)c_n+(n+r-1)c_{n-1}\}x^{n+r}=0$$

Si hacemos $c_0=1$ e igualamos los coeficientes a cero se obtiene:

$$\begin{cases} E(r)=(r-1)^2=0 \text{ (ecuación indicial)} \\ E(n+r)c_n+(n+r-1)c_{n-1}=0,\ n=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

Desarrollamos la fórmula de recurrencia y se tiene

$$c_n=-\frac{n+r-1}{E(n+r)}c_{n-1}=-\frac{n+r-1}{(n+r-1)^2}c_{n-1}=-\frac{c_{n-1}}{n+r-1},\ n=1,2,3,\cdots$$

Para $n=1$, $c_1=-\frac{c_0}{r}=-\frac{1}{r}$.

Para $n=2$, $c_2=-\frac{c_1}{r+1}=\frac{1}{r(r+1)}$.

Para $n=3$, $c_3=-\frac{c_2}{r+2}=-\frac{1}{r(r+1)(r+2)}$.

Para $n=4$, $c_4=-\frac{c_3}{r+3}=\frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$.

$\vdots$

Aplicando inducción encontramos la fórmula para determinar el coeficiente c_n. Como este depende de r, escribimos:

$$c_n(r):=c_n=\frac{(-1)^n}{r(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)},\ n=1,2,3,\cdots \tag{4.111}$$

[35] Simplificamos el coeficiente de la serie de la izquierda

$$\begin{aligned}(n+r-1)(n+r)-(n+r)+1 &= (n+r)^2-(n+r)-(n+r)+1=(n+r)^2-2(n+r)+1\\ &= (n+r-1)^2\end{aligned}$$

usando la función $E(r)=(r-1)^2$ que fue definida más arriba en la ecuación indicial se tiene:

$$(n+r-1)(n+r)-(n+r)+1=E(n+r)$$

Ponemos $r = 1$ en (4.111) y vemos que:

$$c_n = c_n(1) = \frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n} = \frac{(-1)^n}{n!},\ n = 1,2,3,\cdots$$

Como ya disponemos de c_n, reemplazamos esto en (4.110) y se tiene la primera solución:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = xe^{-x}$$

luego la primera solución de (4.109) es

$$y_1(x) = xe^{-x}$$

Para determinar la segunda solución procedemos como en el ejemplo anterior. Derivamos respecto de r la expresión de (4.111), antes aplicamos logaritmo

$$\ln c_n(r) = \ln(-1)^k - \ln(r) - \ln(r+1) - \ln(r+2) - \cdots - \ln(n+r-1)$$

entonces

$$\frac{c_n'(r)}{c_n(r)} = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2} - \cdots - \frac{1}{n+r-1}$$

luego

$$c_n'(r) = c_n(r)\left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2} - \cdots - \frac{1}{n+r-1}\right]$$

$$c_n'(r) = \frac{(-1)^{n+1}}{r(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n+r-1}\right]$$

Aquí ponemos $r = 1$ y se obtiene los coeficientes de la segunda solución dados por la expresión:

$$\begin{aligned} c_n'(1) &= \frac{(-1)^{n+1}}{1\cdot 2\cdots n}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right],\ n = 1,2,3,\cdots \end{aligned}$$

Con esto la segunda solución es:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n'(1) x^{n+1} \\ &= xe^{-x}\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] x^{n+1} \\ &= xe^{-x}\ln(x) + x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] x^n \end{aligned}$$

Puesto que ya disponemos de $y_1(x)$ y $y_2(x)$, la solución general de (4.109) es

$$y(x) = Axe^{-x} + B\left[xe^{-x}\ln(x) + x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\right]$$

■

4.5 EJERCICIOS PROPUESTOS 4

1. Analice la convergencia de las series dadas:

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{[\ln(\ln(n))]^{\ln(n)}} & (2) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}},\ a>0. \\
(3) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n.\ln(n)}{(n+1)^3} & (4) & \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^3}. \\
(5) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n\sqrt{n}} & (6) & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+5)}{n^3+1}. \\
(7) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n n!}{n^n} & (8) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}. \\
(9) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{1/3}}{1+5n^{1/3}} & (10) & \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln(n)}}. \\
(11) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n!} & (12) & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\sqrt{n}}{5n+3}. \\
(13) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2\,\mathrm{sen}(n)}{n^3+n\ln(n)} & (14) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}.
\end{array}
$$

2. Sea $b \in \mathbb{R}-\{0\}$, demuestre que la serie

$$b^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+b^2)^n}$$

es convergente y calcule su suma.

3. Demuestre que para cualquier $p \in \mathbb{N}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$$

es convergente.

4. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge; demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ también convergen.

5. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ converge.
6. Halle el radio de convergencia y el conjunto donde las siguientes series convergen
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n n^3}$
   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}x^n$
   c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(n+3)!}x^{2n}$
   d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+5)!}x^n$
   e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$
7. En cada uno de los problemas, determine si el valor especificado de t es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada.
   a) $t(t-2)^2y''+ty'+y=0;\ t=0$
   b) $t(t-2)^2y''+ty'+y=0;\ t=2$
   c) $(\operatorname{sen} t)y''+(\cos t)y'+\frac{1}{t}y=0;\ t=0$
   d) $(e^t-1)y''+e^ty'+y=0;\ t=0$
   e) $(1-t^2)y''+\frac{1}{\operatorname{sen}(t+1)}y'+y=0;\ t=-1$
   f) $t^3y''+(\operatorname{sen} t^2)y'+ty=0;\ t=0.$
8. *a*) Sabiendo que $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $|x|<1$, demuestre que la función racional $\frac{1}{a+x^2}$ puede expresarse en serie de potencias mediante:

$$\frac{1}{a+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{a^{n-1}}$$

   b) Resuelva la ecuación diferencial $(x^2+3)y''+4xy'+2y=0$ en serie de potencias alrededor de $x_0=0$. Usando el ítem anterior exprese cada una de las soluciones fundamentales como funciones racionales.
   c) Escriba la solución general de la ecuación diferencial como combinación lineal de dichas funciones racionales.
9. Aplique el mismo procedimiento del ejercicio anterior para resolver:

$$(x^2+1)y''+4xy'+2y=0$$

10. *a*) Se tiene que $\tanh x=\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$, demuestre que:

$$\operatorname{arctanh}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \tag{4.112}$$

   b) La serie de Taylor (serie de potencias) de una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0, en el cual es infinitamente diferenciable es:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Demuestre que la serie de Taylor[36] (serie de potencias) alrededor de $x_0=0$ de $\operatorname{arctanh}(ax)$, donde a es constante diferente de cero, es:

$$\operatorname{arctanh}(ax)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} \tag{4.113}$$

c) Aplicando serie de potencias alrededor de $x_0=0$, resuelva la ecuación diferencial

$$(x^2-2)y''+2xy'=0$$

Use (4.113) para expresar la solución en serie como una función trascendente, después de esto halle el sistema fundamental y la solución general.

11. Resuelva mediante serie de potencias alrededor de $x_0=0$ la ecuación diferencial:

$$(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$$

Luego aplicando (4.20), exprese las soluciones fundamentales mediante funciones elementales.

12. *a*) A partir de $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $|x|<1$; deduzca que:

$$\frac{1}{a+bx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n b^n x^n}{a^{n+1}},\ ab\neq 0$$

b) Resuelva en serie de potencias alrededor de $x_0=0$ las siguientes ecuaciones diferenciales, y exprese las series de sus soluciones fundamentales como funciones racionales, usando el ítem anterior

1) $(4x^2-9)y''+16xy'+8y=0$
2) $(b^2x^2-a^2)y''+4b^2xy'+2b^2y=0$

13. Para la constante $b\neq 0$ se propone la ecuación diferencial:

$$(b^2x^2+1)y''+2b^2xy'=0$$

[36] Otra forma de obtener la serie de potencias de la función $\operatorname{arctanh}(x)$ es integrando la series

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \text{y} \quad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ |x|<1$$

luego aplicar (4.112).

a) Resuelva en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$.

b) Use las series de las funciones **arco tangente y arco cotangente**[37] para demostrar que las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial expresadas en serie corresponden a dichas funciones.

14. *a*) Aplicando el ejercicio 10*b* con $a \neq 0$, demuestre que la representación en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$ de $\frac{1}{(x+a)^2}$ es:

$$\frac{1}{(x+a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{x^n}{a^{n+2}}$$

b) Resuelva con serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial:

$$(x+1)^2 y'' + 4(x+1)y' + 2y = 0$$

Luego aplicando el ítem anterior muestre que las soluciones fundamentales en serie pueden expresarse como funciones racionales.

15. *a*) Para $a \neq 0$, demuestre que:

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{a^{2n+2}}$$

b) Resuelva en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial

$$(x^2 - a^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

Usando la serie del ítem anterior, exprese las soluciones fundamentales en serie de la ecuación diferencial, mediante funciones racionales.

16. Dada la ecuación diferencial: $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$

a) Halle su solución en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$.

b) Usando la serie de la función exponencial[38], exprese las soluciones fundamentales en serie de la ecuación diferencial, mediante funciones elementales (en este caso exponenciales)

---

[37] Tenga en cuenta de que para cualquier constante $b > 0$:

$$\operatorname{arccot}(bx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(ax)^{2n+1}}{2n+1}$$

[38] Tenga en cuenta de que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

17. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$. Verifique que la soluciones fundamentales son polinomios.
    a) $x^2(x^2+6)y'' - (10x^3+48x)y' + (30x^2+108)y = 0$
    b) $(x^2+1)y'' - 6xy' + 12y = 0$
    c) $(x^8-2x^4+1)y'' - (8x^7-8x^3)y' + (20x^6+12x^2)y = 0$
    d) $(x^4+12)y'' - 4x^3y' + (6x^2+12)y = 0$
    e) $(x^2-2)y'' - 6xy' + 12y = 0$
    f) $(x^2-2)y'' - 6xy' + 10y = 0$
18. Analice la regularidad del punto $x_0 = 0$ y resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales mediante serie de potencias. Analice la serie de cada una de las soluciones fundamentales y verifique que éstas corresponden a funciones elementales.
    a) $(x^2-x)y'' - (x^2+x-1)y' + (2x-1)y = 0$
    b) $(x^2-x)y'' + (x+1)y' - y = 0$, $|x| < 1$
    c) $xy'' + (2-x)y' - y = 0$
    d) $(a^2x^4+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, a es constante
    e) $(x^3+x)y'' + (4x^2+2)y' + 2xy = 0$
    f) $x(x+2)y'' - (x^2+4x+2)y' = 0$
    g) $x(x-1)y'' + (1-2x^2)y' + (4x-2)y = 0$
    h) $(x^4-x^2)y'' + (8x-10x^3)y' + (30x^2-20)y = 0$
    i) $(x^4-2x)y'' + (2-4x^3)y' + 6x^2y = 0$
    j) $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0$
    k) $xy'' + (3-2x)y' + (x-3)y = 0$
    l) $xy'' + (p+1-2x)y' + (x-p-1)y = 0$, $p \in \mathbb{N}$.
19. Dada la ecuación diferencial: $x^2y'' + 2pxy' + (x^2+p^2-p)y = 0$, $p \in \mathbb{N}$
    a) Resuelva en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$.
    b) Use las series del **seno y coseno**[39] para demostrar que las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial expresadas en serie corresponden a las funciones $\frac{1}{x^p}\operatorname{sen}(x)$ y $\frac{1}{x^p}\cos(x)$.
20. Dada la ecuación diferencial: $xy'' - (4x^2+1)y' + 4x^3y = 0$
    a) Resuelva en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$.
    b) Usando la serie de la función exponencial, exprese las series de las soluciones fundamentales en términos de funciones elementales.

[39] Tenga en cuenta de que para cualquier constante $a > 0$:

$$\operatorname{sen}(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad \cos(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ax)^{2n}}{(2n)!}$$

21. Resuelva la ecuación diferencial

$$2xy'' + (1+x)y' + y = 0$$

alrededor del punto $x_0 = 0$. Exprese la solución con sus tres primeros sumandos en cada una de las soluciones linealmente independientes.

22. Resuelva alrededor de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial

$$(x^2+1)y'' + xy' + y = 0$$

23. Resuelva alrededor de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial

$$(x^2+2)y'' + xy' + y = 0$$

24. Resuelva alrededor de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial

$$(x^2+2)y'' + 3xy' + y = 0$$

25. Para $x \neq 0$, encuentre las soluciones linealmente independientes en término de funciones elementales de las siguientes ecuaciones diferenciales resueltas con series alrededor de $x_0 = 0$.
   a) $4xy'' + 2y' + a^2y = 0$, a es constante.
   b) $2xy'' + 3y' - 2y = 0$[40]
26. Para $x > 0$, encuentre las soluciones linealmente independientes en término de funciones elementales de las siguientes ecuaciones diferenciales resueltas con series alrededor de $x_0 = 0$.
   a) $xy'' + 2y' + a^2xy = 0$, a es constante.
   b) $xy'' + 2y' - a^2xy = 0$, a es constante.
   c) $4xy'' + 8y' + a^2xy = 0$, a es constante.
   d) $xy'' - y' + a^2x^3y = 0$, a es constante.
   e) $4x^2y'' - 4xy' + (3-4x^2)y = 0$
27. Resuelva en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$ las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando sus tres primero términos distintos de cero en cada una de sus soluciones fundamentales.
   a) $2x^2y'' + x(x+1)y' - (x+1)y = 0$
   b) $2x^2y'' + xy' - (x+1)y = 0$
   c) $2xy' - 2e^xy' + 2y = 0$

[40] Tenga en cuenta:

$$\cosh(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2n}}{(2n)!} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

d) $2x^2y'' + xy' - e^x y = 0$
e) $y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$
f) $y'' + e^x y' - y = 0$

28. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial con serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$
    a) $(x-1)y'' - 2xy + y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$
    b) $y'' - 2xy' + 8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
    c) $(x^2+1)y'' + 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
29. Resuelva en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial $(x^2-2)y'' + 2xy' = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 1$,luego exprese la solución en funciones elementales.
30. Resuelva con serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$ el problema de valor inicial: $(x+1)y'' - 2xy - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
31. Resuelva con serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$
    a) $xy'' + (1-\cos x)y' + x^2y = 0$
    b) $(e^x - 1 - x)y'' + xy = 0$
32. Resuelva $y'' + x^2y' + 2xy - 10x^3 + 2x - 5 = 0$, si $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es su solución total.
33. Resuelva la ecuación diferencial
$$2xy'' + (1+x)y' + y = 0$$
alrededor del punto $x_0 = 0$. Exprese la solución con sus tres primeros sumando en cada una de las soluciones linealmente independientes.
34. Resuelva alrededor de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial
$$(x^2+1)y'' + xy' + y = 0$$
35. Resuelva alrededor de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial
$$(x^2+2)y'' + xy' + y = 0$$
36. Resuelva alrededor de $x_0 = 0$ la ecuación diferencial
$$(x^2+2)y'' + 3xy' + y = 0$$
37. La **función gama** es denotada por $\Gamma(p)$ y es definida por la integral
$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^p dx$$
La integral converge cuando $x \to +\infty$ para todo p. Para $p < 0$ es impropia porque el integrando no es acotado cuando $x \to 0$. Sin embargo se puede demostrar que la integral converge en $x = 0$ para $p > -1$.

a) Demuestre que para $p > 0$ se tiene $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.
b) Demuestre que $\Gamma(1) = 1$.
c) Si $p = n$ fuera un entero positivo, demuestre que $\Gamma(n+1) = n!$. Como $\Gamma(p)$ esta definido para p que no necesariamente es entero entonces esta función nos da una generalización de la función factorial para valores no enteros de la variable independiente. Note que tambien es consistente definir $0! = 1$.
d) Demuestre que para $p > 0$,

$$p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1) = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}.$$

Asi $\Gamma(p)$ puede ser determinado para todos los valores positivos de p si $\Gamma(p)$ fuera conocido en un único intervalo de longitud 1, digamos en $0 < p \leq 1$. Es posible mostrar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Encuentre $\Gamma(3/2)$ y $\Gamma(11/2)$.

38. Resuelva la ecuación diferencial dada en serie de potencias de x (en torno de $x_0 = 0$). Escriba una formula cerrada para el término general de cada serie que compone la solución. Dar un intervalo donde la solución es válida.
a) $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1.$
b) $(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0.$
c) $(4-x^2)y'' + 2y = 0.$
d) $(3-x^2)y'' - 3xy' - y = 0.$
e) $(1-x)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2.$
f) $2y'' + xy' + 3y = 0.$
g) $y'' - xy = 0$, **Ecuación de Airy.**

39. Resuelva la ecuación diferencial dada en serie de potencias de x (en torno de $x_0 = 0$). Escriba los tres primeros términos diferentes de cero (si existiesen) de cada serie que compone la solución. Dar un intervalo donde la solución es válida.
a) $y'' + k^2x^2y = 0$, donde $k \in \mathbb{R}$.
b) $(1-x)y'' + y = 0.$
c) $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2.$

40. Demuestre que si

$$y(x) = a_0\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1\left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right)$$

es solución en serie de potencias de la ecuación

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$$

entonces $y_1(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}b_nx^n$ y $y_2(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n$ son soluciones fundamentales de la ecuación.

41. Considere la **ecuación de Legendre** $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$.
   a) Demuestre que la solución general de la ecuación de Legendre es $y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$, con

$$y_1(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2-\alpha)\cdots(-\alpha)(2k-1+\alpha)\cdots(1+\alpha)}{(2k)!}x^{2k}$$
$$y_2(x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1-\alpha)\cdots(1-\alpha)(2k-2+\alpha)\cdots(2+\alpha)}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

   Demuestre que si $\alpha=2N$, para $N=0,1,2,...$, entonces $y_1(x)$ es un polinomio de grado $2N$ conteniendo apenas potencias pares de x. Demuestre que si $\alpha=2N+1$, para $N=0,1,2,...$, entonces $y_2(x)$ es un polinomio de grado $2N+1$ conteniendo apenas potencias impares de x.

   c) El **polinomio de Legendre** es definido como la solución polinomial de la ecuación de Legendre, para $\alpha=N$, que satisface $P_N(1)=1$. Determine los polinomios de Legendre para $N=0,1,2,3,4$.

42. Considere la **ecuación de Hermite** $y''-2xy'+\lambda y=0$
   a) Demuestre que la solución general de Hermite es $y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$ con

$$y_1(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda-2(2k-2))\cdots\lambda}{(2k)!}x^{2k}$$
$$y_2(x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda-2(2k-1))\cdots(\lambda-2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

   b) Demuestre que si $\lambda=4N$, para $N=0,1,2,...$, entonces $y_1(x)$ es un polinomio de grado $2N$ conteniendo apenas potencias pares de x. Demuestre también que si $\lambda=2(2N+1)$, para $N=0,1,2,...$, entonces $y_2(x)$ es un polinomio de grado $2N+1$ conteniendo apenas potencias impares de x.

c) El **polinomio de Hermite** $H_N(x)$ es definido como la solución polinomial de la ecuación de Hermite, para $\lambda = 2N$, talque el coeficiente de x^N es igual a 2^N. Determine los polinomios de Hermite para $N = 0,1,2,3,4$.

43. Considere la **ecuación de Chebyshev de primer tipo** $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$.

a) Demuestre que la solución general de la ecuacion de Chebychev es $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ con

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((2k-2)^2 - \alpha^2)\cdots(-\alpha^2)}{(2k)!} x^{2k},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((2k-1)^2 - \alpha^2)\cdots(1-\alpha^2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

b) Demuestre que si $\alpha = 2N$, para $N = 0,1,2,...$, entonces $y_1(x)$ es un polinomio de grado $2N$ conteniendo apenas potencias pares de x. Demuestre tambien que si $\alpha = 2N+1$, para $N = 0,1,2,...$, entonces $y_2(x)$ es un polinomio de grado $2N+1$ conteniendo apenas potencias impares de x.

c) El **polinomio de Chebyshev de primer tipo** $T_N(x)$ es definido como la solución polinomial de la ecuación de Chebyshev de primer tipo, para $\alpha = N$, tal que el coeficiente de x^N es igual a 1, si $N = 0$ e igual a 2^{N-1}, si $N > 0$. Determine los polinomios de Chebyshev de primer tipo para $N = 0,1,2,3,4$.

44. Sabiendo que la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ entorno de $x_0 = 0$ es dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

a) Determine la serie de Taylor entorno de $x_0 = 0$ de la función $g(x) = xe^{x^2}$ y calcule su radio de convergencia.

b) Determine la derivada de orden 51 de la función $g(x)$ en el punto $x_0 = 0$, esto es $g^{(51)}(0)$.

c) Use los resultados anteriores para determinar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n e^{2n}}{n!}$.

45. Usando el método de Frobenius encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ de la ecuación

$$2x^2(2+x)y'' + 5x^2 y' + (1+x)y = 0.$$

46. Considere la ecuación diferencial, lineal de segundo orden:

$$(3-x^2)y''(x)-3xy'(x)-y(x)=0 \tag{4.114}$$

   a) Verifique que $x_0=0$ es un punto ordinario de la ecuación (4.114) y encuentre la relación de recurrencia asociada a la ecuación dada.
   b) Determine la solución $y(x)$ tal que $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

47. Considere la ecuación de Laguere de orden $p: xy''+(1-x)y'+py=0$.
   a) Para $x>0$ usando el método de Frobenius encuentre la solución general alrededor de $x=0$.
   b) Muestre que si $p=n$ es un entero positivo entonces el polinomio $L_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x^k}{k!}$ es una solución.

48. Usando el método de Frobenius encuentre la solución general alrededor de $x=0$ de la ecuación $x^2y''-x(3+5x)y'+(4+5x)y=0$.

49. Demuestre que $\frac{d}{dx}J_0(x)=-J_1(x)$.

50. Usando el método de Frobenius encuentre la solución general alrededor de $x=0$ de la ecuación

$$x^2y''+\frac{3}{2}xy'-\frac{1}{2}(x^2+1)y=0.$$

51. Usando series de potencia encuentre la solución general alrededor de $x=0$ de la ecuación

$$(1+x^2)y''+5xy'+4y=0.$$

   Determine además el intervalo máximo donde la solución está definida.

52. Para $2p$ que no es un entero, encuentre la solución general de la ecuación

$$y''+\left(\frac{1}{x}-2\alpha\right)y'+\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{\alpha}{x}-\frac{p^2}{x^2}\right)y=0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

   Sugerencia: Use las sustituciones $y=e^{\alpha x}z$ y $t=\beta x$.

53. Usando el método de Frobenius, encuentre dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $xy''+y'+xy=0$, que tengan forma de serie de potencias.

54. **a)** Demuestre que para todo número real p se tiene

$$\frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)]=x^pJ_{p-1}(x).$$

b) Usando el item anterior demuestre que si $J_0(\alpha) = 0$ con $\alpha \neq 0$, entonces

$$\int_0^1 J_1(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}.$$

55. Usando el método de Frobenius encuentre la solución general para $x > 0$ de la ecuación

$$2x^2y'' + x(3-2x^2)y' - (x^2+1)y = 0.$$

56. Usando el método de Frobenius encuentre la solución general para $x > 0$ de la ecuación

$$x^2y'' + x(3-x)y' + y = 0.$$

57. **a)** Demuestre que la ecuación

$$2(\operatorname{sen} t)y'' + (1-t)y' - 2y = 0$$

tiene dos soluciones de la forma

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad y_2(t) = t^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

b) Encuentre los primeros cinco términos en estos desarrollos en serie suponiendo que $a_0 = b_0 = 1$.

58. **a)** Demuestre que la ecuación indicial de

$$t^2y'' + ty' + (1+t)y = 0 \tag{4.115}$$

tiene raíces complejas $r = \pm i$

b) Demostrar que (4.115) tiene dos soluciones $y(t)$ linealmente independiente de la forma

$$y(t) = \operatorname{sen}(\ln t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \cos(\ln t) \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

5. Transformada de Laplace

Los métodos estudiados en capítulos anteriores son muy eficaces para resolver algunas ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y coeficientes variables, sin embargo, una de las dificultades radica siempre en ecuaciones no homogéneas donde la solución particular ha sido obtenida de funciones continuas y unos pocos casos para funciones discontinuas; aun así, hay muchas limitaciones, por lo que la transformada integral de Laplace que veremos en este capítulo se convertirá en una herramienta muy importante que nos permitirá resolver diversos problemas que involucran ecuaciones diferenciales no homogéneas con funciones $f(x)$ relativamente complicadas.

5.1 Transformada de Laplace y sus propiedades

Definición 5.1.1 Sea f una función definida en $[0,+\infty\rangle$, la **transformada de Laplace** de $f(t)$ es:

$$\mathscr{L}[f(t)] := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{5.1}$$

siempre que la integral exista.

Como podemos ver el cálculo de la transformada de Laplace[1] arroja una función que depende de s, por esto frecuentemente escribiremos la transformada

[1] Pierre-Simon, marqués de Laplace; es un matemático francés que nació en Beaumont-en-Auge, el año 1749, y falleció en París,el año 1827. Su padre fue un granjero, y desde pequeño mostró grandes habilidades para la matemática, y siendo aun muy joven, envía una carta sobre los principios de la mecánica a D'Alembert, quien queda muy impresionado, y permite que el joven se traslade a París donde consigue una plaza para el École Militaire.

de Laplace de $f(t)$ como

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{5.2}$$

Una de las primeras propiedades que surge para esta transformada integral es la linealidad, así tenemos:

Teorema 5.1.1 [Linealidad de la transformada de Laplace] Sea $\mathscr{F}[0,+\infty\rangle = \{f : \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \text{ existe}\}$. Para cualesquiera f, g en $\mathscr{F}[0,+\infty\rangle$ y cualquier $r \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathscr{L}[f(t)+rg(t)] = \mathscr{L}[f(t)] + r\mathscr{L}[g(t)]$$

Demostración. Si f y g están en $\mathscr{F}[0,+\infty\rangle$, entonces $\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ y $\mathscr{L}[g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$ existen, luego

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t)+rg(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st}(f(t)+rg(t))dt \\
&= \int_0^{\infty} (e^{-st} f(t) + re^{-st} g(t))dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + \int_0^{\infty} e^{-st} rg(t)dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + r\int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt \\
&= \mathscr{L}[f(t)] + r\mathscr{L}[g(t)]
\end{aligned}$$

sí se obtiene que $\mathscr{L}[f(t)+rg(t)] = \mathscr{L}[f(t)] + r\mathscr{L}[g(t)]$. ■

Durante los años de 1771 a 1789, hace grandes aportes a la astronomía, cálculo integral, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, análisis de armónicos y el concepto de potencial.

Sus resultados analíticos sobre la mecánica estelar se publicaron en los cinco volúmenes del Tratado de mecánica celeste durante los años 1799 a 1825. En los dos primeros describe métodos para estudiar el movimiento de los planetas y sus satélites, y sus trayectorias.

En 1814, Laplace se adentra en el estudio de las probabilidades que le sirvió de base para la segunda introducción de su Teoría analítica de las probabilidades el cual fue publicado en 1812, donde también expone el método de los mínimos cuadrados, que sirvió de base para la teoría de los errores.

Fue muy amigo de Napoleón Bonaparte, se tiene la anécdota de que durante el viaje que hacían a Egipto, a bordo del barco que los llevaba presentó a Napoleón Bonaparte una edición de su **Mecánica celeste** a Napoleón, pasados unos días, este le increpó a Laplace de que en el texto no apareciera ninguna referencia a Dios. La respuesta de Laplace fue: "Señor, no necesito esa hipótesis".

Laplace Murió en París en Marzo de 1827.

Este teorema es muy importante porque nos dice que la transformada de Laplace es un operador lineal. Esta propiedad de linealidad de la transformada será usada muy a menudo más adelante.

El problema principal ahora es analizar las condiciones suficientes para que la integral en (5.1) exista.

Definición 5.1.2 Una función es seccionalmente continua (o continua por partes) en su dominio, si en cualquier intervalo $[a,b] \subset D(f)$ se tiene que f es continua, excepto en un número finito de puntos donde la discontinuidad es finita[a].

[a]Esto significa que los límites laterales existen, pero son distintos.

Ilustramos esto en la Figura 5.1.

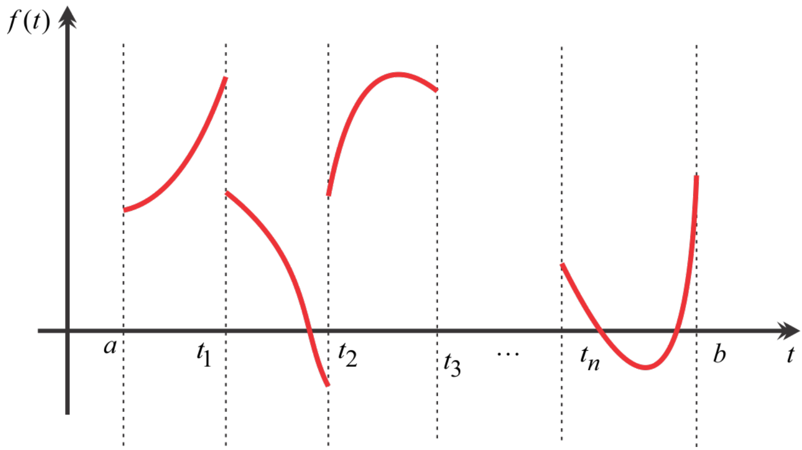


Figura 5.1: Función seccionalmente continua con n puntos de discontinuidad finita en $[a,b]$.

Observación

Si f es seccionalmente continua en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)dt$ siempre existe.

Definición 5.1.3 Sea f una función definida en $[0,+\infty\rangle$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, decimos que f es de orden exponencial α, si existe $M \geq 0$ y $t_0 \geq 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t},\ \forall t \geq t_0 \tag{5.3}$$

Esto significa que a partir de t_0 la exponencial crece mas rápido que $|f(t)|$, como se ilustra en la Figura 5.2

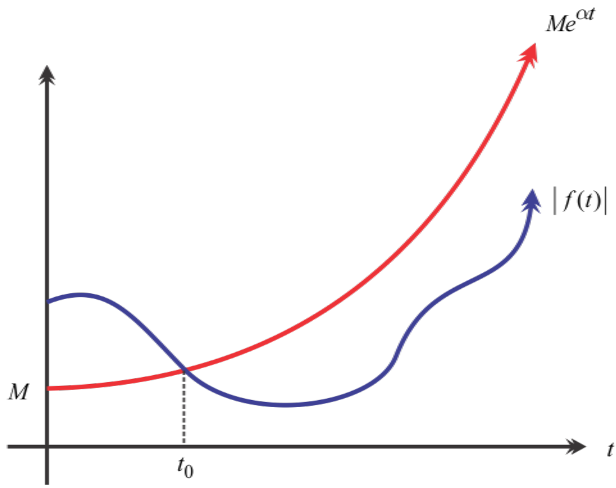


Figura 5.2: Función de orden exponencial

Teorema 5.1.2 Sea $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ una función seccionalmente continua y de orden exponencial α, entonces la transformada de Laplace existe.

Demostración. Lo que tenemos que demostrar aquí es que la integral $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ converja, para ello hacemos los siguiente:

En primer lugar, se tiene que la función $f(t)$ es de orden exponencial α, luego de acuerdo a la definición 5.1.3, existen $M \geq 0$ y $t_0 \geq 0$ tal que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, $\forall t \geq t_0$, con esta hipótesis hacemos los siguiente:

$$\begin{aligned} |\mathscr{L}[f(t)]| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-st} |f(t)|dt \\ &= \int_0^{t_0} e^{-st} |f(t)|dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} |f(t)|dt \qquad (*) \end{aligned}$$

Como la función es seccionalmente continua, entonces la integral $\int_0^{t_0} e^{-st}|f(t)|dt$ existe, puesto que $e^{-st}|f(t)|$ es integrable en el intervalo $[0,t_0]$. Solo queda por demostrar que la integral $\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}|f(t)|dt$ converja. Así se tiene que usando el hecho de que $f(t)$ es de orden exponencial, entonces:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}|f(t)|dt &\leq \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}Me^{\alpha t}dt \\ &\leq M\int_{t_0}^{+\infty} e^{(\alpha-s)t}dt, \text{ aquí asumimos que } s>\alpha \\ &= \frac{M}{\alpha-s}\left\{e^{(\alpha-s)t}\right\}_{t_0}^{+\infty} \\ &= \frac{M}{s-\alpha}e^{(\alpha-s)t_0}\end{aligned}$$

Este resultado nos dice que la integral $\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}|f(t)|dt$ es convergente, luego en (*) se tiene que

$$|\mathscr{L}[f(t)]| < \infty$$

y con esto, la transformada de Laplace de $f(t)$ existe con la condición adicional de que $s>\alpha$. ■

■ **Ejemplo 5.1** Demuestre si la transformada de Laplace de $f(t)=\frac{1}{t}$, $t>0$, existe o no.

<u>Resolución</u>

Por definición

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{t}\right] = \int_0^{+\infty}\frac{1}{t}e^{-st}dt,\ s>0$$

lo cual también se puede escribir usando dos integrales

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{t}\right] = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-st}}{t}dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{e^{-st}}{t}dt}_{I_2} \tag{5.4}$$

Para evaluar I_2 vemos que $t>1$, de donde: $\frac{e^{-st}}{t} < e^{-st}$. Luego con esta desigualdad se obtiene:

$$I_2 = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-st}}{t}dt < \int_1^{+\infty} e^{-st}dt = 1$$

es decir $I_2 < 1$ o también es convergente.

Sólo queda determinar si $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-st}}{t} dt$ es convergente. En efecto, si hacemos el cambio de variable $t = \frac{1}{u}$, la integral queda de forma equivalente como

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{s}{u}}}{u} du$$

puesto que en esta integral se tiene que $u > 1$, entonces $\frac{e^{-s}}{u} < \frac{e^{-\frac{s}{u}}}{u}$. Con esta desigualdad se tiene:

$$\infty = e^{-s} [\ln u]_1^{\infty} = \int_1^{-\infty} \frac{e^{-s}}{u} du < \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{s}{u}}}{u} du = I_1$$

lo cual confirma que I_1 es divergente.

Puesto que I_2 converge e I_1 diverge, entonces la expresión en (5.4) es divergente, y de este modo la transformada de Laplace de la función $f(t) = \frac{1}{t}$ no existe. ■

A continuación, nos avocamos a determinar la transformada de Laplace de algunas funciones conocidas, que en sí vienen a ser propiedades de la transformada de Laplace. Procuraremos en todo momento evitar el cálculo de la integral (5.1).

■ **Ejemplo 5.2** Sea $f(t) = 1$, $t \geq 0$, calcule $\mathscr{L}[f(t)]$. Aquí, si aplicamos la definición de la transformada de Laplace según (5.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f(t)] &= \mathscr{L}[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \left\{ e^{-st} \right\}_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}, \text{ donde se debe tomar } s > 0 \end{aligned}$$

■

El efecto de la transformada de Laplace sobre la función constante $f(t) = 1$, $t \geq 0$ lo visualizamos en la figura 5.3. El resultado de este ejemplo es la proposición

Proposición 5.1.3

$$\mathscr{L}[1] = \frac{1}{s}, \; s > 0 \tag{5.5}$$

Teorema 5.1.4 — Primera propiedad de traslación. Sea $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, entonces $\mathscr{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$

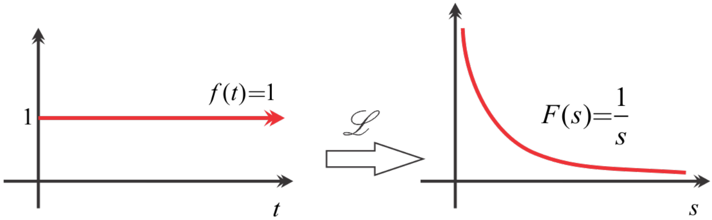


Figura 5.3: Transformada de la Laplace de la función contante $f(t) = 1, t \geq 0$.

Demostración. Suponiendo que la transformada de Laplace de la función f existe, se tiene que

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{5.6}$$

Ahora, si tomamos la función $g(t) = e^{\alpha t} f(t), t \geq 0$, desarrollando su transformada de Laplace se tiene:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - s)t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t)dt, \text{ tomamos } s > \alpha \end{aligned}$$

Luego, según como está definida la función $F(s)$ en (5.6) vemos que:

$$\mathscr{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] = F(s-\alpha), \ s > \alpha \tag{5.7}$$

■

Proposición 5.1.5

$$\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{s-\alpha}, \ s > \alpha \tag{5.8}$$

Demostración. Para determinar la igualdad en (5.8) aplicamos (5.5) y el teorema 5.1.4, en efecto: sea $F(s) = \mathscr{L}[1] = \frac{1}{s}$, entonces tomando $f(t) = 1$ se tiene

$$\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \mathscr{L}\left[e^{\alpha t} \cdot 1\right] = F(s-\alpha) = \frac{1}{s-\alpha}$$

Viendo extremos se obtiene: $\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{s-\alpha}$. ■

Teorema 5.1.6 Sea $f'(t)$, $t \geq 0$, una función seccionalmente continua y de orden exponencial, entonces

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0) \tag{5.9}$$

Demostración. Para demostrar (5.9), aceptaremos algunos resultados que no están demostrados en este texto. Primero, si $f'(t)$ es seccionalmente continua y de orden exponencial, entonces $f(t)$ también hereda dichas propiedades. Segundo, si $f(t)$ es de orden exponencial α, entonces $\frac{f(t)}{e^{\alpha t}} \longrightarrow 0$, cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Aplicando (5.1) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f'(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt, \text{ integramos por partes} \\
&= \lim_{p \to +\infty} \left\{ \frac{f(t)}{e^{st}} \right\}_0^p + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \\
&= \lim_{p \to +\infty} \frac{f(t)}{e^{st}} - f(0) + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt, \ s > \alpha \\
&= -f(0) + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \\
&= s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)
\end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que $\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$, que es la igualdad en (5.9). ■

A continuación aplicaremos el teorema 5.1.6 para obtener resultados referentes a derivadas de orden superior. Asumiremos en todos los casos que las derivadas son seccionalmente continuas y de orden exponencial.

Sea $g(t) = f'(t)$, entonces $g'(t) = f''(t)$. Aplicamos (5.9) para obtener:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f''(t)] &= \mathscr{L}[g'(t)] = s\mathscr{L}[g(t)] - g(0) = s\mathscr{L}[f'(t)] - f'(0) \\
&= s(s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)) - f'(0) \\
&= s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

Sea $g(t) = f''(t)$, entonces $g'(t) = f'''(t)$. Aplicamos (5.9) para obtener:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f'''(t)] &= \mathscr{L}[g'(t)] = s\mathscr{L}[g(t)] - g(0) \\
&= s\mathscr{L}[f''(t)] - f''(0), \text{ aplicamos el resultado anterior} \\
&= s\{s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)\} - f'(0) \\
&= s^3\mathscr{L}[f(t)] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathscr{L}[f'''(t)] = s^3\mathscr{L}[f(t)] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Sea $g(t) = f'''(t)$, entonces $g'(t) = f^{(4)}(t)$. Aplicamos (5.9) para obtener:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f^{(4)}(t)] &= \mathscr{L}[g'(t)] = s\mathscr{L}[g(t)] - g(0) \\
&= s\mathscr{L}[f'''(t)] - f'''(0), \text{ aplicamos el resultado anterior} \\
&= s\{s^3\mathscr{L}[f(t)] - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)\} - f'''(0) \\
&= s^4\mathscr{L}[f(t)] - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathscr{L}[f^{(4)}(t)] = s^4\mathscr{L}[f(t)] - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$$

Procediendo en forma inductiva se tiene

Proposición 5.1.7

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathscr{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{5.10}$$

Proposición 5.1.8

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen}(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{5.11}$$

Demostración. Para $f(t) = \operatorname{sen}(\omega t), t \geq 0$, se tiene $f'(t) = \omega\cos(\omega t)$ y $f''(t) = -\omega^2\operatorname{sen}(\omega t)$. Aplicando (5.10) con $n = 2$ se tiene:

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2\mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

de donde

$$\mathscr{L}[-\omega^2\operatorname{sen}(\omega t)] = s^2\mathscr{L}[\operatorname{sen}(\omega t)] - s\operatorname{sen}(0) - \omega\cos(0)$$

Por la linealidad de la transformada de Laplace (ver teorema 5.1.1) se tiene

$$-\omega^2\mathscr{L}[\operatorname{sen}(\omega t)] = s^2\mathscr{L}[\operatorname{sen}(\omega t)] - \omega$$

Luego

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen}(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

■

En la Figura 5.4 observamos el efecto de la transformada de Laplace sobre la función $f(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$

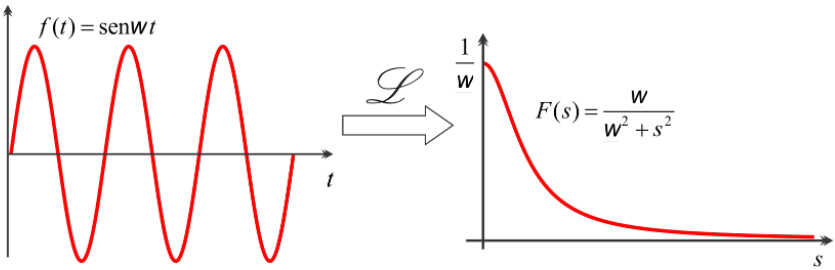


Figura 5.4: Transformada de la función $f(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$, $t \geq 0$.

Proposición 5.1.9

$$\mathscr{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \tag{5.12}$$

Demostración. Para la función $f(t) = \cos(\omega t), t \geq 0$, se tiene $f'(t) = -\omega \operatorname{sen}(\omega t)$ y $f''(t) = -\omega^2 \cos(\omega t)$. Aplicando (5.10) con $n = 2$ se tiene:

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2 \mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

de donde

$$\mathscr{L}[-\omega^2 \cos(\omega t)] = s^2 \mathscr{L}[\cos(\omega t)] - s\cos(0) + \omega \operatorname{sen}(0)$$

Por la linealidad de la transformada de Laplace (ver teorema 5.1.1) se tiene

$$-\omega^2 \mathscr{L}[\cos(\omega t)] = s^2 \mathscr{L}[\cos(\omega t)] - s$$

Luego

$$\mathscr{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

■

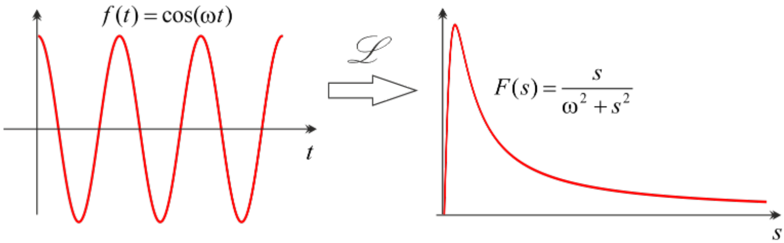


Figura 5.5: Transformada de la función $f(t) = \cos(\omega t)$, $t \geq 0$.

Proposición 5.1.10

$$\mathscr{L}[\operatorname{senh}(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \tag{5.13}$$

Demostración. Para la función seno hiperbólico[2] dada por $f(t) = \operatorname{senh}(\omega t)$, $t \geq 0$, se tiene $f'(t) = \omega \cosh(\omega t)$ y $f''(t) = \omega^2 \operatorname{senh}(\omega t)$. Aplicando (5.10) con $n = 2$ se tiene:

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2 \mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

de donde

$$\mathscr{L}[\omega^2 \operatorname{senh}(\omega t)] = s^2 \mathscr{L}[\operatorname{senh}(\omega t)] - s \operatorname{senh}(0) - \omega \cosh(0)$$

Hacemos las simplificaciones y se obtiene:

$$\omega^2 \mathscr{L}[\operatorname{senh}(\omega t)] = s^2 \mathscr{L}[\operatorname{senh}(\omega t)] - \omega$$

Luego

$$\mathscr{L}[\operatorname{senh}(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$$

■

[2]El seno hiperbólico de x está dado por:

$$\operatorname{senh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Asimismo, el coseno hiperbólico de x es:

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Proposición 5.1.11

$$\mathscr{L}[\cosh(\omega t)] = \frac{s}{s^2-\omega^2} \tag{5.14}$$

Demostración. Para la función coseno hiperbólico dada por $f(t) = \cosh(\omega t)$, $t \geq 0$, se tiene $f'(t) = \omega \operatorname{senh}(\omega t)$ y $f''(t) = \omega^2 \cosh(\omega t)$. Aplicando (5.10) con $n = 2$ vemos que:

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2 \mathscr{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

de donde

$$\mathscr{L}[\omega^2 \cosh(\omega t)] = s^2 \mathscr{L}[\cosh(\omega t)] - s\cosh(0) - \omega \operatorname{senh}(0)$$

Simplificamos para obtener:

$$\omega^2 \mathscr{L}[\cosh(\omega t)] = s^2 \mathscr{L}[\cosh(\omega t)] - s$$

Luego

$$\mathscr{L}[\cosh(\omega t)] = \frac{s}{s^2-\omega^2}$$

■

■ **Ejemplo 5.3** Calcule la transformada de Laplace de $f(t) = \operatorname{sen}(kt)\cosh(kt)$.

<u>Resolución</u>

Puesto que $\cosh(kt) = \frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}$, entonces

$$f(t) = \operatorname{sen}(kt)\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2} = \frac{1}{2}e^{kt}\operatorname{sen}(kt) + \frac{1}{2}e^{-kt}\operatorname{sen}(kt)$$

Luego con la linealidad de la transformada de Laplace se tiene:

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen}(kt)\cosh(kt)] = \frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{kt}\operatorname{sen}(kt)\right] + \frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{-kt}\operatorname{sen}(kt)\right] \tag{5.15}$$

Si hacemos $F(s) = \mathscr{L}[\operatorname{sen}(kt)]$, entonces de (5.11) y aplicando el teorema 5.1.4 se tiene que:

$$\mathscr{L}\left[e^{kt}\operatorname{sen}(kt)\right] = F(s-k) = \frac{k}{(s-k)^2+k^2}$$

$$\mathscr{L}\left[e^{-kt}\cos(kt)\right] = F(s+k) = \frac{k}{(s+k)^2+k^2}$$

Ponemos estos resultados en (5.15) y desarrollamos las operaciones para obtener una expresión más simple, en efecto:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\operatorname{sen}(kt)\cosh(kt)] &= \frac{1}{2}\frac{k}{(s-k)^2+k^2}+\frac{1}{2}\frac{k}{(s+k)^2+k^2} \\
&= \frac{k}{2}\frac{[(s+k)^2+k^2]+[(s-k)^2+k^2]}{[(s-k)^2+k^2][(s+k)^2+k^2]} \\
&= \frac{k}{2}\frac{2(s^2+2k^2)}{[(s^2+2k^2)-2sk][(s^2+2k^2)+2sk]} \\
&= \frac{k\left(s^2+2k^2\right)}{s^4+4k^4}
\end{aligned}$$

Luego

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen}(kt)\cosh(kt)] = \frac{k\left(s^2+2k^2\right)}{s^4+4k^4}$$

■

Teorema 5.1.12 Si $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, entonces $\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$.

Demostración. Se tiene que $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$. La convergencia uniforme respecto de s de la integral nos permite derivarla respecto de s, teniendo así:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\left[\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt\right] = \int_0^{+\infty}\frac{d}{ds}\left(e^{-st}\right)f(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty}-te^{-st}f(t)dt = -\int_0^{+\infty}e^{-st}[tf(t)]dt \\
&= -\mathscr{L}[tf(t)]
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d}{ds}F(s) = -\mathscr{L}[tf(t)]$$

luego:

$$\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\{\mathscr{L}[f(t)]\} \tag{5.16}$$

■

Aplicando en forma recursiva la propiedad (5.16) del teorema 5.1.12, podemos encontrar los siguientes resultados. Para ello suponemos que la transformada de Laplace de $f(t), t \geq 0$ siempre existe.

Aplicando (5.16) se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[t^2 f(t)] &= \mathscr{L}[t(tf(t))] = -\frac{d}{ds}\{\mathscr{L}[tf(t)]\} = -\frac{d}{ds}\left\{-\frac{d}{ds}(\mathscr{L}[f(t)])\right\} \\ &= \frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}[f(t)]\end{aligned}$$

luego

$$\mathscr{L}[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2}\{\mathscr{L}[f(t)]\}$$

Aplicando (5.16) y el resultado anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[t^3 f(t)\right] &= \mathscr{L}\left[t\left(t^2 f(t)\right)\right] = -\frac{d}{ds}\{\mathscr{L}[t^2 f(t)]\} = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{d^2}{ds^2}(\mathscr{L}[f(t)])\right\} \\ &= -\frac{d^3}{ds^3}\mathscr{L}[f(t)]\end{aligned}$$

luego

$$\mathscr{L}[t^3 f(t)] = -\frac{d^3}{ds^3}\{\mathscr{L}[f(t)]\}$$

Aplicando nuevamente (5.16) y el resultado anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[t^4 f(t)\right] &= \mathscr{L}\left[t\left(t^3 f(t)\right)\right] = -\frac{d}{ds}\{\mathscr{L}[t^3 f(t)]\} = -\frac{d}{ds}\left\{-\frac{d^3}{ds^3}(\mathscr{L}[f(t)])\right\} \\ &= \frac{d^4}{ds^4}\mathscr{L}[f(t)]\end{aligned}$$

luego

$$\mathscr{L}[t^4 f(t)] = \frac{d^4}{ds^4}\{\mathscr{L}[f(t)]\}$$

Si seguimos el proceso para exponentes mayores, aplicando inducción se tiene la siguiente proposición.

Proposición 5.1.13

$$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\{\mathscr{L}[f(t)]\}, \; n = 1, 2, \cdots \tag{5.17}$$

■ **Ejemplo 5.4** Calcule $\mathscr{L}[t^n e^{\alpha t}]$, para $n \in \mathbb{N}$.

Resolución

En primer lugar, según (5.8) se tiene $\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}$, $s > \alpha$; entonces con (5.17) vemos que

$$\mathscr{L}[t^n e^{\alpha t}] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left\{ \mathscr{L}[e^{\alpha t}] \right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left[\frac{1}{s-\alpha} \right] \qquad (*)$$

Para determinar la expresión de la derivada que aparece a la derecha en la última igualdad, hacemos los siguientes cálculos:

$$\tfrac{d}{ds}\left[\tfrac{1}{s-\alpha}\right] = \tfrac{-1}{(s-\alpha)^2} = -(s-\alpha)^{-2}.$$

$$\tfrac{d^2}{ds^2}\left[\tfrac{1}{s-\alpha}\right] = \tfrac{d}{d}\left\{\tfrac{d}{ds}\left[\tfrac{1}{s-\alpha}\right]\right\} = \tfrac{d}{ds}\left[-(s-\alpha)^{-2}\right] = 2(s-\alpha)^{-3}.$$

$$\tfrac{d^3}{ds^3}\left[\tfrac{1}{s-\alpha}\right] = \tfrac{d}{d}\left\{\tfrac{d^2}{ds^2}\left[\tfrac{1}{s-\alpha}\right]\right\} = \tfrac{d}{ds}\left[2(s-\alpha)^{-3}\right] = -3!(s-\alpha)^{-4}.$$

$$\tfrac{d^4}{ds^4}\left[\tfrac{1}{s-\alpha}\right] = \tfrac{d}{d}\left\{\tfrac{d^3}{ds^3}\left[\tfrac{1}{s-\alpha}\right]\right\} = \tfrac{d}{ds}\left[-3!(s-\alpha)^{-4}\right] = 4!(s-\alpha)^{-5}.$$

Si seguimos haciendo cálculos para exponentes naturales más grandes, por inducción es fácil darse cuenta de que

$$\frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right] = (-1)^n n!\,(s-\alpha)^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \qquad (**)$$

Ponemos (**) en (*) y se obtiene que

$$\mathscr{L}[t^n e^{\alpha t}] = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

■

■ **Ejemplo 5.5** Calcule la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = te^{-t}\,\text{sen}^2 t$$

Resolución

En primer lugar: $\text{sen}^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$, entonces

$$\mathscr{L}\left[\text{sen}^2 t\right] = \mathscr{L}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}$$

Luego, aplicando la primera propiedad de traslación

$$\mathscr{L}\left[e^{-t}\,\text{sen}^2 t\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

y aquí usamos la propiedad (5.17) para obtener

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[te^{-t}\operatorname{sen}^2 t\right] &= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right]\\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+1}\right]+\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right]\\
&= \frac{1}{2(s+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{4-(s+1)^2}{[4+(s+1)^2]^2}
\end{aligned}$$

■

Proposición 5.1.14

$$\mathscr{L}\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}},\ n=1,2,\cdots \tag{5.18}$$

Demostración. Según (5.5) y (5.17), vemos que

$$\mathscr{L}[t^n]=\mathscr{L}[t^n\cdot(1)]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\{\mathscr{L}[1]\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

Pero $\frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{s}\right]=\frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}$, entonces con esto se tiene que:

$$\mathscr{L}\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}},\ n=1,2,\cdots$$

■

Teorema 5.1.15 — Transformada de Laplace de la integral. Sea f una función seccionalmente continua y de orden exponencial en $[0,+\infty\rangle$, Si $g(t)=\int_0^t f(z)dz$, entonces $\mathscr{L}[g(t)]=\frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)]$.

Demostración. Siendo $g(t)=\int_0^t f(z)dz$, entonces $g'(t)=f(t)$, aquí aplicamos transformada de Laplace:

$$\mathscr{L}[g'(t)]=\mathscr{L}[f(t)]\Longrightarrow s\mathscr{L}[g(t)]-g(0)=\mathscr{L}[f(t)]$$

de esta última igualdad vemos que:

$$s\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\mathscr{L}[f(t)]$$

Finalmente se obtiene:

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)] \tag{5.19}$$

■

5.1.1 Transformada de Laplace de funciones especiales

Acá haremos el tratamiento de dos funciones muy interesantes debido a las aplicaciones que tienen especialmente en física, se trata de la función de Heaviside[3] y la función impulso unitario de Dirac[4].

Función de Heaviside

Definición 5.1.4 La **función de Heaviside** H con salto en t_0 se define como

$$H(t-t_0)=\begin{cases} 0, & t<t_0 \\ 1, & t>t_0 \end{cases} \tag{5.20}$$

También llamada función escalón unitario. Esta función es muy importante en aplicaciones físicas, ya sea en movimiento oscilatorio, circuitos eléctricos u otros. Para el caso de movimiento oscilatorio, nos sirve para modelar fuerzas que solo actúan en ciertos intervalos de tiempo y luego desaparecen, o en todo caso, fuerzas que empiezan a actuar desde un determinado tiempo. La representación de su gráfica lo observamos en la figura 5.6

---

[3]Oliver Heaviside es un Matemático-Físico Inglés que nació en Londres el año 1850, y falleció el año 1925. En los primeros años de su juventud fue telegrafista, y por un problema de sordera tuvo que dejar este oficio para dedicarse al estudio del fenómeno electromagnético de manera autodidacta.

En el año 1982 realiza su primera publicación **Electrical Papers**, en la cual expone diversos métodos matemáticos y uso de operadores, que en ese tiempo como suele pasar en el mundo de la Matemática, son criticados debido al inexistente fundamento matemático, sin embrago, dichos métodos resultaron ser muy eficientes en el desarrollo de diversas áreas, como es la mecánica cuántica.

Heaviside hace muchos aportes en la teoría de la relatividad de Einstein, y en el estudio matemático de la propagación de las ondas que impulsó el avance de las comunicaciones telegráficas a larga distancia. En 1891 fue nombrado miembro de la Royal Society, pero pese a los grandes aportes que hizo a la ciencia, nunca logró algún puesto académico de reconocimiento y murió en la pobreza.

[4]Paul Dirac fue un físico británico que nació en Bristol el año1902, y falleció en Tallahassee, Estados Unidos, el año 1984) Desde muy pequeño fue muy hábil con las matemáticas, para después cursar estudios de ingeniería eléctrica en la Universidad de Bristol.

Sus razonamientos siempre fueron muy intuitivos, y en todo momento trató de explicar las leyes fundamentales que rigen la naturaleza a través de modelos matemáticos lo mas aproximados que puedan explicar la realidad.

Después de graduarse ejerció la docencia en el St. John's College de Cambridge, donde estableció amistad con R. H. Fowler, quien a la vez trabajaba con Niels Bohr, lo que le permitió conectarse con los trabajos que estos dos grandes científicos en el área de física.

En 1926, enuncia las leyes que gobiernan el movimiento de las partículas atómicas. También hizo contribución en la teoría cuántica de la radiación o la mecánica estadística de Fermi-Dirac. En 1933, se le otorgó el Premio Nobel de Física, junto a Erwin Schrödinger.

Se trasladó a Estados Unidos, y en 1971 es nombrado profesor emérito de la Universidad de Tallahassee.

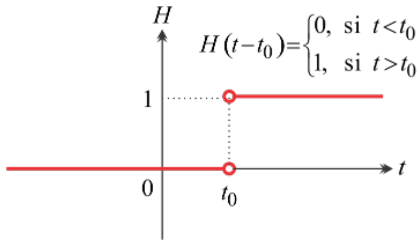


Figura 5.6: Función de Heaviside con salto en t_0.

Observación

Esta función también es conocida como la función escalón unitario, y se le denota como $U(t-t_0)$, y está definida igual que en (5.20)

Observación

Cualquier función que tenga saltos (de tipo finito) en su dominio, puede ser escrita como una combinación de la función H. Veamos los siguientes ejemplos:

■ **Ejemplo 5.6** Sea $f(t) = H(t-\alpha) + H(t-\beta) + H(t-\theta)$, con $\alpha < \beta < \theta$. En este caso, queremos escribir la función en forma explícita por intervalos. Para esto, analizamos cada una de las funciones H. Aplicando (5.20) para cada una de las H se tiene

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ t < \alpha \\ 1,\ t > \alpha \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0,\ t < \beta \\ 1,\ t > \beta \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0,\ t < \theta \\ 1,\ t > \theta \end{array} \right\}$$

Aquí, analizamos por intervalos.

Para $t < \alpha$: $H(t-\alpha) = H(t-\beta) = H(t-\theta) = 0$, entonces $f(t) = 0$.

Para $\alpha < t < \beta$: $H(t-\alpha) = 1, H(t-\beta) = H(t-\theta) = 0$, entonces $f(t) = 1$.

Para $\beta < t < \theta$: $H(t-\alpha) = 1$, $H(t-\beta) = 1$ y $H(t-\theta) = 0$, entonces $f(t) = 2$.

Para $t > \theta$: $H(t-\alpha) = 1, H(t-\beta) = 1$ y $H(t-\theta) = 1$, entonces $f(t) = 3$.

Así resulta que

$$f(t) = \begin{cases} 0, \; t < \alpha \\ 1, \; \alpha < t < \beta \\ 2, \; \beta < t < \theta \\ 3, \; t > \theta \end{cases}$$

■

La representación de su gráfica esta en la Figura 5.7 . En forma general, si

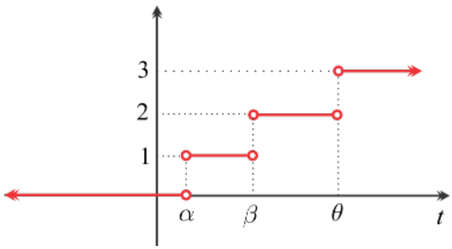


Figura 5.7: Representación de la gráfica de $f(t) = H(t-\alpha) + H(t-\beta) + H(t-\theta)$, con $\alpha < \beta < \theta$.

tomamos los puntos $t_1, t_2, \cdots, t_n$, con $t_k < t_{k+1}$, $\forall k = 1, \cdots, n$ y la función

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} H(t - t_k)$$

entonces, con el mismo procedimiento del ejemplo que acabamos de analizar, se cumple:

$$f(t) = H(t-t_1) + H(t-t_2) + \cdots + H(t-t_n) = \begin{cases} 0, \; t < t_1 \\ 1, \; t_1 < t < t_2 \\ 2, \; t_2 < t < t_3 \\ \vdots \\ n-1, \; t_{n-1} < t < t_n \\ n, \; t > t_n \end{cases} \tag{5.21}$$

En (5.21) si nos restringimos al intervalo $\langle t_{n-1}, t_n \rangle$ se tiene:

$$f(t) = n - 1, \; t \in \langle t_{n-1}, t_n \rangle$$

La gráfica de esta función es escalonada tal como se como se muestra en la figura 5.8

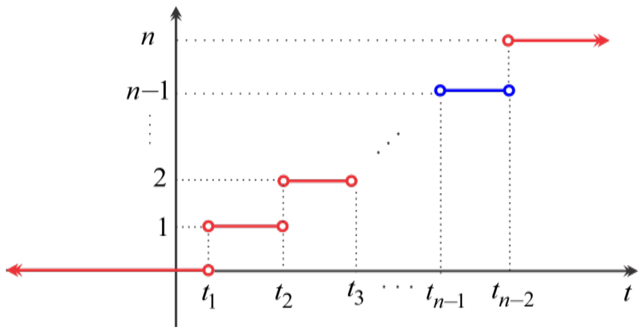


Figura 5.8: Representación de la gráfica de $f(t)=\sum_{k=1}^{n} H(t-t_k)$.

■ **Ejemplo 5.7** En este ejemplo tomaremos la suma y diferencia de funciones H alternadamente, y veremos qué sucede. En efecto, tomemos puntos $t_k < t_{k+1}$, para $k=1,2,\cdots,n$.

$$
\begin{aligned}
H(t-t_1)-H(t-t_2) &= \left\{\begin{matrix} 0, & t<t_1 \\ 1, & t>t_1 \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 0, & t<t_2 \\ 1, & t>t_2 \end{matrix}\right\} \\
&= \begin{cases} 0, & t<t_1 \\ 1, & t_1<t<t_2 \\ 0, & t>t_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Aplicando este resultado, hacemos el siguiente:

$$
\begin{aligned}
H(t-t_1)-H(t-t_2)+H(t-t_3) &= \left\{\begin{matrix} 0, & t<t_1 \\ 1, & t_1<t<t_2 \\ 0, & t>t_2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 0, & t<t_3 \\ 1, & t>t_3 \end{matrix}\right\} \\
&= \begin{cases} 0, & t<t_1 \\ 1, & t_1<t<t_2 \\ 0, & t_2<t<t_3 \\ 1, & t>t_3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

A partir de este caso, es fácil darse cuenta que

$$
\sum_{k=1}^{n(\text{impar})} (-1)^{k+1} H(t-t_k) = \begin{cases} 0, & t<t_1 \\ 1, & t_1<t<t_2 \\ 0, & t_2<t<t_3 \\ \vdots \\ 0, & t_{n-1}<t<t_n \\ 1, & t>t_n \end{cases}
$$

y

$$\sum_{k=1}^{n(\text{par})} (-1)^{k+1} H(t-t_k) = \begin{cases} 0, \ t < t_1 \\ 1, \ t_1 < t < t_2 \\ 0, \ t_2 < t < t_3 \\ \vdots \\ 1, \ t_{n-1} < t < t_n \\ 0, \ t > t_n \end{cases}$$

■

La representación de las gráficas para el caso n impar y par se muestran respectivamente en las figuras 5.9 y 5.10

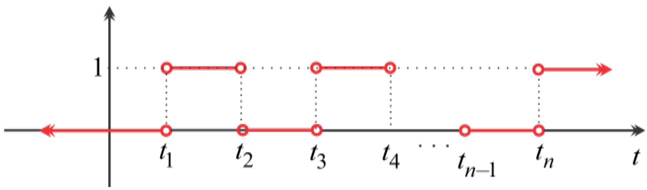


Figura 5.9: Representación de la gráfica de $f(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} H(t-t_k)$, n es impar.

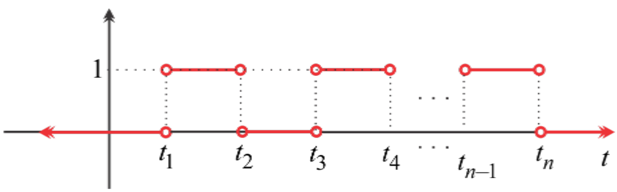


Figura 5.10: Representación de la gráfica de $f(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} H(t-t_k)$, n es par.

De este ejemplo, si tomamos la suma infinita

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} H(t-k), \ t > 0$$

entonces $f(t)$ también se escribe como

$$f(t)=\begin{cases}0,\ 0<t<1\\ 1,\ 1<t<2\\ 0,\ 2<t<3\\ 1,\ 3<t<4\\ \vdots\end{cases} \tag{5.22}$$

Aquí vemos que $f(t)$ es una función periódica en el intervalo $[0,+\infty\rangle$.

■ **Ejemplo 5.8** En la función $f(t)=\begin{cases}f_1(t),\ t<t_1\\ f_2(t),\ t>t_1\end{cases}$, vemos que el salto ocurre en t_1. Si tomamos la función de Heaviside con salto en $t=t_1$, vemos que[5]

$$[f_2(t)-f_1(t)]H(t-t_1)=\begin{cases}0,\ t<t_1\\ f_2(t)-f_1(t),\ t>t_1\end{cases}$$

y si a esto le adicionamos $f_1(t)$ resulta:

$$\begin{aligned}f_1(t)+[f_2(t)-f_1(t)]H(t-t_1) &= f_1(t)+\left\{\begin{array}{l}0,\ t<t_1\\ f_2(t)-f_1(t),\ t>t_1\end{array}\right\}\\ &= \left\{\begin{array}{l}f_1(t),\ t<t_1\\ f_1(t)+f_2(t)-f_1(t),\ t>t_1\end{array}\right.\\ &= \left\{\begin{array}{l}f_1(t),\ t<t_1\\ f_2(t),\ t>t_1\end{array}\right.\\ &= f(t)\end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$f(t)=\begin{cases}f_1(t),\ t<t_1\\ f_2(t),\ t>t_1\end{cases}=f_1(t)+[f_2(t)-f_1(t)]H(t-t_1) \tag{5.23}$$

■

■ **Ejemplo 5.9** Tomemos ahora la función $f(t)=\begin{cases}f_1(t),\ t<t_1\\ f_2(t),\ t_1<t<t_2\\ f_3(t),\ t>t_2\end{cases}$, con $t_1<t_2<t_3$. Aquí la función presenta dos saltos, uno en t_1 y el otro en t_2. Si tomamos la función de Heaviside con salto en $t=t_1$, y aplicamos en forma directa (5.23) vemos que para $t<t_2$ se tiene:

$$\begin{cases}f_1(t),\ t<t_1\\ f_2(t),\ t>t_1\end{cases}=f_1(t)+[f_2(t)-f_1(t)]H(t-t_1)$$

[5] Para operar con la función de Heaviside, se supone que f_1, f_2 están definidas en todo $\mathbb{R}$.

Ahora, si tomamos $t > t_1$, entonces desarrollando $f_2 + [f_3(t) - f_2(t)]H(t-t_2)$ se tiene:

$$\begin{aligned} f_2(t) + [f_3(t) - f_2(t)]H(t-t_2) &= f_2(t) + \left\{ \begin{array}{l} 0,\ t < t_2 \\ f_3(t) - f_2(t),\ t > t_2 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f_2(t),\ t < t_2 \\ f_2(t) + f_3(t) - f_2(t),\ t > t_2 \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f_2(t),\ t < t_2 \\ f_3(t),\ t > t_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Luego con estos resultados se tiene:

Para $t < t_1$,

$$f_1(t) + [f_2(t) - f_1(t)]\underbrace{H(t-t_1)}_{=0} + [f_3(t) - f_2(t)]\underbrace{H(t-t_2)}_{=0} = f_1(t)$$

Para $t_1 < t < t_2$,

$$f_1(t) + [f_2(t) - f_1(t)]\underbrace{H(t-t_1)}_{=1} + [f_3(t) - f_2(t)]\underbrace{H(t-t_2)}_{=0} = f_2(t)$$

Para $t > t_2$,

$$f_1(t) + [f_2(t) - f_1(t)]\underbrace{H(t-t_1)}_{=1} + [f_3(t) - f_2(t)]\underbrace{H(t-t_2)}_{=1} = f_3(t)$$

Finalmente usando la función de Heaviside, la función $f(t)$ la reescribimos así

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(t),\ t < t_1 \\ f_2(t),\ t_1 < t < t_2 \\ f_3(t),\ t > t_2 \end{array} \right. = f_1(t) + [f_2(t) - f_1(t)]H(t-t_1) + [f_3(t) - f_2(t)]H(t-t_2) \tag{5.24}$$

■

Si con estos dos últimos ejemplos nos atrevemos a hacer un generalización, vemos que para puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$, se cumple

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(t),\ t < t_1 \\ f_2(t),\ t_1 < t < t_2 \\ \vdots \\ f_n(t),\ t_{n-1} < t < t_n \\ f_{n+1}(t),\ t > t_n \end{array} \right. = f_1(t) + \sum_{k=1}^{n} [f_{k+1}(t) - f_k(t)]H(t-t_k) \tag{5.25}$$

■ **Ejemplo 5.10** Considere la función $f(t)=\begin{cases}-1,\ t<1\\ t^2+2t,\ 1<t<3\\ 1-t,\ t>3\end{cases}$. Aplicando directamente (5.25) se tiene:

$$f(t)=-1+[(t^2+2t)-(-1)]H(t-1)+[(1-t)-(t^2+2t)]H(t-2)$$

de donde

$$f(t)=-1+(t+1)^2H(t-1)+(1-3t-t^2)H(t-2)$$

■

Proposición 5.1.16 Sea $t_0\geq 0$, entonces $\mathscr{L}[H(t-t_0)]=\frac{e^{-t_0s}}{s}$, con $s>0$.

Demostración. Como $t_0\geq 0$, entonces ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[H(t-t_0)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}H(t-t_0)dt\\
&= \int_0^{t_0} e^{-st}H(t-t_0)dt+\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}H(t-t_0)dt,\ \text{aplicamos (5,20)}\\
&= \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st}dt=\int_0^{+\infty} e^{-s(t+t_0)}dt\\
&= e^{-t_0}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt=e^{-t_0}\mathscr{L}[1]\\
&= \frac{e^{-t_0}}{s},\ s>0
\end{aligned}$$

Así se demuestra que

$$\mathscr{L}[H(t-t_0)]=\frac{e^{-t_0s}}{s},\ t_0\geq 0 \tag{5.26}$$

■

A continuación analizamos el efecto que causa la función H sobre otra función al realizar la multiplicación. En efecto, sea la función $f(t)$ definida en $\mathbb{R}$, si consideramos la función $g(t)=f(t)H(t-t_0)$, entonces acontece que

$$g(t)=f(t)\begin{Bmatrix}0,\ t<t_0\\ 1,\ t>t_0\end{Bmatrix}=\begin{cases}0,\ t<t_0\\ f(t),\ t>t_0\end{cases}$$

Acá podemos ver que el efecto de la función $f(t)$ se anuló para $t<t_0$, quedando solo el efecto para $t>t_0$.

Ahora, vamos a suponer que tenemos una función $f(t)$, $t \geq 0$ como en la figura 5.11 ; si tomamos el producto $f(t)H(t-t_0)$ para $t_0 > 0$, en forma similar al caso visto anteriormente, se tendrá que el efecto de la función $f(t)$ en el intervalo $[0,t_0]$ se anula, quedando solo el efecto de $\langle t_0,+\infty\rangle$, esto lo ilustramos en la figura 5.12. Pero en cuestión de aplicaciones, podría ocurrir que la información que nos da la función en $[0,t_0]$ sea demasiado importante, entonces es necesario que todo el efecto de la función se traslade de tal manera que $f(t)$ actúe en su totalidad desde t_0. Para esto, ponemos $g(t) = f(t-t_0)H(t-t_0)$, así tenemos que:

$$g(t) = f(t-t_0)\left\{\begin{matrix} 0, \; t < t_0 \\ 1, \; t > t_0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0, \; t < t_0 \\ f(t-t_0), \; t > t_0 \end{matrix}\right.$$

Es decir, todo el efecto de la función $f(t)$ empieza a actuar desde t_0, esto se ilustra en la figura 5.13.

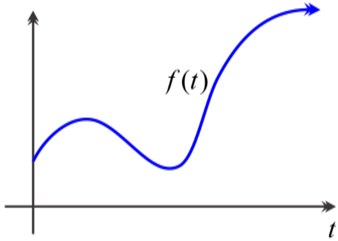


Figura 5.11: Gráfica de $f(t)$.

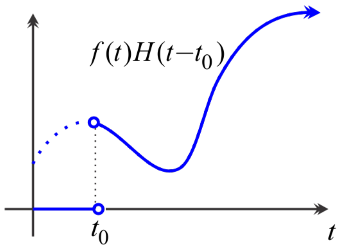


Figura 5.12: Gráfica de $f(t)H(t-t_0)$.

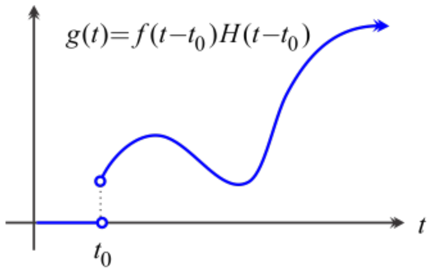


Figura 5.13: Gráfica de $g(t) = f(t-t_0)H(t-t_0)$.

Teorema 5.1.17 — Segunda propiedad de traslación. Sea $t_0 \geq 0$, si la transformada de Laplace de $f(t)$ existe y $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, entonces

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\mathscr{L}[f(t)] = e^{-t_0 s}F(s) \tag{5.27}$$

Demostración. En primer lugar se tiene:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt < \infty$$

Desarrollando la transformada de Laplace de la función $g(t) = f(t-t_0)H(t-t_0)$, donde $t_0 \geq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t-t_0)H(t-t_0)dt \\
&= \int_0^{t_0} e^{-st} f(t-t_0)H(t-t_0)dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(t-t_0)H(t-t_0)dt, \text{ aplicamos } (5{,}20) \\
&= \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(t-t_0)dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(t+t_0)} f(t)dt \\
&= e^{-t_0 s}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \\
&= e^{-t_0 s}\mathscr{L}[f(t)]
\end{aligned}$$

Por lo tanto hemos demostrado que

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\mathscr{L}[f(t)] = e^{-t_0 s}F(s)$$

■

■ **Ejemplo 5.11** Sea $t_0 > 0$, y $f(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq t < t_0 \\ \operatorname{sen}(\alpha t), \ t > t_0 \end{cases}$, calcule $\mathscr{L}[f(t)]$.

<u>Resolución</u>

En primer lugar, hay que expresar la función f en términos de la función de heaviside, para eso aplicamos directamente (5.23) y se tiene

$$f(t) = \operatorname{sen}(\alpha t)H(t - t_0)$$

Aquí, para determinar la transformada de Laplace de $f(t)$ aplicando el teorema 5.1.17, no se puede hacer así directamente, antes hay que darle forma a la función de tal manera que se tiene que hacer aparecer la expresión $(t - t_0)$ en el argumento, veamos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha t) &= \operatorname{sen}[\alpha(t - t_0 + t_0)] = \operatorname{sen}[\alpha(t - t_0) + \alpha t_0] \\ &= \cos(\alpha t_0)\operatorname{sen}[\alpha(t - t_0)] + \operatorname{sen}(\alpha t_0)\cos[\alpha(t - t_0)] \end{aligned}$$

Con este resultado se tiene

$$f(t) = \cos(\alpha t_0)\operatorname{sen}[\alpha(t - t_0)]H(t - t_0) + \operatorname{sen}(\alpha t_0)\cos[\alpha(t - t_0)]H(t - t_0)$$

Ahora aplicamos (5.27) para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f(t)] &= \cos(\alpha t_0)\mathscr{L}[\operatorname{sen}(\alpha(t - t_0))H(t - t_0)] \\ &\quad + \operatorname{sen}(\alpha t_0)\mathscr{L}[\cos(\alpha(t - t_0))H(t - t_0)] \\ &= \cos(\alpha t_0)e^{-t_0 s}\mathscr{L}[\operatorname{sen}(\alpha t)] + \operatorname{sen}(\alpha t_0)e^{-t_0 s}\mathscr{L}[\cos(\alpha t)] \\ &= \cos(\alpha t_0)e^{-t_0 s}\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} + \operatorname{sen}(\alpha t_0)e^{-t_0 s}\frac{s}{s^2 + \alpha^2} \\ &= \frac{\alpha\cos(\alpha t_0)e^{-t_0 s}}{s^2 + \alpha^2} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha t_0)e^{-t_0 s}s}{s^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

Luego

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{\alpha\cos(\alpha t_0)e^{-t_0 s}}{s^2 + \alpha^2} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha t_0)e^{-t_0 s}s}{s^2 + \alpha^2}$$

■

■ **Ejemplo 5.12** Sean los números t_1, t_2 tales que $0 < t_1 < t_2$ y la función $f(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq t < t_1 \\ te^{\alpha t}, \ t_1 < t < t_2 \\ 0, \ t > t_2 \end{cases}$. Calcule su transformada de Laplace.

<u>Resolución</u>

Como es una función de tres partes, aplicamos (5.24) para obtener:

$$f(t) = te^{\alpha t}H(t-t_1) - te^{\alpha t}H(t-t_2),\ t \geq 0$$

Ahora, para poder calcular la transformada de Laplace según la segunda propiedad de traslación (ver teorema 5.1.17), hay que arreglar dicha función convenientemente, así tenemos:

$$te^{\alpha t} = (t-t^*+t^*)e^{\alpha(t-t^*+t^*)} = e^{\alpha t^*}(t-t^*)e^{\alpha(t-t^*)} + t^*e^{\alpha t^*}e^{\alpha(t-t^*)}$$

luego, aplicando esta equivalencia para $t^* = t_1$ y $t^* = t_2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left\{e^{\alpha t_1}(t-t_1)e^{\alpha(t-t_1)} + t_1 e^{\alpha t_1}e^{\alpha(t-t_1)}\right\}H(t-t_1) \\
&\quad -\left\{e^{\alpha t_2}(t-t_2)e^{\alpha(t-t_2)} + t_2 e^{\alpha t_2}e^{\alpha(t-t_2)}\right\}H(t-t_2) \\
&= e^{\alpha t_1}(t-t_1)e^{\alpha(t-t_1)}H(t-t_1) + t_1 e^{\alpha t_1}e^{\alpha(t-t_1)}H(t-t_1) \\
&\quad -e^{\alpha t_2}(t-t_2)e^{\alpha(t-t_2)}H(t-t_2) - t_2 e^{\alpha t_2}e^{\alpha(t-t_2)}H(t-t_2)
\end{aligned}$$

Luego, aplicamos transformada de Laplace y (5.27) teniendo así:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t)] &= e^{\alpha t_1}\mathscr{L}\left[(t-t_1)e^{\alpha(t-t_1)}H(t-t_1)\right] + t_1 e^{\alpha t_1}\mathscr{L}\left[e^{\alpha(t-t_1)}H(t-t_1)\right] \\
&\quad -e^{\alpha t_2}\mathscr{L}\left[(t-t_2)e^{\alpha(t-t_2)}H(t-t_2)\right] - t_2 e^{\alpha t_2}\mathscr{L}\left[e^{\alpha(t-t_2)}H(t-t_2)\right] \\
&= e^{\alpha t_1}e^{-t_1 s}\mathscr{L}\left[te^{\alpha t}\right] + t_1 e^{\alpha t_1}e^{-t_1 s}\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}\right] - e^{\alpha t_2}e^{-t_2 s}\mathscr{L}\left[te^{\alpha t}\right] \\
&\quad -t_2 e^{\alpha t_2}e^{-t_2 s}\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}\right] \\
&= e^{-t_1(s-\alpha)}\mathscr{L}\left[te^{\alpha t}\right] + t_1 e^{-t_1(s-\alpha)}\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}\right] - e^{-t_2(s-\alpha)}\mathscr{L}\left[te^{\alpha t}\right] \\
&\quad -t_2 e^{-t_2(s-\alpha)}\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}\right]
\end{aligned}$$

Pero $\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}$ y $\mathscr{L}[te^{\alpha t}] = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t)] &= e^{-t_1(s-\alpha)}\frac{1}{(s-\alpha)^2} + t_1 e^{-t_1(s-\alpha)}\frac{1}{s-\alpha} - e^{-t_2(s-\alpha)}\frac{1}{(s-\alpha)^2} \\
&\quad -t_2 e^{-t_2(s-\alpha)}\frac{1}{s-\alpha} \\
&= \frac{e^{-t_1(s-\alpha)} - e^{-t_2(s-\alpha)}}{(s-\alpha)^2} + \frac{t_1 e^{-t_1(s-\alpha)} - t_2 e^{-t_2(s-\alpha)}}{s-\alpha}
\end{aligned}$$

Así se tiene:

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{e^{-t_1(s-\alpha)} - e^{-t_2(s-\alpha)}}{(s-\alpha)^2} + \frac{t_1 e^{-t_1(s-\alpha)} - t_2 e^{-t_2(s-\alpha)}}{s-\alpha}$$

■

■ **Ejemplo 5.13** Calcule la transformada de Laplace de la función

$$f(t)=\begin{cases}0,\ 0\leq t<3\pi\\ t\cos(t),\ 3\pi<t<6\pi\\ 0,\ t>6\pi\end{cases}$$

Resolución

Aplicando (5.24) se tiene

$$f(t)=t\cos(t)H(t-3\pi)-t\cos(t)H(t-6\pi)$$

Pero $\cos(t)=-\cos(t-3\pi)$ y $\cos(t)=\cos(t-6\pi)$, entonces con estas equivalencias se tiene

$$f(t)=-t\cos(t-3\pi)H(t-3\pi)-t\cos(t-6\pi)H(t-6\pi)$$

o también

$$f(t)=-t[\cos(t-3\pi)H(t-3\pi)+\cos(t-6\pi)H(t-6\pi)]$$

En este caso procedemos a calcular primero la transformada de Laplace de $g(t)=\cos(t-3\pi)H(t-3\pi)+\cos(t-6\pi)H(t-6\pi)$, para lo cual usamos (5.27)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[g(t)] &= \mathscr{L}[\cos(t-3\pi)H(t-3\pi)+\cos(t-6\pi)H(t-6\pi)]\\ &= \mathscr{L}[\cos(t-3\pi)H(t-3\pi)]+\mathscr{L}[\cos(t-6\pi)H(t-6\pi)]\\ &= e^{-3\pi s}\mathscr{L}[\cos(t)]+e^{-6\pi s}\mathscr{L}[\cos(t)]\\ &= \frac{e^{-3\pi s}s}{s^2+1}+\frac{e^{-6\pi s}s}{s^2+1}\end{aligned}$$

Luego

$$\mathscr{L}[\cos(t-3\pi)H(t-3\pi)+\cos(t-6\pi)H(t-6\pi)]=\frac{e^{-3\pi s}s}{s^2+1}+\frac{e^{-6\pi s}s}{s^2+1}$$

Ahora, para determinar la transformada de Laplace de $f(t)$ aplicamos (5.17), así se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)] &= \mathscr{L}[-t\cos(t-3\pi)H(t-3\pi)-t\cos(t-6\pi)H(t-6\pi)]\\ &= -\mathscr{L}[t\cos(t-3\pi)H(t-3\pi)+t\cos(t-6\pi)H(t-6\pi)]\\ &= -(-1)\frac{d}{ds}\left\{\mathscr{L}[\cos(t-3\pi)H(t-3\pi)+\cos(t-6\pi)H(t-6\pi)]\right\}\\ &= \frac{d}{ds}\left\{\frac{e^{-3\pi s}s}{s^2+1}+\frac{e^{-6\pi s}s}{s^2+1}\right\}\\ &= -\frac{e^{-3\pi s}\left(3\pi s^3+3\pi s+s^2-1\right)}{(s^2+1)^2}-\frac{e^{-6\pi s}\left(6\pi s^3+6\pi s+s^2-1\right)}{(s^2+1)^2}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\mathscr{L}[f(t)] = -\frac{e^{-3\pi s}\left(3\pi s^3+3\pi s+s^2-1\right)+e^{-6\pi s}\left(6\pi s^3+6\pi s+s^2-1\right)}{(s^2+1)^2}$$

■

■ **Ejemplo 5.14** Calcule la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = \begin{cases} t,\ 0 \leq t < 2 \\ 0,\ 2 \leq t < 3 \\ t^2-3t+1,\ t \geq 3 \end{cases}$$

<u>Resolución</u>

Aplicando (5.24), reescribimos la función para obtener:

$$f(t) = t - tH(t-2) + (t^2-3t+1)H(t-3)$$

Como se debe aplicar la segunda propiedad de traslación (5.27), primero se tiene que hacer algunos arreglos para la función, así tenemos:

$$\begin{aligned} f(t) &= t-(t-2+2)H(t-2)+[(t^2-6t+9)+(3t-8)]H(t-3) \\ &= t-(t-2)H(t-2)-2H(t-2)+(t-3)^2H(t-3) \\ &\quad +[3(t-3)+1]H(t-3) \\ &= t-(t-2)H(t-2)-2H(t-2)+(t-3)^2H(t-3) \\ &\quad +3(t-3)H(t-3)+H(t-3) \end{aligned}$$

luego aplicando la transformada de Laplace vemos que:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[f(t)] &= \mathscr{L}[t]-\mathscr{L}[(t-2)H(t-2)]-2\mathscr{L}[H(t-2)] \\ &\quad +\mathscr{L}\left[(t-3)^2H(t-3)\right]+3\mathscr{L}[(t-3)H(t-3)]+\mathscr{L}[H(t-3)] \\ &= \frac{1}{s^2}-e^{-2s}\mathscr{L}[t]-2\frac{e^{-2s}}{s}+e^{-3s}\mathscr{L}[t^2]+3e^{-3s}\mathscr{L}[t]+\frac{e^{-3s}}{s} \\ &= \frac{1}{s^2}-e^{-2s}\frac{1}{s^2}-2\frac{e^{-2s}}{s}+e^{-3s}\frac{2}{s^3}+3e^{-3s}\frac{1}{s^2}+\frac{e^{-3s}}{s} \\ &= \frac{1-e^{-2s}-2se^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-3s}\left(2+3s+s^2\right)}{s^3} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1-e^{-2s}-2se^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-3s}\left(2+3s+s^2\right)}{s^3}$$

■

■ **Ejemplo 5.15** Calcule la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H(t-n),\ t \geq 0$$

Resolución

En primer lugar se tiene que

$$\mathscr{L}[H(t-n)] = \frac{e^{-ns}}{s}$$

entonces aplicando transformada de Laplace a la función $f(t)$ y usando la linealidad se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t)] &= \mathscr{L}\left[\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H(t-n)\right] \\
&= \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathscr{L}[H(t-n)] = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-ns}}{s} \\
&= \frac{1}{10s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(e^s)^n}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{10s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(e^s)^n}$$

Como $0 < \frac{1}{e^s} < 1$, $\forall s > 0$, entonces[6]

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{10s}\frac{1}{1+e^{-s}}$$

■

Función impulso unitario de Dirac

Antes de dar la definición de la función impulso unitario de Dirac, surge la pregunta: ¿qué se entiende por función impulso? Para responder a esta pregunta, hacemos un breve recorrido por el término físico de cantidad de movimiento e impulso.

[6] Tenga en cuenta de que para $|x| < 1$ se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

En física se define la **cantidad de movimiento** como el producto de la masa por su velocidad, es decir:

$$\text{Cantidad de movimiento} = masa \times velocidad$$

para entender esto, imaginemos dos cuerpos en movimiento, un mototaxi y un camión, con igual rapidez, ¿cuál será más difícil de detener?, pues obviamente que el camión, esto porque tiene más movimiento que el mototaxi, debido a la mayor cantidad de su masa.

Ahora, suponemos que la cantidad de movimiento de un objeto cambia, para que esto ocurra, debe acontecer que dicho objeto cambia su masa, o cambia su velocidad, o ambas. Pero que tal si hacemos que en el movimiento, la masa m del objeto permanezca constante, entonces obviamente tiene que cambiar la velocidad. Ahora, al cambiar la velocidad, debe producirse una aceleración, la pregunta ahora es ¿qué ente físico puede producir aceleración en el movimiento del objeto?, aquí, la respuesta es una fuerza; mientras más intensa sea la fuerza, mayor será el cambio en la velocidad. Asimismo, el cambio en la velocidad también dependerá del intervalo de tiempo en que se aplique la fuerza, a mayor intervalo de tiempo, mayor será el cambio en la velocidad. Si la fuerza es F, a es la aceleración y v es la velocidad del objeto, entonces

$$F = ma = \frac{d}{dt}(mv)$$

de esta equivalencia vemos que

$$F\,dt = d(mv) \tag{5.28}$$

lo cual significa que el cambio en la cantidad de movimiento es igual a la fuerza F aplicada durante un intervalo de tiempo. Si tomamos el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ e integramos (5.28), entonces es fácil ver que

$$\int_{t_0}^{t_1} F\,dt = \int_{t_0}^{t_1} d(mv) = mv(t_1) - mv(t_0)$$

Así, la diferencia (o el cambio) en la cantidad de movimiento en t_1 y t_0, será llamado impulso, que no es otra cosa que la integral de la fuerza aplicada al objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$. Denotando al impulso con I, se tiene que

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F\,dt \tag{5.29}$$

Suponiendo que la fuerza aplicada en $[t_0, t_1]$ es constante, entonces de (5.29) se tiene que el impulso es

$$I = F \cdot (t_1 - t_0)$$

A continuación, procederemos a construir la función impulso unitario de Dirac, de una manera puramente intuitiva, para ello, hacemos las siguientes especificaciones. Suponemos que la fuerza es constante, es decir $F(t) = F_0$, $t_1 = t_0 + \delta$ y el impulso es $I = 1$ para cualquier valor de δ. Si hacemos $\delta \to 0^+$, ¿cómo deberíamos tomar F_0 para que el impulso siempre sea 1?. En la figura (5.14) nos muestra la idea de cómo debemos tomar F_0 para que el impulso sea siempre 1. Así, en dicha figura vemos que a medida que δ toma valores

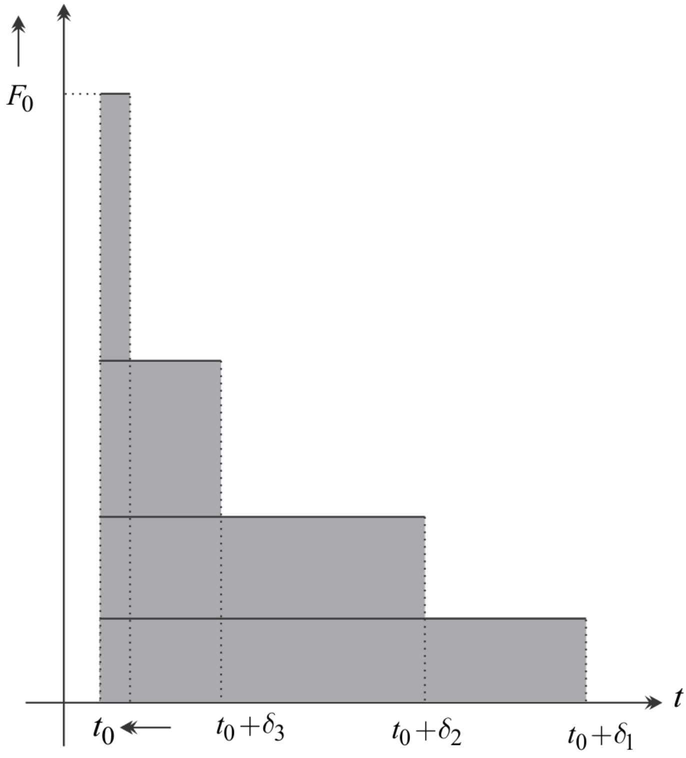


Figura 5.14: A medida que δ va asumiendo los valores de δ_1, δ_2, δ_3, y así sucesivamente tendiendo a cero, la altura del rectáguno de área 1, que está dado por F_0, claramente se dispara hacia arriba.

cercanos a cero, F_0 asume valores cada vez más grandes para que el impulso siempre sea $I = 1$. Intuitivamente, en el límite, osea en el instante $t = t_0$, debe acontecer que la función que hace el papel de la fuerza, debe comportarse como la función impulso de Dirac que se define a continuación.

Definición 5.1.5 Sea $t_0 \in \mathbb{R}$, la función impulso unitario de Dirac en t_0 se define mediante

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ +\infty, & t = t_0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \tag{5.30}$$

Aplicando la **propiedad selectora**[7] de la función impulso de Dirac se demuestra la siguiente proposición

Proposición 5.1.18 Para $t_0 \geq 0$ se tiene

$$\mathscr{L}[\delta(t-t_0)] = e^{-t_0 s} \tag{5.31}$$

Si nos fijamos para $t_0 = 0$, se tiene que $\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$ y no satisface el teorema 5.1.24, estas cosas raras ocurren principalmente porque la función impulso de Dirac, es un caso especial de función.

5.1.2 Convolución de funciones

Es una operación muy importante que se da en término de una integral, para lo cual es necesario que el producto de dos funciones sea integrable. Más adelante veremos muchas aplicaciones de esta función, más que todo en la resolución de ecuaciones diferenciales y el cálculo de la transformada inversa de Laplace.

Definición 5.1.6 Sean las funciones f y g definidas para $t \geq 0$, **la convolución** de f con g es

$$f(t) * g(t) = (f * g)(t) := \int_0^t f(u)g(t-u)du \tag{5.32}$$

La siguiente proposición muestra las propiedades elementales para este tipo de operación[8].

Proposición 5.1.19 Para funciones f, g y h cualesquiera se tiene que

1. $f * g = g * f$ (Propiedad conmutativa)
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$ (Propiedad asociativa)
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$ (Propiedad distributiva)

[7] La propiedad selectora de la función impulso de Dirac, consiste en lo siguiente: Si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en t_0, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

[8] Invitamos al estudiante que haga la demostración de la proposición.

A continuación resolvemos algunos ejemplos para ilustrar el proceso de esta operación.

■ **Ejemplo 5.16** Calcule: $1 * \operatorname{sen}(bt)$

Resolución

Sea $f(t) = 1$ y $g(t) = \operatorname{sen}(bt)$, aplicando (5.32) se tiene en este caso que la convolución de f con g es como sigue:

$$\begin{aligned}
1 * \operatorname{sen}(bt) &= \int_0^t f(u)g(t-u)du, \text{ pero es más fácil conmutar} \\
&= \int_0^t g(u)f(t-u)du = \int_0^t \operatorname{sen}(bu) \cdot 1du \\
&= -\frac{1}{b}\{\cos(bu)\}_0^t = -\frac{1}{b}[\cos(bt) - 1] \\
&= \frac{1}{b}[1 - \cos(bt)]
\end{aligned}$$

Luego

$$1 * \operatorname{sen}(bt) = \frac{1}{b}[1 - \cos(bt)]$$

■

■ **Ejemplo 5.17** Calcule: $e^{at} * \cos(bt)$

Resolución

Aplicamos (5.32), asimismo la propiedad conmutativa:

$$\begin{aligned}
e^{at} * \cos(bt) &= \cos(bt) * e^{at} = \int_0^t \cos(bu)e^{a(t-u)}du \\
&= e^{at}\int_0^t \cos(bu)e^{-au}du \\
&= e^{at}\left\{\frac{be^{-au}\operatorname{sen}(bu) - ae^{-au}\cos(bu)}{a^2+b^2}\right\}_0^t \\
&= \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left\{be^{-au}\operatorname{sen}(bu) - ae^{-au}\cos(bu)\right\}_0^t \\
&= \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left[be^{-at}\operatorname{sen}(bt) - ae^{-at}\cos(bt) + a\right] \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\operatorname{sen}(bt) - a\cos(bt) + ae^{at}\right]
\end{aligned}$$

■

Teorema 5.1.20 Si la transformada de Laplace de las funciones f y g existen, además $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ y $G(s) = \mathscr{L}[g(t)]$, entonces

$$\mathscr{L}[f(t) * g(t)] = \mathscr{L}[f(t)]\mathscr{L}[g(t)] = F(s)G(s) \tag{5.33}$$

■ **Ejemplo 5.18** Sea $f(t) = \int_0^t ue^u \operatorname{sen}(t-u)du$, calcule $\mathscr{L}[f(t)]$.

Resolución

Para empezar, si nos fijamos en la definición 5.32, lo que tenemos aquí es una convolución de dos funciones, es decir:

$$f(t) = \int_0^t ue^u \operatorname{sen}(t-u)du = te^t * \operatorname{sen}(t)$$

Si aplicamos (5.33), entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t)] &= \mathscr{L}[te^t * \operatorname{sen}(t)] = \mathscr{L}[te^t]\mathscr{L}[\operatorname{sen}(t)] \\
&= -\frac{d}{ds}\left[\mathscr{L}[e^t]\right]\frac{1}{s^2+1} \\
&= -\frac{1}{s^2+1}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-1}\right] \\
&= \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{(s-1)^2}
\end{aligned}$$

■

5.1.3 Transformada de Laplace de una función periódica

Definición 5.1.7 Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica, de período $T > 0$, si satisface que:

$$f(t+T) = f(t),\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{5.34}$$

La representación de la gráfica de una función periódica es similar a la que se muestra en la figura 5.15

■ **Ejemplo 5.19** La función $f(t) = \operatorname{sen}(wt)$ tiene período $T = \frac{2\pi}{w}$, pues $\forall t \in \mathbb{R}$

$$f(t+T) = \operatorname{sen}\left(w\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)\right) = \operatorname{sen}(wt+2\pi) = \operatorname{sen}(wt) = f(t)$$

■

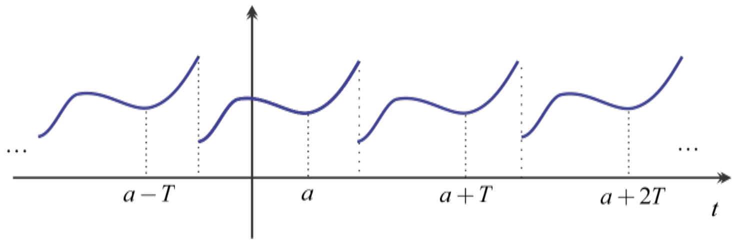


Figura 5.15: Función periódica de periodo T.

Observación

Entenderemos como período fundamental (o simplemente período) de la función $f(t)$, al menor número positivo T que satisface (5.34).

Teorema 5.1.21 Sea f una función seccionalmente continua en $[0,+\infty\rangle$ y de orden exponencial. Si f es periódica, con período T, entonces

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \tag{5.35}$$

Demostración. Como la función f tiene período T, entonces $f(t+T) = f(t)$, $\forall t \geq 0$, a partir de esto

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t)] &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^{2T} f(t)e^{-st}dt + \int_{2T}^{3T} f(t)e^{-st}dt + \cdots \\
&= \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_0^T f(t+T)e^{-s(t+T)}dt \\
&\quad + \int_0^T f(t+2T)e^{-s(t+2T)}dt + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(t+nT)e^{-s(t+nT)}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(t)e^{-st}e^{-nsT}dt \\
&= \left(\int_0^T f(t)e^{-st}dt \right) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT}
\end{aligned}$$

Pero, para cualquier $T > 0$, $s > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 < e^{-nsT} < 1$, entonces[a]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-sT}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

Con este resultado se tiene finalmente que:

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

■

[a]Tenga en cuenta que para $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

5.1.4 Transformada inversa de Laplace

La transformada inversa de Laplace es importante en la resolución de ecuaciones diferenciales, por el hecho de que muchas ecuaciones diferenciales se convierten en ecuaciones algebraicas cuando se aplica transformada de Laplace; y para llevar la solución de esta ecuación algebraica a la solución de la ecuación diferencial, requerimos necesariamente de la transformada inversa de Laplace.

Definición 5.1.8 — Transformada inversa de Laplace. Sea $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, entonces la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ es la función $f(t)$ y denotamos

$$f(t) := \mathscr{L}^{-1}[F(s)] \tag{5.36}$$

La primera propiedad que aparece para la transformada inversa de Laplace es la linealidad, así tenemos:

Proposición 5.1.22 Si $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ y $G(s) = \mathscr{L}[g(t)]$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s) + \lambda G(s)] = \mathscr{L}^{-1}[F(S)] + \lambda \mathscr{L}^{-1}[G(S)]$$

Según la definición arriba, la fórmula no es nada práctica si se trata de determinar la transformada inversa de laplace de una función, por esto, aplicaremos métodos alternativos como fracciones parciales, convolución y el uso de propiedades.

Algo que también debemos dejar claro, es que la transformada inversa de Laplace de una función $\Phi(s)$ no es única, es decir, pueden existir dos funciones distintas $f(t)$ y $g(t)$ de tal manera que $\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[g(t)] = \Phi(s)$. Veamos el siguiente ejemplo

■ **Ejemplo 5.20** Sea $f(t)=t, t\geq 0$ y $g(t)=\begin{cases} t, \ t\in[0,+\infty\rangle-\{2\} \\ 2, \ t=2 \end{cases}$. En ambos casos se tiene que la transformada de Laplace es $\frac{1}{s^2}$, sin embargo, dichas funciones son distintas. ■

Lo que acabamos de ejemplificar, se aclara en el siguiente teorema

Teorema 5.1.23 — De Lerch. Si $\Phi(s)$ es la transformada de Laplace de $f_1(t)$ y de $f_2(t)$, entonces $f_1(t)=f_2(t)$, excepto en un número finito de puntos.

A continuación reformularemos algunos resultados importantes, pero en términos de la transformada inversa de Laplace, dichos resultados son equivalentes, solo cambia la forma en que nos referimos ahora que usamos la transformada inversa.

1. $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right]=e^{\alpha t}$.
2. $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right]=\operatorname{sen}\alpha t$.
3. $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right]=\cos\alpha t$.
4. $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]=t^n$.
5. **Primera propiedad de traslación**: Si $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, entonces
$$\mathscr{L}^{-1}[F(s-\alpha)]=e^{\alpha t}f(t)$$
6. **Segunda propiedad de traslación**: Si $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, entonces
$$\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-\alpha s}F(s)\right]=f(t-\alpha)H(t-\alpha)$$
7. Si $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$ y $G(s)=\mathscr{L}[g(t)]$, entonces
$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)G(s)]=f(t)*g(t)$$

Teorema 5.1.24 Si la transformada de Laplace de $f(t)$ existe y $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, entonces
$$\lim_{s\to+\infty}F(s)=0$$

En todos los ejemplos donde se ha determinado $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$, el lector puede comprobar que
$$\lim_{s\to+\infty}F(s)=0$$
según lo que afirma el teorema 5.1.24.

En lo que sigue, aplicaremos indistintamente las propiedades estudiadas, ya sea con $\mathscr{L}$ o $\mathscr{L}^{-1}$.

■ **Ejemplo 5.21** Calcule la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = -\ln\left[\frac{1}{s}\left(2+\frac{5}{s}\right)+1\right],\ s>0$$

<u>Resolución</u>

Suponer que existe una función $f(t)$, $t\geq 0$, para la cual acontece que

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = -\ln\left[\frac{1}{s}\left(2+\frac{5}{s}\right)+1\right] \equiv \ln\left[\frac{s^2}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

desarrollando el logaritmo de la derecha vemos que

$$\mathscr{L}[f(t)] = 2\ln(s) - \ln\left[(s+1)^2+2^2\right]$$

Para liberarnos del logaritmo, ahora aplicamos (5.17) para obtener:

$$\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\left\{2\ln(s) - \ln\left[(s+1)^2+2^2\right]\right\}$$

Desarrollando la derivada llegamos a la expresión

$$\mathscr{L}[tf(t)] = 2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - \frac{2}{s}$$

Pero $\mathscr{L}[1] = \frac{1}{s}$ y $\mathscr{L}\left[e^{-t}\cos(2t)\right] = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}$. Luego con estos resultados se tiene

$$\mathscr{L}[tf(t)] = 2\mathscr{L}\left[e^{-t}\cos(2t)\right] - 2\mathscr{L}[1]$$

Ahora, si aplicamos transformada inversa de Laplace, se obtiene:

$$tf(t) = 2e^{-t}\cos(2t) - 2$$

y de esto llegamos a la función[9]:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{t}e^{-t}\cos(2t) - \frac{2}{t},\ t>0 \\ -2,\ t=0 \end{cases}$$

■

[9] Esta función está definida para $t\geq 0$, sin embargo en $t=0$ no sabemos que pueda acontecer para f, cualquier valor que aquí asuma la función es válido, sin embargo haciendo $t\to 0^+$ se tiene:

$$\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{2}{t}e^{-t}\cos(2t) - \frac{2}{t}\right] = -2$$

por lo cual aprovechamos esta situación y hacemos que f sea continua en $t=0$, así definimos $f(0) = -2$.

■ **Ejemplo 5.22** Para $n \in \mathbb{N}$, demuestre que

1. $t^n * \text{sen}(at) = \frac{1}{a}\left[t^n - \left(nt^{n-1} * \cos(at)\right)\right]$.
2. $t^n * \cos(at) = \frac{n}{a} t^{n-1} * \text{sen}(at)$.

Luego calcule $\mathscr{L}^{-1}\left[e^{\alpha s}\left(\frac{a}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s}\right)\frac{1}{s^2+k^2}\right]$.

<u>Resolución</u>

1. Para demostrar lo que nos pide, aplicamos transformada de Laplace en el lado derecho, haciendo esto se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[t^n - \left(nt^{n-1} * \cos(at)\right)\right] &= \frac{n!}{s^{n+1}} - n\mathscr{L}\left[t^{n-1} * \cos(at)\right] \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}} - n\mathscr{L}\left[t^{n-1}\right]\mathscr{L}\left[\cos(at)\right] \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}} - \frac{n(n-1)!}{s^n}\frac{s}{s^2+a^2} \\
&= n!\left(\frac{s^2+a^2-s^2}{s^{n+1}\left(s^2+a^2\right)}\right) \\
&= a\frac{n!}{s^{n+1}}\frac{a}{s^2+a^2} \\
&= a\mathscr{L}\left[t^n\right]\mathscr{L}[\text{sen}(at)] \\
&= a\mathscr{L}\left[t^n * \text{sen}(at)\right]
\end{aligned}$$

Luego

$$\mathscr{L}\left[t^n * \text{sen}(at)\right] = \mathscr{L}\left[\frac{1}{a}\left[t^n - \left(nt^{n-1} * \cos(at)\right)\right]\right]$$

En este último resultado aplicamos transformada inversa de Laplace para obtener:

$$t^n * \text{sen}(at) = \frac{1}{a}\left[t^n - \left(nt^{n-1} * \cos(at)\right)\right]$$

lo que demuestra la igualdad.

2. En forma similar al caso anterior aplicamos transformada de Laplace en

el lado derecho

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\frac{n}{a}t^{n-1} * \operatorname{sen}(at)\right] &= \frac{n}{a}\mathscr{L}\left[t^{n-1} * \operatorname{sen}(at)\right] \\
&= \frac{n}{a}\mathscr{L}[t^{n-1} * \operatorname{sen}(at)] \\
&= \frac{n}{a}\mathscr{L}[t^{n-1}]\mathscr{L}[\operatorname{sen}(at)] \\
&= \frac{n}{a}\frac{(n-1)!}{s^n}\frac{a}{s^2+a^2} \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}\frac{s}{s^2+a^2} \\
&= \mathscr{L}[t^n]\mathscr{L}[\cos(at)] \\
&= \mathscr{L}[t^n * \cos(at)]
\end{aligned}$$

Aplicamos luego transformada inversa de Laplace para obtener:

$$t^n * \cos(at) = \frac{n}{a}t^{n-1} * \operatorname{sen}(at)$$

Finalmente, por la linealidad de la transformada inversa de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^3}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{b}{s^2}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{c}{s}\right] \\
&= \frac{a}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right]+b\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+c\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \\
&= \frac{a}{2}t^2+bt+c
\end{aligned}$$

de donde

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}\right] = \frac{a}{2}t^2+bt+c$$

o también

$$\mathscr{L}\left[\frac{a}{2}t^2+bt+c\right] = \frac{a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}$$

Asimismo

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+k^2}\right] = \frac{1}{k}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right] = \frac{1}{k}\operatorname{sen}(kt)$$

Luego con estos resultados y usando (5.33) se tiene:

$$\begin{aligned}
e^{\alpha s}\left(\frac{a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}\right)\frac{1}{s^2+k^2} &= e^{\alpha s}\left(\mathscr{L}\left[\frac{a}{2}t^2+bt+c\right]\mathscr{L}\left[\frac{1}{k}\operatorname{sen}(kt)\right]\right) \\
&= \frac{e^{\alpha s}}{k}\mathscr{L}\left[\left(\frac{a}{2}t^2+bt+c\right) * \operatorname{sen}(kt)\right]
\end{aligned}$$

y de acá observamos que:

$$e^{\alpha s}\left(\frac{a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}\right)\frac{1}{s^2+k^2}=\frac{e^{\alpha s}}{k}\mathscr{L}\left[\left(\frac{a}{2}t^2+bt+c\right)*\operatorname{sen}(kt)\right] \quad (5.37)$$

En (5.37) procedemos a calcular la convolución, pero antes observamos que

$$\left(\frac{a}{2}t^2+bt+c\right)*\operatorname{sen}(kt)=\frac{a}{2}\left(t^2*\operatorname{sen}(kt)\right)+b(t*\operatorname{sen}(kt))+c(1*\operatorname{sen}(kt)) \quad (5.38)$$

Hacemos los siguientes cálculos, pero tenga en cuenta que usaremos las identidades demostradas en los ítems anteriores:

$$\begin{aligned}
t^2*\operatorname{sen}(kt) &= \frac{1}{k}\left[t^2-(2t*\operatorname{sen}(kt))\right]=\frac{t^2}{k}-\frac{2}{k}(t*\cos(kt))\\
&= \frac{t^2}{k}-\frac{2}{k}\frac{1}{k}(1*\operatorname{sen}kt)=\frac{t^2}{k}-\frac{2}{k^2}(\operatorname{sen}kt*1)\\
&= \frac{t^2}{k}-\frac{2}{k^2}\int_0^t \operatorname{sen}(ku)du=\frac{t^2}{k}+\frac{2}{k^3}\left\{\cos(ku)\right\}_0^t\\
&= \frac{t^2}{k}+\frac{2}{k^3}\left\{\cos(kt)-1\right\}=\frac{t^2}{k}+\frac{2}{k^3}\cos(kt)-\frac{2}{k^3}
\end{aligned}$$

Luego: $t^2*\operatorname{sen}(kt)=\frac{t^2}{k}+\frac{2}{k^3}\cos(kt)-\frac{2}{k^3}$.

$$\begin{aligned}
t*\operatorname{sen}(kt) &= \frac{1}{k}\left[t-(1*\cos(kt))\right]=\frac{t}{k}-\frac{1}{k}(\cos(kt)*1)\\
&= \frac{t}{k}-\frac{1}{k}\int_0^t\cos(ku)du=\frac{t}{k}-\frac{1}{k^2}\{\operatorname{sen}(ku)\}_0^t\\
&= \frac{t}{k}-\frac{1}{k^2}\operatorname{sen}(kt)
\end{aligned}$$

Luego: $t*\operatorname{sen}(kt)=\frac{t}{k}-\frac{1}{k^2}\operatorname{sen}(kt)$.

Asimismo,

$$1*\operatorname{sen}(kt)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\cos(kt)$$

Ponemos estos resultados en (5.38) para obtener:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{2}t^2+bt+c\right)*\operatorname{sen}(kt) &= \frac{a}{2}\left[\frac{t^2}{k}+\frac{2}{k^3}\cos(kt)-\frac{2}{k^3}\right]\\
&\quad +b\left[\frac{t}{k}-\frac{1}{k^2}\operatorname{sen}(kt)\right]+c\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\cos(kt)\right]
\end{aligned}$$

aquí simplificamos y reordenamos términos, y tenemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{2}t^2+bt+c\right)*\operatorname{sen}(kt) &= \frac{a}{2k}t^2+\frac{b}{k}t+\left(\frac{c}{k}-\frac{a}{k^3}\right)+\left(\frac{a}{k^3}-\frac{c}{k}\right)\cos(kt)\\ &\quad -\frac{b}{k^2}\operatorname{sen}(kt)\end{aligned}$$

Ponemos este resultado en (5.37) y de allí aplicamos la linealidad de la transformada de Laplace, hacemos algunas simplificaciones para llegar a la expresión:

$$\begin{aligned}e^{\alpha s}\left(\frac{a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}\right)\frac{1}{s^2+k^2} &= \frac{a}{2k^2}e^{\alpha s}\mathscr{L}[t^2]+\frac{b}{k^2}e^{\alpha s}\mathscr{L}[t]\\ &\quad +\left(\frac{c}{k^2}-\frac{a}{k^4}\right)e^{\alpha s}\mathscr{L}[1]\\ &\quad +\left(\frac{a}{k^4}-\frac{c}{k^2}\right)e^{\alpha s}\mathscr{L}[\cos(kt)]\\ &\quad -\frac{b}{k^3}e^{\alpha s}\mathscr{L}[\operatorname{sen}(kt)]\end{aligned}$$

En esto último aplicamos transformada inversa de Laplace, asimismo la segunda propiedad de traslación para obtener:

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[e^{\alpha s}\left(\frac{a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}\right)\frac{1}{s^2+k^2}\right]\\ &= \frac{a}{2k^2}(t-\alpha)^2H(t-\alpha)+\frac{b}{k^2}(t-\alpha)H(t-\alpha)\\ &\quad +\left(\frac{c}{k^2}-\frac{a}{k^4}\right)H(t-\alpha)+\left(\frac{a}{k^4}-\frac{c}{k^2}\right)\cos(k(t-\alpha))H(t-\alpha)\\ &\quad -\frac{b}{k^3}\operatorname{sen}(k(t-\alpha))H(t-\alpha)\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 5.23** Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{25}{s^2(s^2-2s+5)}\right]$ ■

<u>Resolución</u>

Suponer que para alguna función $f(t)$ se tiene que $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$ y

$$F(s)=\frac{25}{s^2(s^2-2s+5)}$$

Desarrollando en fracciones parciales la expresión de la derecha se tiene:

$$\frac{25}{s^2(s^2-2s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2-2s+5}$$

De donde se obtiene $A = 2$, $B = 5$, $C = -2$ y $D = -1$, así nos queda:

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{5}{s^2} + \frac{-2s-1}{s^2-2s+5}$$

a continuación, arreglamos convenientemente las expresiones, teniendo así:

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{5}{s^2} - 2\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} - \frac{3}{(s-1)^2+2^2}$$

Luego aplicamos transformada inversa de Laplace y se obtiene:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{5}{s^2} - 2\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} - \frac{3}{(s-1)^2+2^2}\right] \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5}{s^2}\right] - 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right] \\
&\quad -\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s-1)^2+2^2}\right] \\
&= 2 + 5t - 2e^t\cos(2t) - \frac{3}{2}e^t\operatorname{sen}(2t)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{25}{s^2(s^2-2s+5)}\right] = 2 + 5t - 2e^t\cos(2t) - \frac{3}{2}e^t\operatorname{sen}(2t)$$

■ **Ejemplo 5.24** Calcule la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \ln\frac{s^2+1}{(s+2)(s-3)}$$

<u>Resolución</u>

En primer lugar se tiene que

$$F(s) = \ln(s^2+1) - \ln(s+2) - \ln(s-3)$$

Si tomamos $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[tf(t)] &= -\frac{d}{ds}\left[\ln(s^2+1) - \ln(s+2) - \ln(s-3)\right] = \\
&= \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} - 2\frac{s}{s^2+1} \\
&= \mathscr{L}\left[e^{-2t}\right] + \mathscr{L}\left[e^{3t}\right] - 2\mathscr{L}[\cos t]
\end{aligned}$$

Ahora, si aquí aplicamos la transformada inversa de Laplace, entonces

$$tf(t) = e^{-2t} + e^{3t} - 2\cos t$$

de donde se obtiene:

$$f(t) = \frac{1}{t}\left(e^{-2t} + e^{3t} - 2\cos t\right),\ t > 0$$

Como $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(e^{-2t} + e^{3t} - 2\cos t\right) = 1$, entonces usando la continuidad por la derecha de $t = 0$, se tiene que $f(t)$ la podemos tomar como

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\left(e^{-2t} + e^{3t} - 2\cos t\right),\ t > 0 \\ 1,\ t = 0 \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.25** Para constantes $a > 0$ y b, calcule: $\mathscr{L}^{-1}\left[\arctan \frac{a}{s+b}\right]$.

<u>Resolución</u>

Sea $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\arctan \frac{a}{s+b}\right]$ para alguna función $f(t)$, entonces

$$\mathscr{L}[f(t)] = \arctan \frac{a}{s+b}$$

Para liberarnos de la función arcotangente, multiplicamos por t a $f(t)$, así tenemos:

$$\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\left[\arctan \frac{a}{s+b}\right]$$

$$\Longrightarrow \mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{1}{1+\left(\frac{a}{s+b}\right)^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s+b}\right)$$

luego

$$\mathscr{L}[tf(t)] = \frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$$

Aquí aplicamos transformada inversa de Laplace y se obtiene

$$tf(t) = e^{-bt}\operatorname{sen} at,\ t > 0$$

Finalmente se tiene[10]:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{-bt}\operatorname{sen} at}{t},\ t > 0 \\ a,\ t = 0 \end{cases}$$

■

[10] Como

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-bt}\operatorname{sen} at}{t} = a$$

entonces usamos la continuidad por la derecha de $t = 0$.

■ **Ejemplo 5.26** Calcule: $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{s-2}{s+2}\right]$.

Resolución

Al igual que el ejemplo anterior suponemos que $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{s-2}{s+2}\right]$, entonces

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{s-2}{s+2}$$

Para desligarnos de la función arcotangente, multiplicamos por t a $f(t)$, así tenemos:

$$\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{s-2}{s+2}\right]$$

$$\Longrightarrow \mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{1}{1+\left(\frac{s-2}{s+2}\right)^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{s-2}{s+2}\right)$$

luego

$$\mathscr{L}[tf(t)] = \frac{2}{s^2+4}$$

Aquí aplicamos transformada inversa de Laplace y se obtiene

$$tf(t) = \operatorname{sen} 2t,\ t > 0$$

Finalmente se tiene[11]:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} 2t}{t},\ t > 0 \\ 2,\ t = 0 \end{cases}$$

Otra forma alternativa de afrontar este problema es el siguiente:

Puesto que: $F(s) = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{s-2}{s+2}$, entonces aplicando tangente en ambos lados se tiene:

$$\tan F(s) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{s-2}{s+2}\right) = \frac{1-\frac{s-2}{s+2}}{1+\frac{s-2}{s+2}} = \frac{2}{s}$$

de donde se sigue que:

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \arctan\left(\frac{2}{s}\right)$$

[11]Como

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} 2t}{t} = 2$$

entonces usamos la continuidad por la derecha de $t = 0$.

multiplicando por t a $f(t)$ se obtiene:

$$\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\left[\arctan\left(\frac{2}{s}\right)\right] = \frac{2}{s^2+4}$$

de donde aplicando transformada inversa de Laplace vemos que:

$$tf(t) = \operatorname{sen}(2t)$$

$t > 0$. El resultado final ya lo tenemos más arriba. ■

■ **Ejemplo 5.27** Calcule: $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s+a}{b}\right]$, donde $b > 0$.

Resolución

Acá también hacemos $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s+a}{b}\right]$, entonces

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s+a}{b}$$

Luego

$$\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s+a}{b}\right]$$

$$\Longrightarrow \mathscr{L}[tf(t)] = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

Aquí se aplica transformada inversa de Laplace y se obtiene

$$tf(t) = e^{-at}\operatorname{sen}(bt),\ t > 0$$

Finalmente se tiene[12]:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{-at}\operatorname{sen} bt}{t},\ t > 0 \\ b,\ t = 0 \end{cases}$$

Invitamos al lector a verificar si también es correcto afirmar que

$$f(t) = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-at}\right)\delta(t) + \frac{e^{-at}\operatorname{sen} bt}{t}$$

■

[12] Como

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-at}\operatorname{sen}(bt)}{t} = b$$

entonces usamos la continuidad por la derecha de $t = 0$.

■ **Ejemplo 5.28** Calcule: $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^4+4a^4}\right]$.

<u>Resolución</u>

En primer lugar se tiene

$$\begin{aligned}
s^4+4a^4 &= s^4+4a^2s^2+4a^4-4a^2s^2\\
&= (s^2+2a^2)^2-(2as)^2\\
&= (s^2-2as+2a^2)(s^2+2as+2a^2)\\
&= \left[(s-a)^2+a^2\right]\left[(s+a)^2+a^2\right]
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{s}{s^4+4a^4} &= \frac{s}{[(s-a)^2+a^2]\,[(s+a)^2+a^2]}\\
&= \frac{1}{a}\frac{s}{(s-a)^2+a^2}\frac{a}{(s+a)^2+a^2}\\
&= \frac{1}{a}\frac{s-a+a}{(s-a)^2+a^2}\frac{a}{(s+a)^2+a^2}\\
&= \frac{1}{a}\frac{s-a}{(s-a)^2+a^2}\frac{a}{(s+a)^2+a^2}+\frac{1}{a}\frac{a}{(s-a)^2+a^2}\frac{a}{(s+a)^2+a^2}\\
&= \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[e^{at}\cos(t)\right]\mathscr{L}\left[e^{-at}\operatorname{sen}(t)\right]\\
&\quad +\frac{1}{a}\mathscr{L}\left[e^{at}\operatorname{sen}(t)\right]\mathscr{L}\left[e^{-at}\operatorname{sen}(t)\right]\\
&= \frac{1}{a}\mathscr{L}\left[\left(e^{at}\cos(t)\right)*\left(e^{-at}\operatorname{sen}(t)\right)\right]\\
&\quad +\frac{1}{a}\mathscr{L}\left[\left(e^{at}\operatorname{sen}(t)\right)*\left(e^{-at}\operatorname{sen}(t)\right)\right]
\end{aligned}$$

Con este resultado se tiene que:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^4+4a^4}\right]=\frac{1}{a}\left(e^{at}\cos(t)\right)*\left(e^{-at}\operatorname{sen}(t)\right)+\frac{1}{a}\left(e^{at}\operatorname{sen}(t)\right)*\left(e^{-at}\operatorname{sen}(t)\right) \tag{5.39}$$

aquí en (5.39) calculamos separadamente cada una de las convoluciones, así tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\left(e^{at}\cos at\right) &* \left(e^{-at}\operatorname{sen} at\right) = \frac{1}{a}\int_0^t e^{au}\cos(au)\, e^{-a(t-u)}\operatorname{sen}(a(t-u))du \\
&= \frac{1}{a}e^{-at}\int_0^t e^{2au}\cos(au)\operatorname{sen}(at-au)du \\
&= \frac{1}{2a}e^{-at}\int_0^t e^{2au}[\operatorname{sen}(at)-\operatorname{sen}(2au-at)]du \\
&= \frac{e^{-at}}{2a}\left\{-\frac{e^{2au}}{4a}[2at-2\operatorname{sen}(at)-\cos(2au)+\operatorname{sen}(2au)]\right\}_0^t \\
&= \frac{e^{-at}}{8a^2}\left[-3\operatorname{sen}(at)-\cos(at)+e^{2at}\operatorname{sen}(at)+e^{2at}\cos(at)\right]
\end{aligned}$$

Asimismo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\left(e^{at}\operatorname{sen} at\right) &* \left(e^{-at}\operatorname{sen} at\right) = \frac{1}{a}\int_0^t e^{au}\operatorname{sen}(au)\, e^{-a(t-u)}\operatorname{sen}(a(t-u))du \\
&= \frac{1}{a}e^{-at}\int_0^t e^{2au}\operatorname{sen}(au)\operatorname{sen}(at-au)du \\
&= \frac{1}{2a}e^{-at}\int_0^t e^{2au}[\cos(2au-at)-\cos(at)]du \\
&= \frac{e^{-at}}{2a}\left\{\frac{e^{2au}}{4a}[2\operatorname{sen}(at)+\cos(2au-at)+\operatorname{sen}(at-2au)]\right\}_0^t \\
&= \frac{e^{-at}}{8a^2}\left[\cos(at)+\operatorname{sen}(at)+e^{2at}\operatorname{sen}(at)-e^{2at}\cos(at)\right]
\end{aligned}$$

Ponemos estos resultados en (5.39), hacemos las simplificaciones correspondientes y se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^4+4a^4}\right] &= \frac{1}{4a^2}e^{-at}\operatorname{sen}(at)\left(e^{2at}-1\right) \\
&= \frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\frac{e^{at}-e^{-at}}{2} \\
&= \frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(t)\operatorname{senh}(at)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^4+4a^4}\right] = \frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(t)\operatorname{senh}(at)$$

∎

■ **Ejemplo 5.29** Calcule:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s\left(e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}\right)}{s^2+4}\right]$$

<u>Resolución</u>

En primer lugar se tiene que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+4}\right]=2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]=2\cos(2t)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s\left(e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}\right)}{s^2+4}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+4}e^{-\pi s}-\frac{2s}{s^2+4}e^{-2\pi s}\right]\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+4}e^{-\pi s}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+4}e^{-2\pi s}\right]\\
&= 2\cos(2t-2\pi)H(t-\pi)-2\cos(2t-4\pi)H(t-2\pi)
\end{aligned}$$

es decir:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s\left(e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}\right)}{s^2+4}\right]=2\cos(2t-2\pi)H(t-\pi)-2\cos(2t-4\pi)H(t-2\pi)$$

explicitamos esta función y se obtiene:

$$f(t)=\begin{cases}0,\ 0\le t<\pi\\ 2\cos(2t),\ \pi\le t<2\pi\\ 0,\ t\ge 2\pi\end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.30** Calcule $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$, si $F(s)=\ln\left(1+\frac{4}{s^4}\right)$.

<u>Resolución</u>

Para empezar se tiene que

$$F(s)=\ln\left(1+\frac{4}{s^4}\right)=\ln\left(\frac{s^4+1}{s^4}\right)$$

Ahora, si hacemos $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[tf(t)] &= -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\left[\ln\left(\frac{s^4+1}{s^4}\right)\right]\\ &= \frac{4}{s} - \frac{4s^3}{s^4+1}\end{aligned}$$

Pero aquí, descomponiendo en fracciones parciales se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{4s^3}{s^4+1} &= \frac{4s^3}{\left(s^2+\sqrt{2}s+1\right)\left(s^2-\sqrt{2}s+1\right)}\\ &= \frac{2s-\sqrt{2}}{s^2-\sqrt{2}s+1} + \frac{2s+\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1}\\ &= \frac{2s-\sqrt{2}}{\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{2s+\sqrt{2}}{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

luego

$$\mathscr{L}[tf(t)] = \frac{4}{s} - 2\frac{s-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - 2\frac{s+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

En esto último aplicamos transformada inversa de Laplace y se tiene

$$tf(t) = 4 - 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right] - 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(s+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right]$$

de donde

$$tf(t) \quad = \quad 4 - 2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - 2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

que para $t > 0$ se convierte en:

$$f(t) = \frac{2}{t}\left[2 - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right], \ t > 0$$

Puesto que:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{2}{t}\left[2 - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right] = 0$$

entonces nos queda finalmente que:

$$f(t)=\begin{cases} \frac{2}{t}\left[2-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right], \ t>0 \\ 0, \ t=0 \end{cases}$$

∎

Ejemplo 5.31 Calcule: $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+6}+\frac{5s+1}{s^2(s^2+6)}e^{-5s}\right]$.

Resolución

Sea $F(s)=\frac{2s}{s^2+6}+\frac{5s+1}{s^2(s^2+6)}e^{-5s}$ y $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$, entonces por la linealidad de $\mathscr{L}^{-1}$ se tiene

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+6}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s+1}{s^2(s^2+6)}e^{-5s}\right] \tag{5.40}$$

Para la primera parte vemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+6}\right]=2\cos\left(\sqrt{6}t\right)$$

Ahora, para lo que queda hacemos descomposición en fracciones parciales, y se tiene:

$$\frac{5s+1}{s^2(s^2+6)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+6} \tag{5.41}$$

de donde

$$5s+6=As(s^2+6)+B(s^2+6)+(Cs+D)(s^2+6)$$

que al agrupar convenientemente se convierte en:

$$5s+6=(A+C)s^3+(B+D)s^2+(6A+6C)s+(6B+6D)$$

Ahora, comparando coeficientes[13] se tiene las ecuaciones: $A+C=0$, $B+D=0$, $6A+6C=5$ y $6B+6D=6$. Resolviendo estas ecuaciones se obtiene: $A=\frac{5}{6}$, $B=\frac{1}{6}$, $C=-\frac{5}{6}$ y $D=-\frac{1}{6}$. Ponemos estos resultados en (5.41) para obtener:

$$\frac{5s+1}{s^2(s^2+6)}=\frac{5}{6}\frac{1}{s}+\frac{1}{6}\frac{1}{s^2}-\frac{5}{6}\frac{s}{s^2+6}-\frac{1}{6}\frac{1}{s^2+6}$$

[13] Aquí, es bueno recalcar siempre este hecho, si acomodamos todos los términos de esta igualdad a un solo lado, se tiene:

$$(A+C)s^3+(B+D)s^2+(6A+6C-5)s+(6B+6D-6)=0$$

Como el conjunto $\{s^3,s^2,s,1\}$ es linealmente independiente, entonces, los coeficientes deben ser todos igual a cero; así se tiene que $A+C=0$, $B+D=0$, $6A+6C-5=0$ y $6B+6D-6=0$.

Luego aplicando transformada inversa de Laplace vemos que:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s+1}{s^2(s^2+6)}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5}{6}\frac{1}{s}+\frac{1}{6}\frac{1}{s^2}-\frac{5}{6}\frac{s}{s^2+6}-\frac{1}{6}\frac{1}{s^2+6}\right]\\
&= \frac{5}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-\frac{5}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+6}\right]\\
&\quad -\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+6}\right]\\
&= \frac{5}{6}+\frac{1}{6}t-\frac{5}{6}\cos(\sqrt{6}t)-\frac{1}{6\sqrt{6}}\operatorname{sen}(\sqrt{6}t)
\end{aligned}$$

Ahora, con la segunda propiedad de traslación se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s+1}{s^2(s^2+6)}e^{-5s}\right] &= \frac{5}{6}H(t-5)+\frac{1}{6}(t-5)H(t-5)\\
&\quad -\frac{5}{6}\cos(\sqrt{6}(t-5))H(t-5)\\
&\quad -\frac{1}{6\sqrt{6}}\operatorname{sen}(\sqrt{6}(t-5))H(t-5)
\end{aligned}$$

Con estos resultados en (5.40) se tiene finalmente:

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2\cos\left(\sqrt{6}t\right)+\frac{5}{6}H(t-5)+\frac{1}{6}(t-5)H(t-5)\\
&\quad -\frac{5}{6}\cos(\sqrt{6}(t-5))H(t-5)-\frac{1}{6\sqrt{6}}\operatorname{sen}(\sqrt{6}(t-5))H(t-5)
\end{aligned}$$

que explícitamente es:

$$f(t)=\begin{cases} 2\cos\left(\sqrt{6}t\right),\ 0\le t<5 \\ \\ 2\cos\left(\sqrt{6}t\right)+\frac{t}{6}-\frac{5}{6}\cos(\sqrt{6}(t-5))-\frac{\sqrt{6}}{36}\operatorname{sen}(\sqrt{6}(t-5)),\ t\ge 5 \end{cases}$$

■

5.2 Aplicación de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta muy poderosa para resolver ecuaciones diferenciales. En esta sección, resolvemos problemas que involucran ecuaciones diferenciales de coeficientes variables, problemas de oscilaciones, circuitos eléctricos, deflexión de vigas y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Recomendamos al estudiante se familiarice con las propiedades que permiten determinar la transformada inversa de Laplace.

5.2.1 Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

Para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias aplicando transformada de Laplace, es crucial la aplicación del teorema 5.1.6 y (5.9). Ilustramos esto en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5.32 Determine $y(t)$ en la ecuación

$$\begin{cases} y'(t)+y(t)-\int_0^t y(u)\,\mathrm{sen}(t-u)du = -\,\mathrm{sen}\,t \\ y(0)=1 \end{cases} \tag{5.42}$$

<u>Resolución</u>

Si nos fijamos en la integral de (5.42), ésta es una convolución, por lo que reescribimos esta ecuación y nos queda así:

$$y'(t)+y(t)-y(t)*\mathrm{sen}\,t = -\,\mathrm{sen}\,t \tag{5.43}$$

Aplicamos transformada de Laplace en (5.43) y se tiene:

$$s\mathscr{L}[y(t)]-y(0)+\mathscr{L}[y(t)]-\mathscr{L}[y(t)]\frac{1}{1+s^2} = -\frac{1}{1+s^2}$$

de donde despejamos $\mathscr{L}[y(t)]$ para obtener:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[y(t)] &= \frac{s}{s^2+s+1} = \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

Luego

$$\mathscr{L}[y(t)] = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \tag{5.44}$$

Aquí se tiene

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] = e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] = e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{3}t}{2}$$

Con estos resultados, procedemos a aplicar transformada inversa de Laplace en (5.44), para así obtener

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}t}{2}$$

■

■ **Ejemplo 5.33** Resuelva: $y' = \cos(t) + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$, $y(0) = 1$.

Resolución

Usando convolución, la ecuación diferencial la reescribimos así:

$$y'(t) = \cos(t) + y(t) * \cos(t)$$

luego aplicando transformada de Laplace se tiene:

$$s\mathscr{L}[y(t)] - y(0) = \frac{s}{s^2+1} + \mathscr{L}[y(t)]\frac{s}{s^2+1}$$

de donde se obtiene:

$$\mathscr{L}[y(t)] = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$$

Aquí aplicamos transformada inversa de Laplace y se tiene

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + 1$$

■

■ **Ejemplo 5.34** Aplicando transformada de Laplace, resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Resolución

Sea $Y(s) = \mathscr{L}[y(x)]$ la transformada de Laplace de $y(x)$. Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial y usando (5.17) se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] &- 3\frac{d}{ds}\left[sY(s) - y(0)\right] \\ &- \left[sY(s) - y(0)\right] + 4\frac{d}{ds}Y(s) - 9Y(s) = 0 \end{aligned}$$

de donde vemos que

$$\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - y'(0)\right] + 3\frac{d}{ds}\left[sY(s)\right] + sY(s) - 4\frac{d}{ds}Y(s) + 9Y(s) = 0$$

Aquí efectuamos las derivadas para obtener:

$$2sY(s)+s^2Y'(s)+3Y(s)+3sY'(s)+sY(s)-4Y'(s)+9Y(s)=0$$

reduciendo esto último, resulta la ecuación diferencial $Y'(s)=-\frac{3}{s-1}Y(s)$, cuya solución es

$$Y(s)=\frac{C}{(s-1)^3},\ \text{ donde } C \text{ es una constante}$$

luego aplicando transformada inversa de Laplace a esto último, según el ejemplo 5.4, se obtiene la solución de la ecuación diferencial, la cual está dada por

$$y(x)=\frac{C}{2}e^x x^2$$

■

■ **Ejemplo 5.35** Aplicando transformada de Laplace, resolver:

$$\begin{cases} tx''+2(t-1)x'-2x=0,\ t>0 \\ x(0)=0 \end{cases}$$

Resolución

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial y usando (5.17), se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}\left\{s^2\mathscr{L}[x(t)]-sx(0)-x'(0)\right\} &- 2\frac{d}{ds}\left\{s\mathscr{L}[x(t)]-x(0)\right\} \\ &- 2\left\{s\mathscr{L}[x(t)]-x(0)\right\}-2\mathscr{L}[x(t)]=0 \end{aligned}$$

Acá, hacemos $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$ y usamos la condición inicial $x(0)=0$ para obtener:

$$-\frac{d}{ds}\left\{s^2X(s)-x'(0)\right\}-2\frac{d}{ds}\left\{sX(s)\right\}-2\left\{sX(s)\right\}-2X(s)=0$$

Efectuando las derivadas y simplificando llegamos a la ecuación diferencial

$$\left(s^2+2s\right)\frac{dX(s)}{ds}=-4(s+1)X(s)$$

la cual es de variables separables. Según este modelo de ecuación se tiene:

$$\frac{dX}{X}=\left(\frac{-2}{s+2}-\frac{2}{s}\right)ds$$

que por integración resulta:

$$X(s) = \frac{c}{(s+2)^2 s^2}, \text{ donde } c \text{ es una constante arbitraria} \tag{5.45}$$

como $\mathscr{L}[t] = \frac{1}{s^2}$ y $\mathscr{L}\left[t\,e^{-2t}\right] = \frac{1}{(s+2)^2}$, entonces al aplicar transformada inversa de Laplace en (5.45), se tiene que $x(t)$ está dado por

$$x(t) = c\left(te^{-2t} * t\right)$$

desarrollando la convolución vemos que

$$\begin{aligned}
x(t) &= c\int_0^t ue^{-2u}(t-u)du \\
&= c\left[t\int_0^t ue^{-2u}du - \int_0^t u^2e^{-2u}du\right] \\
&= c\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-2u}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right]_0^t - \left[-\frac{1}{2}e^{-2u}\left(u^2+u+\frac{1}{2}\right)\right]_0^t\right\} \\
&= \frac{c}{4}\left(te^{-2t}+e^{-2t}+t-1\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución del problema es:

$$x(t) = \frac{c}{4}\left(te^{-2t}+e^{-2t}+t-1\right)$$

Aquí, como en el ejemplo anterior, para determinar el valor de la constante, es necesario imponer a la ecuación diferencial una condición adicional. ■

■ **Ejemplo 5.36** Resuelva el problema $\begin{cases} tx'' + (4t-2)x' + (13t-4)x = 0, \; t > 0 \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = \pi e^{-2\pi} \end{cases}$, aplicando transformada de Laplace.

<u>Resolución</u>

Sea $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$, aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial se tiene

$$\mathscr{L}[tx''(t)] + 4\mathscr{L}[tx'(t)] - 2\mathscr{L}[x'(t)] + 13\mathscr{L}[tx(t)] - 4\mathscr{L}[x(t)] = 0$$

Ahora, si usamos (5.10) y (5.17) obtenemos:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{ds}\left\{s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right\} &- 4\frac{d}{ds}\{sX(s) - x(0)\} - 2\{sX(s) - x(0)\} \\
&- 13\frac{d}{ds}X(s) - 4X(s) = 0
\end{aligned}$$

de donde con la condición inicial $x(0) = 0$ se tiene:

$$\frac{d}{ds}\left\{s^2X(s) - x'(0)\right\} + 4\frac{d}{ds}\left\{sX(s)\right\} + 2sX(s) + 13\frac{d}{ds}X(s) + 4X(s) = 0$$

efectuando las derivadas llegamos a:

$$2sX(s) + s^2X'(s) + 4X(s) + 4sX'(s) + 2sX(s) + 13X'(s) + 4X(s) = 0$$

y así nos queda la ecuación diferencial

$$(s^2 + 4s + 13)X'(s) + 4(s+2)X(s) = 0$$

En seguida, resolvemos esta ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} &\int \frac{dX}{X} = -2\int \frac{2(s+2)}{s^2+4s+13}ds + \ln(k),\ k > 0 \\ \Rightarrow\quad &\ln|X(s)| = -2\ln(s^2+4s+13) + \ln(k) \end{aligned}$$

luego

$$X(s) = \frac{k}{[(s+2)^2+3^2]^2} \equiv \frac{k}{9}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\ \frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]$$

aplicando transformada inversa de Laplace a este último resultado y usando de por medio la convolución se obtiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{k}{9}\left(e^{-2t}\operatorname{sen}(3t) * e^{-2t}\operatorname{sen}(3t)\right) \\ &= \frac{k}{9}\int_0^t e^{-2u}\operatorname{sen}(3u)e^{-2(t-u)}\operatorname{sen}(3t-3u)du \\ &= \frac{ke^{-2t}}{9}\int_0^t [\cos(6u-3t) - \cos(3t)]\,du \\ &= \frac{ke^{-2t}}{9}\left\{\frac{1}{6}\operatorname{sen}(6u-3t) - u\cos(3t)\right\}_0^t \\ &= \frac{ke^{-2t}}{9}\left\{\frac{1}{6}\operatorname{sen}(3t) - t\cos(3t) + \frac{1}{6}\operatorname{sen}(3t)\right\} \\ &= \frac{ke^{-2t}}{9}\left\{\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) - t\cos(3t)\right\} \end{aligned}$$

y de esta manera

$$x(t) = \frac{ke^{-2t}}{9}\left\{\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) - t\cos(3t)\right\}$$

Para determinar el valor de k, aplicamos la condición $x(\pi) = \pi e^{-2\pi}$, de donde se obtiene que $k = 9$. Por lo tanto

$$x(t) = e^{-2t}\left\{\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3t) - t\cos(3t)\right\}$$

■

■ **Ejemplo 5.37** Dado el problema: $\begin{cases} t\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + ty = 0,\ t > 0 \\ y(0^+) = 1 \end{cases}$. Resuelva aplicando transformada de Laplace[14].

<u>Resolución</u>

Sea $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$ y $y'(0^+) = A$. Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial se obtiene:

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - s - A\right] + 2[sY(s) - 1] - \frac{d}{ds}Y(s) = 0$$

de donde

$$\frac{d}{ds}Y(s) = -\frac{1}{s^2+1}$$

Integrando esto último, se tiene que $Y(s) = -\arctan s + c$. Pero según teorema 5.1.24, debe ocurrir que $\lim_{s\to+\infty} Y(s) = 0$, entonces $c = \frac{\pi}{2}$. Luego

$$Y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

Como $\mathscr{L}[y(t)] = Y(s)$, entonces:

$$\mathscr{L}[ty(t)] = -\frac{d}{ds}[Y(s)] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan s\right] = \frac{1}{s^2+1} = \mathscr{L}[\mathrm{sen}(t)]$$

Hemos encontrado que $\mathscr{L}[ty(t)] = \mathscr{L}[\mathrm{sen}(t)]$, luego aplicando transformada inversa de Laplace[15] la solución del problema es:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sen}\,t}{t},\ t > 0 \\ 1,\ t = 0 \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.38** Aplicando transformada de Laplace:

[14] Según el teorema 5.1.24, si $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, entonces $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$.

[15] Recuerde también que: $\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{sen}\,t}{t}\right] = \arctan\frac{1}{s}$.

1. demuestre que $\operatorname{sen} t * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$.
2. demuestre que $\operatorname{sen} t * \cos t = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t$.
3. encuentre la solución del problema: $\begin{cases} ty'' - 2y' + ty = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$, donde

$f(t) = \begin{cases} -\operatorname{sen} t, & 0 \le t < \pi \\ -\pi\cos t, & t \ge \pi \end{cases}$

<u>Resolución</u>

1. Aplicando transformada de Laplace en el lado derecho se tiene:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)\right] &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2+1} + \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1} \\ &= \mathscr{L}[\operatorname{sen} t]\mathscr{L}[\operatorname{sen} t] \end{aligned}$$

de donde:

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)\right] = \mathscr{L}[\operatorname{sen} t]\mathscr{L}[\operatorname{sen} t]$$

Si en esta igualdad aplicamos transformada inversa de Laplace, entonces con la propiedad de convolución se obtiene:

$$\operatorname{sen} t * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$$

2. En forma similar al caso anterior vemos que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[\frac{1}{2} t \operatorname{sen} t\right] &= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{s}{(s^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{s^2+1}\,\frac{s}{s^2+1} = \mathscr{L}[\operatorname{sen} t]\mathscr{L}[\cos t] \end{aligned}$$

luego aplicando transformada inversa de Laplace y propiedad de convolución se obtiene:

$$\operatorname{sen} t * \cos t = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t$$

3. En primer lugar, la función $f(t)$ escrita en términos de la función H es:

$$f(t) = -\operatorname{sen} t + (\operatorname{sen} t - \pi \cos t)H(t-\pi)$$

o también

$$f(t) = -\operatorname{sen} t + \pi \cos(t-\pi)H(t-\pi) - \operatorname{sen}(t-\pi)H(t-\pi)$$

Con esta nueva expresión de $f(t)$, la ecuación diferencial se reescribe así:

$$ty''(t) - 2y'(t) + ty(t) = -\operatorname{sen} t + \pi \cos(t-\pi)H(t-\pi) - \operatorname{sen}(t-\pi)H(t-\pi) \tag{5.46}$$

Si en (5.46) se aplica transformada de Laplace, además (5.10) y (5.17), entonces se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] &- 2\left[sY(s) - y(0)\right] - \frac{d}{ds}Y(s) \\ &= \frac{-1}{s^2+1} + \frac{\pi e^{-\pi s}s}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} \end{aligned}$$

Si en esta ecuación ponemos $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$, usamos la condición inicial $y(0) = 0$ del problema y efectuamos las derivadas, entonces se obtiene la ecuación diferencial

$$(s^2+1)Y'(s) + 4sY(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{\pi e^{-\pi s}s}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

que es equivalente a:

$$Y'(s) + \frac{4s}{s^2+1}Y(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}(\pi s - 1)}{(s^2+1)^2} \tag{5.47}$$

Como podemos ver, (5.47) es una ecuación lineal de primer orden, cuya solución es como sigue:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \left\{\int \frac{1-e^{-\pi s}(\pi s-1)}{(s^2+1)^2} e^{\int \frac{4s}{s^2+1}ds} ds + k\right\} e^{-\int \frac{4s}{s^2+1}ds} \\
&= \left\{\int \frac{1-e^{-\pi s}(\pi s-1)}{(s^2+1)^2} \left(s^2+1\right)^2 ds + k\right\} e^{-2\ln(s^2+1)} \\
&= \left\{\int \frac{1-e^{-\pi s}(\pi s-1)}{(s^2+1)^2} \left(s^2+1\right)^2 ds + k\right\} \frac{1}{\left(s^2+1\right)^2} \\
&= \left\{\int 1-e^{-\pi s}(\pi s-1)\, ds + k\right\} \frac{1}{\left(s^2+1\right)^2} \\
&= \left(s+se^{-\pi s}+k\right) \frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}, \text{ donde } k\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

De esto se obtiene que:

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} + e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{k}{(s^2+1)^2} \tag{5.48}$$

Como $\frac{s}{(s^2+1)^2} = \mathscr{L}[\operatorname{sen} t * \cos t]$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \operatorname{sen} t * \cos t = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t \equiv \phi_1(t)$$

En forma similar: $\frac{1}{(s^2+1)^2} = \mathscr{L}[\operatorname{sen} t * \operatorname{sen} t]$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = \operatorname{sen} t * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t) \equiv \phi_2(t)$$

Con estos resultados, en (5.48) aplicamos la transformada inversa de Laplace y la segunda propiedad de traslación para obtener:

$$y(t) = \phi_1(t) + \phi_1(t-\pi)H(t-\pi) + k\phi_2(t)$$

Si aquí en esta expresión ponemos $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, y hacemos las simplificaciones posibles, se tiene:

$$y(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t - \frac{1}{2}(t-\pi)\operatorname{sen}(t) H(t-\pi) + \frac{k}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t) \tag{5.49}$$

Aplicando la condición $y(\pi/2) = 0$ en (5.49), se obtiene $k = -\frac{\pi}{2}$; y de esta manera

$$y(t) = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}\,t - \frac{\pi}{4}(\mathrm{sen}\,t - t\cos t) - \frac{1}{2}(t-\pi)\,\mathrm{sen}\,t\;H(t-\pi)$$

o también

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}\,t - \frac{\pi}{4}(\mathrm{sen}\,t - t\cos t),\ 0 \le t < \pi \\ \frac{\pi}{4}\left(\mathrm{sen}\,t + t\cos t\right),\ t \ge \pi \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.39** Aplicando transformada de Laplace resuelva el problema de valor inicial: $\begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$, donde $f(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \le t \le 3 \\ t,\ t \ge 3 \end{cases}$

Resolución

En primer lugar escribimos f en términos de la función H, teniéndose así

$$f(t) = tH(t-3) = (t-3)H(t-3) + 3H(t-3)$$

luego la ecuación diferencial se escribe como

$$y'' + 4y = 3H(t-3) + (t-3)H(t-3)$$

Aplicando transformada de Laplace y usando las condiciones iniciales se tiene

$$s^2Y(s) + 4Y(s) = \frac{3e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2}$$

de donde

$$Y(s) = \frac{3e^{-3s}}{s(s^2+4)} + \frac{e^{-3s}}{s^2(s^2+4)};\ \ Y(s) = \mathscr{L}[y(t)] \tag{5.50}$$

Para hallar la transformada inversa de Laplace vemos que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{s(s^2+4)}\right] &= \frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\frac{1}{s}\right] = \frac{3}{2}(\mathrm{sen}\,2t * 1) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos(2t) = \phi_1(t) \\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right] &= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{2}(\mathrm{sen}\,2t * t) \\ &= \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}(2t) = \phi_2(t) \end{aligned}$$

Con estos resultados, vemos que aplicando transformada inversa de Laplace en (5.50) se obtiene

$$y(t) = \phi_1(t-3)H(t-3) + \phi_2(t-3)H(t-3)$$

de donde

$$y(t) = \frac{3}{4}\left[1-\cos(2t-6)\right]H(t-3) + \left[\frac{t-3}{4} - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t-6)\right]H(t-3)$$

$$y(t) = \left(\frac{t}{4} - \frac{3}{4}\cos(2t-6) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t-6)\right)H(t-3)$$

o también

$$y(t) = \begin{cases} 0, \;\; 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{t}{4} - \frac{3}{4}\cos(2t-6) - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t-6), \;\; t > 3 \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.40** Un sistema vibratorio está dado por el problema:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 9x = F(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Determine la función de desplazamiento $x(t)$ para $t \in [\pi, 2\pi]$ si se tiene que la fuerza externa que actúa en el sistema está dada por

$$F(t) = \begin{cases} F_0, \; t \in [0, \pi\rangle \\ 2F_0, \; t \in [\pi, 2\pi\rangle \\ 0, \; t \geq 2\pi \end{cases}$$

donde F_0 es una constante diferente de cero.

<u>Resolución</u>

Antes de proceder con la transformada de Laplace vemos que:

$$F(t) = F_0 + F_0H(t-\pi) - 2F_0H(t-2\pi), \; t \geq 0$$

Luego aplicamos transformada de Laplace a la ecuación diferencial y se tiene:

$$s^2\mathscr{L}[x(t)] - sx(0) - \dot{x}(0) + 9\mathscr{L}[x(t)] = \mathscr{L}[F(t)]$$

que haciendo $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$ y usando condiciones iniciales se convierte en:

$$(s^2+9)X(s) - 1 = \frac{F_0}{s} + \frac{F_0 e^{-\pi s}}{s} - \frac{2F_0 e^{-2\pi s}}{s}$$

de donde

$$X(s) = \frac{F_0}{s(s^2+9)} + \frac{F_0 e^{-\pi s}}{s(s^2+9)} - \frac{2F_0 e^{-2\pi s}}{s(s^2+9)} + \frac{1}{s^2+9} \tag{5.51}$$

Para aplicar transformada inversa de Laplace en (5.51) primero desarrollamos lo siguiente:

$$\frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{9}\frac{1}{s} - \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+9}$$

de donde

$$\phi(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+9)}\right] = \frac{1}{9}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{9}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos(3t) \tag{5.52}$$

Ahora, aplicando transformada inversa de Laplace en (5.51) se tiene

$$\begin{aligned} x(t) = F_0\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+9)}\right] &+ F_0\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+9)}\right] \\ &- 2F_0\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+9)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] \end{aligned}$$

Usando (5.52)

$$x(t) = F_0\phi(t) + F_0\phi(t-\pi)H(t-\pi) - 2F_0\phi(t-2\pi)H(t-2\pi) + \operatorname{sen}(3t)$$

luego

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) + F_0\phi(t),\ 0 \le t \le \pi \\ \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) + F_0\phi(t) + F_0\phi(t-\pi),\ \pi \le t \le 2\pi \\ \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) + F_0\phi(t) + F_0\phi(t-\pi) - 2F_0\phi(t-2\pi),\ t \ge 2\pi \end{cases} \tag{5.53}$$

Como

$$\phi(t-\pi) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos(3t-3\pi) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cos(3t)$$

y

$$\phi(t-2\pi) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos(3t-6\pi) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos(3t)$$

entonces poniendo estos resultados en (5.53) y simplificando se tiene:

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)+\frac{F_0}{9}(1-\cos(3t)),\ 0\le t\le\pi\\ \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)+\frac{2F_0}{9},\ \pi\le t\le 2\pi\\ \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)+\frac{2F_0}{9}\cos(3t),\ t\ge 2\pi\end{cases}\tag{5.54}$$

Como se observa en (5.54), la función de desplazamiento en $t\in[\pi,2\pi]$ está dada por $x(t)=\frac{2F_0}{9}+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)$. ∎

∎ **Ejemplo 5.41** Suponga que un peso de 32 libras estira un resorte 2 pies. Si el peso se libera del reposo desde la posición de equilibrio, encuentre la función de movimiento $x(t)$, si una fuerza aplicada $f(t)=20t$ actúa sobre el sistema cuando $0\le t<5$ y después se elimina (no se considera amortiguación).

Resolución

Es fácil ver que $m=1$ y $k=16$. En el caso de la fuerza externa se tiene

$$f(t)=20t-20(t-5)H(t-5)-100H(t-5)\tag{5.55}$$

Con estos datos el modelo matemático del problema es:

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)+16x(t)=20t-20(t-5)H(t-5)-100H(t-5),\ t>0\\ x(0)=\dot{x}(0)=0\end{cases}\tag{5.56}$$

Aplicamos transformada de Laplace en (5.56) y se obtiene:

$$s^2\mathscr{L}[x(t)]+16\mathscr{L}[x(t)]=\frac{20}{s^2}-\frac{20e^{-5s}}{s^2}-\frac{100e^{-5s}}{s}$$

$$\Longrightarrow\mathscr{L}[x(t)]=\frac{20}{s^2(s^2+16)}-\frac{20e^{-5s}}{s^2(s^2+16)}-\frac{100e^{-5s}}{s(s^2+16)}\tag{5.57}$$

Ahora hacemos los siguientes cálculos:

$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+16)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{16}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{16}\frac{1}{s^2+16}\right]=\frac{1}{16}t-\frac{1}{64}\operatorname{sen}(4t)=\phi(t)$

$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+16)}\right]=\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\ \frac{4}{s^2+4^2}\right]=\frac{1}{4}(1*\operatorname{sen}(4t))=\frac{1}{4}\int_0^t\operatorname{sen}(4u)du=$ $\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\cos(4t)=\psi(t)$

Luego aplicando transformada inversa de laplace en (5.57) se tiene:

$$x(t)=20\phi(t)-20\phi(t-5)H(t-5)-100\psi(t-5)H(t-5)$$

donde, usando las funciones $\phi(t)$ y $\psi(t)$ se tiene finalmente que la función de posición está dada por la función

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{5}{4}t - \frac{5}{16}\operatorname{sen}(4t) &- 20\left[\frac{t-5}{16} - \frac{\operatorname{sen}(4t-20)}{64}\right]H(t-5) \\ &- 100\left[\frac{1}{16} - \frac{\cos(4t-20)}{16}\right]H(t-5) \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 5.42** Resuelva el problema: $\begin{cases} y'' + y = \sum_{k=1}^{+\infty} P_0\delta(t-2k\pi),\ t>0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$, donde P_0 es una constante diferente de cero.

Resolución

Si aplicamos transformada de Laplace al sistema y hacemos $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$ se tiene

$$s^2Y(s) + Y(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_0\mathscr{L}[\delta(t-2k\pi)]$$

que desarrollando la transformada de Laplace en la función de Dirac, llegamos a la ecuación

$$s^2Y(s) + Y(s) = P_0\sum_{k=1}^{+\infty} P_0e^{-2k\pi s}$$

de aquí se tiene

$$Y(s) = P_0\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{-2k\pi s}}{s^2+1}$$

Pero $\mathscr{L}[\operatorname{sen}(t)] = \frac{1}{s^2+1}$, entonces

$$Y(s) = P_0\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2k\pi s}\mathscr{L}[\operatorname{sen}(t)]$$

Luego aplicando transformada de Laplace con la segunda propiedad de traslación se llega a la solución del problema, que es la función

$$y(t) = P_0\sum_{k=1}^{+\infty}\operatorname{sen}(t-2k\pi)H(t-2k\pi)$$

Como $\operatorname{sen}(t-2k\pi) = \operatorname{sen}(t)$, entonces

$$y(t) = P_0\operatorname{sen}(t)\sum_{k=1}^{+\infty} H(t-2k\pi) \tag{5.58}$$

Para ver como es el comportamiento de (5.58) por el efecto de la serie infinita, desarrollamos ésta para un caso finito, así tenemos:

$$H(t-2\pi)+H(t-4\pi)+\cdots+H(t-2n\pi)=\begin{cases} 0,\ 0\le t<2\pi \\ 1,\ 2\pi\le t<4\pi \\ 2,\ 4\pi\le t<6\pi \\ 3,\ 6\pi\le t<8\pi \\ \vdots \\ n-1,\ 2(n-1)\pi\le t<2n\pi \\ n,\ t\ge 2n\pi \end{cases}$$

Si tomamos $n\in\mathbb{N}$, en (5.58) se tiene

$$y(t)=P_0\operatorname{sen}(t)\sum_{k=1}^{n}H(t-2k\pi)=\begin{cases} 0,\ 0\le t<2\pi \\ \operatorname{sen}(t),\ 2\pi\le t<4\pi \\ 2\operatorname{sen}(t),\ 4\pi\le t<6\pi \\ 3\operatorname{sen}(t),\ 6\pi\le t<8\pi \\ \vdots \\ (n-1)\operatorname{sen}(t),\ 2(n-1)\pi\le t<2n\pi \\ n\operatorname{sen}(t),\ t\ge 2n\pi \end{cases}$$

Aquí podemos ver que:

$$y(t)=(n-1)\operatorname{sen}(t),\ t\in[2(n-1)\pi,2n\pi\rangle$$

y $\lim_{n\to\infty} y(t)=+\infty$, esto significa que la amplitud de la onda en cada intervalo de la forma $[2(n-1)\pi,2n\pi\rangle$ se va haciendo cada vez mas grande a medida que n crece, esto lo ilustramos en la Figura 5.16. ■

■ **Ejemplo 5.43** Un peso de 4 libras estira un resorte 2 pies. El peso se libera desde el reposo 18 pulgadas arriba de la posición de equilibrio, y el movimiento resultante toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a $\frac{7}{8}$ de la velocidad instantánea. Use transformada de Laplace para determinar la función de posición del cuerpo en cualquier instante $t\ge 0$.

<u>Resolución</u>

Según los datos del problema se tiene: $m=\frac{1}{8}$ (masa), $k=2$ (constante de elasticidad del resorte) y $b=\frac{7}{8}$ (constante de amortiguamiento). Con estos parámetros se tiene la ecuación diferencial $\frac{1}{8}\ddot{x}+\frac{7}{8}\dot{x}+2x=0$, que es equivalente

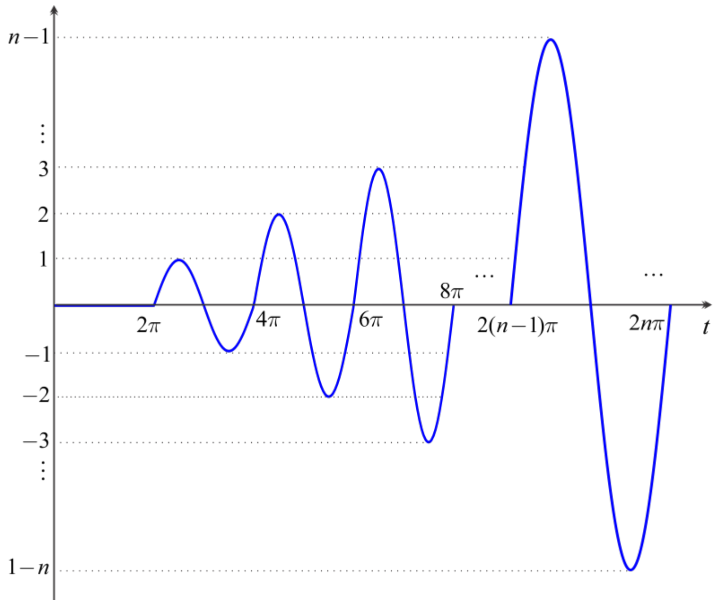


Figura 5.16: Amplitud de onda

a $\ddot{x}+7\dot{x}+16x=0$. Luego con las condiciones iniciales se tiene el problema:

$$\begin{cases} \ddot{x}+7\dot{x}+16x=0 \\ x(0)=-\frac{3}{2} \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases} \tag{5.59}$$

Si hacemos $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$ y aplicamos transformada de Laplace al problema (5.59) se tiene:

$$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+7\left[sX(s)-x(0)\right]+16X(s)=0$$

Usando las condiciones iniciales, despejando $X(s)$ y haciendo los arreglos pertinentes se obtiene:

$$X(s)=-\frac{3}{2}\frac{s+\frac{7}{2}}{\left(s+\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}-\frac{21}{2\sqrt{15}}\frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\left(s+\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}$$

Aquí, aplicamos transformada inversa de Laplace y se obtiene que la posición del cuerpo en cualquier instante $t \geq 0$ está dada por la función

$$x(t) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{7}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) - \frac{21}{2\sqrt{15}}e^{-\frac{7}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$$

■

■ **Ejemplo 5.44** Halle la solución del problema:

$$\begin{cases} y'' + 9y = f(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \tag{5.60}$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 3, \ 0 < t < 2 \\ t^2, \ t \geq 2 \end{cases} \tag{5.61}$$

Resolución

Para aplicar la transformada de Laplace, antes debemos hacer arreglos a la función $f(t)$, para lo cual hacemos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 3, \ 0 < t < 2 \\ t^2, \ t \geq 2 \end{cases} = 3 + (t^2 - 3)H(t-2) \\ &= 3 + \left[(t-2)^2 + 4t - 7\right]H(t-2) \\ &= 3 + \left[(t-2)^2 + 4(t-2) + 1\right]H(t-2) \\ &= 3 + (t-2)^2H(t-2) + 4(t-2)H(t-2) + H(t-2) \end{aligned}$$

Con este resultado, de (5.60) y (5.61) se tiene:

$$\begin{cases} y'' + 9y = 3 + (t-2)^2H(t-2) + 4(t-2)H(t-2) + H(t-2), \ t \geq 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Aquí aplicamos transformada de Laplace, para lo cual hacemos uso de la segunda propiedad de traslación (ver teorema 5.1.17):

$$s^2\mathscr{L}[y(t)] - sy(0) - y'(0) + 9\mathscr{L}[y(t)] = \frac{3}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s^3} + \frac{4e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

luego

$$\mathscr{L}[y(t)] = \frac{3}{s(s^2+9)} + \frac{2e^{-2s}}{s^3(s^2+9)} + \frac{4e^{-2s}}{s^2(s^2+9)} + \frac{e^{-2s}}{s(s^2+9)} + \frac{2s}{s^2+9} - \frac{1}{s^2+9} \tag{5.62}$$

De (5.62) desarrollamos la transformada inversa de sus términos separadamente, así tenemos:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{3}{s^2+9}\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[1 * \operatorname{sen}(3t)\right] = \frac{1}{3}\int_0^t \operatorname{sen}(3u)du\\
&= -\frac{1}{9}\left\{\cos(3u)\right\}_0^t\\
&= \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos(3t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\frac{3}{s^2+9}\right] = \frac{1}{6}\left[t^2 * \operatorname{sen}(3t)\right]\\
&= \frac{1}{6}\left[\operatorname{sen}(3t) * t^2\right] = \frac{1}{6}\int_0^t \operatorname{sen}(3u)(t-u)^2 du\\
&= \frac{1}{6}\int_0^t \left[t^2\operatorname{sen}(3u) - 2tu\operatorname{sen}(3u) + u^2\operatorname{sen}(3u)\right] du\\
&= \frac{1}{6}\left\{\left[\frac{2}{27} - \frac{1}{3}u^2 + \frac{2}{3}ut - \frac{1}{3}t^2\right]\cos(3u) + \left[\frac{2}{9}u - \frac{2}{9}t\right]\operatorname{sen}3u\right\}_0^t\\
&= \frac{1}{18}t^2 - \frac{1}{81} + \frac{1}{81}\cos(3t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\frac{3}{s^2+9}\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[t * \operatorname{sen}(3t)\right] = \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}(3t) * t\right]\\
&= \frac{1}{3}\int_0^t \operatorname{sen}(3u)(t-u)du = \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{3}(t-u)\cos(3u) - \frac{1}{9}\operatorname{sen}(3u)\right\}_0^t\\
&= \frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\operatorname{sen}(3t)
\end{aligned}$$

Usando estos resultados en (5.62) y aplicando transformada inversa de Laplace se tiene que

$$\begin{aligned}
y(t) = \quad & 3f_1(t) + 2f_2(t-2)H(t-2) + 4f_3(t-2)H(t-2)\\
& + f_1(t-2)H(t-2) + 2\cos(3t) - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)
\end{aligned}$$

de donde

$$y(t) = \frac{1+5\cos(3t)-\operatorname{sen}(3t)}{3} + \frac{1}{3}\left[f_1(t-2)+2f_2(t-2)+4f_3(t-2)\right]H(t-2)$$

■

■ **Ejemplo 5.45** Una masa que está sujeta a un resorte se suelta del reposo 1m. debajo de la posición de equilibrio del sistema resorte - masa y empieza a vibrar. Después de $\frac{\pi}{2}$ segundos, la masa es golpeada por un martillo que le transmite un impulso, quedando así el movimiento regido según el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t)+9x(t) = -3\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right),\ t>0 \\ x(0)=1 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases} \tag{5.63}$$

donde $x(t)$ es el desplazamiento de la masa con respecto del equilibrio en el instante t, ¿ qué le sucede a la masa después de ser golpeada?

<u>Resolución</u>

Hacemos $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$ y aplicamos transformada de Laplace en (5.63), teniendo así:

$$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+9X(s) = -3e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

aplicando las condiciones iniciales de (5.63) y haciendo las simplificaciones respectivas se obtiene

$$X(s) = \frac{s}{s^2+9} - 3\frac{1}{s^2+9}e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

donde aplicando transformada inversa de Laplace se obtiene la función de posición

$$x(t) = \cos(3t) - \operatorname{sen}\left(3t-\frac{3\pi}{2}\right)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

o también

$$x(t) = \cos(3t) - \cos(3t)H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Desarrollando la función de Heaviside se tiene finalmente:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(3t),\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 0,\ t>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Aquí, respondiendo a la pregunta de ¿qué le ocurre a la masa después de ser golpeada? decimos, que la masa queda en reposo, es decir, el impulso proporcionado por el golpe del martillo anuló la vibración; esto lo podemos ver en la figura 5.17. ■

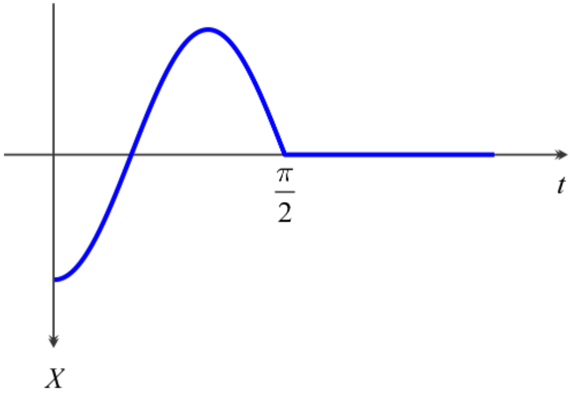


Figura 5.17: Representación de la curva de oscilación $x(t)$ para $t \geq 0$. Se observa que la oscilación se anula para $t \geq \frac{\pi}{2}$.

■ **Ejemplo 5.46** Determine la función $y(t)$, si se cumple que

$$\begin{cases} y'' + y = t - tH(t-2),\ t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \tag{5.64}$$

<u>Resolución</u>

Sea $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$, aplicamos transformada de Laplace en (5.64) y vemos que

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \mathscr{L}[t] - \mathscr{L}[tH(t-2)]$$

usando las condiciones iniciales se tiene

$$s^2Y(s) - 1 + Y(s) = \frac{1}{s^2} - (-1)\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{-2s}}{s}\right]$$

de donde

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2s+1}{s^2(s^2+1)}e^{-2s} \tag{5.65}$$

Pero desarrollando en fracciones parciales vemos que

$$\frac{2s+1}{s^2(s^2+1)} = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - 2\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

Con esto,(5.65) se convierte en:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \left[\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - 2\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right] e^{-2s} \tag{5.66}$$

Aplicamos transformada inversa de Laplace en (5.66) para obtener:

$$y(t) = t - \mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - 2\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right) e^{-2s}\right] \tag{5.67}$$

Aquí se tiene que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - 2\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right)\right] = 2 + t - 2\cos t - \operatorname{sen} t$$

Con este resultado en (5.67), se obtiene que

$$y(t) = t + [\operatorname{sen}(t-2) + 2\cos(t-2) - (t-2) - 2]\, H(t-2)$$

que equivale a

$$y(t) = t + [\operatorname{sen}(t-2) + 2\cos(t-2) - t]\, H(t-2)$$

o también

$$y(t) = \begin{cases} t,\ 0 \leq t \leq 2 \\ \operatorname{sen}(t-2) + 2\cos(t-2),\ t > 2 \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.47** En la ecuación diferencial

$$t^2y'' + ty' + t^2y = 0,\ t > 0 \tag{5.68}$$

Determine $\mathscr{L}[y(t)]$.

<u>Resolución</u>

Sea $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$, si aplicamos transformada de Laplace en (5.68) y usamos (5.17), entonces se tiene:

$$(-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right\} - \frac{d}{ds}\left\{sY(s) - y(0)\right\} + (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\{Y(s)\} = 0$$

efectuamos las derivadas:

$$\frac{d}{ds}\{2sY(s) + s^2Y'(s) - y(0)\} - Y(s) - sY'(s) + Y''(s) = 0$$

$$\Longrightarrow 2Y(s)+4sY'(s)+s^2Y''(s)-Y(s)-sY'(s)+Y''(s)=0$$

de donde agrupando convenientemente se tiene:

$$(s^2+1)Y''(s)+3sY'(s)+Y(s)=0 \tag{5.69}$$

Pero aquí podemos ver que

$$\frac{d}{ds}\left\{(1+s^2)Y'(s)+sY(s)\right\}=(s^2+1)Y''(s)+3sY'(s)+Y(s)$$

entonces (5.69) se convierte en:

$$\frac{d}{ds}\left\{(1+s^2)Y'(s)+sY(s)\right\}=0$$

en donde al integrar nos queda la ecuación diferencial de primer orden

$$(s^2+1)Y'(s)+3sY'(s)+Y(s)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$$

que es equivalente a:

$$Y'(s)+\frac{s}{s^2+1}Y(s)=\frac{c_1}{s^2+1}$$

multiplicando esta ecuación diferencial por el factor integrante[16] $FI=\sqrt{s^2+1}$ se tiene:

$$\underbrace{\sqrt{s^2+1}Y'(s)+\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}Y(s)}_{\frac{d}{ds}\left\{\sqrt{s^2+1}Y(s)\right\}}=\frac{c_1}{\sqrt{s^2+1}}$$

es decir:

$$\frac{d}{ds}\left\{\sqrt{s^2+1}Y(s)\right\}=\frac{c_1}{\sqrt{s^2+1}}$$

aquí integramos

$$\int d(\sqrt{s^2+1}Y(s))=\int\frac{c_1}{\sqrt{s^2+1}}ds+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$$

entonces

$$\sqrt{s^2+1}Y(s))=c_1\ln(s+\sqrt{s^2+1})+c_2$$

luego

$$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)=c_1\frac{\ln(s+\sqrt{s^2+1})}{\sqrt{s^2+1}}+\frac{c_2}{\sqrt{s^2+1}}$$

■

[16] $FI=e^{\int\frac{s}{s^2+1}ds}=e^{\frac{1}{2}\ln(s^2+1)}=\sqrt{s^2+1}$

■ **Ejemplo 5.48** Halle la solución de

$$\begin{cases} y'' + ty' - y = 0, \ t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \tag{5.70}$$

Resolución

Antes de empezar, hacemos $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$, luego aplicamos transformada de Laplace en (5.70) para obtener:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - \frac{d}{ds}\left[sY(s) - y(0)\right] - Y(s) = 0$$

usamos las condiciones iniciales y calculamos la derivada, para obtener:

$$Y'(s) + \left(\frac{2}{s} - s\right)Y(s) = -\frac{1}{s}$$

Aquí multiplicamos por el factor integrante[17] $FI = s^2e^{-\frac{s^2}{2}}$, entonces:

$$\underbrace{s^2e^{-\frac{s^2}{2}}Y'(s) + \left(2s - s^3\right)e^{-\frac{s^2}{2}}Y(s)}_{\frac{d}{ds}\left\{s^2e^{-\frac{s^2}{2}}Y(s)\right\}} = -se^{-\frac{s^2}{2}}$$

es decir:

$$\frac{d}{ds}\left\{s^2e^{-\frac{s^2}{2}}Y(s)\right\} = -se^{-\frac{s^2}{2}}$$

Aquí integramos, entonces

$$\int d\left(s^2e^{-\frac{s^2}{2}}Y(s)\right) = -\int se^{-\frac{s^2}{2}}ds + c, \ c \in \mathbb{R}$$

$$s^2e^{-\frac{s^2}{2}}Y(s) = e^{-\frac{s^2}{2}} + c$$

luego

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + c\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2} \tag{5.71}$$

[17] $FI = e^{\int\left(\frac{2}{s} - s\right)ds} = e^{2\ln s - \frac{s^2}{2}} = s^2e^{-\frac{s^2}{2}}$

Aquí en (5.71) se tiene que $\lim_{s\to+\infty} \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2} = +\infty$; sin embargo, de acuerdo al teorema 5.1.24 debe acontecer que $\lim_{s\to+\infty} Y(s) = 0$, por tal motivo solo queda tomar $c = 0$. Poniendo $c = 0$ en (5.71) nos queda

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

donde al aplicar transformada inversa de Laplace resulta que

$$y(t) = t$$

■

■ **Ejemplo 5.49** Determine $x(t)$ en el problema:

$$\begin{cases} tx'' - 2x' + tx = 0,\ t > 0 \\ x(0) = 0 \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases} \tag{5.72}$$

<u>Resolución</u>

Primero tomemos $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$, luego aplicamos transformada de Laplace en (5.72) para obtener:

$$-\frac{d}{ds}\left\{s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right\} - 2\{sX(s) - x(0)\} - \frac{d}{ds}X(s) = 0$$

aplicando las condiciones iniciales y simplificando se tiene que

$$X'(s) + \frac{4s}{s^2+1}X(s) = 0$$

aquí integramos y vemos que

$$X(s) = \frac{c}{(s^2+1)^2},\ c \in \mathbb{R}$$

Con este resultado procedemos a aplicar la transformada inversa de Laplace, para lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= c\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = c\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\right] \\ &= c\,\mathrm{sen}(t) * \mathrm{sen}(t) = c\int_0^t \mathrm{sen}(u)\,\mathrm{sen}(t-u)du \\ &= \frac{c}{2}\int_0^t [\cos(2u-t)\cos(t)]du = \frac{c}{2}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2u-t) - u\cos(t)\right\}_0^t \\ &= \frac{c}{2}(\mathrm{sen}\,t - t\cos t) \end{aligned}$$

Así se tiene

$$x(t) = \frac{c}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$$

Con la condición $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, se obtiene $c = -2$, por lo tanto, la solución del problema es:

$$x(t) = t\cos t - \operatorname{sen} t$$

■

■ **Ejemplo 5.50** Usando transformada de Laplace, encuentre $y(t)$ en el problema:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = \delta(t-\pi) + 3\delta(t-3\pi),\ t > 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{5.73}$$

<u>Resolución</u>

Sea $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$, aplicando transformada de Laplace en (5.73) se tiene

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4\left[sY(s) - y(0)\right] + 13Y(s) = e^{-\pi s} + 3e^{-3\pi s}$$

usando las condiciones iniciales y despejando $Y(s)$ se obtiene:

$$Y(s) = \frac{1}{3}\frac{3\quad e^{-\pi s}}{(s+2)^2+3^2} + \frac{3\quad e^{-3\pi s}}{(s+2)^2+3^2} + \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{2}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

donde al aplicar la transformada inversa de Laplace, se convierte en

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{3}e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen}(3(t-\pi))H(t-\pi) + e^{-2(t-3\pi)}\operatorname{sen}(3(t-3\pi))H(t-3\pi) \\ &\quad + e^{-2t}\cos(3t) + \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3t) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{3}e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen}(3t)H(t-\pi) - e^{-2(t-3\pi)}\operatorname{sen}(3t)H(t-3\pi) \\ &\quad + e^{-2t}\cos(3t) + \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3t) \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 5.51** Resuelva:

$$\begin{cases} x'' + 9x = \delta(t-3\pi) + \cos(3t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} \tag{5.74}$$

Resolución

Hacemos $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$ y aplicamos transformada de Laplace en (5.74), teniendo así:

$$s^2X(s) + 9X(s) = e^{-3\pi s} + \frac{s}{s^2+9}$$

de aquí despejamos $X(s)$ y obtenemos:

$$X(s) = \frac{1}{s^2+9}e^{-3\pi s} + \frac{s}{(s^2+9)^2} \tag{5.75}$$

En (5.75) desarrollamos la transformada inversa de Laplace de sus términos separadamente, así tenemos:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right] = \frac{1}{3}\,\text{sen}(3t)$$

de donde

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}e^{-3\pi s}\right] &= \frac{1}{3}\,\text{sen}(3(t-3\pi))H(t-3\pi)\\ &= -\frac{1}{3}\,\text{sen}(3t)H(t-3\pi)\end{aligned}$$

Asimismo:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+9)^2}\right] &= \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+3^2)}\frac{3}{(s^2+3^2)}\right]\\ &= \frac{1}{3}\cos(3t) * \text{sen}(3t)\\ &= \frac{1}{3}\int_0^t \cos(3u)\,\text{sen}(3t-3u)du\\ &= \frac{1}{6}\int_0^t [\text{sen}(3t) + \text{sen}(3t-6u)]du\\ &= \frac{1}{6}\left\{u\,\text{sen}(3t) + \frac{1}{6}\cos(6u-3t)\right\}_0^t\\ &= \frac{1}{6}t\,\text{sen}(3t)\end{aligned}$$

Con estos resultados, después de aplicar transformada inversa de Laplace en (5.75) se obtiene:

$$x(t) = -\frac{1}{3}\,\text{sen}(3t)H(t-3\pi) + \frac{1}{6}t\,\text{sen}(3t),\ t \geq 0$$

de donde:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} t \operatorname{sen}(3t), \ 0 \le t < 3\pi \\ \\ \frac{1}{6} t \operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3t), \ t \ge 3\pi \end{cases}$$

La representación de la gráfica de $x(t)$ se muestra en la figura 5.18 ■

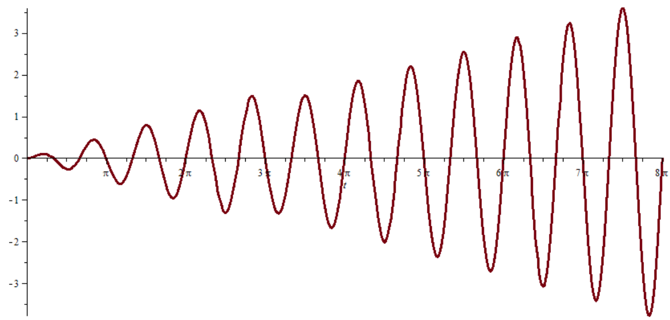


Figura 5.18: La curva de oscilación de $x(t)$, para $0 \le t \le 8\pi$. Vemos que hay resonancia.

■ **Ejemplo 5.52** Resuelva:

$$\begin{cases} y' - 5y = f(t), \ t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{5.76}$$

donde $f(t) = \begin{cases} t^2, \ 0 \le t < 1 \\ 0, \ t \ge 1 \end{cases}$.

<u>Resolución</u>

Antes de empezar con la resolución de la ecuación diferencial, debemos escribir $f(t)$ en una forma apropiada, para lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} t^2, \ 0 \le t < 1 \\ 0, \ t \ge 1 \end{cases} = t^2 - t^2 H(t-1) \\ &= t^2 - \left[t^2 - 2t + 1 + (2t-1)\right] H(t-1) \\ &= t^2 - (t-1)^2 H(t-1) - [2(t-1)+1] H(t-1) \\ &= t^2 - (t-1)^2 H(t-1) - 2(t-1) H(t-1) - H(t-1) \end{aligned}$$

Con esto, nos queda la ecuación diferencial

$$y' - 5y = t^2 - (t-1)^2 H(t-1) - 2(t-1) H(t-1) - H(t-1)$$

Aquí aplicamos transformada de Laplace para obtener:

$$s\mathscr{L}[y(t)] - y(0) - 5\mathscr{L}[y(t)] = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^3}e^{-s} - \frac{2}{s^2}e^{-s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

de aquí despejamos $\mathscr{L}[y(t)]$ y se tiene:

$$\mathscr{L}[y(t)] = \frac{2}{s^3(s-5)} - \frac{2}{s^3(s-5)}e^{-s} - \frac{2}{s^2(s-5)}e^{-s} - \frac{1}{s(s-5)}e^{-s} + \frac{1}{s-5}$$

que simplificando un poco más nos da

$$\mathscr{L}[y(t)] = \frac{2}{s^3(s-5)} + \frac{1}{s-5} - \left(\frac{s^2+2s+2}{s^3(s-5)}\right)e^{-s} \tag{5.77}$$

A continuación, desarrollamos los términos de (5.77) en fracciones parciales y tenemos:

$\frac{1}{s^3(s-5)} = \frac{1}{125}\frac{1}{s-5} - \frac{1}{125}\frac{1}{s} - \frac{1}{25}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{5}\frac{1}{s^3}$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s-5)}\right] = \frac{1}{125}e^{5t} - \frac{1}{125} - \frac{1}{25}t - \frac{1}{10}t^2$$

Asimismo, $\frac{s^2+2s+2}{s^3(s-5)} = -\frac{2}{5}\frac{1}{s^3} - \frac{12}{25}\frac{1}{s^2} - \frac{37}{125}\frac{1}{s} + \frac{37}{125}\frac{1}{s-5}$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2+3s+2}{s^3(s-5)}\right] = -\frac{1}{5}t^2 - \frac{12}{25}t - \frac{37}{125} + \frac{37}{125}e^{5t}$$

Teniendo en cuenta estos resultados, aplicamos transformada inversa de Laplace en (5.77) y se tiene

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\left(\frac{1}{125}e^{5t} - \frac{1}{125} - \frac{1}{25}t - \frac{1}{10}t^2\right) + e^{5t} \\ &\quad - \left[-\frac{1}{5}(t-1)^2 - \frac{12}{25}(t-1) - \frac{37}{125} + \frac{37}{125}e^{5(t-1)}\right]H(t-1) \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{127}{125}e^{5t} - \frac{2}{125} - \frac{2}{25}t - \frac{1}{5}t^2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{5}(t-1)^2 + \frac{12}{25}(t-1) + \frac{37}{125} - \frac{37}{125}e^{5(t-1)}\right]H(t-1) \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 5.53** Halle $y(x)$ en la ecuación diferencial

$$y''' + y = \frac{1}{2}x^2 e^x,\ x \geq 0$$

sabiendo que $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

<u>Resolución</u>

En primer lugar se tiene que $\mathscr{L}[x^2] = \frac{2}{s^3}$, y de esto

$$\mathscr{L}\left[x^2 e^x\right] = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Teniendo en cuenta este resultado aplicamos ahora transformada de Laplace a la ecuación diferencial y se tiene:

$$s^3\mathscr{L}[y(x)] - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0) + Y(s) = \frac{1}{2}\frac{2}{(s-1)^3}$$

Aplicando las condiciones iniciales y despejando $\mathscr{L}[y(x)]$ llegamos al siguiente resultado:

$$\mathscr{L}[y(x)] = \frac{1}{(s^3+1)(s-1)^3} = \frac{1}{(s-1)^3(s+1)(s^2-s+1)}$$

y aquí aplicamos transformada inversa de Laplace para obtener:

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3(s+1)(s^2-s+1)}\right] \tag{5.78}$$

En (5.78) descomponemos en fracciones parciales el lado derecho, así tenemos:

$$\frac{1}{(s-1)^3(s+1)(s^2-s+1)} = \frac{A}{(s-1)^3} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1} + \frac{ES+F}{s^2-s+1}$$

haciendo las operaciones correspondientes encontramos que $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{4}$, $C = \frac{3}{8}$, $D = -\frac{1}{24}$, $E = -\frac{1}{3}$ y $F = \frac{2}{3}$. Con estos resultados nos queda:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s-1)^3(s+1)(s^2-s+1)} \quad &= \quad \frac{1}{2(s-1)^3} - \frac{3}{4(s-1)^2} + \frac{3}{8(s-1)} - \frac{1}{24(s+1)} \\ &\quad -\frac{1}{3}\frac{s-2}{s^2-s+1}\end{aligned}$$

Luego en (5.78) se tiene:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3}\right]-\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]+\frac{3}{8}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] \\ &\quad -\frac{1}{24}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] \\ &\quad +\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] \end{aligned}$$

y de aquí la solución es:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{4}x^2e^x-\frac{3}{4}xe^x+\frac{3}{8}e^x-\frac{1}{24}e^{-x}-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &\quad +\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{aligned}$$

■

Circuitos eléctricos

Aquí no entramos en muchos detalles, pero otra de las aplicaciones de la transformada de Laplace en la resolución de problemas relacionados con la física, es justamente el caso de circuitos eléctricos. Este caso tiene mucha similitud con el tema de oscilaciones que hemos trabajado en el capítulo 3, inclusive, la ecuación diferencial que sirve para circuitos eléctricos, se asemeja mucho a (3.7), donde los parámetros tienen otra connotación física. En un circuito en serie que consta de un inductor (L), un resistor (R) y un capacitor (C) (ver figura 5.19), la corriente $i(t)$ satisface la **Ley de kirchhoff**, según la cual:

Ley de kirchhoff: la caída total de voltaje a través de todos elementos del circuito (inductor, resistor, capacitor) en un instante t, es igual al voltaje total $E(t)$ aplicado al circuito a través de la fuente.

Matemáticamente esto es:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}q=E(t) \tag{5.79}$$

donde $q(t)$ es la carga del circuito en el instante t. Si se tiene en cuenta que

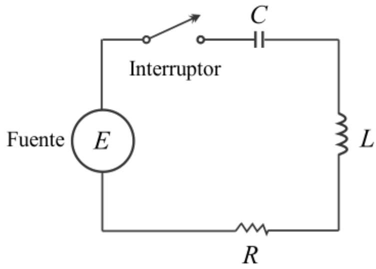


Figura 5.19: Circuito *RCL* en serie

la corriente es el cambio de la carga[18], entonces $i(t) = \frac{dq}{dt}$, así la ecuación diferencial (5.79) se convierte en

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{5.80}$$

Observación

Un circuito que consta de los tres elementos: inductor, resistor y capacitor; le llamaremos circuito RLC.

▪ **Ejemplo 5.54** En un circuito RLC, encuentre la corriente $i(t)$, si se sabe que cumple con el siguiente problema:

$$\begin{cases} 100i(t) + 1000\int_0^t i(u)du = E(t) \\ i(0) = 0 \end{cases} \tag{5.81}$$

donde $E(t) = \begin{cases} 100, \ 0 \leq t < 1 \\ 0, \ t \geq 1 \end{cases}$

<u>Resolución</u>

En primer lugar se tiene que

$$f(t) = 100 - 100H(t-1)$$

[18] O también

$$q(t) = \int_0^t i(u)du$$

luego con las simplificaciones respectivas, la ecuación diferencial de (5.81) queda así:

$$i(t) + 10\int_0^t i(u)du = 1 - H(t-1)$$

Aquí, teniendo en cuenta el teorema 5.1.15, aplicamos transformada de Laplace, resultando así

$$\mathscr{L}[i(t)] + \frac{10}{s}\mathscr{L}[i(t)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

de donde

$$\mathscr{L}[i(t)] = \frac{1}{s+10} - \frac{e^{-s}}{s+10}$$

Con la transformada inversa de Laplace, esto se convierte en

$$i(t) = e^{-10t} - e^{-10(t-1)}H(t-1)$$

es decir, la corriente eléctrica en el circuito está dada por la función

$$i(t) = \begin{cases} e^{-10t}, \; 0 \le t < 1 \\ e^{-10t}\left(1 - e^{10}\right), \; t \ge 1 \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.55** Un circuito en serie LC (no hay resistencia) está sujeto a un voltaje constante F_0, pero en el instante $t = 1$, el circuito recibe una fuerte descarga eléctrica de $2F_0$ voltios. Encuentre la carga $q(t)$, sabiendo que $q(0) = q'(0) = 0$.

<u>Resolución</u>

Según la información que se nos da en el problema, tenemos la ausencia de resistencia, por lo que ponemos $R = 0$ en (5.80). Además, en el instante $t = 1$ el circuito recibe un fuerte descarga eléctrica, en vista de que esta descarga es instantánea, entonces esta se representa con la función de Dirac, así tenemos la ecuación diferencial

$$Lq''(t) + \frac{1}{C}q(t) = F_0 + 2F_0\delta(t-1)$$

Hacemos $Q(s) = \mathscr{L}[q(t)]$ y Aplicando transformada de Laplace a esta ecuación nos queda:

$$L\left(s^2Q(s) - sq(0) - q'(0)\right) + \frac{1}{C}Q(s) = \frac{F_0}{s} + 2F_0e^{-s}$$

que usando las condiciones iniciales se convierte en

$$Ls^2Q(s)+\frac{1}{C}Q(s)=\frac{F_0}{s}+2F_0e^{-s}$$

de donde se tiene

$$Q(s)=\frac{F_0}{s\left(LS^2+\frac{1}{C}\right)}+\frac{2F_0e^{-s}}{Ls^2+\frac{1}{C}} \tag{5.82}$$

Descomponiendo en fracciones parciales $\frac{F_0}{s\left(LS^2+\frac{1}{C}\right)}$ se obtiene:

$$\frac{F_0}{s\left(LS^2+\frac{1}{C}\right)}=\frac{F_0C}{s}-\frac{LCF_0s}{Ls^2+\frac{1}{C}}$$

luego (5.82) queda así:

$$Q(s)=\frac{F_0C}{s}-\frac{LCF_0s}{Ls^2+\frac{1}{C}}+\frac{2F_0e^{-s}}{Ls^2+\frac{1}{C}}$$

Aquí hacemos algunos arreglos y se obtiene:

$$Q(s)=\frac{F_0C}{s}-\frac{CF_0s}{s^2+\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}+2\sqrt{\frac{C}{L}}F_0\frac{\frac{1}{\sqrt{CL}}}{s^2+\left(\frac{1}{\sqrt{CL}}\right)^2}e^{-s}$$

Aplicamos transformada inversa de Laplace y vemos que la función de carga está dada por

$$q(t)=F_0C-F_0C\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)+2F_0\sqrt{\frac{C}{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)H(t-1)$$

o también

$$q(t)=\begin{cases}F_0C-F_0C\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right),\ 0\leq t\leq 1\\ F_0C-F_0C\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)+2F_0\sqrt{\frac{C}{L}}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right),\ t>1\end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.56** Determine la función de corriente $i(t)$ en el circuito RLC, sabiendo que

$$\begin{cases}i''(t)+4i(t)=E(t)\\ i'(0)=i(0)=0\end{cases} \tag{5.83}$$

donde $E(t)=\begin{cases}1,\ 0\leq t<1\\ -1,\ 1\leq t<2\\ 0,\ t\geq 2\end{cases}$.

Resolución

Usando la función de Heaviside se tiene que

$$E(t) = 1 - 2H(t-1) + H(t-2),\ t \geq 0$$

con esto, en (5.83) nos queda la ecuación diferencial

$$i''(t) + 4i(t) = 1 - 2H(t-1) + H(t-2)$$

aplicando transformada de Laplace se obtiene:

$$s^2\mathscr{L}[i(t)] - si(0) - i'(0) + 4\mathscr{L}[i(t)] = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

de donde

$$\mathscr{L}[i(t)] = \frac{1}{s(s^2+4)} - 2\frac{1}{s(s^2+4)}e^{-s} + \frac{1}{s(s^2+4)}e^{-2s} \tag{5.84}$$

Aquí en (5.84) vemos que

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}$$

con este resultado en (5.84) se tiene:

$$\mathscr{L}[i(t)] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)e^{-s} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)e^{-2s} \tag{5.85}$$

Pero

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right] = 1 - \cos(2t)$$

Entonces, aplicando transformada inversa de Laplace en (5.85) resulta:

$$i(t) = \frac{1}{4}(1-\cos(2t) - \frac{1}{2}[1-\cos(2t-2)]H(t-1) + \frac{1}{4}[1-\cos(2t-4)]H(t-2)$$

que también lo podemos escribir como

$$i(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t),\ 0 \leq t < 1 \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\cos(2t-2),\ 1 \leq t < 2 \\ -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\cos(2t-2) - \frac{1}{4}\cos(2t-4),\ t \geq 2 \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.57** La corriente $i(t)$ en un circuito en serie LR (sin capacitor) está dada por la ecuación diferencial

$$L\frac{di}{dt}+Ri=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H(t-n) \tag{5.86}$$

con $i(0)=0$. Determine $i(t)$.

Resolución

Si hacemos $I(s)=\mathscr{L}[i(t)]$ y aplicamos transformada de Laplace en (5.86) se tiene:

$$sI(s)-i(0)+RI(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-ns}}{s}$$

que usando la condición inicial y despejando $I(s)$ se obtiene:

$$I(s)=\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}e^{-ns}$$

Pero:

$$\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}=\frac{L}{R}\frac{1}{s}-\frac{L}{R}\frac{1}{s+\frac{R}{L}}$$

entonces

$$I(s)=\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right]e^{-ns}$$

luego aplicamos transformada inversa de Laplace y obtenemos:

$$i(t)=\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1-e^{-\frac{R}{L}(t-n)}\right]H(t-n)$$

El comportamiento de la corriente $i(t)$ en este circuito lo mostramos en la figura 5.20. ■

■ **Ejemplo 5.58** En un circuito RLC, la corriente $i(t)$ en el tiempo t, satisface:

$$\begin{cases}\frac{di}{dt}+10000\int_0^t i(\tau)d\tau=E(t)\\ i(0)=0\end{cases} \tag{5.87}$$

donde $E(t)=\begin{cases}100\,\mathrm{sen}(10t),\ 0\le t<\pi\\ 0,\ t\ge\pi\end{cases}$. Determine la función $i(t)$.

Resolución

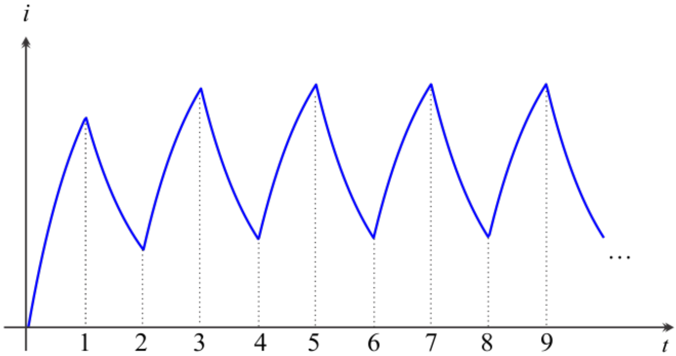


Figura 5.20: La curva de oscilación de la corriente $i(t)$, para $t \geq 0$.

En primer lugar hay que expresar la función $i(t)$, como una combinación de la función de Heaviside, para ello se tiene:

$$\begin{aligned} E(t) &= \begin{cases} 100\,\mathrm{sen}(10t), \; 0 \leq t < \pi \\ 0, \; t \geq \pi \end{cases} = 100\,\mathrm{sen}(10t) - 100\,\mathrm{sen}(10t)H(t-\pi) \\ &= 100\,\mathrm{sen}(10t) - 100\,\mathrm{sen}[10(t-\pi)]H(t-\pi) \end{aligned}$$

con esto, la ecuación diferencial de (5.87) queda así:

$$\frac{di}{dt} + 10000\int_0^t i(\tau)d\tau = 100\,\mathrm{sen}(10t) - 100\,\mathrm{sen}[10(t-\pi)]H(t-\pi) \quad (5.88)$$

Si hacemos $I(s) = \mathscr{L}[i(t)]$ y aplicamos la transformada de Laplace en (5.88), entonces

$$sI(s) - i(0) + 10000\frac{I(s)}{s} = 100\frac{10}{s^2+100} - 100\frac{10e^{-\pi s}}{s^2+100}$$

Usamos la condición inicial y luego despejamos $I(s)$ para obtener:

$$I(s) = 100\left\{\frac{s}{s^2+100^2}\frac{10}{s^2+10^2} - \frac{s}{s^2+100^2}\frac{10}{s^2+10^2}e^{-\pi s}\right\}$$

Aquí aplicamos transformada inversa de Laplace y se tiene:

$$i(t) = 100\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+100^2}\frac{10}{s^2+10^2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+100^2}\frac{10}{s^2+10^2}e^{-\pi s}\right]\right\} \quad (5.89)$$

Desarrollamos a continuación la transformada inversa

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+100^2}\frac{10}{s^2+10^2}\right] &= \cos(100t)*\mathrm{sen}(10t)\\
&= \int_0^t \cos(100u)\,\mathrm{sen}(10(t-u))du\\
&= \frac{1}{2}\int_0^t [\mathrm{sen}(10t+90u)+\mathrm{sen}(10t-110u)]\,du\\
&= \frac{1}{20}\left\{\frac{\cos(10t-110u)}{11}-\frac{\cos(10t+90u)}{9}\right\}_0^t\\
&= \frac{1}{1800}(\cos 10t-\cos 100t)
\end{aligned}$$

Usando este resultado, ponemos

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+100^2}\frac{10}{s^2+10^2}\right]=\frac{1}{1800}(\cos 10t-\cos 100t)$$

Luego en (5.89) se tiene:

$$i(t)=100\,[g(t)-g(t-\pi)H(t-\pi)]$$

desarrollando esto vemos que

$$i(t)=\frac{1}{18}\,[\cos(10t)-\cos(100t)-(\cos(10t)-\cos(100t))H(t-\pi)]$$

y de esto, la función de corriente en el circuito está dada por:

$$i(t)=\begin{cases}\frac{1}{18}(\cos 10t-\cos 100t),\ 0\le t<\pi\\[2ex] 0,\ t\ge\pi\end{cases}$$

Como se observa en la figura 5.21, a partir de $t=\pi$, la corriente se anula en el circuito ■

5.2.2 Deflexión de vigas

Si una viga de longitud L, homogénea en su forma y en el material del cual está construida, se encuentra en posición horizontal y soporta una carga $w(x)$, entonces la curva de deflexión[19] $y(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$EIy^{(4)}(x)=w(x) \tag{5.90}$$

[19]Llamada también **curva elástica**, es la curva que se forma por la deformación del eje longitudinal (eje imaginario) de una viga en posición horizontal, homogénea, debido a la aplicación de cargas transversales (verticales) sobre la viga.

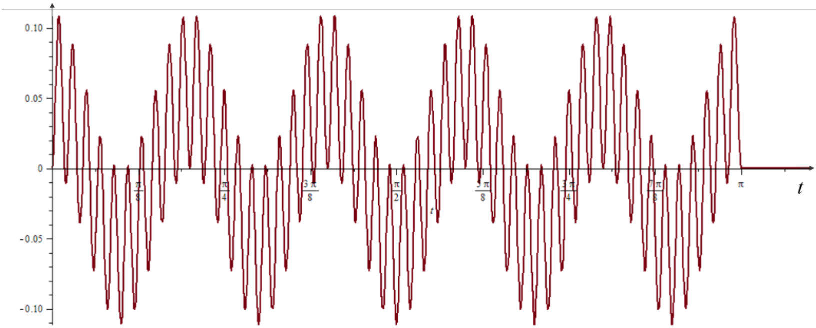


Figura 5.21: Comportamiento de la corriente $i(t)$ en el circuito, ésta se anula a partir de $t = \pi$.

Respecto de las condiciones iniciales o de frontera, se tiene los siguientes casos:

Viga simplemente apoyada

Es una viga cuyos extremos están simplemente apoyados, mostramos esto en la figura 5.22. Si nos fijamos en la curva elástica y exageramos un poco la

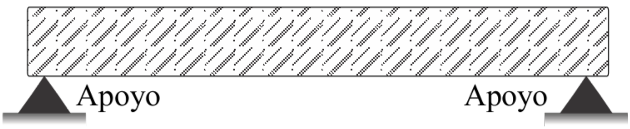


Figura 5.22: Viga simplemente apoyado.

doblez de la viga, ya sea por el efecto de una carga externa o de su propio peso, entonces esta satisface las condiciones de frontera $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y''(0) = 0$, $y''(L) = 0$ y tomando un sistema de coordenadas apropiado simulamos esta situación en la figura 5.23

Viga con extremos empotrados

En este caso, ambos extremos de la viga están incrustados y fijos en una pared como se muestra en la Figura 5.24: La curva de deflexión de la viga satisface las condiciones de frontera $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$. Con un sistema de coordenada apropiado esta curva se comporta como la figura 5.25

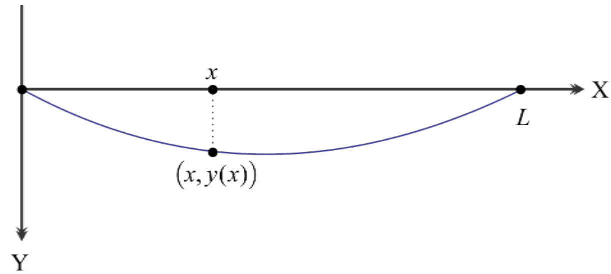


Figura 5.23: Curva de deflexión.

Figura 5.24: Vigas con sus dos extremos empotrados.

Viga en voladizo

Aquí, la viga tiene un extremo empotrado, quedando el otro extremo libre. En este texto asumiremos el extremo izquierdo empotrado y el extremo derecho libre, así como ilustra la figura 5.26 La curva de deflexión para este caso en un sistema apropiado de coordenadas como se muestra en la figura 5.27, satisface las condiciones de frontera $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(L = 0)$ y $y'''(L) = 0$.

A continuación resolvemos diversos problemas para determinar la deflexión de una viga, aplicando la transformada de Laplace.

■ **Ejemplo 5.59** Una viga en voladizo de longitud L, está empotrada en el extremo izquierdo y libre en el derecho, si soporta una carga de $W(x)$ por unidad de longitud dada por

$$W(x) = \begin{cases} W_0, & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

halle la deflexión $y(x)$ de la viga.

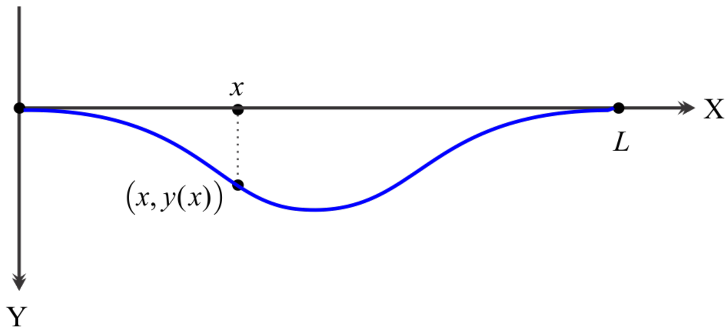


Figura 5.25: Curva de deflexión para una viga empotrada en ambos extremos.

Figura 5.26: Viga en voladizo.

Resolución

En primer lugar la función de carga $W(x)$ expresada en términos de la función H de Heaviside es

$$W(x) = W_0 - W_0 H\left(x - \frac{L}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq L \tag{5.91}$$

luego con la condición de ser una viga en voladizo[20], la ecuación diferencial con las condiciones de frontera es:

$$\begin{cases} EI\frac{d^4y}{dx^4} = W_0 - W_0 H\left(x - \frac{L}{2}\right), \; 0 < x < L \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(L) = 0 \\ y'''(L) = 0 \end{cases} \tag{5.92}$$

[20]Empotrada en el extremo izquierdo ($x = 0$) y libre en el derecho.

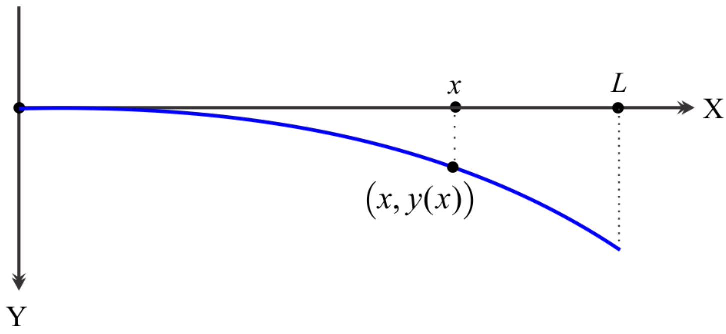


Figura 5.27: Curva de deflexión para una viga en voladizo.

que aplicando transformada de Laplace se convierte en:

$$EI\mathscr{L}\left[\frac{d^4}{dx^4}y(x)\right] = \frac{W_0}{s} - W_0\frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s}$$

Usando ahora (5.10) se llega a:

$$EI\ \left\{s^4\mathscr{L}[y(x)] - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)\right\} = \frac{W_0}{s} - W_0\frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s}$$

luego con las condiciones iniciales y asumiendo que $y''(0) = A$ y $y'''(0) = B$ se obtiene:

$$EI\left\{s^4\mathscr{L}[y(x)] - As - B\right\} = \frac{W_0}{s} - W_0\frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s}$$

de donde

$$\mathscr{L}[y(x)] = \frac{W_0}{EI}\left(\frac{1}{s^5} - \frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s^5}\right) + \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^4}$$

Aplicando a esto último la transformada inversa de Laplace vemos que:

$$y(x) = \frac{W_0}{EI}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] - \frac{W_0}{EI}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s^5}\right] + A\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] + B\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] \tag{5.93}$$

donde

1. $\mathscr{L}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{1}{2}\mathscr{L}\left[\frac{2}{s^3}\right] = \frac{1}{2}x^2$
2. $\mathscr{L}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \frac{1}{6}\mathscr{L}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{6}x^3$

3. $\mathscr{L}\left[\frac{1}{s^5}\right]=\frac{1}{24}\mathscr{L}\left[\frac{4!}{s^5}\right]=\frac{1}{24}x^4$
4. $\mathscr{L}\left[\frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s^5}\right]=\frac{1}{24}\mathscr{L}\left[\frac{4!}{s^5}e^{-\frac{L}{2}s}\right]=\frac{1}{24}\left(x-\frac{L}{2}\right)^4 H\left(x-\frac{L}{2}\right)$

Reemplazando todos estos resultados en (5.93), se obtiene:

$$y(x)=\frac{W_0}{24EI}x^4-\frac{W_0}{24EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^4 H\left(x-\frac{L}{2}\right)+\frac{A}{2}x^2+\frac{B}{6}x^3$$

cuya forma equivalente es

$$y(x)=\begin{cases}\frac{W_0}{24EI}x^4+\frac{A}{2}x^2+\frac{B}{6}x^3, & 0\le x<\frac{L}{2}\\ \\ \frac{W_0}{24EI}x^4-\frac{W_0}{24EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^4+\frac{A}{2}x^2+\frac{B}{6}x^3, & \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases} \tag{5.94}$$

A continuación calculamos la segunda y tercera derivada de $y(x)$ para $x\in\left[\frac{L}{2};L\right]$, y aplicamos las condiciones de frontera, en efecto:

$$y'(x)=\frac{W_0}{6EI}x^3-\frac{W_0}{6EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^3+Ax+\frac{B}{2}x^2$$
$$y''(x)=\frac{W_0}{2EI}x^2-\frac{W_0}{2EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+A+Bx$$
$$y'''(x)=\frac{W_0}{EI}x-\frac{W_0}{EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)+B$$

Como $y'''(L)=0$, entonces $B=-\frac{W_0L}{2EI}$. Luego aplicando $y''(L)=0$, resulta que $A=\frac{W_0L^2}{8EI}$, y poniendo estos resultados en (5.94), la solución final para la curva de deflexión está dada por

$$y(x)=\begin{cases}\frac{W_0}{24EI}x^4+\frac{W_0L^2}{16EI}x^2-\frac{W_0L}{12EI}x^3, & 0\le x<\frac{L}{2}\\ \\ \frac{W_0}{24EI}x^4-\frac{W_0}{24EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^4+\frac{W_0L^2}{16EI}x^2-\frac{W_0L}{12EI}x^3, & \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.60** Si una viga de longitud L está en voladizo, empotrada en su extremo izquierdo y libre en el derecho, encuentre la curva de deflexión sabiendo que satisface el problema: $\begin{cases}EI\frac{d^4y}{dx^4}=W(x)\\ \\ y(0)=0\\ y'(0)=0\\ y''(L)=0\\ y'''(L)=0\end{cases}$, donde la función de carga es $W(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{L}{3} \\ w_0 & \frac{L}{3} \leq x < \frac{2L}{3} \\ 0, & \frac{2L}{3} \leq x \leq L \end{cases}$

<u>Resolución</u>

En primer lugar, la función $W(x)$ escrita en términos de la función de Heaviside queda como:

$$W(x) = w_0\, H\left(x - \frac{L}{3}\right) - w_0\, H\left(x - \frac{2L}{3}\right), \quad x \in [0, L]$$

y con esto, la ecuación diferencial del problema es

$$EI\, \frac{d^4 y}{dx^4} = w_0\, H\left(x - \frac{L}{3}\right) - w_0\, H\left(x - \frac{2L}{3}\right) \tag{5.95}$$

Aplicando transformada de Laplace en (5.95) se tiene

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) = \frac{w_0\, e^{-\frac{L}{3}s}}{EIs} - \frac{w_0\, e^{-\frac{2L}{3}s}}{EIs} \tag{5.96}$$

aquí en (5.96) colocamos las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = A$, $y'''(0) = B$ para obtener

$$s^4 Y(s) - As - B = \frac{w_0\, e^{-\frac{L}{3}s}}{EIs} - \frac{w_0\, e^{-\frac{2L}{3}s}}{EIs}$$

de donde

$$Y(s) = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0\, e^{-\frac{L}{3}s}}{s^5} - \frac{w_0\, e^{-\frac{2L}{3}s}}{s^5}\right) + \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^4} \tag{5.97}$$

Puesto que:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s^5}\right] &= \tfrac{1}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{4!}{s^5}\right] = \tfrac{1}{24}x^4 \\ \mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s^4}\right] &= \tfrac{1}{3!}\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{3!}{s^4}\right] = \tfrac{1}{6}x^3 \\ \mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s^3}\right] &= \tfrac{1}{2!}\mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{2!}{s^3}\right] = \tfrac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

entonces (5.97) es equivalente a

$$Y(s) = \frac{w_0}{24EI}\left(\mathscr{L}\left[x^4\right] e^{-\frac{L}{3}s} - \mathscr{L}\left[x^4\right] e^{-\frac{2L}{3}s}\right) + \frac{A}{2}\mathscr{L}\left[x^2\right] + \frac{B}{6}\mathscr{L}\left[x^3\right]$$

luego aplicando transformada inversa de Laplace y segunda propiedad de traslación se obtiene la curva de deflexión

$$y(x) = \frac{w_0}{24EI}\left[\left(x-\frac{L}{3}\right)^4 H\left(x-\frac{L}{3}\right) - \left(x-\frac{2L}{3}\right)^4 H\left(x-\frac{2L}{3}\right)\right] + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{6}x^3$$

o también

$$y(x) = \begin{cases} \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{6}x^3, \ \ 0 \le x < \frac{L}{3} \\ \\ \frac{w_0}{24EI}\left(x-\frac{L}{4}\right)^4 + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{6}x^3, \ \ \frac{L}{3} \le x < \frac{2L}{3} \\ \\ \frac{w_0}{24EI}\left[\left(x-\frac{L}{3}\right)^4 - \left(x-\frac{2L}{3}\right)^4\right] + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{6}x^3, \ \ \frac{2L}{3} \le x \le L \end{cases} \tag{5.98}$$

Para aplicar las condiciones $y''(L) = 0$, $y'''(L) = 0$, se debe trabajar con la tercera parte de la función, aquella donde $x \in \left[\frac{2L}{3}, L\right]$. En tal sentido

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{w_0}{6EI}\left[\left(x-\frac{L}{3}\right)^3 - \left(x-\frac{2L}{3}\right)^3\right] + Ax + \frac{B}{2}x^2, \ \ \frac{2L}{3} < x < L \\ y''(x) &= \frac{w_0}{2EI}\left[\left(x-\frac{L}{3}\right)^2 - \left(x-\frac{2L}{3}\right)^2\right] + A + Bx, \ \ \frac{2L}{3} < x < L \\ y'''(x) &= \frac{w_0 L}{3EI} + B, \ \ \frac{2L}{3} < x < L \end{aligned}$$

y aplicando las condiciones $y''(L^-) = 0$ y $y'''(L^-) = 0$, se obtiene que

$$A = \frac{w_0 L^2}{6EI} \qquad \text{y} \qquad B = -\frac{w_0 L}{3EI}$$

Reemplazando estos resultado en (5.98)

$$y(x) = \begin{cases} \frac{w_0 L^2}{12EI}x^2 - \frac{w_0 L}{18EI}x^3, \ \ 0 \le x < \frac{L}{3} \\ \\ \frac{w_0}{24EI}\left(x-\frac{L}{4}\right)^4 + \frac{w_0 L^2}{12EI}x^2 - \frac{w_0 L}{18EI}x^3, \ \ \frac{L}{3} \le x < \frac{2L}{3} \\ \\ \frac{w_0}{24EI}\left[\left(x-\frac{L}{3}\right)^4 - \left(x-\frac{2L}{3}\right)^4\right] + \frac{w_0 L^2}{12EI}x^2 - \frac{w_0 L}{18EI}x^3, \ \ \frac{2L}{3} \le x \le L \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.61** Encuentre la deflexión $y(x)$ de una viga de longitud L que está en voladizo, empotrada en su extremo izquierdo y libre en el derecho, si la función de carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} w_0\left(1-\frac{2x}{L}\right),\ 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ 0,\ \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}$$

donde w_0 es una constante. Luego determine la deflexión de la viga en $x = \frac{L}{2}$.

Resolución

De acuerdo a las condiciones del problema[21], la deflexión $y(x)$ está dada por el problema:

$$\begin{cases} EIy^4(x) = w(x),\ 0 < x < L \\ y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0 \end{cases} \tag{5.99}$$

donde la función de carga $w(x)$ la expresamos así:

$$w(x) = w_0\left(1-\frac{2x}{L}\right) + \frac{2w_0}{L}\left(x-\frac{L}{2}\right)H\left(x-\frac{L}{2}\right) \tag{5.100}$$

Hacemos $Y(s) = \mathscr{L}[y(x)]$ y aplicamos transformada de Laplace[22] en (5.99) y (5.100), donde vemos que

$$EI\left[s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)\right] = \frac{w_0}{s} - \frac{2w_0}{L}\frac{1}{s^2} + \frac{2w_0}{L}\frac{e^{-\frac{Ls}{2}}}{s^2}$$

Si hacemos $y''(0) = A$ y $y'''(0) = B$, entonces

$$Y(s) = \frac{w_0}{EI}\frac{1}{s^5} - \frac{2w_0}{LEI}\frac{1}{s^6} + \frac{2w_0}{LEI}\frac{e^{-\frac{Ls}{2}}}{s^6} + \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^4} \tag{5.101}$$

---

[21]Es una viga que está en voladizo.

[22]En este caso hay que aplicar la segunda propiedad de traslación en $w(x)$, así se tiene que $\mathscr{L}\left[\left(x-\frac{L}{2}\right)H\left(x-\frac{L}{2}\right)\right] = e^{-\frac{Ls}{2}}\mathscr{L}[x]$.

de (5.101) se tiene lo siguiente:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]=\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right]=\frac{1}{2}x^2$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]=\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right]=\frac{1}{6}x^3$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right]=\frac{1}{24}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4!}{s^5}\right]=\frac{1}{24}x^4$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^6}\right]=\frac{1}{120}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5!}{s^6}\right]=\frac{1}{120}x^5 \quad \text{y}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{Ls}{2}}}{s^6}\right]=\frac{1}{120}\left(x-\frac{L}{2}\right)^5 H\left(x-\frac{L}{2}\right)$$

Usamos estos resultados para calcular la transformada inversa de Laplace en (5.101), así se tiene que

$$y(x)=\frac{w_0}{24EI}x^4-\frac{w_0}{60LEI}x^5+\frac{w_0}{60LEI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^5 H\left(x-\frac{L}{2}\right)+\frac{A}{2}x^2+\frac{B}{6}x^3$$

de donde

$$y(x)=\begin{cases}\frac{w_0}{24EI}x^4-\frac{w_0}{60LEI}x^5+\frac{A}{2}x^2+\frac{B}{6}x^3,\ 0\le x\le \frac{L}{2}\\[2ex] \frac{w_0}{24EI}x^4-\frac{w_0}{60LEI}x^5+\frac{w_0}{60LEI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^5+\frac{A}{2}x^2+\frac{B}{6}x^3,\ \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases} \tag{5.102}$$

En (5.102) vemos que para $x\in\left[\frac{L}{2},L\right]$ se tiene

$$y(x)=\frac{w_0}{24EI}x^4-\frac{w_0}{60LEI}x^5+\frac{w_0}{60LEI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^5+\frac{A}{2}x^2+\frac{B}{6}x^3$$

cuyas derivadas hasta de tercer orden son

$$y'(x)=\frac{w_0}{6EI}x^3-\frac{w_0}{12LEI}x^4+\frac{w_0}{12LEI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^4+Ax+\frac{B}{2}x^2$$

$$y''(x)=\frac{w_0}{2EI}x^2-\frac{w_0}{3LEI}x^3+\frac{w_0}{3LEI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^3+A+Bx$$

y

$$y'''(x)=\frac{w_0}{EI}x-\frac{w_0}{LEI}x^2+\frac{w_0}{LEI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+B$$

Acá resolvemos $y''(L) = 0$ y $y'''(L) = 0$, en efecto:

$$y''(L) = 0 \Longrightarrow A + BL = -\frac{5w_0L^2}{24EI} \qquad (*)$$

$$y'''(L) = 0 \Longrightarrow B = -\frac{w_0L}{4EI} \qquad (**)$$

Ponemos (**) en (*) y se obtiene $A = \frac{w_0L^2}{24EI}$. De esta manera se tiene finalmente que la curva de deflexión está dada por la función:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{w_0}{24EI}x^4 - \frac{w_0}{60LEI}x^5 + \frac{w_0L^2}{48EI}x^2 - \frac{w_0L}{24EI}x^3, \ 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \\ \frac{w_0}{24EI}x^4 - \frac{w_0}{60LEI}x^5 + \frac{w_0}{60LEI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^5 + \frac{w_0L^2}{48EI}x^2 - \frac{w_0L}{24EI}x^3, \ \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

Luego la deflexión en $x = \frac{L}{2}$ está dada por

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{w_0L^4}{480EI}$$

■

■ **Ejemplo 5.62** Se tiene una viga que es homogénea y de longitud L. Si esta viga soporta una carga concentrada w_0 en su punto medio, determine su curva de deflexión, sabiendo que está empotrada en cada uno de sus extremos como se muestra en siguiente figura

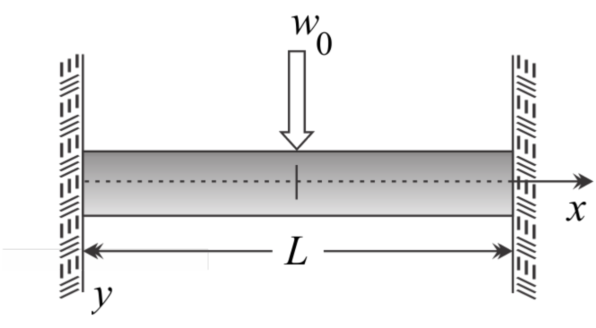


Figura 5.28: Viga del ejemplo 5.62.

Resolución

En este caso la ecuación diferencial con sus condiciones es:

$$\begin{cases} EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0\delta\left(x - \frac{L}{2}\right),\ 0 < x < L \\ \\ y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0 \end{cases} \tag{5.103}$$

Aplicando transformada de Laplace en (5.103) se tiene:

$$EI\mathscr{L}\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right] = w_0\mathscr{L}\left[\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]$$

de donde según (5.10) se convierte en

$$EI\left\{s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)\right\} = w_0e^{-\frac{Ls}{2}}$$

Poniendo $Y(s) = \mathscr{L}[y(x)]$ y aplicando las condiciones iniciales del problema $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = A$ y $y'''(0) = B$ se tiene:

$$EI\{s^4Y(s) - As - B\} = w_0e^{-\frac{Ls}{2}}$$

de donde encontramos que

$$Y(s) = \frac{w_0}{EI}\frac{1}{s^4}e^{-\frac{Ls}{2}} + \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^4}$$

Luego aplicando transformada inversa de Laplace se obtiene

$$y(x) = \frac{w_0}{EI}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}e^{-\frac{Ls}{2}}\right] + A\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] + B\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] \tag{5.104}$$

Aplicando propiedades se tiene:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] = \frac{1}{2}x^2$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{6}x^3$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}e^{-\frac{Ls}{2}}\right] = \frac{1}{6}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 H\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

Ponemos estos resultados en (5.104) y obtenemos la curva de deflexión

$$y(x) = \frac{w_0}{6EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{6}x^3 \tag{5.105}$$

de donde se obtiene

$$y(x) = \begin{cases} \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{6}x^3, \ 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \\ \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{6}x^3 + \frac{w_0}{6EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3, \ \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \tag{5.106}$$

Para determinar A y B usamos la segunda parte de (5.106), es decir el caso en que $x \in \left[\frac{L}{2}, L\right]$. Veamos esto, poniendo la condición $y(L) = 0$ en (5.106) resulta $\frac{AL^2}{2} + \frac{BL^3}{6} + \frac{w_0}{6EI}\left(L - \frac{L}{2}\right)^3 = 0$, de donde

$$A = -\frac{BL}{3} - \frac{w_0 L}{24EI} \tag{5.107}$$

Para $x \in \langle \frac{L}{2}, L \rangle$ se tiene que $y'(x) = Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{w_0}{2EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2$, luego aplicando la condición $y'(L) = 0$ vemos que $AL + \frac{BL^2}{2} + \frac{w_0}{2EI}\left(L - \frac{L}{2}\right)^2 = 0$, de donde

$$A = -\frac{Bl}{2} - \frac{w_0 L}{8EI} \tag{5.108}$$

Igualando (5.107) y (5.108) se obtiene $B = -\frac{w_0}{2EI}$ y con esto $A = \frac{w_0 L}{8EI}$. Poniendo los valores de A y B en (5.106) se obtiene finalmente la ecuación de la curva elástica dada por la función:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{w_0 L}{16EI}x^2 - \frac{w_0}{12EI}x^3, \ 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \\ \frac{w_0 L}{16EI}x^2 - \frac{w_0}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{6EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3, \ \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \tag{5.109}$$

■

■ **Ejemplo 5.63** Similar al problema anterior, una viga uniforme (u homogénea) de longitud l está empotrada en sus extremos $x = 0$ y $x = l$. Si en el punto $x = \frac{l}{3}$ actúa verticalmente hacia abajo una carga concentrada w_0, entonces la curva de deflexión $y(x)$ de la viga satisface la ecuación diferencial:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}(x) = w_0\delta\left(x - \frac{l}{3}\right), \ 0 < x < l$$

Determine la curva de deflexión $y(x)$.

<u>Resolución</u>

En este caso para aplicar transformada de Laplace a la ecuación diferencial, se asume que $y''(0) = A$ y $y'''(0) = B$, y de esta manera

$$EI\left[s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)\right] = w_0 e^{-\frac{l}{3}s}, \text{ donde } \mathscr{L}[y(t)] = Y(s)$$

luego

$$Y(s) = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^4} + \frac{w_0}{EI} \frac{e^{-\frac{l}{3}s}}{s^4}$$

al aplicar transformada inversa de Laplace a esto último se obtiene

$$y(x) = \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^3}{6} + \frac{w_0}{EI} \frac{\left(x - \frac{l}{3}\right)^3}{6} U\left(x - \frac{l}{3}\right)$$

lo cual equivale a:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^3}{6}, & 0 \leq x < \frac{l}{3} \\ \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^3}{6} + \frac{w_0}{6EI}\left(x - \frac{l}{3}\right)^3, & \frac{l}{3} \leq x \leq l \end{cases} \tag{5.110}$$

Usando las condiciones iniciales $y(l) = 0$, $y'(l) = 0$ en la segunda expresión de (5.110) (es decir, aquella donde $0 \leq x \leq l/3$), se obtiene $A = \frac{4w_0 l}{27EI}$ y $B = -\frac{20w_0}{27EI}$. Entonces la curva de deflexión está dada por

$$y(x) = \frac{4w_0 l}{27EI} \frac{x^2}{2} - \frac{20w_0}{27EI} \frac{x^3}{6} + \frac{w_0}{EI} \frac{\left(x - \frac{l}{3}\right)^3}{6} U\left(x - \frac{l}{3}\right)$$

O también

$$y(x) = \begin{cases} \frac{4w_0 l}{27EI} \frac{x^2}{2} - \frac{20w_0}{27EI} \frac{x^3}{6}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{3} \\ \frac{4w_0 l}{27EI} \frac{x^2}{2} - \frac{20w_0}{27EI} \frac{x^3}{6} + \frac{w_0}{6EI}\left(x - \frac{l}{3}\right)^3, & \frac{l}{3} < x \leq l \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.64** Una viga uniforme en voladizo, de longitud L, está empotrada en su extremo izquierdo ($x = 0$) y libre en el derecho. Encuentre la deflexión $y(x)$ si la carga por unidad de longitud x está dada por la función

$$W(x) = \frac{2w_0}{L}\left[\frac{L}{2} - x + \left(x - \frac{L}{2}\right) H\left(x - \frac{L}{2}\right)\right] \tag{5.111}$$

<u>Resolución</u>

Con la función de carga dada en (5.111), la ecuación diferencial con sus condiciones de frontera para la curva elástica de la viga en voladizo está dada por

$$\begin{cases} EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{2w_0}{L}\left[\frac{L}{2} - x + \left(x - \frac{L}{2}\right) H\left(x - \frac{L}{2}\right)\right] \\ y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0 \end{cases} \tag{5.112}$$

Aplicamos tranformada de Laplace en (5.112) y hacemos $Y(s) = \mathscr{L}[y(x)]$, teniendo así

$$EI\left[s^4Y(s) - y(0)s^3 - y'(0)s^2 - y''(0)s - y'''(0)\right] = \frac{2w_0}{L}\left[\frac{L}{2s} - \frac{1}{s^2} + e^{-\frac{LS}{2}}\mathscr{L}[x]\right]$$

haciendo $y''(0) = A$, $y'''(0) = B$ se tiene luego

$$EI\left[s^4Y(s) - As - B\right] = \frac{2w_0}{L}\left[\frac{L}{2s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-\frac{LS}{2}}}{s^2}\right]$$

y de esto último

$$Y(s) = \frac{w_0}{EI}\frac{1}{s^5} - \frac{2w_0}{L\,EI}\frac{1}{s^6} + \frac{2w_0}{L\,EI}\frac{1}{s^6}e^{-\frac{Ls}{2}} + \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^4} \tag{5.113}$$

Ahora, aplicamos transformada inversa de Laplace en (5.113), y así se tiene

$$\begin{aligned} y(x) = \frac{w_0}{EI}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] \quad &- \quad \frac{2w_0}{L\,EI}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^6}\right] + \frac{2w_0}{L\,EI}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^6}e^{-\frac{Ls}{2}}\right] \\ &+ \quad A\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] + B\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] \qquad (*) \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] &= \frac{1}{2}x^2 \\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] &= \frac{1}{6}x^3 \\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] &= \frac{1}{24}x^4 \\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^6}\right] &= \frac{1}{120}x^5 \\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^6}e^{-\frac{Ls}{2}}\right] &= \frac{1}{120}\left(x - \frac{L}{2}\right)^5 H\left(x - \frac{L}{2}\right) \end{aligned}$$

Poniendo estos resultados en (*) se obtiene:

$$y(x) = \frac{w_0}{24EI}x^4 - \frac{w_0}{60L\,EI}x^5 + \frac{w_0}{60L\,EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^5 H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{6}x^3$$

la cual es equivalente a

$$y(x)=\begin{cases}\frac{w_0}{24EI}x^4-\frac{w_0}{60L\,EI}x^5+\frac{A}{2}x^2+\frac{B}{6}x^3,\; 0\le x\le \frac{L}{2}\\[2ex] \frac{w_0}{24EI}x^4-\frac{w_0}{60L\,EI}x^5+\frac{w_0}{60L\,EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^5+\frac{A}{2}x^2+\frac{B}{6}x^3,\; \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases} \tag{5.114}$$

Para determinar A y B, tomamos la segunda parte de (5.114), es decir:

$$y(x)=\frac{w_0}{24EI}x^4-\frac{w_0}{60L\,EI}x^5+\frac{w_0}{60L\,EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^5+\frac{A}{2}x^2+\frac{B}{6}x^3,\; \frac{L}{2}\le x\le L$$

de donde se otiene:

$$\begin{aligned}y'(x)&=\frac{w_0}{6EI}x^3-\frac{w_0}{12L\,EI}x^4+\frac{w_0}{12L\,EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^4+Ax+\frac{B}{2}x^2\\ y''(x)&=\frac{w_0}{2EI}x^2-\frac{w_0}{3L\,EI}x^3+\frac{w_0}{3L\,EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^3+A+Bx\\ y'''(x)&=\frac{w_0}{EI}x-\frac{w_0}{L\,EI}x^2+\frac{w_0}{L\,EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+B\end{aligned}$$

Aplicando las condiciones $y''(L)=y'''(L)=0$ se tiene

$$\begin{cases}\frac{w_0}{2EI}L^2-\frac{w_0}{3L\,EI}L^3+\frac{w_0}{3L\,EI}\left(L-\frac{L}{2}\right)^3+A+BL=0\\[2ex] \frac{w_0}{EI}L-\frac{w_0}{L\,EI}L^2+\frac{w_0}{L\,EI}\left(L-\frac{L}{2}\right)^2+B=0\end{cases}$$

cuya simplificación nos da

$$\begin{cases}24A+24BL=-\frac{5w_0L^2}{EI}\\ B=-\frac{w_0L}{4EI}\end{cases}$$

Resolviendo este sistema se tiene $A=\frac{w_0L^2}{24EI}$ y $B=-\frac{w_0L}{4EI}$. Poniendo estos resultados en (5.114) se tiene finalmente que la curva elástica está dada por

$$y(x)=\begin{cases}\frac{w_0}{24EI}x^4-\frac{w_0}{60L\,EI}x^5+\frac{w_0L^2}{48EI}x^2-\frac{w_0L}{24EI}x^3,\; 0\le x\le \frac{L}{2}\\[2ex] \frac{w_0}{24EI}x^4-\frac{w_0}{60L\,EI}x^5+\frac{w_0}{60L\,EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)^5+\frac{w_0L^2}{48EI}x^2-\frac{w_0L}{24EI}x^3,\; \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.65** Cuando una viga uniforme en posición horizontal descansa sobre una base elástica, la ecuación diferencial para la curva de deflexión $y(x)$ es

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4a^4y = \frac{W(x)}{EI} \tag{5.115}$$

donde a es una constante. Para el caso en que $a = 1$, encuentre la deflexión $y(x)$ de una viga de longitud π que es soportada por una base elástica y tiene ambos extremos empotrados en concreto como se muestra en la figura 5.29; además de eso, se aplica una carga concentrada w_0 en $x = \frac{\pi}{2}$.

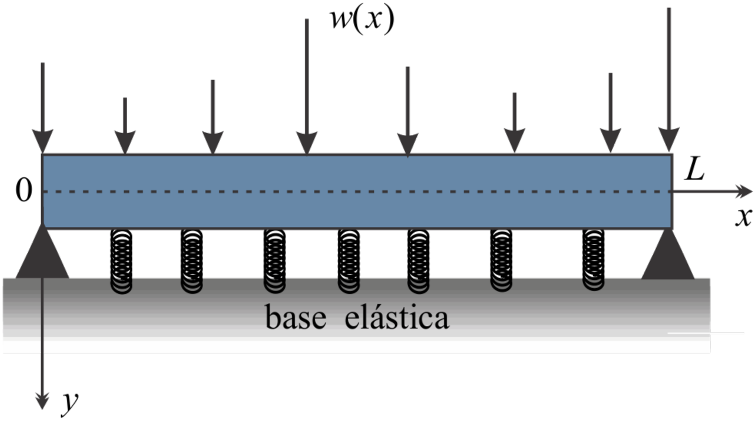


Figura 5.29: Viga con base elástica.

Resolución

En primer lugar, la función de carga está dada por la función $W(x) = w_0\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Puesto que la viga está empotrada en ambos lados, nos queda el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{d^4y}{dx^4} + 4y = \frac{w_0}{EI}\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right),\ 0 < x < \pi \\ \\ y(0) = y'(0) = y(\pi) = y'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{5.116}$$

Aplicando transformada de Laplace a (5.116) y haciendo $Y(s) = \mathscr{L}[y(x)]$ se tiene

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) + 4Y(s) = \frac{w_0}{EI}e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

donde aplicando las condiciones y haciendo $y''(0) = A$ y $y'''(0) = B$ nos queda:

$$s^4 Y(s) - As - B + 4Y(s) = \frac{w_0}{EI} e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

De esto último se llega al siguiente resultado

$$Y(s) = \frac{w_0}{EI} \frac{1}{s^4+4} e^{-\frac{\pi s}{2}} + A \frac{S}{s^4+4} + A \frac{1}{s^4+4} \tag{5.117}$$

Ahora, si aplicamos transformada inversa de Laplace en (5.117) se obtiene

$$y(x) = \frac{w_0}{EI} \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^4+4} e^{-\frac{\pi s}{2}} \right] + A \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^4+4} \right] + B \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^4+4} \right] \tag{5.118}$$

Para calcular la transformada inversa de Laplace de estos términos que aparecen en (5.118), se tiene en cuenta las siguientes propiedades[23]:

$$\begin{cases} \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{s^2+2}{s^4+4} \right] = \operatorname{sen}(x) \cosh(x) \\ \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{s^2-2}{s^4+4} \right] = \cos(x) \operatorname{senh}(x) \\ \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{2s}{s^4+4} \right] = \operatorname{sen}(x) \operatorname{senh}(x) \end{cases} \tag{5.120}$$

Aplicando (5.120) tenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^4+4} &= \frac{1}{4} \frac{4}{s^4+4} = \frac{1}{4} \frac{(s^2+2)-(s^2-2)}{s^4+4} \\ &= \frac{1}{4} \frac{s^2+2}{s^4+4} - \frac{1}{4} \frac{s^2-2}{s^4+4} \\ &\Rightarrow \mathscr{L} \left[\frac{1}{s^4+4} \right] = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(x) \cosh(x) - \frac{1}{4} \cos(x) \operatorname{senh}(x) \\ \frac{s}{s^4+4} &= \frac{1}{2} \frac{2s}{s^4+4} \\ &\Rightarrow \mathscr{L} \left[\frac{s}{s^4+4} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x) \operatorname{senh}(x) \end{aligned}$$

[23] Algunas propiedades generales de la transformada de Laplace que relacionan las funciones trigonométricas con las hiperbólicas son las siguientes:

$$\begin{cases} \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{k(s^2+2k^2)}{s^4+4k^4} \right] = \operatorname{sen}(kt) \cosh(kt) \\ \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{k(s^2-2k^2)}{s^4+4k^4} \right] = \cos(kt) \operatorname{senh}(kt) \\ \mathscr{L}^{-1} \left[\frac{2k^2 s}{s^4+4k^4} \right] = \operatorname{sen}(kt) \operatorname{senh}(kt) \end{cases} \tag{5.119}$$

En este caso ponemos $k = 1$ en (5.119)

Además:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}}{s^4+4}\right] &= \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cosh\left(x-\frac{\pi}{2}\right)H\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\
&\quad -\frac{1}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{senh}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)H\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{4}\cos(x)\cosh\left(x-\frac{\pi}{2}\right)H\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\
&\quad -\frac{1}{4}\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)H\left(x-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ponemos estos resultados en (5.118) y se obtiene la ecuación de la curva elástica dada por la función

$$\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{w_0}{4EI}\left[\cos(x)\cosh\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]H\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\
&\quad +\frac{A}{4}\left[\operatorname{sen}(x)\cosh(x)-\cos(x)\operatorname{senh}(x)\right]+\frac{B}{2}\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(x)
\end{aligned}$$

Desarrollando esta función por intervalos se tiene:

$$y(x)=\begin{cases}\frac{A}{4}\left[\operatorname{sen}(x)\cosh(x)-\cos(x)\operatorname{senh}(x)\right]+\frac{B}{2}\left[\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(x)\right],\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\[2ex]
-\frac{w_0}{4EI}\left[\cos(x)\cosh\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
\quad+\frac{A}{4}\left[\operatorname{sen}(x)\cosh(x)-\cos(x)\operatorname{senh}(x)\right]\\
\quad+\frac{B}{2}\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(x),\quad \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}\tag{5.121}$$

Aplicando la condición $y(\pi)=0$ en (5.121) se obtiene:

$$\frac{A}{4}\operatorname{senh}(\pi)+\frac{w_0}{4EI}\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

de donde

$$A=-\frac{w_0\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{EI\operatorname{senh}(\pi)}$$

Para $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ la derivada de $y(x)$ se calcula de la siguiente manera:

$$y'(x)=\frac{A}{2}\operatorname{sen}x\operatorname{senh}x+\frac{B}{2}(\cos x\operatorname{senh}x+\operatorname{sen}x\cosh x)-\frac{w_0}{2EI}\cos x\operatorname{senh}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

luego aplicando la condición $y'(\pi)=0$ se tiene: $-\frac{B}{2}\operatorname{senh}\pi+\frac{w_0}{2EI}\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, de donde:

$$B=\frac{w_0\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{EI\operatorname{senh}(\pi)}$$

Poniendo los valores de A y B en (5.121) se tiene finalmente:

$$y(x)=\begin{cases} -\dfrac{w_0\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4EI\operatorname{senh}(\pi)}\left[\operatorname{sen}(x)\cosh(x)-\cos(x)\operatorname{senh}(x)\right] \\ +\dfrac{w_0\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2EI\operatorname{senh}(\pi)}\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(x),\ 0\le x\le\frac{\pi}{2} \\ \\ -\frac{w_0}{4EI}\left[\cos(x)\cosh\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ \quad -\dfrac{w_0\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4EI\operatorname{senh}(\pi)}\left[\operatorname{sen}(x)\cosh(x)-\cos(x)\operatorname{senh}(x)\right] \\ +\dfrac{w_0\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2EI\operatorname{senh}(\pi)}\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(x),\ \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$$

■

5.2.3 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

■ **Ejemplo 5.66** Aplique transformada de Laplace para resolver el sistema acoplado $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+x-y=0 \\ \frac{d^2y}{dt^2}+y-x=0 \\ x(0)=y(0)=0 \\ x'(0)=-2,\ y'(0)=1 \end{cases}$. Luego indique $x(t)$ e $y(t)$.

Resolución

Aplicando transformada de Laplace en el sistema de ecuaciones diferenciales, donde $\mathscr{L}[x(t)]=X(x)$ y $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$, se tiene

$$\begin{cases} s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+X(s)-Y(s)=0 \\ \\ s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)-X(s)=0 \end{cases}$$

luego usando las condiciones iniciales y simplificando esto último se tiene:

$$\begin{cases} (s^2+1)X(s)-Y(s)=-2 \\ \\ (s^2+1)Y(s)-X(s)=1 \end{cases} \tag{5.122}$$

Resolviendo el sistema (5.122) para $X(s)$ e $Y(s)$, vemos que:

$$X(s)=-\frac{3}{2}\frac{1}{s^2+2}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2} \tag{5.123}$$

y

$$Y(s)=\frac{3}{2}\frac{1}{s^2+2}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2} \tag{5.124}$$

luego aplicando transformada inversa de Laplace en (5.123)

$$x(t) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t) - \frac{t}{2}$$

en forma similar en (5.124)

$$y(t) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t) - \frac{t}{2}$$

■

■ **Ejemplo 5.67** Resuelva el sistema: $\begin{cases} x'' + y'' = e^{2t} \\ 2x' + y'' = -e^{2t} \\ x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$, aplicando transformada de Laplace.

<u>Resolución</u>

Sean $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$ y $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$ las transformadas de Laplace de $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente. Aplicando transformada de Laplace al sistema y usando las condiciones iniciales se tiene:

$$\begin{cases} s^2X(s) + s^2Y(s) = \frac{1}{s-2} \quad (*) \\ \\ 2sX(s) + s^2Y(s) = -\frac{1}{s-2} \quad (**) \end{cases}$$

restando (**) de (*) se obtiene la ecuación

$$s(s-2)X(s) = \frac{2}{s-2}$$

de donde

$$X(s) = \frac{2}{s(s-2)^2} \tag{5.125}$$

Aplicando transformada de Laplace a esto último resulta

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s-2)^2}\right] = 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\frac{1}{(s-2)^2}\right] = 2(1 * te^{2t}) \\ &= 2\int_0^t ue^{2u}du = \left\{ue^{2u} - \frac{e^{2u}}{2}\right\}_0^t \\ &= te^{2t} - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

luego

$$x(t) = te^{2t} - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{1}{2} \tag{5.126}$$

Ahora si reemplazamos (5.125) en (*) se tiene que $Y(s)$ está dado por

$$Y(s) = -\frac{s+2}{s^2(s-2)^2} \equiv -\frac{3}{4}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}$$

aplicando transformada inversa a esto último se obtiene

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] \\ &= -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + \frac{3e^{2t}}{4} - te^{2t} \end{aligned}$$

luego

$$y(t) = -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + \frac{3e^{2t}}{4} - te^{2t} \tag{5.127}$$

Por lo tanto de (5.126) y (5.127) la solución del sistema es la curva:

$$\mathscr{C} : \begin{cases} x(t) = te^{2t} - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{1}{2} \\ \\ y(t) = -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + \frac{3e^{2t}}{4} - te^{2t} \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 5.68** Determine las funciones de posición $x(t)$ e $y(t)$ en el sistema acoplado $\begin{cases} \ddot{x} + x - y = 0 \\ \ddot{y} + y - x = 0 \\ x(0) = y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -2,\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$.

Resolución

Sean $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$ y $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$. Aplicando transformada de Laplace al sistema se tiene:

$$\begin{cases} s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + X(s) - Y(s) = 0 \\ S^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + Y(s) - X(s) = 0 \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} (s^2+1)X(s) - Y(s) = -2 & (*) \\ -X(s) + (s^2+1)Y(s) = 1 \end{cases}$$

En este último sistema hacemos $\begin{cases} (s^2+1)X(s) - Y(s) = -2 \\ \\ -(s^2+1)X(s) + (s^2+1)^2 Y(s) = s^2+1 \end{cases}$,
resolviendo para $Y(s)$ se obtiene:

$$\left[(s^2+1)^2 - 1\right] Y(s) = s^2 - 1$$

de donde vemos que:

$$Y(s) = \frac{s^2-1}{s^2(s^2+2)} \tag{5.128}$$

Y a partir de (5.128) en (*) se tiene $(s^2+1)X(s) = \frac{s^2-1}{s^2(s^2+2)} - 2$, de donde $(s^2+1)X(s) = -\frac{(2s^2+1)(s^2+1)}{s^2(s^2+2)}$, y con esto

$$X(s) = -\frac{2s^2+1}{s^2(s^2+2)} \tag{5.129}$$

Desarrollando en fracciones parciales (5.128) se obtiene:

$$Y(s) = \frac{s^2-1}{s^2(s^2+2)} = \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}$$

entonces aplicando transformada inversa de Laplace se tiene

$$y(t) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) - \frac{t}{2},\ t \geq 0 \tag{5.130}$$

En forma similar desarrollamos en fracciones parciales (5.129)

$$X(s) = -\frac{2s^2+1}{s^2(s^2+2)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{s^2+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}$$

que al aplicar transformada de Laplace se transforma en

$$x(t) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) - \frac{t}{2},\ t \geq 0 \tag{5.131}$$

Finalmente las funciones de posición están dadas por (5.130) y (5.131). ■

■ **Ejemplo 5.69** Aplicando transformada de Laplace resuelva el sistema acoplado: $\begin{cases} x' + y' = \cos t \\ x + y'' = 2 \\ x(\pi) = 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Resolución

En este caso empezamos haciendo $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$ y $A=x(0)$. Aplicando transformada de Laplace al sistema se tiene

$$\begin{cases} sX(s)-A+sY(s)=\frac{s}{s^2+1} & (*) \\ X(s)+s^2Y(s)-\frac{1}{2}=\frac{2}{s} & (**) \end{cases}$$

De (**) se tiene $X(s)=\frac{2}{s}+\frac{1}{2}-s^2Y(s)$, que al reemplazar en (*) se obtiene: $s\left\{\frac{2}{s}+\frac{1}{2}-s^2Y(s)\right\}-A+sY(s)=\frac{s}{s^2+1}$, de donde

$$Y(s)=\frac{1}{(1+s^2)(1-s^2)}+\frac{A-2}{s(1-s^2)}-\frac{1}{2(1-s^2)}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace vemos que

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+s^2)(1-s^2)}\right]+(A-2)\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1-s^2)}\right]-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-s^2}\right] \tag{5.132}$$

Aquí en (5.132) desarrollamos cada una de las transformadas inversas de Laplace, así se tiene:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+s^2)(1-s^2)}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1-s^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+s^2}\right] \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+s^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+s}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-s}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right]+\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s}\right] \\ &\quad -\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen} t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t} \end{aligned}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1-s^2)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}\right]=1-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-s^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}\right]=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}$$

Reemplazamos estos resultados en (5.132) para obtener:

$$y(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sen} t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}+(A-2)\left[1-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}\right]-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}\right)$$

simplificando se tiene

$$y(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}t-2+2\cosh t+A\,(1-\cosh t) \tag{5.133}$$

Si nos fijamos en el sistema de ecuaciones vemos que $x(t)=2-y''(t)$, por este motivo derivamos (5.133) dos veces y reemplazamos para obtener $x(t)$. En efecto:

$$y'(t)=\frac{1}{2}\cos t+2\operatorname{senh}t-A\operatorname{senh}t$$

y

$$y''(t)=-\frac{1}{2}\sin t+2\cosh t-A\cosh t$$

luego se obtiene que $x(t)$ está dada por

$$x(t)=2+\frac{1}{2}\operatorname{sen}t-2\cosh t+A\cosh t$$

Aplicando la condición $x(\pi)=2$, se tiene $2-2\cosh\pi+A\cosh\pi=2$, de donde $(A-2)\cosh\pi=0$, y así $A=2$. Finalmente se tiene

$$\begin{aligned} x(t) &= 2+\frac{1}{2}\operatorname{sen}t \\ y(t) &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}t \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 5.70** Resuelva el sistema $\begin{cases} x_1'(t)+x_2(t)-x_1(t)=e^t\cos(t) \\ x_2'(t)-x_2(t)-x_1(t)=e^t\operatorname{sen}(t) \\ x_1(0)=x_2(0)=0 \end{cases}$

Resolución

Sean $X_1(s)=\mathscr{L}[x_1(t)]$ y $X_2(s)=\mathscr{L}[x_2(t)]$. Aplicamos transformada de Laplace al sistema y se tiene:

$$\begin{cases} sX_1(s)+X_2(s)-X_1(s)=\frac{s-1}{(s-1)^2+1} & (*) \\ sX_2(s)-X_2(s)-X_1(s)=\frac{1}{(s-1)^2+1} & (**) \end{cases}$$

De (**) despejamos $X_1(s)$ y reemplazamos en (*) para obtener

$$X_2(s)=\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace en esto último se tiene

$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}\right] \\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1}\,\frac{1}{(s-1)^2+1}\right] \\
&= 2\left(e^t\cos(t) * e^t\operatorname{sen}(t)\right) = e^t\left[u\operatorname{sen}(t)+\frac{1}{2}\cos(t-u)\right]_0^t \\
&= te^t\operatorname{sen}(t)
\end{aligned}
$$

Puesto que $x_1(t) = x_2'(t) - x_2(t) - e^t\operatorname{sen}(t)$, entonces usando $x_2(t)$ vemos que $x_1(t) = te^t\cos(t)$. Así tenemos que la solución del sistema acoplado está dado por

$$
\begin{cases} x_1(t) = te^t\cos(t) \\ x_2(t) = te^t\operatorname{sen}(t) \end{cases}
$$

■

■ **Ejemplo 5.71** Resuelva aplicando transformada de Laplace el sistema:

$$
\begin{cases} x_1''(t) + 10x_1(t) - 4x_2(t) = 0 \\ -4x_1(t) + x_2''(t) + 4x_2(t) = 0 \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ x_1'(0) = 1 \\ x_2'(0) = -1 \end{cases} \tag{5.134}
$$

Resolución

Hagamos $X_1(s) = \mathscr{L}[x_1(t)]$ y $X_2(s) = \mathscr{L}[x_2(t)]$. Aplicamos transformada de Laplace al sistema y se tiene:

$$
\begin{cases} s^2X_1(s) - sx_1(0) - x_1'(0) + 10X_1(s) - 4X_2(s) = 0 \\ -4X_1(s) + s^2X_2(s) - sx_2(0) - x_2'(0) + 4X_2(s) = 0 \end{cases}
$$

según las condiciones iniciales nos queda:

$$
\begin{cases} s^2X_1(s) + 10X_1(s) - 4X_2(s) = 1 \\ -4X_1(s) + s^2X_2(s) + 4X_2(s) = -1 \end{cases}
$$

De ambas ecuaciones despejamos $X_1(s)$ y $X_2(s)$ para obtener

$$
X_1(s) = \frac{1+4X_2(s)}{s^2+10} \quad \text{y} \quad X_1(s) = \frac{s^2X_2(s)+4X_2(s)+1}{4}
$$

igualando estos resultados se tiene

$$\frac{1+4X_2(s)}{s^2+10} = \frac{s^2X_2(s)+4X_2(s)+1}{4}$$

de donde

$$X_2(s) = -\frac{3}{5}\frac{1}{s^2+12} - \frac{2}{5}\frac{1}{s^2+2}$$

Hacemos los arreglos correspondientes y

$$X_2(s) = -\frac{3}{10\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{3}}{s^2+(2\sqrt{3})^2} - \frac{2}{5\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}$$

Aquí aplicamos transformada inversa de Laplace y se obtiene que

$$x_2(t) = -\frac{3}{10\sqrt{3}}\operatorname{sen}(2\sqrt{3}t) - \frac{2}{5\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \tag{5.135}$$

Para determinar $x_1(t)$ nos fijamos en la segunda ecuación diferencial de (5.134), de donde se tiene

$$x_1(t) = \frac{1}{4}x_2''(t) + x_2(t) \tag{5.136}$$

■

Ponemos (5.135) en (5.136) y resulta

$$x_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen}(2\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)$$

Así tenemos:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen}(2\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \\ \\ x_2(t) = -\frac{3}{10\sqrt{3}}\operatorname{sen}(2\sqrt{3}t) - \frac{2}{5\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \end{cases}$$

■ **Ejemplo 5.72** Un sistema resorte - masa acoplado se comporta según el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = w^2(x_2 - 2x_1) \\ \ddot{x}_2 = w^2(x_1 - 2x_2) \\ x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_2(0) = a \end{cases} \tag{5.137}$$

donde $w \neq 0$ y a es una constante real. Determine las funciones de posición[24] $x_1(t)$, $x_2(t)$.

[24] Si se trata de un sistema resorte-masa, las funciones de posición siempre se toman respecto de los puntos de equilibrio de las masas.

Resolución

Sean $X_1(s) = \mathscr{L}[x_1(t)]$ y $X_2(s) = \mathscr{L}[x_2(t)]$. Aplicando transformada de Laplace en (5.137) se tiene

$$\begin{cases} s^2X_1(s) - sx_1(0) - \dot{x}_1(0) = w^2(X_2(s) - 2X_1(s)) \\ s^2X_2(s) - sx_2(0) - \dot{x}_2(0) = w^2(X_1(s) - 2X_2(s)) \end{cases}$$

de donde se obtiene:

$$\begin{cases} \left(s^2 + 2w^2\right) X_1(s) - w^2X_2(s) \\ w^2X_1(s) - \left(s^2 + 2w^2\right) X_2(s) = -as \end{cases} \tag{5.138}$$

Resolvemos (5.138) para $X_1(s)$, y tenemos:

$$X_1(s) = \frac{a}{2}\frac{s}{s^2 + w^2} - \frac{a}{2}\frac{s}{s^2 + (\sqrt{3}w)^2}$$

de donde con la transformada inversa de Laplace se convierte en:

$$x_1(t) = \frac{a}{2}(\cos wt - \cos\sqrt{3}t)$$

Para determinar $x_2(t)$, hacemos cálculos en la segunda ecuación diferencial de (5.137), aquí podemos ver que

$$x_2(t) = 2x_1(t) + \frac{1}{w^2}\ddot{x}_1(t)$$

aquí ponemos $x_1(t)$ y obtenemos

$$x_2(t) = \frac{a}{2}\cos wt + \frac{a}{2}\cos\sqrt{3}t$$

por lo tanto

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{a}{2}(\cos wt - \cos\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = \frac{a}{2}(\cos wt + \cos\sqrt{3}t) \end{cases}$$

■

5.3 EJERCICIOS PROPUESTOS 5

1. Para $t > 0$, analice la existencia de la transformada de Laplace de:
   a) $f(t) = \frac{1}{t^2}$
   b) $f(t) = \sqrt{t}$
   c) $f(t) = \ln t$

2. Sea $p(t) = t^2 - \ln M - ct$, con $M > 0$ y $c \in \mathbb{R}$. Al resolver $p(t) = 0$, se tiene que:
$$t = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4\ln M}}{2}$$
   a) Demuestre que si $c^2 + 4\ln M < 0$, entonces $p(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
   b) Demuestre que si $c^2 + 4\ln M \geq 0$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que: $p(t) > 0$, $\forall t > \alpha$.
   c) Demuestre que de a) y b) se concluye que $Me^{ct} < e^{t^2}$ a partir de un número $\alpha \geq 0$. Este resultado nos permite afirmar que e^{t^2} nunca es de orden exponencial.
3. Demuestre que $f(t) = e^{t^2}$ no tiene transformada de Laplace.
4. Demuestre que si $f(t)$ es seccionalmente continua y existen $k > 0$ y $M > 0$ tales que
$$|f(t)| \leq Me^{kt}, \ \textit{para todo}\ t > 0,$$
es decir, es de orden exponencial, entonces existe $\mathscr{L}(f)(s) = F(s)$, definida para $s > k$. Demuestre que
$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \mathscr{L}(f)(s) = 0.$$
5. Aplicando la definición 5.1.1, calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:
   a) $f(t) = \begin{cases} a,\ 0 \leq t < b \\ 0,\ t \geq b \end{cases}$, a y b son constantes, $b > 0$.
   b) $f(t) = \begin{cases} a,\ 0 \leq t < b \\ -a,\ t \geq b \end{cases}$, a y b son constantes positivas.
   c) $f(t) = \begin{cases} t,\ 0 \leq t < b \\ 0,\ t \geq b \end{cases}$, b es una constante positiva.
   d) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} 2t,\ 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0,\ t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

   A continuación, el cálculo de la transformada de Laplace se hace con las propiedades estudiadas.
6. Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:
   a) $f(t) = e^{2\pi t}\cos 5t + t^2 e^{-5t}$
   b) $f(t) = \cosh \pi t \operatorname{sen} 3t$
   c) $f(t) = \operatorname{senh}(t)\cos 5t + (t-1)\cosh 2t$
   d) $f(t) = e^{3t}\operatorname{senh} t + 2$
   e) $f(t) = e^{-2t}\cosh 2t + t - \frac{1}{2}$

7. Use identidades trigonométricas para calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:
   a) $f(t) = \cos^2(2t)$
   b) $f(t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$
   c) $f(t) = \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} + \operatorname{sen} 2t \cos 2t$
   d) $f(t) = \operatorname{sen} t \cos 2t \operatorname{sen} 3t$
   e) $f(t) = \cos^3 t$
   f) $f(t) = e^t \cos 2t \cos 3t$
   g) $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen}^t$
   h) $f(t) = 4e^{-2t} t^2 \cos 3t$
   i) $f(t) = \operatorname{sen}(2t-5) + \cos(t+2)$
   j) $f(t) = \operatorname{sen}(2t+3)\cos(2-3t)$
   k) $f(t) = e^t \operatorname{sen}(t+1)\cos(2t-1)$
   l) $f(t) = (t+2)\operatorname{sen}(t)\cos(2t-1)$
8. Use propiedades para calcular $\mathscr{L}[f(t)]$, donde
   a) $f(t) = t^3 e^{-3t}$
   b) $f(t) = t \cosh^2 at$
   c) $f(t) = (t-2)^3 e^{bt}$
   d) $f(t) = (2 - e^{2t})^2 \cos(5t)$
   e) $f(t) = (1-2t)^3 \operatorname{sen} t$
   f) $f(t) = t^2 e^{-3t} \cos 2t$
9. Demuestre que la función

$$f(t) = \begin{cases} t,\ 0 \le t < 1 \\ 2,\ 1 \le t \le 2 \\ t^2,\ t > 2 \end{cases}$$

   se escribe como

$$f(t) = t + (2-t)H(t-1) + (t^2-2)H(t-2)$$

   luego determine $\mathscr{L}[f(t)]$.
10. Exprese en forma apropiada las siguientes funciones como una combinación de funciones de Heaviside H para luego aplicar transformada de Laplace
   a) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t,\ 0 \le t < 2\pi \\ 0,\ 2\pi \le t < 4\pi \\ e^{-t} \operatorname{sen} t,\ t \ge 4\pi \end{cases}$
   b) $f(t) = \begin{cases} e^{2t} \operatorname{sen} t,\ 0 \le t < 2\pi \\ e^{-2t} \operatorname{sen} t,\ t \ge 2\pi \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq t < 1 \\ 1, \ 1\pi \leq t < 2 \\ 2, \ 2 \leq t < 3 \\ 1, \ 3 \leq t < 4 \\ 0, \ t \geq 4 \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq t < \pi \\ t \operatorname{sen} 2t, \ \pi \leq t < 2\pi \\ 0, \ t \geq 2\pi \end{cases}$

e) $f(t) = \begin{cases} 2t, \ 0 \leq t < 2 \\ 0, \ 2 \leq t < 4 \\ t^2 - 2t + 3, \ t \geq 4 \end{cases}$

f) $f(t) = \begin{cases} t^2, \ 0 \leq t < 2 \\ 2t, \ 2 \leq t < 4 \\ 3, \ t \geq 4 \end{cases}$

g) $f(t) = \begin{cases} 3\cos 2t, \ 0 \leq t < \pi \\ 2t^2, \ \pi \leq t < 2\pi \\ t - \operatorname{sen} 2t, \ t \geq 2\pi \end{cases}$

h) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} H(t-n), t \geq 0$

i) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (t-n) H(t-n), t \geq 0$

11. Calcule $\mathscr{L}[f(t)]$, si:

a) $f(t) = |\cos(2t)|, t \geq 0$

b) $f(t) = \begin{cases} 2t - t^2, \ 0 \leq t < 2 \\ 2(t-2) - (t-2)^2, \ 2 \leq t < 4 \\ 2(t-4) - (t-4)^2, \ 4 \leq t < 6 \\ \vdots \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} 1 - |t-1|, \ 0 \leq t < 2 \\ 1 - |t-3|, \ 2 \leq t < 4 \\ 1 - |t-5|, \ 4 \leq t < 6 \\ \vdots \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} 1 - t, \ 0 \leq t < 2 \\ 3 - t, \ 2 \leq t < 4 \\ 5 - t, \ 4 \leq t < 6 \\ \vdots \end{cases}$

12. Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(t) = te^{-2t} \delta(t-4)$

b) $f(t) = \cos(t^2) \delta(t - 2\pi)$

c) $f(t) = t \operatorname{sen}(t) \delta(t - \pi)$

d) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\pi)$

13. Aplique descomposición en fracciones parciales y propiedades para determinar $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$, donde:
    a) $F(s) = \frac{(s+2)^3}{s^4}$
    b) $F(s) = \frac{s^2+4}{s^4-4s^2+4}$
    c) $F(s) = \frac{s^2-4}{s^3-64}$
    d) $F(s) = \frac{s^2+4s}{s^4+13s^2+36}$
    e) $F(s) = \frac{s^2+9}{(s-2)(s+1)(s^2+4)}$
    f) $F(s) = \frac{s+1}{(s^2-4s+8)(s^2+2s+5)}$
14. Calcule la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{4+e^{-4s}}$.
15. Calcule $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ usando propiedades de convolución
    a) $F(s) = \frac{4}{s^2-16}$
    b) $F(s) = \frac{2}{(s-1)^2(s-3)^2}$
    c) $F(s) = \frac{54}{(s^2+9)^2}$
    d) $F(s) = \frac{16}{(s^2+6s+13)^2}$
    e) $F(s) = \frac{s}{(s^2-4)^2}$
    f) $F(s) = \frac{2s-1}{(s^2-1)(4s^2+4s+5)}$.
16. Use propiedades para determinar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:
    a) $F(s) = \arctan\frac{2}{s^2}$
    b) $F(s) = \arctan\frac{2}{(s+1)^2}$
    c) $F(s) = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{s^2-2}{s^2+2}$
    d) $F(s) = -\ln\left(\frac{2}{s}\left(1+\frac{2}{s}\right)+1\right)$
    e) $F(s) = \ln\frac{s^2-4}{s^2-9}$
    f) $F(s) = \ln\frac{s^2-4}{s^2-9}$
    g) $F(s) = \ln\frac{s^4}{s^4+13s^2+36}$
    h) $F(s) = \ln\frac{s^2+s-2}{s^2-s-2}$
    i) $F(s) = \ln\left(1-\frac{1}{s^4}\right)$
17. Resuelva los siguientes problemas aplicando transformada de Laplace
    a) $\begin{cases} ty'' + 2y' + 4ty = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
    b) $\begin{cases} ty'' + (2-t)y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

18. Dado el problema: $\begin{cases} ty'' + (2-2t)y' + (2t-2)y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
    a) Aplique transformada de Laplace al problema dado y verifique que $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)] = k + \arctan(s-1)$, donde $k = -\frac{\pi}{2}$ por el hecho de que $\lim_{s\to+\infty} Y(s) = 0$
    b) A partir de $Y(s)$, encuentre la solución $y(t)$ del problema.
19. Dado el problema: $\begin{cases} x'' + w^2 x = F_0 \operatorname{sen} wt,\ t > 0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$, donde F_0 y w son diferentes de cero. Aplicando transformada de Laplace, determine $x(t)$, asimismo su amplitud y frecuencia.
20. Determine $y(x)$ en la ecuación integral

$$y(x) = 2x^3 + \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)y(t)dt$$

21. Determine $y(t)$ en la ecuación:

$$\int_0^t y(u)\operatorname{sen}(t-u)du = y(t) + \operatorname{sen} t - \cos t$$

22. Una viga de longitud $2L$ y en voladizo, está empotrada en un soporte por el lado izquierdo y libre en el derecho. Si la viga soporta una carga puntual en $x = L$ dada por $W(x) = w_0\delta(x-L)$ y $y(x)$ es su deflexión satisfaciendo

$$\begin{cases} EIy^{(4)}(x) = w_0\delta(x-L),\ 0 < x < 2L \\ y(0) = y'(0) = y''(2L) = y'''(2L) = 0 \end{cases}$$

    Halle $y(x)$.
23. Resuelva:

$$\begin{cases} tx'' - 2x' + tx = 0 \\ x(\pi) = 2 \end{cases}$$

24. Aplicando la transformada de Laplace,
    a) demuestre que

$$\frac{\theta}{\theta^2 + (\beta-\alpha)^2}\left[e^{\alpha t} - e^{\beta t}\cos(\theta t)\right] + \frac{\beta-\alpha}{\theta^2+(\beta-\alpha)^2}e^{\beta t}\operatorname{sen}(\theta t) = e^{\alpha t} * e^{\beta t}\operatorname{sen}(\theta t)$$

    b) halle $y(t)$ en el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = f(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

donde $f(t) = \begin{cases} e^t, \ 0 \leq t < \pi \\ e^t\left(1+e^{-\pi}\right), \ t \geq \pi \end{cases}$

25. **a)** Demuestre que $\frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x)$.

    b) Sabiendo que $\mathscr{L}(J_0(x))(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ y usando la transformada de Laplace demuestre que

$$(J_0 * J_1)(x) = J_0(x) - \cos(x).$$

26. Un cuerpo de masa 120 gramos se suspende del extremo de un resorte que está en posición vertical y lo extiende 20 centímetros. Este cuerpo se reemplaza por otro cuerpo cuya masa es de 1000 gramos, y luego se tira de el hacia abajo una longitud de 200 centímetros para luego soltarlo. Este cuerpo empieza a oscilar, sin embargo a los 5 segundos de soltarlo empieza a actuar una fuerza externa $f(t) = t$ que afecta a la oscilación. Determine la posición[25] de este cuerpo en cualquier instante t. (Considere $g = 10\frac{m}{s^2}$)
27. Encuentre la posición del cuerpo en el ejercicio 26, si se sabe que después de 5 segundo, justo en ese instante, el peso es golpeado con un martillo hacia arriba, transmitiéndole un impulso P_0.
28. Suponga que un peso de 32 libras estira un resorte 2 pies. El peso se libera del reposo desde 1,5 pies por debajo de la posición de equilibrio y empieza a oscilar, encuentre la ecuación de movimiento $x(t)$, si se sabe a los 2 segundos de iniciado el movimiento, justo en ese instante, el peso es golpeado con un martillo hacia arriba, transmitiéndole un impulso P_0 (no se considera amortiguación).
29. En el ejercicio 28 encuentre $x(t)$, si se sabe que una fuerza constante de 5 libras actúa entre los 4 y 6 segundos de iniciada la oscilación.
30. En el ejercicio 28 encuentre $x(t)$, si se sabe que una fuerza de $f(t) = 4\cos(4t)$ libras empieza a actuar desde los $\frac{\pi}{2}$ segundo en adelante.
31. Sea F_0 y w números reales distintos de cero, usando transformada de Laplace resuelva el problema:

$$\begin{cases} \ddot{x} + w^2 x = F_0 \operatorname{sen}(wt), \ t > 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

luego determine la amplitud, frecuencia de la solución.

[25] En la resolución considere el ejemplo 5.31.

32. Resolver:

$$\begin{cases} \frac{d^4y}{dx^4} + y = x, \; x > 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \\ y''(1) = y'''(1) = 0 \end{cases}$$

33. Encuentre la función de corriente $i(t)$ en un circuito RLC, si se sabe que $i(0) = 0$ y:

   a) $L = 0, R = 100, C = \frac{1}{1000}$ y $E(t) = \begin{cases} 0, \; 0 \leq t < 1 \\ 100, \; t \geq 1 \end{cases}$

   b) $L = 1, R = 100, C = \frac{4}{10000}$ y $E(t) = \begin{cases} 0, \; 0 \leq t < 1 \\ 50t, \; t \geq 1 \end{cases}$

   c) $L = 1$, $R = 150$, $C = \frac{2}{1000}$ y en el instante $t = 1$ se aplica una descarga 100 voltios.

34. Una viga de longitud $3L$ que está en voladizo, empotrada en el extremo izquierdo y libre en el derecho, soporta una carga $W(x)$ por unidad de longitud dada por $W(x) = \begin{cases} w_0, \; 0 \leq x < 2L \\ 0, \; 2L \leq x \leq 3L \end{cases}$. Determine la deflexión $y(x)$ de la viga, siendo $w_0 > 0$.

35. Una viga uniforme de longitud L soporta una carga concentrada w_0 en $x = L/2$. La viga esta fija en su extremidad izquierda y libre en su extremidad derecha. Aplique la transformada de Laplace para determinar la deflexión $y(x)$ a partir de

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0\delta(x - \frac{L}{2}),$$

   donde $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(L) = 0$ y $y'''(L) = 0$.

36. Resuelva la ecuación diferencial dada en el Problema 35 sujeta a $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(L) = 0$, $y'(L) = 0$. En este caso, la viga esta fijado en ambas extremidades.

37. Obtenga el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento vertical en linea recta de los resortes acoplados ilustrados en equilibrio en la Figura 5.30. Utilice la transformada de Laplace para resolver el sistema cuando $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = -1$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 1$.

38. Resuelva los siguientes sistemas aplicando transformada de Laplace

   a) $\begin{cases} x'' + x' + y' = 0 \\ y'' + y' - 4x' = 0 \\ x(0) = 1, \; x'(0) = 0 \\ y(0) = -1, \; y'(0) = 5 \end{cases}$

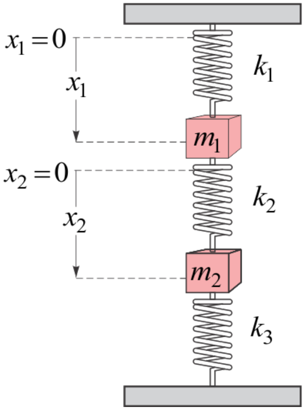
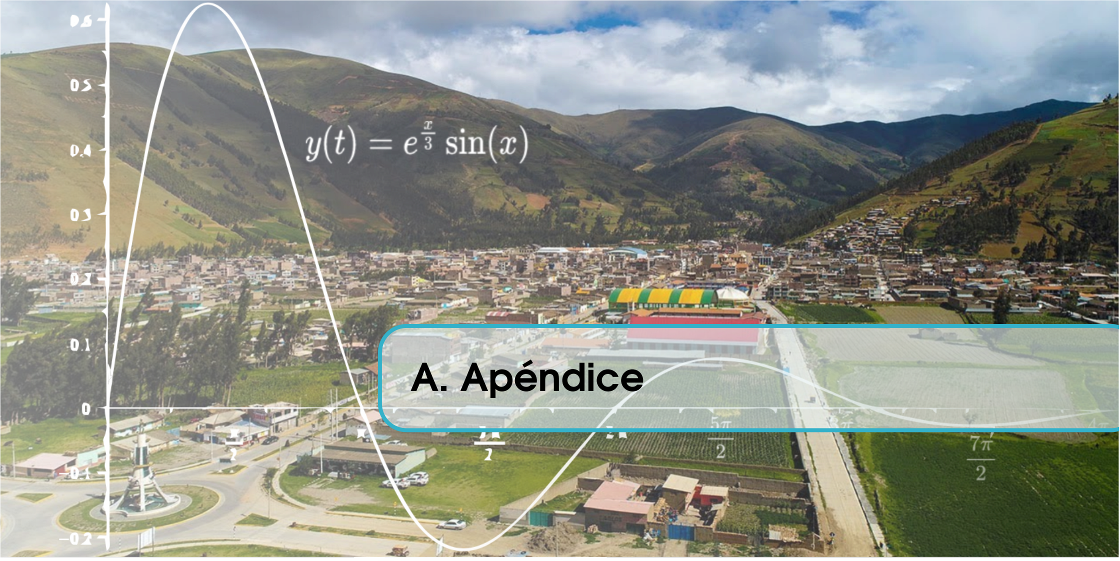


Figura 5.30: Resortes acoplados.

$$b) \begin{cases} x'' + y'' = t^2 \\ x'' - y'' = 4t \\ x(0) = 8,\ x'(0) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x' - 4x + 2y = 2H(t-1) \\ y' - 3x + y = H(t-1) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$



A. Apéndice

A lo largo de la realización de este libro, procuramos no solo la comprensión de las definiciones y teoremas que se exponen, además del contexto de algunas aplicaciones, sino también, que el estudiante desarrolle habilidades operativas para encontrar la solución de una ecuación diferencial ordinaria de orden superior, empleando algunas estrategias y manejo correcto del álgebra elemental; sin embargo, hay que tener en cuenta que hay situaciones embarazosas que involucran la realización de cálculos muy extensos y hasta estériles, por eso, en esta sección presentamos el uso de un aplicativo matemático muy útil para realizar el cálculo y la simulación geométrica de las soluciones. Es muy importante usar los aplicativos matemáticos pero sin descuidar el análisis de la teoría matemática y cómo funciona en las aplicaciones.

El Maple versión 16 que aquí usamos, es un aplicativo matemático cuyo objetivo es la resolución de problemas matemáticos, ya sea a través del cálculo simbólico, algebraico y del álgebra computacional.

Este aplicativo en su versión original fue desarrollado por el grupo de Cálculo Simbólico alrededor del año 1981 en la Universidad de Waterloo de Ontario, Canadá. Actualmente se dispone de una versión 2020 que es más avanzada, sin embargo, para nuestros fines, basta la versión 2016.

Mostramos a continuación varios ejemplos de como se usa el Maple 16 en varios tipos de situaciones, indicando los ejemplos a resolver y la escritura correcta en el ambiente de dicho aplicativo con sus respectivos comandos. Para empezar, cuando se trabaja con Maple 16, es importante familiarizarse con los elementos principales que aparecen en el entorno principal que mostramos en la figura A.1. En la parte lateral izquierda es fácil identificar las operaciones básicas de cálculo.

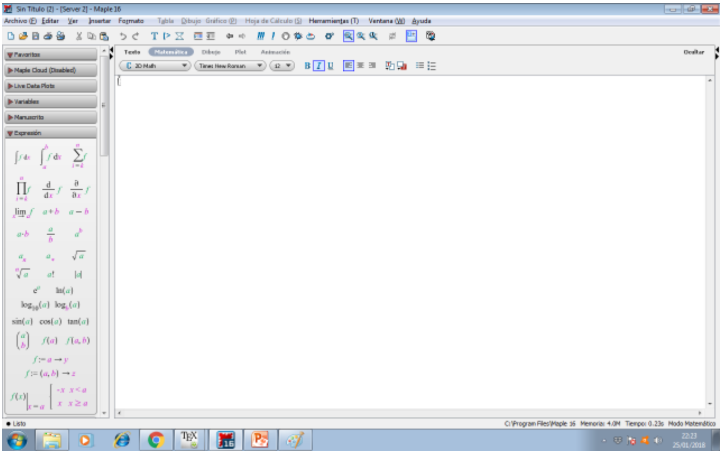


Figura A.1: ventana principal en el entorno de Maple.

A.1 Cálculo de límites

Para el cálculo de límites de una función $f(x)$ en torno a un punto a la escritura es sencilla y está disponible en la barra lateral de la izquierda, renombra el valor de a y en f ingresa la regla de correspondencia de la función.

■ **Ejemplo A.1** Calcule

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(2x-6)}{\operatorname{arc\,sen}(8x-24)}$$

En el entorno de Maple se tiene:

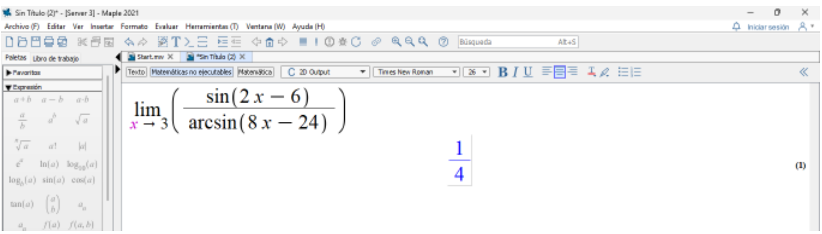


Figura A.2:

En este caso el valor del límite es $\frac{1}{4}$. ■

En forma similar se puede calcular límites hacia $+\infty$ o $-\infty$. Veamos el siguiente ejemplo

■ **Ejemplo A.2** Para estudiar cómo se comporta la función $f(x) = (x-4)\ln\left(1+\frac{1}{x-4}\right)$ cuando $x \to +\infty$ se debe calcular

$$\lim_{x\to+\infty} (x-4)\ln\left(1+\frac{1}{x-4}\right)$$

En Maple se tiene:

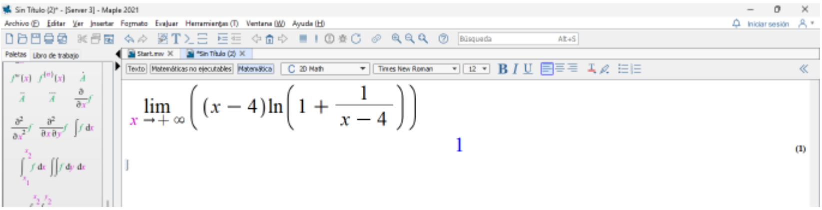


Figura A.3:

Teniendo como respuesta que el valor del límite es 1. ■

■ **Ejemplo A.3** Para calcular

$$\lim_{x\to3}\left[\frac{1}{\ln(x-2)}-\frac{1}{x-3}\right]$$

en Maple sería ■

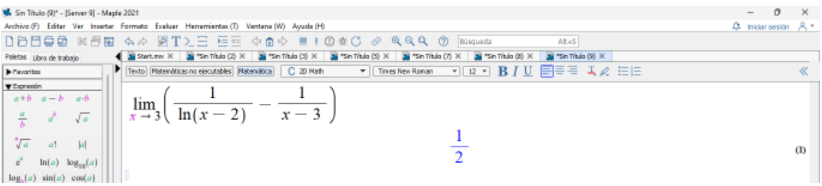


Figura A.4:

A.2 Representación geométrica de una función

La manera más sencilla de representar una función con dominio $[a,b]$ es usando el comando *plot*, veamos el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo A.4** Para obtener la representación geométrica de la función

$$f(x) = \frac{x}{2+\operatorname{sen} x}, \ x \in [0;4\pi]$$

en Maple, es suficiente ingresar la regla de correspondencia y el dominio respectivo[1] como se muestra en la figura A.5. ■

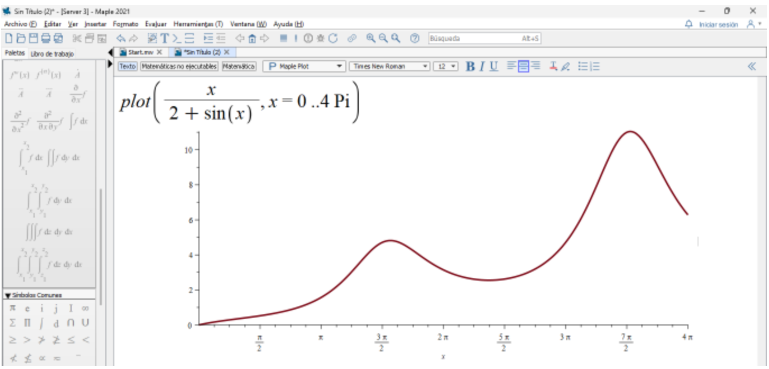


Figura A.5:

En algunos casos es necesario representar varias funciones en un solo gráfico para compararlas, en este caso hay que hacerlo en el entorno de la librería *with(plots)*, ilustramos este caso en el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo A.5** Compare las representaciones geométricas de las funciones $f(x) = \frac{x}{1+8x^2}$, $g(x) = \frac{x}{1+e^x}$ y $h(x) = \frac{2}{1+8x^2}$ en el intervalo $[-2;8]$. Para realizar

[1] Si la función fuera $y = f(x)$ con dominio $D_f = [a,b]$, en Maple se escribe como

$$plot(f(x), x = a..b)$$

esta tarea digitamos en Maple

$$
\begin{aligned}
&with(plots):\\
&A := plot\left(\frac{x}{1+8x^2},\ x=-2.,8,\ color=red\right)\\
&B := plot\left(\frac{x}{1+e^x},\ x=-2.,8,\ color=blue\right)\\
&C := plot\left(\frac{2}{1+8x^2},\ x=-2.,8,\ color=magenta\right)\\
&display(A,B,C)
\end{aligned}
$$

mostrando el siguiente gráfico de las tres curvas en la figura A.6 ■

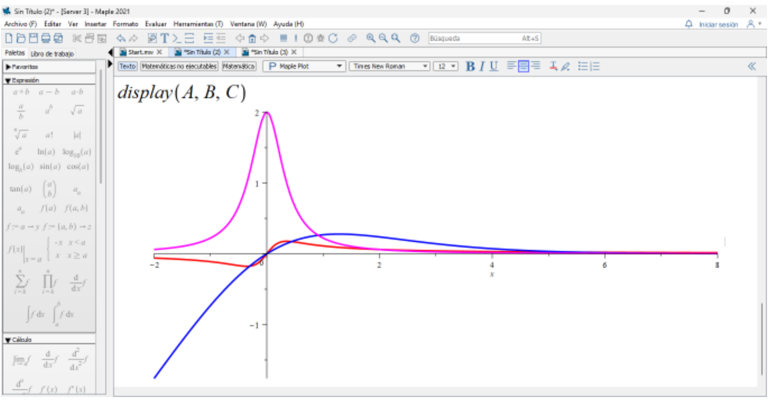


Figura A.6:

A.3 Cálculo del Wronskiano

Es una parte que a veces es muy operativa cuando se trata de tres o más funciones. En este caso se trabaja dentro de la librería *with(linalg)*

■ **Ejemplo A.6** Para calcular el Wronskiano de las funciones $f(t)=e^{-3t}\cos(2t)$ y $g(t)=e^{-3t}\,\mathrm{sen}(2t)$ se digita lo siguiente en Maple

$$
\begin{aligned}
&with(linalg):\\
&det\left(wronskian\left(\left[e^{-3t}\cos(2t), e^{-3t}\,\mathrm{sen}(2t)\right], t\right)\right)
\end{aligned}
$$

Luego se obtiene:

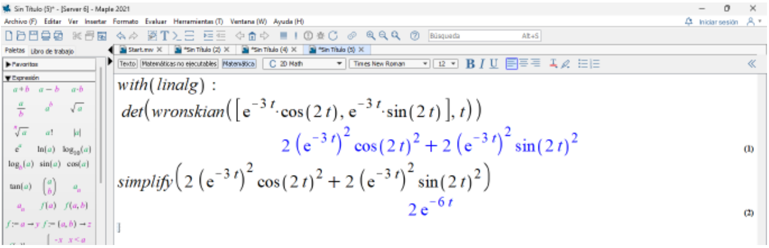


Figura A.7:

Aquí vemos que según Maple el valor del Wronskiano de las funciones es $2\left(\mathrm{e}^{-3t}\right)^2\cos(2t)^2+2\left(\mathrm{e}^{-3t}\right)^2\sin(2t)^2$, sin embargo, es menester disponer de una expresión más simplificada, por lo cual usamos el comando *simplify* y nos proporciona el resultado $2\mathrm{e}^{-6t}$. En muchos casos será necesario aplicar este comando para obtener expresiones más simples. ■

■ **Ejemplo A.7** Para calcular el Wronskiano de las funciones $f(t)=t\,\mathrm{sen}(2t)$, $g(t)=t^2\cos(2t)$ y $h(t)=t\cos(2t)$ se tiene:

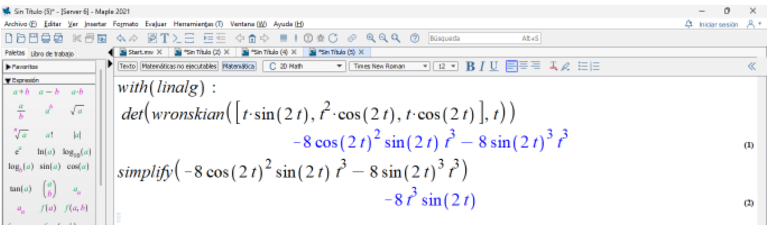


Figura A.8:

El resultado más simple del valor del Wronskiano es $-8t^3\,\mathrm{sen}(2t)$, para lo cual fue necesario usar el comenado *simplify*. ■

A.4 Resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con Maple

El comando que resolverá la ecuación diferencial es *dsolve* y se ilustra en el siguiente ejemplo

■ **Ejemplo A.8** En la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes $y'''-4y''-7y'+10y=0$ no se especifica la variable independiente, sin embargo, al ingresar a Maple si hay que especificar. Si suponemos que la variable independiente es x, entonces en Maple se escribe. Aquí debemos

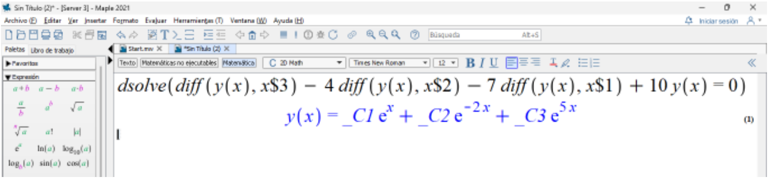


Figura A.9:

notar que la solución que nos proporciona Maple, escrita en la forma usual es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{5x}$$

■

■ **Ejemplo A.9** Con Maple también se resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes variables. En el caso de la ecuación de Legendre de orden $p = 2$

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + 6y = 0$$

en Maple se tiene

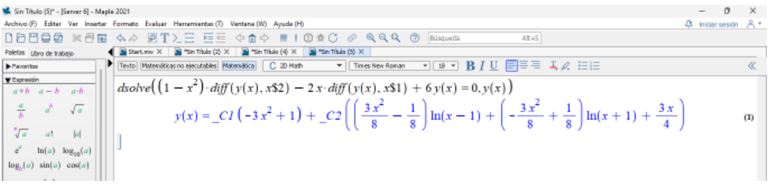


Figura A.10:

La solución escrita en la forma usual es:

$$y(x) = c_1 \left(-3x^2 + 1\right) + c_2 \left[\left(\frac{3x^2}{8} - \frac{1}{8} \right) \ln(x-1) + \left(-\frac{3x^2}{8} + \frac{1}{8} \right) \ln(x+1) + \frac{3x}{4} \right]$$

En caso estuviéramos interesados en conocer el sistema fundamental de soluciones, basta fijarnos en las expresiones que están asociadas a las constantes c_1 y c_2. Acá se tiene que

$$\text{sfs} = \left\{ -3x^2 + 1; \left(\frac{3x^2}{8} - \frac{1}{8} \right) \ln(x-1) + \left(-\frac{3x^2}{8} + \frac{1}{8} \right) \ln(x+1) + \frac{3x}{4} \right\}$$

■

■ **Ejemplo A.10** Para resolución en Maple de la ecuación no homogénea

$$y''' - 2y' - 4y = 1000xe^{-x}\cos(x)$$

es como sigue:

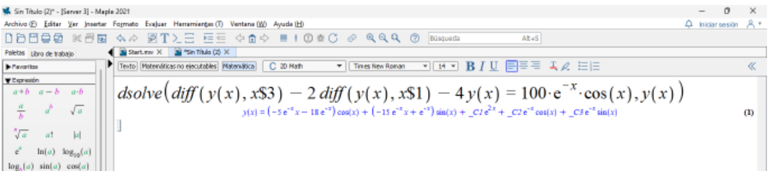


Figura A.11:

La solución escrita en la forma usual es

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}\cos(x) + c_3 e^{-x}\operatorname{sen}(x) + \left(-5e^{-x}x - 18e^{-x}\right)\cos(x) \\ &\quad + \left(-15e^{-x}x + e^{-x}\right)\sin(x) \end{aligned}$$

■

Las condiciones iniciales $y'(0) = y_1$, $y''(0) = y_2$, $y'''(0) = y_3$, etc. se escriben en Maple respectivamente como:

$$\begin{aligned} &D(y)(0) = y_1 \\ &D(D(y))(0) = y_2 \\ &D(D(D(y)))(0) = y_3 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo A.11** En el caso del problema $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 32xe^{-x}\cos(2x) \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Su resolución con Maple se muestra en la figura A.12.

De acá se tiene que la solución es

$$y(x) = -e^{-x}\operatorname{sen}(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) + e^{-x}\left(4\operatorname{sen}(2x)x^2 + 2\cos(2x)x - \operatorname{sen}(2x)\right)$$

■

A continuación se muestra un caso donde la ecuación es de orden 3 y las condiciones iniciales se dan en $y(0)$, $y'(0)$ y $y''(0)$.

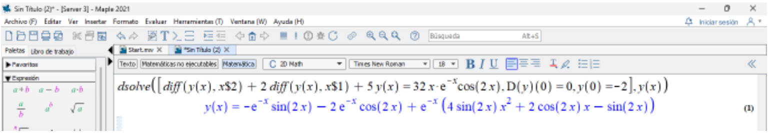


Figura A.12:

■ **Ejemplo A.12** La ecuación diferencial con las condiciones iniciales que se indican

$$y''' + y'' + 2y' - 4y = 1029xe^{x},\ y''(0) = 1,\ y'(0) = -1 \text{ y } y(0) = -2$$

se resuelve en Maple como en la figura A.13.

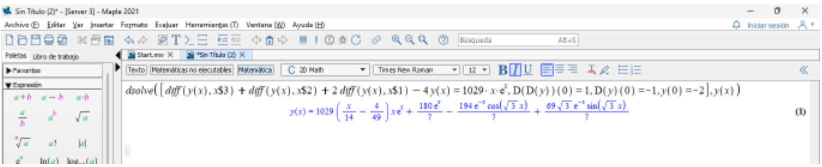


Figura A.13:

Aquí debemos notar que la solución que Maple nos proporciona aun necesita simplificación; procediendo con ello[2] vemos que la solución particular en la forma usual que satisface las condiciones iniciales es

$$y(x) = -\frac{194e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)}{7} + \frac{69\sqrt{3}e^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)}{7} + \frac{147\left(x^2 - \frac{8}{7}x + \frac{120}{343}\right)e^{x}}{2}$$

■

A.5 Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con serie de potencias

En este caso se presentan varias opciones. En el siguiente ejemplo se presenta algunos casos que pueden servir

■ **Ejemplo A.13** Considere la ecuación diferencial

$$\left(x^2 - 3\right)y'' + 2xy' = 0 \tag{A.1}$$

Veamos las siguientes opciones:

[2]Puede usar el comando *simplify* para realizar la simplificación.

1. Para que la solución aparezca en serie de potencias con sus primeros términos no nulos

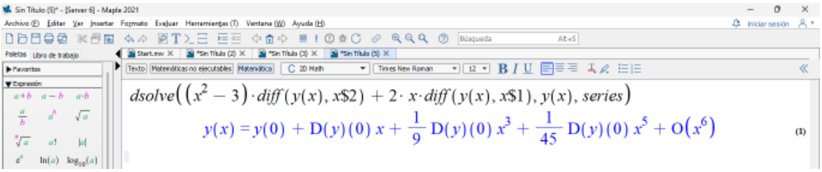


Figura A.14:

En este caso si tomamos $y(0) = c_0$ y $D(y)(0) = c_1$, la solución que nos proporciona Maple en la forma usual sería

$$y(x) = c_0 + c_1\left[x + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{45}x^5\right] + \mathrm{O}\left(x^6\right)$$

2. Si a la ecuación diferencial (A.1) le agregamos las condiciones iniciales $y(0) = -1$ y $y'(0) = 1$ su resolución en Maple es:

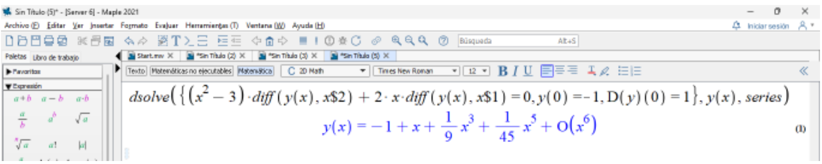


Figura A.15:

Acá es fácil ver que la solución particular con sus primeros términos que satisface las condiciones iniciales es

$$y(x) = -1 + x + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{45}x^5 + \mathrm{O}\left(x^6\right)$$

En este caso, $\mathrm{O}\left(x^6\right)$ es el resto de orden 6 de la solución. Para cuestiones de aproximación dicha expresión es despreciable y podemos evitarla, quedando

$$y(x) \approx -1 + x + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{45}x^5$$

pero solamente en una vecindad pequña de cero.

3. Algunas veces la solución de la ecuación diferencial se presenta empaquetada en forma de serie de potencias. En este caso, la ecuación (A.1) tiene esa cualidad. En Maple vemos que una de las soluciones linealmente independientes aparece en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$.

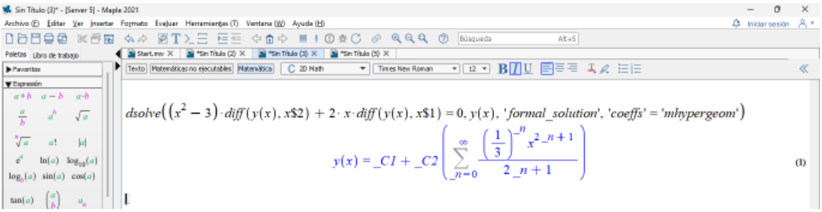


Figura A.16:

En este caso la solución en la forma usual es:

$$y(x) = c_1 + c_2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

4. Para resolver (A.1) con las condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = -1$, se procede de la siguiente manera:

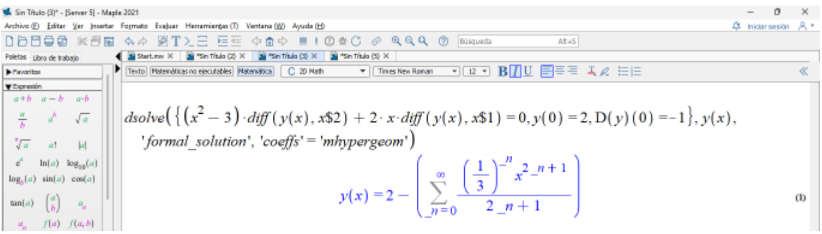


Figura A.17:

La solución escrita en la forma usual es

$$y(x) = 2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

■

A.6 Aplicación de la transformada de Laplace

Aplicar la transformada de Laplace a una función es sencillo y nos evita realizar muchos cálculos si lo hicieramos a mano.

■ **Ejemplo A.14** Sea $f(t) = t^2 e^{-t} + t\cos(3t)$. El cálculo de su transformada de Laplace es como sigue:

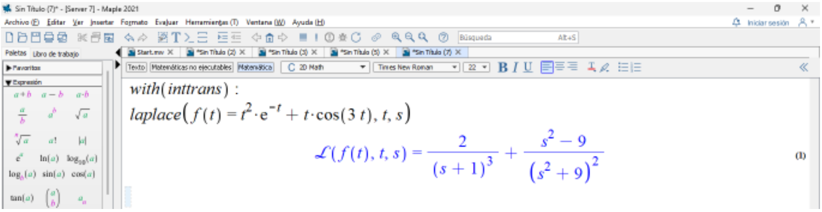


Figura A.18:

La transformada de Laplace en este caso es:

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$$

■

■ **Ejemplo A.15** Para resolver el problema $\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = t + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ con Maple, se tiene:

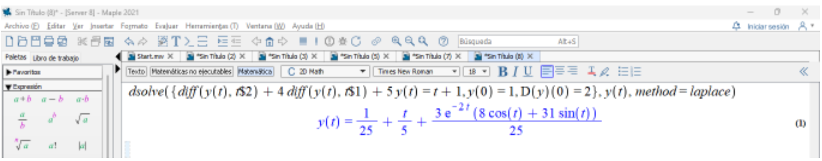


Figura A.19:

Evitándonos hacer muchos cálculos, la solución del problema es:

$$y(t) = \frac{1}{25} + \frac{t}{5} + \frac{3e^{-2t}(8\cos(t) + 31\,\mathrm{sen}(t))}{25}$$

■

Bibliografía

[1] Borrelli R., Coleman C. (2002).*Ecuaciones Diferenciales*. México: Oxford.

[2] Boyce W., DiPrima R. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales*. México: Limusa.

[3] Carmona I. (1996). *Ecuaciones Diferenciales*. México: Alhambra Mexicana.

[4] Cornejo MA. Villalobos E., Quintana P. (2008) *Métodos de solución de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones.* Barcelona: Editorial Reverte S.A.

[5] Cortez M. *Ecuaciones Diferenciales-II Edición*. Trujillo: Universidad Nacional de Trujillo.

[6] Edwards C. Henry, Penney David E. (2009). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Pearson Educación.

[7] Hasser N., LaSalle J., Sullivan J., *Análisis Matemático 2.* Mexico: Trillas.

[8] Hewitt P. (2007). *Física Conceptual*. México : Pearson Addison Wesley.

[9] Kreyszig E. (1998). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I*. México: Limusa S.A.

[10] Kurmyshev E. (2003). *Fundamentos de Métodos Matemáticos para Física e Ingeniería*. México: Limusa.

[11] Leithold L. (1987). *El Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

[12] López V. (2000) *Ecuaciones Diferenciales*. España: Universidad de Murcia, Servicio de Publicaciones.

[13] San Martín J., Uña I., Tomeo V. (2005) *Métodos Matemáticos*. España: Thomson.

[14] Santos R. (2013).*Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias* . Belo Horizonte: Imprenta Universitária.

[15] Simmons G., Robertson J. (1993). *Ecuaciones Diferenciales*. España: McGraw-Hill.

[16] Spiegel M. (1983) . *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

[17] Spiegel M. (1991). *Transformadas de Laplace.* México: McGraw-Hill.

[18] Stewart J. (1999). *Cálculo*. México: Thomson.

[19] Viana M., Espinar J. (2021). *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach to Theory and Practice*. United States of America: American Mathematical Society.

[20] Wrede R., Spiegel M. (2004). *Cálculo Avanzado*. Madrid: Mc Graw Hill.

[21] Zill D., Wright W. (2011). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* . México: Mc Graw Hill.

Página web:

[22] http://www.uv.es/ivorra/Libros/Analisis.pdf

[23] http://ladyada.usach.cl/ vguinez/apuntes.html