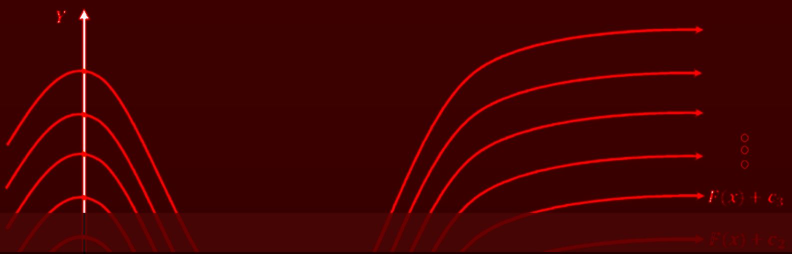
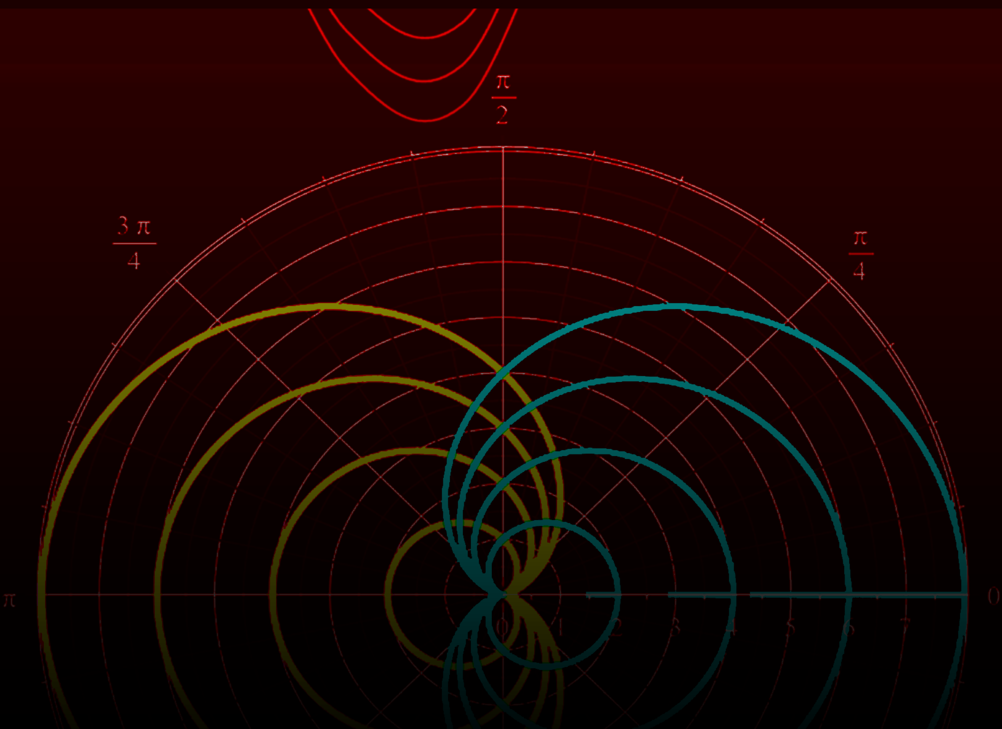
FONDO EDITORIAL

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE TAYACAJA
DANIEL HERNÁNDEZ MORILLO

La investigación, su esencia y arte



ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN Y APLICACIONES



MIGUEL ÁNGEL YGLESIAS JÁUREGUI

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden yaplicaciones

Curso actualizado para Ciencias e Ingeniería

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE TAYACAJA "DANIEL HERNÁNDEZ MORILLO"
Autores:

- Ms. C. MIGUEL ÁNGEL YGLESIAS JÁUREGUI
  Licenciado en Matemática, Maestro en Ciencias con Mención en Didáctica de la Ciencias Experimentales y estudios concluidos de Maestría en Matemática. Docente Asociado adscrito al Departamento Académico de Ciencias Básicas y Estudios Generales - UNAT.
  Email: miguelyglesias@unat.edu.pe

Primera versión, Julio 2023

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y aplicaciones

© Miguel Angel Yglesias Jauregui
Email: miguelyglesias@unat.edu.pe
Dirección: Avenida Mariscal Cáceres 1413

Editada por:

© Universidad Nacional Autónoma de Tayacaja
Daniel Hernández Morillo (UNAT) - Fondo Editorial.
Dirección: Bolognesi N° 416, Tayacaja, Huancavelica -Perú
info@unat.edu.pe
Telf: (+51) 67 -990847026
Web: https://unat.edu.pe/

Primera edición digital: Julio 2023
Libro digital disponible en
https://fondoeditorial.unat.edu.pe
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N° 2023-05821
ISBN: 978-612-5123-01-5

A

Índice general

B

Prefacio

El presente texto titulado **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y Aplicaciones** ha sido elaborado con el objetivo de contribuir a la enseñanza de las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, que es una rama de la matemática que forma parte de las asignaturas de *Cálculo*[1], y fortalecer el aprendizaje de los estudiantes, ofreciéndoles las bases teóricas y el contexto de sus aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia e ingeniería. Damos énfasis al aspecto de la modelación matemática, por ser importante en el aprendizaje de las aplicaciones de la matemática.

Cabe señalar que es un obra en la cual se plasma la experiencia lograda a través de la actividad en la docencia universitaria, en el área de matemática que es fundamental en la formación de los estudiantes de Ciencias e Ingeniería. Se pone a su disposición este material, con la pretensión de ir mejorándolo con el paso del tiempo, para lo cual se cuenta con su apoyo. Las sugerencias y observaciones serán siempre muy acogidas.

Algunas gráficas que aparecen en el texto se realizaron con el software MAPLE 16; asimismo, de los problemas resueltos y de los que se proponen en esta obra, muchos de ellos están propuestos en los textos que aparecen en la bibliografía, también cabe señalar que algunos problemas fueron tomados y adaptados de [23].

[1] En las Universidades peruanas, ecuaciones diferenciales forma parte del currículo de las escuelas profesionales de Matemática, Ingeniería Agrícola, Ingeniería de minas e Ingeniería Civil, y contempla el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales.

B

1. Introducción

En el primer curso de cálculo que se enseña en la universidad, se estudia el concepto de la derivada, y uno de los temas relacionados es el de **diferencial**. Cuando una función es diferenciable en un punto, ésta admite que en el punto respectivo de su gráfica se le pueda asociar una recta tangente, la cual resulta ser muy próxima a su gráfica en un entorno del punto en mención, de tal manera que en dicho entorno, la gráfica de la función y la recta tangente sean casi lo mismo. Por eso, muchas veces usamos la frase **linealización de la función**, lo cual nos permite que los cálculos que debamos hacer en la función los ejecutemos en su recta tangente, es decir, se obtienen mediante una aproximación lineal.

El proceso de determinar los diferenciales es un proceso infinitesimal que consiste en analizar o descomponer la dependencia entre varias magnitudes [1] estudiando el comportamiento de unas al variar o diferenciar levemente otras y, por otra parte, en integrar los resultados diferenciales para obtener de nuevo resultados globales sobre las magnitudes en consideración.

La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable es aumentada o disminuida de forma continua, se llama la diferencial de esa cantidad. Para esto, la letra d se usa para indicar uno de estos incrementos infinitamente pequeños de una magnitud, de tal manera que dx deberá representar un incremento diferencial de la variable x. El tratamiento con infinitésimos causó en algún momento ciertas polémicas, por ejemplo, si vemos el incremento infinitesimal que experimenta el producto xy cuando perturbamos cada uno de sus factores, obtenemos:

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy = xdy + ydx + dxdy = xdy + ydx$$

[1] Ver [22]

donde el término $dxdy$ ha sido despreciado por ser un infinitésimo mucho menor que los infinitésimos dx y dy, perdiendo de esta manera representatividad en la expresión $xdy + ydx$. No se pretende analizar más esta situación, pero pensando muy intuitivamente se recalca el proceso de linealización indicado arriba.

1.1 Conceptos preliminares

A continuación se realizará una explicación teórica breve de los diferenciales.

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en $x_0 \in D_f$. La recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por la expresión

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.1}$$

El cambio en x dado por la expresión $x - x_0$ lo denotamos por Δx, asimismo el cambio en y es denotado por Δy y estará dado mediante

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Observando la Figura 1.1, vemos que cuando Δx es pequeña, el cambio en y se puede aproximar como

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

Definición 1.1.1 Dada la función (diferenciable) $y = f(x)$, la diferencial de y que se representa por dy, está dada por

$$dy = f'(x)dx$$

donde $x \in D_{f'}$ y dx es un incremento arbitrario de x.

Aquí, hay que tener en cuenta que

$$D_{f'} = \left\{ x \in D_f \ : \ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ existe} \right\}$$

Definición 1.1.2 Con la misma función de la definición anterior, la diferencial de x denotada por dx, está dada por

$$dx = \Delta x$$

donde Δx es un incremento arbitrario de x, y $x \in D_{f'}$.

Con las definiciones dadas

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \text{si } dx \neq 0 \tag{1.2}$$

Debemos tener en cuenta que siendo $y = f(x)$, la diferencial de la función en cualquier $x \in D_{f'}$ y para cualquier $dx \neq 0$ también se puede escribir como

$$df(x) = f'(x)dx$$

Este cambio de la función se mide en las proximidades de la recta tangente como se observa en la figura 1.1. Es decir, dy mide la elevación de la recta

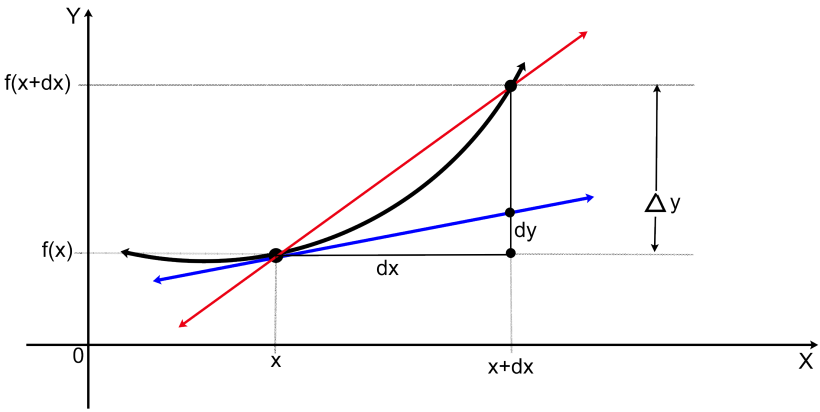


Figura 1.1: La figura muestra la curva, recta secante y recta tangente en el intervalo $[x, x+dx]$.

tangente en comparación con Δy que es la elevación de la curva. Haciendo $dx \to 0$, vemos que $|\Delta y - dy| \to 0$; lo que obviamente nos indica que en las proximidades de x, se tiene $\Delta y \approx dy$. Este resultado es importante porque nos permite aproximar la función con valores en su recta tangente.

Definición 1.1.3 Una función F es la antiderivada de una función f, en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, si para todo $x \in I$ se tiene:

$$F'(x) = f(x)$$

Theorema 1.1.1 Si F_1 y F_2 son antiderivadas de alguna función f en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces existe una constante c tal que

$$F_1(x) = F_2(x) + c, \quad \forall x \in I$$

Observación

Si F es una antiderivada particular de f en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces cualquier antiderivada de f en I está dada por

$$F(x) + c$$

Es decir, la antiderivada de una función está representada geométricamente por una familia de curvas, esto lo ilustramos en la Figura 1.2.

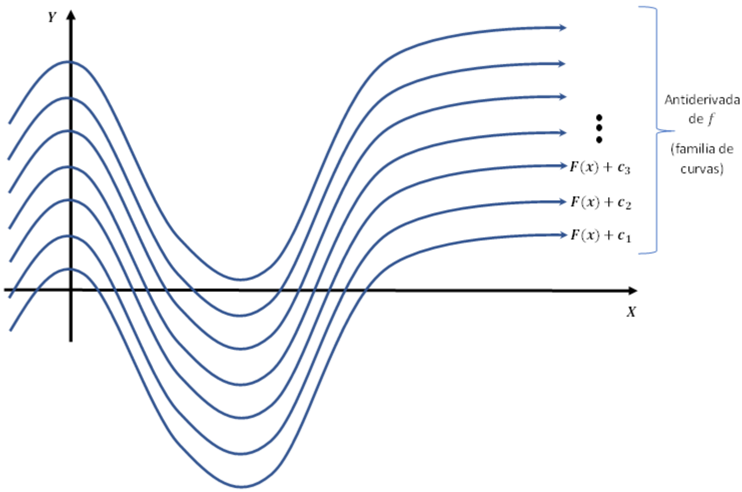


Figura 1.2: El gráfico muestra la antiderivada de la función $f(x)$, representada por la familia de curvas $F(x)+c$.

■ **Ejemplo 1.1** La antiderivada de la función $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2 + c$. Si damos diferentes valores a la constante c, se obtiene que la antiderivada viene representada geométricamente por una familia de parábolas con vértices sobre el eje Y, como se muestra en la Figura1.3. ■

■ **Ejemplo 1.2** En la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{2\cos(x) - \operatorname{sen}(2x)}$ su antiderivada es $F(x) = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}(x)-1}{\operatorname{sen}(x)+1}\right| + \frac{1}{4}\frac{1}{1-\operatorname{sen}(x)} + c$. El cálculo de la antiderivada se hace vía integración. ■

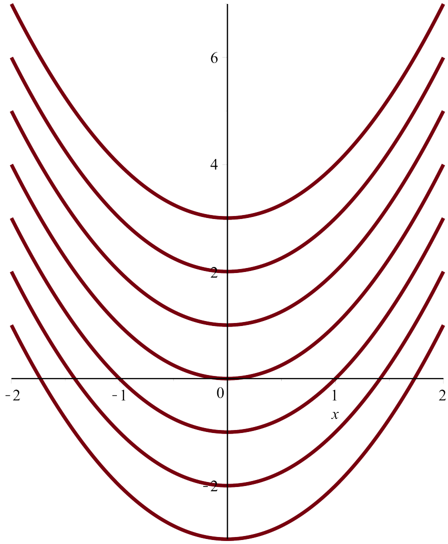


Figura 1.3: Representación geométrica de la familia de parábolas $F(x) = x^2 + c$.

1.2 Ecuaciones diferenciales. Conceptos básicos

Vistos los conceptos y resultados en la sección anterior, empezamos con el estudio de las ecuaciones diferenciales sobre aspectos muy generales relacionados con el orden, la linealidad, el tipo de solución y las condiciones iniciales o de frontera de una ecuación diferencial. Para comprender en qué consiste una ecuación diferencial, proponemos las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&y'' + 2y' + 6y = 0\\
&x'(t) = 40 - \frac{4x(t)}{110 - t}\\
&\frac{\partial u}{\partial t} = 0{,}02\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
&(x - y)dx - (x + y)dy = 0
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones, son las que aquí denominaremos ecuaciones diferenciales. En seguida, es necesario explicar ciertos detalles:

1. En la ecuación $y'' + 2y' + 6y = 0$, se tiene las derivadas de la función o variable dependiente y, respecto de alguna variable independiente que no se especifica, pero que podría ser x, o t, o alguna otra.
2. En la segunda ecuación, se observa que la variable dependiente es x, la cual además aparece con su derivada respecto de la variable indepen-

diente t.

3. En la tercera ecuación, la variable dependiente es u y las variables independientes respecto de las cuales aparecen sus derivadas parciales son x y t.
4. En la última ecuación aparecen dos variables: x e y; el rol de variable dependiente o independiente depende de como se tomen las derivadas. Por ejemplo, si la ecuación es dividida entre dx, entonces $x-y=(x+y)\frac{dy}{dx}$, con lo cual y sería la variable dependiente y x la variable independiente. Si la ecuación es dividida por dy, entonces $(x-y)\frac{dx}{dy}=x+y$, en este caso x es la variable dependiente e y la variable independiente.

Entonces ¿qué se entiende por ecuación diferencial?

Definición 1.2.1 Una ecuación diferencial es cualquier ecuación en la que interviene una variable dependiente (función desconocida) y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes.

Si la variable dependiente (o función desconocida) dependiera sólo de una variable independiente, decimos que la ecuación diferencial es **ordinaria (EDO)**. Pero si la dependencia fuese de dos o más variables independientes, decimos que es una **ecuación diferencial parcial (EDP)**. En los siguientes ejemplos:

1. $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-21x=t+1$, es una EDO.
2. $y'=\frac{1}{x-4y}$, es una EDO.
3. $u+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, es una EDP.
4. $x^2y''+(3x-1)y'+y=0$, es una EDO.
5. $u_{tt}=4u_{xx}+2tx^2$, es una EDP.

Observación

De aquí en adelante sólo nos ocuparemos de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 1.2.2 El orden de una ecuación diferencial está dado por el mayor orden de la derivada que interviene en la ecuación.

En los siguientes ejemplos:

1. $(y')^2+2y'=0$, es una EDO de primer orden.
2. $y'''-y=2$, es una EDO de tercer orden.
3. $(y'')^3-y'=1$, es una EDO de segundo orden.

En general una ecuación diferencial de orden[2] n se puede escribir como:

$$F\left(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

donde F es una función para la cual tiene sentido la expresión de una ecuación diferencial, en este caso, ordinaria.

1.3 Linealidad de una ecuación diferencial ordinaria

Una propiedad importante de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias es su **linealidad**. En general: sean U y V espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, el operador

$$\begin{aligned} L: \quad U &\to V \\ u &\mapsto Lu = v \end{aligned}$$

es lineal, sí y sólo sí, para todo $u_1, u_2 \in U$ y cualquier escalar r en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$L(ru_1 + u_2) = rLu_1 + Lu_2$$

El estudio detallado de operadores lineales se hace en el álgebra lineal; pero en nuestro caso la linealidad está presente por el hecho de que el operador $\frac{d}{dx}$ que transforma una función $f(x)$ en $f'(x)$, es lineal. Veamos el siguiente caso:

La ecuación diferencial $y'' + 5xy' + 4y = 0$, escrita usando el operador $\frac{d}{dx}$ es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

de donde

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 5x\frac{d}{dx} + 4\right)y = 0.$$

La expresión del paréntesis es en este caso el operador asociado a la ecuación diferencial. Haciendo

$$L(x) = \frac{d^2}{dx^2} + 5x\frac{d}{dx} + 4$$

la ecuación se expresa como

$$L(x)y = 0$$

Si tomamos arbitrariamente las funciones y_1, $y_2 \in C^2(J)$ con J un intervalo en $\mathbb{R}$ y r cualquier escalar es fácil verificar que

$$L(x)(ry_1 + y_2) = rL(x)y_1 + L(x)y_2$$

[2]Entendemos el orden como un número entero no negativo que indica el orden de la máxima derivada que interviene en la ecuación. Hacemos esta especificación porque también es posible hablar de la derivada fraccionaria, que últimamente está siendo muy estudiada.

es decir, $L(x)$ es un operador lineal. Esta propiedad de ser un operador lineal se transmite a la ecuación diferencial, por esto decimos que la ecuación diferencial es lineal. Veamos a continuación dos ejemplos:

■ **Ejemplo 1.3** En la ecuación diferencial $y'' - 4y = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, el operador asociado es $L(x) = \frac{d^2}{dx^2} - 4$. De esto, si $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ y r es cualquier número real, entonces

$$\begin{aligned} L(x)(y_1 + ry_2) &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - 4\right)(y_1 + ry_2) \\ &= \frac{d^2}{dx^2}(y_1 + ry_2) - 4(y_1 + ry_2) \\ &= y_1'' + ry_2'' - 4y_1 - 4y_2 \\ &= (y_1'' - 4y_1) + r(y_2'' - 4y_2) \\ &= L(x)y_1 + rL(x)y_2, \end{aligned}$$

■

Así $L(x)$ es un operador lineal y con ello la ecuación diferencial asociada es lineal.

■ **Ejemplo 1.4** Dada la ecuación diferencial $y'' - (y')^2 + y = x$, definida en algún intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$, se tiene el operador asociado[3]

$$L(x) = \frac{d^2}{dx^2} - \left(I^2 \circ \frac{d}{dx}\right) + 1.$$

■

De esto, para $y_1, y_2 \in C^2(J)$ y cualquier $r \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} L(x)(y_1 + ry_2) &= \left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(I^2 \circ \frac{d}{dx}\right) + 1\right](y_1 + ry_2) \\ &= \frac{d^2}{dx^2}(y_1 + ry_2) - \left(I^2 \circ \frac{d}{dx}\right)(y_1 + ry_2) + (y_1 + ry_2) \\ &= y_1'' + ry_2'' - I^2\left[\frac{d}{dx}(y_1 + ry_2)\right] + y_1 + ry_2 \\ &= y_1'' + ry_2'' - I^2\left(y_1' + ry_2'\right) + y_1 + ry_2 \\ &= y_1'' + ry_2'' - \left(y_1' + ry_2'\right)^2 + y_1 + ry_2 \neq L(x)y_1 + rL(x)y_2. \end{aligned}$$

Luego $L(x)$ es un operador no lineal y por tanto la ecuación diferencial asociada no es lineal.

[3] Denotamos con la letra I al operador identidad. También se debe indicar que en este caso $I^2 = I \cdot I$, así también es válido escribir el operador $L(x)$ como $L(x) = \frac{d^2}{dx^2} - \left(I^2 \circ \frac{d}{dx}\right) + I$.

Definición 1.3.1 Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n es de la forma

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \qquad (1.3)$$

donde $f(x)$ y las funciones coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\cdots$, $a_{n-1}(x)$ están definidas en algún intervalo $J\subset\mathbb{R}$.

El operador asociado a la EDO en (1.3) es:

$$L(x)=\frac{d^n}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x) \qquad (1.4)$$

que aplicándolo a la ecuación (1.3) se tiene la forma compacta:

$$L(x)y=f(x)$$

Es fácil ver que $L(x)$ es un operador lineal que debe estar definido en el espacio $C^n(J)$.

1.4 Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Definición 1.4.1 Dada la ecuación diferencial

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0. \qquad (1.5)$$

La función $y=\phi(x)$ es solución de (1.5) en un intervalo abierto $J\subset\mathbb{R}$ si y solo si:

$$F\left(x,\phi(x),\phi'(x),\phi''(x),\cdots,\phi^{(n)}(x)\right)=0,\ \ \forall x\in J,$$

es decir, cualquier función que hace que (1.5) sea una identidad, es solución de la ecuación diferencial.

El proceso de encontrar la curva o función que satisface la ecuación diferencial, es un proceso de integración; por eso muchas veces llamaremos a la solución: **solución integral** o **curva integral**.

■ **Ejemplo 1.5** En la ecuación diferencial $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ [4], $x\in\langle -1,1\rangle$, verifique que $\phi(x)=1+\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ es su solución. ■

Resolución

En efecto, la primera y segunda derivada de ϕ son respectivamente:

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-\frac{x}{1-x^2}\\ \phi''(x) &= \frac{-2}{(1-x^2)^2}\end{aligned}$$

[4] Es una de las ecuaciones de Legendre.

Con las cuales se obtiene:

$$(1-x^2)\phi''(x) = (1-x^2)\frac{-2}{(1-x^2)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$
$$-2x\phi'(x) = -2x\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{x}{1-x^2}\right] = \frac{2x^2}{1-x^2} - x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$
$$2\phi(x) = 2 + x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Luego, sumando se verifica:

$$(1-x^2)\phi''(x) - 2\phi'(x) + 2\phi(x) = 0$$

Con este resultado se muestra que $\phi(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

También es posible que a partir de alguna función dada, se encuentre la ecuación diferencial de la cual ésta es solución. Veamos el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 1.6** Sea la función $\phi(t) = ate^{-t} + be^{-t}$, con a y b constantes y $t \in \mathbb{R}$. Encuentre la ecuación diferencial de la cual es solución. ■

Resolución

El proceso de encontrar la ecuación diferencial consistirá en derivar la función ϕ y eliminar las constantes a, b haciendo operaciones convenientes. En efecto:

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= ae^{-t} - ate^{-t} - be^{-t} \\ \phi''(t) &= -2ae^{-t} + ate^{-t} + be^{-t} \end{aligned}$$

Si calculamos

$$\phi'(t) + \phi''(t) = -ae^{-t}$$
$$\phi(t) + \phi'(t) = ae^{-t}$$

y luego sumamos miembro a miembro se obtiene: $\phi''(t) + 2\phi'(t) + \phi(t) = 0$. Es decir, la función $\phi(t)$ es solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = 0$$

■ **Ejemplo 1.7** Se tiene el problema $(P): \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 + 2xy \\ y(1) = 0 \end{cases}$. Muestre que $y(x) = e^{x^2}\int_1^x e^{-t^2}dt$ es solución de (P). ■

Resolución

Obsérvese que: $y(1) = e^1 \int_1^1 e^{-t^2} dt = 0$, es decir $y(1) = 0$. Para constatar que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\int_1^x e^{-t^2}dt\right) \\ &= 2xe^{x^2}\int_1^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(\int_1^x e^{-t^2}\right) \\ &= 2x\underbrace{e^{x^2}\int_1^x e^{-t^2}dt}_{=y(x)} + \underbrace{e^{x^2}e^{-x^2}}_{=1} \end{aligned}$$

Así $\frac{d}{dx}(y(x)) = 2xy(x) + 1$, es decir $y(x)$ satisface la ecuación diferencial. Por lo tanto $y(x)$ es solución del problema (P)

■ **Ejemplo 1.8** Determine para qué valores de m la función $\phi(x) = e^{mx}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + 6y' + 5y = 0$. ■

Resolución

De $\phi(x) = e^{mx}$ se tiene: $\phi'(x) = me^{mx}$ y $\phi''(x) = m^2e^{mx}$. Puesto que $\phi(x)$ es solución de la ecuación diferencial, entonces esta función verifica que:

$$\phi''(x) + 6\phi'(x) + 5\phi(x) = 0$$

Reemplazando ϕ, ϕ' y ϕ'' se tiene:

$$m^2e^{mx} + 6me^{mx} + 5e^{mx} = 0$$

de donde $m^2 + 6m + 5 = 0$, así $m = -5$ o $m = -1$. Con los valores de m encontrados, afirmamos que $\phi(x) = e^{-5x}$ y $\phi(x) = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación diferencial.

■ **Ejemplo 1.9** Determine para qué valores de m la función $\phi(x) = x^m$ es solución de la ecuación: $x^2y'' - xy' - 5y = 0$. ■

Resolución

De $\phi(x) = x^m$ se tiene: $\phi'(x) = mx^{m-1}$ y $\phi''(x) = m(m-1)x^{m-2}$. Poniendo $\phi(x)$, $\phi'(x)$ y $\phi''(x)$ en la ecuación diferencial[5] resulta:

$$x^2\phi''(x) - x\phi'(x) - 5\phi(x) = 0$$

de donde $m^2 - 2m - 5 = 0$, así $m = 1 \pm \sqrt{6}$. Para estos valores de m las soluciones de la ecuación diferencial son las funciones $\phi_1(x) = x^{1+\sqrt{6}}$ y $\phi_2(x) = x^{1-\sqrt{6}}$.

[5]Estamos asumiendo que $\phi(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

■ **Ejemplo 1.10** Sea la ecuación diferencial

$$xy(y')^2-(x^2+y^2)y'+xy=0$$

a) Muestre que es equivalente a dos ecuaciones diferenciales de primer orden.
b) Muestre que $y=cx$ y $x^2-y^2=c$ donde c es cualquier constante, son soluciones de la ecuación diferencial.

■

Resolución

a) En este caso, con el cambio de variable $p=y'$, se obtiene

$$xyp^2-(x^2+y^2)p+xy=0,$$

que resolviendo[6] para la variable p resulta:

$$p=\frac{x^2+y^2\pm\sqrt{(x^2+y^2)^2-4(xy)^2}}{2xy}$$

de donde $p=\frac{x^2+y^2\pm(x^2-y^2)}{2xy}$. Analizando para cada signo se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

b) Para el caso de la familia de rectas $y=cx$, se tiene $y'=c$; luego reemplazando en la ecuación diferencial vemos que:

$$\begin{aligned}&x(cx)(c)^2-(x^2+(cx)^2)c+x(cx)=0\\&0=0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y=cx$ es solución de la ecuación diferencial.

Para el caso de la familia de hipérbolas $x^2-y^2=c$, derivando implícitamente respecto de x se tiene: $y'=\frac{x}{y}$, luego reemplazando en la ecuación diferencial vemos que:

$$\begin{aligned}xy\left(\frac{x}{y}\right)^2-(x^2+y^2)\frac{x}{y}+xy&=0\\\frac{x^3}{y}-\frac{x^3}{y}-xy+xy&=0\\0&=0\end{aligned}$$

[6]Resolvemos la ecuación en forma algebraica, para lo cual se aplica la fórmula general de una ecuación de segundo grado.

Se concluye así que la familia de hipérbolas es también solución de la ecuación diferencial.

■ **Ejemplo 1.11** A continuación:

a) Demostrar que: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$.

b) Resolver la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dy^2} + (\operatorname{sen} x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$, aplicando (a).

■

Resolución

a) Si manipulamos $\frac{dy}{dx}$ en forma algebraica[7], entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.
En esto último, si derivamos respecto de x, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) \\
&= \frac{-\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = -\frac{\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \\
&= -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \\
&= -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}
\end{aligned}$$

con lo cual se ha demostrado que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$. Este resultado es importante porque permite expresar la derivada respecto a x en otra respecto a y.

b) En este caso la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dy^2} + (\operatorname{sen} x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ se escribe de forma equivalente como $-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} = \operatorname{sen} x$, y con el resultado de (a) también puede ser

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{sen} x$$

[7] Tenga en cuenta que lo podemos ver como un cociente de infinitésimos, pero además de eso, el fundamento de todo este proceso está en la composición de funciones y la derivada de la función inversa.

Aplicando el proceso de integración dos veces se llega a la solución:

$$y(x) = -\operatorname{sen} x + c_1 x + c_2$$

■ **Ejemplo 1.12** Muestre que la curva $C : \begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$, donde a es cualquier constante distinta de cero, es solución de $1 + (y')^2 + 2yy'' = 0$. ■

Resolución

Antes de empezar, debemos aclarar que la curva que se nos da está expresada en forma paramétrica, siendo en este caso θ el parámetro. Calculando las derivadas de x e y respecto de θ se tiene

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = a\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{d\theta^2} = a\operatorname{sen}\theta \\ \frac{d^2y}{d\theta^2} = a\cos\theta \end{cases} \qquad (*)$$

Para determinar como se expresan la primera y segunda derivada de y respecto de x vía el parámetro θ, hacemos los siguientes cálculos[8]:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ y''(x) &= \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right)\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{d\theta^2}\frac{dx}{d\theta} - \frac{d^2x}{d\theta^2}\frac{dy}{d\theta}}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{\frac{d^2y}{d\theta^2}\frac{dx}{d\theta} - \frac{d^2x}{d\theta^2}\frac{dy}{d\theta}}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^3} \end{aligned}$$

luego con los resultados de (*) obtenemos:

$$y'(x) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$$

y

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{a^2\cos\theta(1-\cos\theta) - a^2\operatorname{sen}^2\theta}{a^3(1-\cos\theta)^3} \\ &= -\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2} \end{aligned}$$

Para comprobar que C es una curva integral de la ecuación diferencial, reemplazamos $y'(x)$ e $y''(x)$ en la ecuación diferencial, haciendo los cálculos

[8] Aplicamos la regla de la cadena.

respectivos se tiene:

$$
\begin{aligned}
1+\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}\right)^2+2\left[a(1-\cos\theta)\right]\left(-\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}\right) &= 0\\
1+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}-\frac{2}{1-\cos\theta} &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Se verifica así que C es una curva integral (o solución) de la ecuación diferencial.

La solución de la ecuación diferencial (1.5) puede ser de diferentes tipos: solución general, solución particular y solución singular.
Solución general: es aquella que contiene casi a la totalidad (o el total) de soluciones. Aparece con parámetros en su expresión, los cuales al asumir distintos valores hacen una familia de curvas o curvas integrales[9].

■ **Ejemplo 1.13** La ecuación diferencial $y'+t^2y=0$ tiene como solución general a la familia de curvas uniparamétrica[10] $y(t)=ce^{-\frac{t^3}{3}}$. ■

En forma similar:

■ **Ejemplo 1.14** La ecuación diferencial $y''(t)+4y(t)=0$ tiene como solución general a la familia de curvas biparamétrica[11] $y(t)=c_1\cos(2t)+c_2\operatorname{sen}(2t)$. ■

Solución particular: es aquella que resulta de dar un valor específico al (a los) parámetro (parámetros) en la solución general.

■ **Ejemplo 1.15** En el ejemplo 1.13, si de la familia de curvas (o solución general) se escoge aquella en la cual $c=\frac{1}{2}$, entonces se tiene la solución particular $y(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{t^3}{3}}$. ■

■ **Ejemplo 1.16** En forma similar, si en la solución general del ejemplo 1.14 hacemos $c_1=0$ y $c_2=2$, se obtiene la solución particular $y(t)=2\operatorname{sen}(t)$. ■

Solución singular: es aquella que aparece en algunas ecuaciones diferenciales, y que no puede ser obtenida de la solución general.[12]

■ **Ejemplo 1.17** La solución general de la ecuación diferencial: $y'=-2t(y-4)^2$, está dada por la familia de curvas $y(t)=\frac{1+c+t^2}{c+t^2}$. Sin embargo, la función $y_p(t)=4$ es también solución de la ecuación diferencial y es imposible obtenerla de la solución general. Es fácil ver que no existe valor de c en la solución

[9] También podemos decir curvas solución de la ecuación diferencial.
[10] Decimos así porque en la solución sólo interviene un parámetro, que en este caso es la letra c.
[11] Hay dos parámetros, c_1 y c_2.
[12] Es bueno aclarar que mientras la solución particular procede de la solución general, esto no ocurre con las soluciones singulares.

general para el cual podamos obtener $y_p(t)$. Por lo tanto $y_p(t)$ es una solución singular de la ecuación diferencial. ■

1.5 Condiciones iniciales y de frontera

Como ya vimos, la solución general de la ecuación diferencial

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

es una familia de curvas en el plano, en este caso, n - paramétrica. Para determinar una curva específica[13], es necesario imponer a la ecuación diferencial n condiciones. Según la forma como se dan estas condiciones se tiene dos tipos de problemas, que pueden ser:

1.5.1 Problema de valor inicial

Es la ecuación diferencial cuyas condiciones se dan en un mismo valor de la variable independiente. Por ejemplo:

$$(PVI)\begin{cases} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

1.5.2 Problema de valor en la frontera

Es la ecuación diferencial con condiciones en diferentes valores de la variable independiente, por ejemplo:

$$(PVF)\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \; 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

■ **Ejemplo 1.18** La ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2\operatorname{sen}(2t)$ con la condición $x(0) = x'(0) = 0$ es un problema de valor inicial. ■

■ **Ejemplo 1.19** En el caso de la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ con la condición $y(0) = y'(0) = 0$ es un problema de valor en la frontera. ■

[13] O solución particular

1.6 EJERCICIOS PROPUESTOS 1

1. Hallar el operador asociado a la ecuación diferencial $y''' - yy' = x$, luego analice si es lineal.
2. Dada la ecuación diferencial $y'' + 2y' - 5y = \operatorname{sen}(x)$, halle el operador asociado y determine si es lineal.
3. Dada la ecuación diferencial $\left(x^2 + 4y^2\right) dy = 2xydx$, verifique si la función dada implícitamente por $x^2 - 4y^2 + y = 0$ es su solución.
4. En la ecuación diferencial $(2y + x\cos y)dy + (\operatorname{sen} y)dx = 0$, muestre que $x\operatorname{sen} y - y^2 = k$ (k es constante), es su solución general.
5. Dado el problema $\begin{cases} x^2dy - xydx = \left[3(x^2+y^2)\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx \\ y(1) = -1 \end{cases}$. Muestre si la función $y(x) = -x\tan\left(\frac{\pi x^3}{4}\right)$ es su solución.
6. En el problema $\begin{cases} x\frac{dy}{dx} = y - (x^2 + 4y^2) \\ y(-\pi) = -2 \end{cases}$, muestre que la función $y(x) = -\frac{x}{2}\tan\left(2x - \arctan\left(\frac{4}{\pi}\right)\right)$ es su solución.
7. Muestre que la función $y(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{23x}{6}$ satisface la ecuación diferencial y la condición del problema $\begin{cases} xy' - y = x^3 \\ y(3) = 2 \end{cases}$.
8. Dado el problema $\begin{cases} \frac{dx^2}{dt^2} + 4x(t) = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$, muestre que su solución es la función $x(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t-u)\cos(t-u)f(u)du$.
9. En el problema anterior, si tomamos $f(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \le t < 1 \\ 1, \ t \ge 1 \end{cases}$, entonces su solución está dada por $x(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t-2), t \ge 1 \end{cases}$.
10. Muestre que la solución del problema $\begin{cases} (1+x^2)y' = q(x) - 2xy \\ y(0) = 0 \end{cases}$ don-

de $q(x) = \begin{cases} x,\ 0 \leq x < 1 \\ \\ -x,\ x \geq 1 \end{cases}$, es $y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2(x^2+1)},\ 0 \leq x \leq 1 \\ \\ \frac{1}{x^2+1}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right),\ x \geq 1 \end{cases}$

11. Dada la ecuación diferencial $y' + \frac{y^2}{\cos x - 1} + \frac{y}{\operatorname{sen} x} = 0$. Muestre que una solución particular es $y(x) = \tan x$.

12. En la ecuación diferencial $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 9y = 0$, verifique si las funciones $\phi_1(x) = x^3$ y $\phi_2(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\ln x\right)$ son sus soluciones.

13. Verifique que la función $\phi(x) = 4\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ es solución de la ecuación diferencial:
$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

14. Verifique que la función $\phi(x) = 2x - \sqrt{1-x^2}$ es solución de la ecuación diferencial:
$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$$

15. En la ecuación diferencial
$$\left(x^4 - x^3\right)y'' + \left(2x^3 - 2x^2 - x\right)y' - y = 0,\ \ x > 1$$
Muestre que $\phi(x) = \frac{2}{x} - e^{\frac{1}{x}}$ es su solución.

16. Dada la ecuación diferencial
$$y'' + (\tan x)y' + (\cos^2 x)y = 0$$
Analice si la función $\phi(x) = 3\cos(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ es su solución.

17. Muestre que la solución general de la ecuación diferencial
$$2xyy' = 3y^2 - x^2$$
es la familia de curvas dada por $y^2 = x^2(1+cx)$.

18. Muestre que la solución general de la ecuación diferencial
$$\operatorname{sen}\theta \frac{dr}{d\theta} = r(\cos\theta - 1)$$
está dada por la familia de curvas $r = \frac{k \operatorname{sen}^2\theta}{1-\cos\theta}$.

19. Determine si la función $\phi(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{2x}$ es solución de la ecuación diferencial:
$$x(1+3x^2)y'' + 2y' - 6xy = 0$$

20. Halle los valores de m para los cuales la función $\phi(x) = (x+1)^m$ es solución de la ecuación diferencial
$$(x+1)^2y'' - 2(x+1)y' - 4y = 0$$

21. Determine el valor de α para el cual $y(x) = x^\alpha \cot\left(\frac{1}{x}\right)$ es solución de la ecuación diferencial
$$xy' + y = y^2 + \frac{1}{x^2}$$

22. Determine los valores de A y B para que la función $y(x) = e^{2x}(Ax+B)$ sea solución de la ecuación diferencial
$$y' + e^{-2x}y^2 - \frac{1}{x}(1+4x+2x^2)y + \frac{e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3)$$

23. Determine los valores de r para los cuales la función $\phi(x) = x^r\cos(\ln x)$, es solución de la ecuación diferencial
$$x^4\frac{d^4y}{dx^4} + 4x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 10y = 0$$

24. Halle la ecuación diferencial para la cual $y(x) = ae^{-x} + be^{3x}$ (a y b son constantes) es su solución general.

25. Sea la función $\phi(t) = at^2e^{2t} + bte^{2t}$ con a y b constantes. Encuentre la ecuación diferencial de la cual es su solución general.

26. La solución general de una ecuación diferencial es
$$y(x) = a(x+1) + b\ln x$$
donde a y b son constantes. Halle la ecuación diferencial de la cual es solución.

27. Halle la ecuación diferencial de la cual $y(x) = a + bx + cx^2$ con a, b y c constantes, es su solución.

28. La solución general de una ecuación diferencial es
$$x(t) = ae^{-2t}\cos t + be^{-t}\operatorname{sen} t$$
donde a y b son constantes. Halle la ecuación diferencial de la cual es solución.

29. Si $y(x) = \frac{2x}{\operatorname{sen} x + cx \cos x}$ con c constante, es la solución general de una ecuación diferencial; halle tal ecuación diferencial.

30. ¿De qué ecuación diferencial es solución $y(x) = 1 + \frac{\cos 2x + c}{\operatorname{sen} 2x + c}$? ($c$ es constante)

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Vistos los conceptos previos, en este capítulo nos ocuparemos del estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y sus métodos de resolución. Estos tipos de ecuaciones son muy importantes en problemas de modelación matemática con los cuales se puede explicar un proceso dinámico.

Por ejemplo, vamos a suponer que se quiere estudiar una población[1] de truchas en alguna de las lagunas de la zona. Para describir como se comporta dicha población, antes debemos definir las variables que intervienen en el problema. En este caso nos interesan

$$\begin{aligned} p &: \quad \text{población de peces en el instante } t. \\ t &: \quad \text{tiempo (meses)} \end{aligned}$$

Siendo t la variable independiente y p la variable dependiente[2], la tasa de cambio neta de la población de peces está dada por $\frac{dp}{dt}$, la cual a la vez queda determinada si se conoce la tasa de nacimiento, la tasa de muerte (o mortalidad), la tasa de pesca o captura, etc., de tal manera que en cualquier instante t:

$$\frac{dp}{dt} = \text{tasa de nacimiento} - \text{tasa de muerte} - \text{tasa de pesca}$$

Si asumimos que en el instante t:

1. la tasa de nacimiento es proporcional al tamaño de la población, es decir: kp
2. la tasa de muerte es[3]: $(m+sp)p$

[1] Ver [17]

[2] Puesto que p es la población de peces en el instante t, escribimos también $p = p(t)$.

[3] En este caso según [17], m es el coeficiente de mortalidad natural, mientras que sp explica el efecto de sobrepoblamiento. Es decir, a una mayor cantidad de población de peces, se espera que la mortalidad de los mismos sea mayor.

3. la tasa de captura es: C.

Entonces podemos expresar la variación de la población de peces con la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = kp - (m + sp)p - C$$

Haciendo $a = k - m$, la ecuación anterior se escribe de forma equivalente como

$$\frac{dp}{dt} = ap - sp^2 - C \tag{2.1}$$

La cuestión que ahora nos podemos plantear es si existe alguna función que satisfaga la ecuación diferencial en (2.1), es decir, si existe solución. La teoría de ecuaciones diferenciales nos brinda un teorema según el cual una ecuación diferencial dada, bajo ciertas condiciones tiene solución, y también si ésta es única.

Tomando una versión más simplificada del teorema de existencia y unicidad en [21], se plantea el siguiente teorema

Theorema 2.0.1 — de existencia y unicidad. Dado el problema de Cauchy $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, donde f es una función definida en una región rectangular R que contiene al punto (x_0, y_0). Si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en R, entonces existe un intervalo I con centro en x_0 y una única función $y = \phi(x)$ definida en el intervalo I que es solución del problema.

El teorema solo nos da las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución. Esto significa que si éstas no se dan, puede ser que el problema tenga solución o no. Por eso, hay que tener cuidado al momento de aplicar el teorema para asegurar la existencia de soluciones y su unicidad.

■ **Ejemplo 2.1** Dado el problema $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt{xy} \\ y(1) = 0 \end{cases}$. Determine si el problema tiene solución única. ■

Resolución

En efecto, si hacemos $f(x,y) = \sqrt{xy}$, su continuidad está asegurada en la región $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \geq 0\}$, lo cual corresponde al primer y tercer cuadrante del plano cartesiano. Asimismo, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$ es continua en el conjunto $R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{x}{y} \geq 0\right\} \subset R_1$. De estos dos resultados se tiene que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R_2. Como $(1,0) \notin R_2$, entonces el teorema no asegura la existencia y unicidad de soluciones para el problema dado. En este caso, el problema tiene mas de una solución; podemos verificar que $y_1(x) = 0$ y $y_2(x) = \frac{1}{9}\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)^2$ son soluciones del problema dado.

■ **Ejemplo 2.2** Dado el problema $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{4-x^2-y^2}{xy}} \\ y(1) = 2 \end{cases}$. Determine el conjunto de $\mathbb{R}^2$ en el cual el problema tiene solución única. ■

Resolución

Si hacemos $f(x,y) = \sqrt{\frac{4-x^2-y^2}{xy}}$ se tiene que f es continua en el conjunto $R_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{4-x^2-y^2}{xy} \geq 0\right\}$, mientras que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{x^2-y^2-4}{xy^2}\sqrt{\frac{xy}{4-x^2-y^2}}$ es continua en $R_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{xy}{4-x^2-y^2} > 0\right\}$. Así se tiene que $(1,2)$ está en $R_1 \cap R_2$.

Tomando la región rectangular R contenida en

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 < 4,\ x > 0,\ y > 0\right\},$$

el problema tiene solución única en R.

2.1 Métodos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

2.1.1 Ecuaciones diferenciales de variables separables

Este método funciona cuando la ecuación diferencial se puede expresar en la forma

$$\frac{dy}{dt} = F(y,t) = \phi(y)\psi(t) \tag{2.2}$$

donde t está en algún intervalo $I \neq \emptyset$. Asumiendo $\phi(y) \neq 0$, podemos transponer este término y obtener:

$$\frac{dy}{\phi(y)} = \psi(t)dt$$

En esto último, aplicando proceso de integración se obtiene la familia de curvas

$$\int \frac{dy}{\phi(y)} = \int \psi(t)dt + c \tag{2.3}$$

donde c es constante.

Observación

Debemos indicar que en la transposición de $\phi(y)$ puede ocurrir la pérdida de soluciones constantes $y = y^*$ que hacen $\phi(y) = 0$, dichas soluciones se llaman **soluciones estacionarias**

■ **Ejemplo 2.3** Dada la ecuación $\frac{dy}{dt} = \frac{ty^2-4ty}{t^2+4}$, esta ecuación es de variables separables, pues;

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{\frac{t}{t^2+4}}_{=\psi(t)} \underbrace{(y^2-4y)}_{=\phi(y)}$$

Transponiendo términos se tiene: $\frac{dy}{y^2-4y} = \frac{t}{t^2+4}dt$, que al integrar resulta:

$$\int \frac{dy}{y(y-4)} = \int \frac{tdt}{t^2+4} + \frac{1}{4}\ln c$$
$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-4}{y}\right| = \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + \frac{1}{4}\ln c$$

de donde, finalmente, la solución general[4] es

$$y(t) = \frac{4}{1-c\left(t^2+4\right)^2}$$

con dominio todo $\mathbb{R}$ cuando $c < 0$ o $c > \frac{1}{16}$; mientras que los intervalos abiertos $\left\langle -\infty, \sqrt{\frac{1}{\sqrt{c}}-4} \right\rangle$ o $\left\langle -\sqrt{\frac{1}{\sqrt{c}}-4}, \sqrt{\frac{1}{\sqrt{c}}-4} \right\rangle$ o $\left\langle \sqrt{\frac{1}{\sqrt{c}}-4}, +\infty \right\rangle$, cuando $0 < c \leq \frac{1}{16}$.

Según la observación arriba, las soluciones que se pierden en el proceso de transposición de $\phi(y) = y^2-4y$, son las raíces de la ecuación $\phi(y) = 0$, que resultan ser las soluciones estacionarias $y = 0$ e $y = 4$.
Podemos ver que las curvas integrales son crecientes[5] cuando $\frac{dy}{dt} > 0$ y que corresponde a las regiones del plano:

$$\Omega_1 = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t > 0,\, y(y-4) > 0\}$$
$$\Omega_2 = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t < 0,\, y(y-4) < 0\}$$

Asimismo, son decrecientes cuando $\frac{dy}{dt} < 0$ y corresponde a las regiones

$$\Omega_3 = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t > 0,\, y(y-4) < 0\}$$
$$\Omega_4 = \{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t < 0,\, y(y-4) > 0\}$$

Para $t \to +\infty$, la solución estacionaria $y = 0$ se comporta como una solución atractora, mientras que $y = 4$ es una solución repulsora. Asimismo, cuando $t \to -\infty$, las soluciones $y = 0$ e $y = 4$ son respectivamente atractora y repulsora. Mostramos esto en la Figura 2.1. ■

[4] En este caso la solución puede expresarse en forma explícita.

[5] Para funciones reales de variable real, se tiene que éstas son crecientes cuando su primera derivada es positiva.

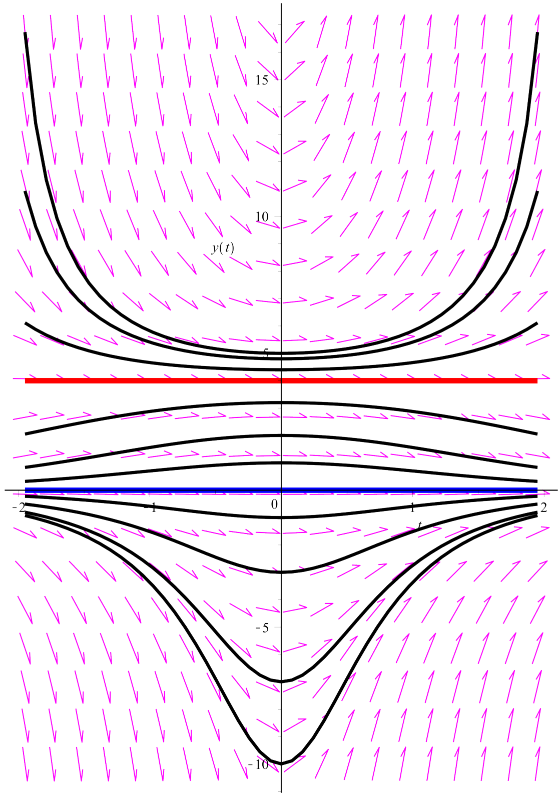


Figura 2.1: La figura muestra el campo de direcciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{ty^2-4ty}{t^2+4}$ y el comportamiento de algunas curvas integrales respecto de las soluciones estacionarias $y = 0$ y $y = 4$.

■ **Ejemplo 2.4** Resuelva la ecuación diferencial $xyy' = (x+1)(y+1)$; luego determine la curva integral que pasa por el punto $(1;0)$. ■

Resolución

La ecuación diferencial propuesta es separable, así tenemos $\frac{y}{y+1}dy = \frac{x+1}{x}dx$, cuya integración es como sigue:

$$\int \frac{y}{y+1}dy = \int \frac{x+1}{x}dx$$
$$y - \ln|y+1| = x + \ln|x| + \ln c$$

esto último es equivalente a escribir $\frac{e^{y(x)}}{|y(x)+1|} = c|x|e^x$, donde debe ocurrir que $c > 0$. Escogiendo la curva que pasa por el punto $(1;0)$, es decir aquella que satisface $y(1) = 0$, se obtiene $c = e^{-1}$, con lo cual nos queda la solución particular

$$\frac{e^{y(x)}}{|y(x)+1|} = |x|e^{x-1}$$

que desarrollando el valor absoluto se tiene finalmente

$$\frac{e^{y(x)}}{y(x)+1} = xe^{x-1}$$

No olvidar que $y(x) = -1$ es solución estacionaria de la ecuación diferencial.

■ **Ejemplo 2.5** Para cada $a \in \mathbb{R}$, se tiene la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = 2(t+1)(x+a^2-1)^2$$

Determine la curva integral que pasa por el punto $(0;0)$, luego analice el dominio para distintos valores del parámetro a y su comportamiento en $t \to \infty$.

Resolución

Siendo separable la ecuación diferencial, se tiene:

$$\int \frac{dx}{(x+a^2-1)^2} = 2\int (t+1)dt - c$$
$$\frac{1}{x+a^2-1} = c - (t+1)^2$$

donde para cada a, la solución (o familia de curvas integrales) la escribimos como

$$x_a(t) = \frac{1}{c-(t+1)^2} + 1 - a^2 \qquad (*)$$

Asimismo, la solución estacionaria[6] es:

$$x_a^{est}(t) = 1 - a^2$$

De (*) escogemos la solución que pasa por $(0;0)$ y se obtiene $c = \frac{a^2}{a^2-1}$, que al reemplazar en (*) se tiene la familia de curvas[7] que pasan por $(0;0)$

$$x_a(t) = -\frac{(a^2-1)^2 t(t+2)}{(a^2-1)t^2 + 2(a^2-1)t - 1} \qquad (**)$$

[6] La solución que se perdió por el proceso de transposición.
[7] Tener en cuenta que aun interviene el parámetro a.

Para determinar el dominio de la función $x_a(t)$, vemos que el denominador no es cero cuando el discriminante de la expresión cuadrática es negativo, es decir:

$$\begin{aligned}\triangle &= [2(a^2-1)]^2-4(a^2-1)(-1)<0\\ \triangle &= 4a^2(a^2-1)<0\\ & \quad a\in\langle -1;1\rangle-\{0\}\end{aligned}$$

También observamos que:

$$\begin{aligned}&x_{-1}(t)=0, \quad Dom(x_{-1})=\mathbb{R}\\ &x_1(t)=0, \quad Dom(x_1)=\mathbb{R}\end{aligned}$$

Luego de este análisis, afirmamos que el dominio de $x_a(t)$ es $\mathbb{R}$ si y solo si, $a\in[-1;1]-\{0\}$.
Para otros valores de a, vemos que en el caso de $a=0$ se tiene la función[8]

$$x_0(t)=\frac{t(t+2)}{(t+1)^2},\ Dom(x_0)=\langle -1,+\infty\rangle$$

Asimismo, para $a<-1$ ó $a>1$, el dominio de la solución[9] $x_a(t)$ está dado por

$$Dom(x_a)=\left\langle -\sqrt{\frac{a^2}{a^2-1}}-1;\sqrt{\frac{a^2}{a^2-1}}-1\right\rangle$$

El análisis del comportamiento de $x_a(t)$ cuando $t\to\pm\infty$, solo podemos hacerlo en el caso de $Dom(x_a)=\mathbb{R}$. Con esta consideración calculamos:

$$\lim_{t\to\pm\infty} x_a(t)=\lim_{t\to\pm\infty}-\frac{(a^2-1)^2\,t\,(t+1)}{(a^2-1)t^2+2(a^2-1)t-1}=1-a^2\equiv x_a^{est}(t)$$

es decir, $x_a(t)\longrightarrow x_a^{est}(t)$, cuando $t\longrightarrow\infty$. ■

■ **Ejemplo 2.6** Resuelva: $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

Resolución

La ecuación diferencial es una ecuación separable, y se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(y+3)(x-1)}{(y-2)(x+4)}$$

[8]Recuerde que la curva integral pasa por el punto (0;0).

[9]Tenga en cuenta que las curvas integrales pasan por el punto (0;0).

Resolviendo se tiene:

$$\int \frac{y-2}{y+3}dy = \int \frac{x-1}{x+4}dx, \; y \neq -3, \, x \neq -4$$
$$\int dy - 5\int \frac{dy}{y+3} = \int dx - 5\int \frac{dx}{x+4} + \ln c, \; c \text{ es constante}$$
$$y - 5\ln|y+3| = x - 5\ln|x+4| + \ln c$$

cuya expresión simplificada es:

$$e^y(x+4)^5 = ce^x(y+3)^5$$

■

Ecuaciones diferenciales reducibles a separables

Existen ecuaciones diferenciales que no son de variables separables; sin embargo, mediante sustituciones o cambios de variable apropiados, se convierten en ecuaciones diferenciales de variables separables. A continuación mostramos con algunos ejemplos este método.

■ **Ejemplo 2.7** a) Mediante una transformación apropiada convierta la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = F(ax + bt + c), \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son constantes}$$

en una de variables separables.

b) Aplicando el método anterior, resuelva: $\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}^2(t - 2x + 3)$.

Resolución

a) Al hacer $u = ax + bt + c$ y derivar respecto de la variable t, se obtiene: $\frac{du}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b$. De donde resulta:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{a}\left(\frac{du}{dt} - b\right)$$

Usando este cambio de variable, la ecuación diferencial se transforma en la ecuación de variables separables

$$\frac{du}{b + aF(u)} = dt$$

b) Usando el método de a), hacemos la transformación $u = t - 2x + 3$; de donde se obtiene: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{du}{dt}$. Luego reemplazando en la ecuación diferencial vemos que:

$$\frac{du}{dt} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$$

la cual es de variables separables. Resolviendo esto último:

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{1-2\operatorname{sen}^2 u} &= \int dt + \frac{1}{2}\ln c \\
\int \sec(2u)du &= t + \frac{1}{2}\ln c \\
\sec(2u)+\tan(2u) &= ce^{2t}
\end{aligned}$$

que expresada en las variables x, t dan como resultado:

$$\sec(2t-4x+6)+\tan(2t-4x+6) = ce^{2t}$$

■

■ **Ejemplo 2.8** Resuelva: $y' = \sqrt{2x+3y}$. Determine si hay solución estacionaria.

Resolución

En este caso, con el cambio de variable $u = \sqrt{2x+3y}$, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2u}{3}\frac{du}{dx} - \frac{2}{3}$$

Escribiendo la ecuación diferencial en la nueva variable, se obtiene:

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u+2}{2u} \tag{2.4}$$

que es de variables separables. Su resolución es como sigue:

$$\begin{aligned}
&\frac{2u}{3u+2}du = dx, \quad \text{Acá se tiene que } 3u+2>0 \\
&\frac{2}{3}\int du - \frac{4}{9}\int \frac{3du}{3u+2} = x+c, \quad c \text{ es constante} \\
&\frac{2}{3}u - \frac{4}{9}\ln|3u+2| = x+c
\end{aligned}$$

Si expresamos la solución[10] obtenida en las variables x e y, ésta sería:

$$\frac{2}{3}\sqrt{2x+3y} - \frac{4}{9}\ln\left(2+3\sqrt{2x+3y}\right) = x+c$$

Puesto que $3u+2>0$, entonces no existe solución estacionaria[11]. ■

[10] Observe que hemos obtenido una forma implícita de la solución.

[11] Como u es la raíz con signo $+$, entonces $3u+2>0$.

■ **Ejemplo 2.9** Resuelva la ecuación

$$xy' = (y-x)^3 + y$$

luego analice el dominio de su solución y determine si existe alguna solución singular.

Resolución

La ecuación diferencial propuesta la escribimos así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-x)^3}{x} + \frac{y}{x} \qquad (\alpha)$$

Dado que no es de variables separables, hacemos la transformación $\frac{y}{x} = u$, según la cual

$$dy = xdu + udx$$

Poniendo estos resultados en (α) resulta $\frac{xdu+udx}{dx} = x^2(u-1)^3 + u$, cuya expresión simplificada es la ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{du}{dx} = x(u-1)^3 \qquad (\beta)$$

La resolución de (β) es como sigue:

$$\int \frac{du}{(u-1)^3} = \int xdx + \frac{c}{2},\ u \neq 1$$

$$\frac{-1}{(u-1)^2} = x^2 + c,$$

puesto que $\frac{y}{x} = u$, entonces

$$(y-x)^2 = -\frac{x^2}{x^2+c} \qquad (\theta)$$

En θ es fácil darse cuenta que para $c > 0$ no existe solución real, sin embargo, con $c = -k^2 < 0$ (donde $k > 0$) la solución explícita está dada por la expresión

$$y(x) = x \pm \frac{x}{\sqrt{k^2 - x^2}}$$

cuyo dominio es $Dom(y) = \langle -k, k \rangle$.
Si nos fijamos en (β), la transposición de $(u-1)^3$ hizo que se perdiera la solución estacionaria $u = 1$, que en las variables x e y es equivalente a $\frac{y}{x} = 1$. En vista de que esta solución no puede ser obtenida a partir de la solución general, afirmamos que $y(x) = x$, $x \neq 0$ es una solución singular. ■

■ **Ejemplo 2.10** Resuelva: $e^y y' = x + e^y - 1$

Resolución

La ecuación no es de variables separables; sin embargo con la transformación $x + e^y = z$ se tiene:

$$\frac{dz}{dx} = z$$

cuya solución es $z = ce^x$, con c constante. Expresando la solución en las variables x, y se tiene

$$y(x) = \ln(ce^x - x)$$

■

■ **Ejemplo 2.11** Para $x \neq 0$ considere la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} = 2 + (2x+1)y - (x^2 + y^2) \tag{2.5}$$

a) Muestre que haciendo la transformación $z = x - y + 1$, la ecuación diferencial se convierte en una de variables separables.
b) Halle la solución general de la ecuación diferencial.
c) Determine la solución particular que pasa por el punto $(-1;-1)$ y el intervalo máximo donde está definida.
d) Determine las soluciones estacionarias. ¿Hay soluciones singulares?

Resolución

a) El cambio de variable $z = x - y + 1$ implica que

$$y = x - z + 1 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$$

lo cual reemplazando en (2.5) nos conduce a la ecuación

$$x\left(1 - \frac{dz}{dx}\right) = 2 + (2x+1)(x - z + 1) - \left[x^2 - (x - z + 1)^2\right]$$

cuya forma simplificada es la ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - z - 2}{x} \qquad (*)$$

b) La resolución de (*) es como sigue:

$$\frac{dz}{(z+1)(z-2)} = \frac{dx}{x}, \;\; z \neq -1, \, z \neq 2$$
$$\int \frac{dz}{(z+1)(z-2)} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}\right) = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln c, \;\; c \text{ es constante}$$
$$\ln\left|\frac{z-2}{z+1}\right| = \ln\left(c|x|^3\right)$$

de donde
$$z = \frac{2+cx^3}{1-cx^3}$$

Puesto que $z = x - y + 1$, la solución general está dada por
$$y(x) = x + 1 - \frac{2+cx^3}{1-cx^3} \qquad (**)$$

c) Si de (**) escogemos la curva que pasa por el punto $(-1,-1)$, entonces $c = \frac{1}{2}$. Luego la solución particular que cumple con tal condición es dada por la función
$$y(x) = x + 1 - \frac{4+x^3}{2-x^3}$$
cuyo dominio máximo donde está definida es $Dom(y) = \langle -\infty, \sqrt[3]{2} \rangle$.

d) Si nos fijamos en (*), las soluciones estacionarias son $z_1 = -1$ y $z_2 = 2$. Tomando cada caso se tiene:
$$z_1 = -1 \quad \equiv \quad y_1(x) = x + 2$$
$$z_2 = 2 \quad \equiv \quad y_2(x) = x - 1$$

Luego las soluciones estacionarias son $y_1(x) = x + 2$ y $y_2(x) = x - 1$, ambas con dominio $\mathbb{R}$. Si ponemos $c = 0$ en (**) se obtiene $y_2(x)$. Para el caso de y_1, vemos que es imposible obtenerla a partir de la solución general; por lo tanto la solución singular es $y_1(x) = x + 2$. En la figura 2.2 se muestra el campo de direcciones para las curvas integrales(solución general) de la ecuación diferencial con las dos soluciones estacionarias.

■

■ **Ejemplo 2.12** Resuelva la ecuación $\left(x^3 - \cos y\right) dx + \frac{x^4}{\cot y} dy = 0$, usando un cambio de variable apropiado para transformarlo en una ecuación de variables separables; asimismo, determine la curva integral que pasa por el punto $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ y su dominio ■

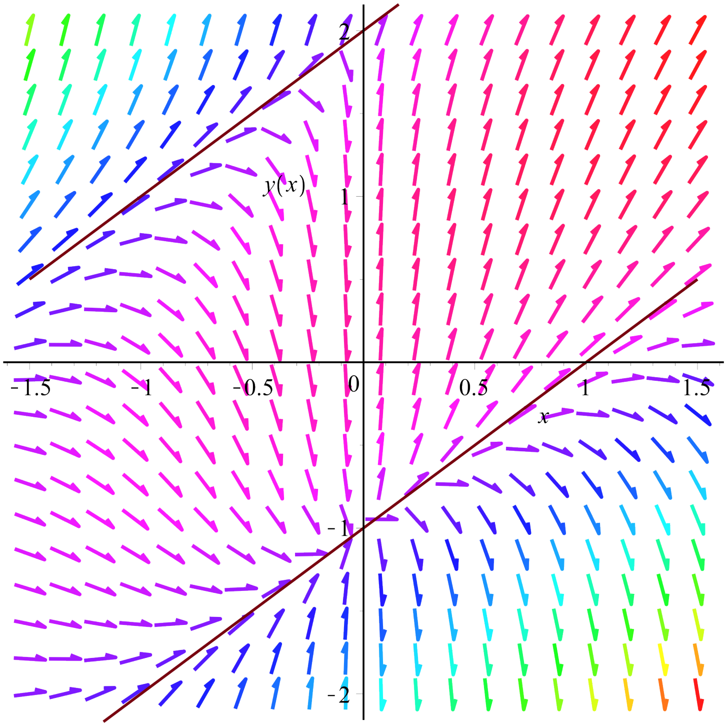


Figura 2.2: Campo de direcciones de $x\frac{dy}{dx} = 2 + (2x+1)y - (x^2 + y^2)$ con las soluciones estacionarias $y_1(x) = x+2$, $y_2(x) = x-1$.

Resolución

Para poder llegar a un cambio de variable adecuado, hay que escribir la ecuación diferencial en forma apropiada, así tenemos:

$$\frac{\cos y\,dx + x\,\mathrm{sen}\,y\,dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{x^3} \qquad (*)$$

Observando el miembro de la izquierda es fácil darse cuenta que el cambio de variable adecuado es $u = \frac{x}{\cos y}$, con el cual

$$du = \frac{\cos y\,dx + x\,\mathrm{sen}\,y\,dy}{\cos^2 y}$$

Reemplazando en (*) se tiene la ecuación de variables separables

$$du = \frac{dx}{x^3}$$

cuya solución es $u = -\frac{1}{2x^2} + k$, que expresada en las variables x e y es

$$\frac{x}{\cos y} + \frac{1}{2x^2} = k$$

o también

$$y(x) = \arccos\left(\frac{2x^3}{2kx^2 - 1}\right)$$

Para determinar la curva que pasa por el punto $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ se resuelve la ecuación $\frac{2}{2k-1} = \frac{1}{2}$, de donde $2k = 5$, así la curva buscada es

$$y(x) = \arccos\left(\frac{2x^3}{5x^2 - 1}\right)$$

cuyo dominio[12] es el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1+\sqrt{2}\right]$.

2.1.2 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Se trata de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.6}$$

donde las funciones $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son homogéneas del mismo grado en las variables x e y. Para comprender qué se entiende por función homogénea hay que enunciar la siguiente definición:

Definición 2.1.1 La función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado n en las variables x, y si, y solo si,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y), \ \ \forall (x,y), \ (\lambda x, \lambda y) \in \Omega, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Theorema 2.1.1 Si f es homogénea de grado $n = 0$ en las variables x e y, entonces f es una función de $w = \frac{y}{x}$

Demostración. Siendo f una función homogénea de grado 0 en las variables x, y, entonces para el número λ se tiene:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x,y) = f(x,y)$$

En particular, si hacemos $y = wx$, entonces

$$f(x,y) = f(x, xw) = f(x1, x.w) = x^0 f(1,w) = f(1,w) \equiv f(w)$$

■

[12] Se tiene que resolver $-1 \leq \frac{2x^3}{5x^2-1} \leq 1$ y escoger el intervalo que contiene a $x = 1$.

Theorema 2.1.2 Sean M y N funciones definidas en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación diferencial homogénea, entonces el cambio de variable $w = \frac{y}{x}$ la convierte en una ecuación diferencial de variables separables en x y w.

Demostración. Como la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es homogénea, entonces M y N son funciones homogéneas del mismo grado en las variables x e y, es decir:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x,y),\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n N(x,y),\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

La ecuación diferencial se escribe de manera equivalente como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \qquad (*)$$

que haciendo $f(x,y) = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, resulta que f es homogénea de grado 0 en las variables x e y; luego aplicando el teorema 2.1.1 y el cambio de variable $w = \frac{y}{x}$, la ecuación diferencial de (*) se convierte en la ecuación de variables separables

$$\frac{dw}{f(w) + w} = -\frac{dx}{x}$$

■

Observación

Según el teorema anterior, la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ es homogénea si y solo si, $f(x,y)$ es homogénea de grado cero en las variables x e y.

■ **Ejemplo 2.13** Aplicando el teorema anterior, determine la solución general de la ecuación diferencial:

$$xdy - ydx = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dx$$

Resolución

La ecuación diferencial propuesta la escribimos así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (*)$$

Vemos que la ecuación diferencial es homogénea; luego con el cambio de variable $w = \frac{y}{x}$ la ecuación (*) se transforma en la ecuación de variables separables:

$$\sec(w)dw = \frac{dx}{x}$$

cuya solución es

$$\sec w + \tan w = cx, \text{ con } c \text{ constante}$$

Si expresamos en las variables x e y, la solución final es

$$\sec \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x} = cx$$

■

■ **Ejemplo 2.14** Resuelva: $x^2 \frac{dy}{dx} = 3(x^2+y^2) \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + xy$

Resolución

Ponemos la ecuación diferencial en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = 3\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$$

La ecuación es homogénea, así con el cambio de variable $w = \frac{y}{x}$, se tiene la ecuación diferencial de variables separables

$$x\frac{dw}{dx} = 3\left(1+w^2\right) \arctan w,$$

cuya resolución es la siguiente:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dw}{(1+w^2)\arctan w} = 3\int \frac{dx}{x} + \ln c, \quad c \text{ es constante} \\
&\ln|\arctan w| = 3\ln|x| + \ln c \\
&w = \tan\left(cx^3\right)
\end{aligned}$$

Si escribimos en las variables x e y, la solución final es:

$$y(x) = x \tan\left(cx^3\right)$$

■

■ **Ejemplo 2.15** Determine la curva integral del problema:

$$\begin{cases} \left(x^3+y^3\right)dx - xy^2 dy = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Resolución

Si escribimos la ecuación diferencial en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

vemos que ésta es homogénea. Así, aplicando el cambio de variable $w = \frac{y}{x}$ se tiene la ecuación de variables separables:

$$x\frac{dw}{dx} = \frac{1}{w^2}$$

Cuya resolución es como sigue:

$$\int w^2 dw = \int \frac{dx}{x} + c, \quad c \text{ es constante}$$
$$\frac{w^3}{3} = \ln|x| + c$$

Si expresamos en las variables x e y se tiene la solución general

$$y(x) = x\sqrt[3]{\ln|x^3| + 3c}$$

De la condición $y(1) = 0$ en la solución general, se obtiene $c = 0$. Luego la solución del problema es:

$$y(x) = x\sqrt[3]{3\ln x}, \quad x \in \langle 0, +\infty\rangle$$

■

■ **Ejemplo 2.16** Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2-5xy-2y^2}{6x^2-8xy+y^2}$. Determinar las soluciones estacionarias y singulares, si las hay.

Resolución

La ecuación diferencial es homogénea y la escribimos en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6 - 5\frac{y}{x} - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{6 - 8\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Si aplicamos el cambio de variable $w = \frac{y}{x}$, se convierte en la ecuación separable

$$w + x\frac{dw}{dx} = \frac{6 - 5w - 2w^2}{6 - 8w + w^2}$$

cuya resolución es como sigue:

$$
\begin{aligned}
&x\frac{dw}{dx} = \frac{6-5w-2w^2}{6-8w+w^2} - w \Longrightarrow x\frac{dw}{dx} = -\frac{w^3-6w^2+11w-6}{w^2-8w+6}\\
&\int \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{w-1} + 6\frac{1}{w-2} - \frac{9}{2}\frac{1}{w-3} \right) dw = -\int \frac{dx}{x}, \ \ w \neq 1, 2, 3\\
&6\ln|w-2| - \frac{1}{2}\ln|w-1| - \frac{9}{2}\ln|w-3| = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|c|, \ c \text{ es constante}
\end{aligned}
$$

Expresamos esto último en la forma simplificada:

$$
\frac{(w-2)^{12}}{(w-1)\ (w-3)^9} = \frac{c}{x^2}
$$

que escrita en las variables x e y, nos queda la solución general

$$
\frac{(y-2x)^{12}}{(y-x)(y-3x)^9} = c
$$

De la resolución de la ecuación separable, las soluciones estacionarias correspondientes son $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ y $w_3 = 3$, que expresadas en las variables x e y son respectivamente $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 2x$ e $y_3(x) = 3x$. Si ponemos $c = 0$ en la solución general, obtenemos $y_2(x)$. En el caso de las otras dos soluciones estacionarias, es imposible obtenerlas de la solución general, por lo cual resultan ser soluciones singulares. ■

■ **Ejemplo 2.17** Resuelva: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.

Resolución

La ecuación diferencial es homogénea, pero si multiplicamos por la expresión conjugada del denominador se obtiene

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}
$$

que al aplicar el cambio de variable $w = \frac{y}{x}$, se transforma en

$$
w + x\frac{dw}{dx} = \frac{1}{w} + \sqrt{\frac{1}{w^2} - 1}
$$

Separando variables e integrando se tiene: $\int \frac{w}{1+\sqrt{1-w^2}-w^2} dw = \ln|x| - \ln c$, donde c es constante. Haciendo $1-w^2 = t^2$ en la integral, se obtiene $-\int \frac{dt}{t+1} = \ln|x| - \ln c$. Resolviendo la integral, la solución es

$$
t = \frac{c}{x} - 1
$$

Poniendo $t = \sqrt{1-w^2}$ y simplificando se tiene $1-w^2 = \left(\frac{c}{x}-1\right)^2$. Luego en las variables x e y se tiene finalmente la solución general:

$$y^2 = 2cx - c^2$$

■

2.1.3 Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

Existen casos de ecuaciones diferenciales que no son homogéneas; sin embargo, con un cambio de variable apropiado se convierten en homogéneas. A continuación algunas situaciones que explican este método.

Caso 1: Ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),\ c^2+c_1^2 \neq 0 \tag{2.7}$$

Se trata de una ecuación diferencial no homogénea; sin embargo, siendo el numerador y denominador expresiones lineales, hacen que igualadas a cero definan dos rectas[13]

$$\begin{aligned} L &: ax+by+c=0 \\ L_1 &: a_1x+b_1y+c_1=0 \end{aligned}$$

Aquí puede ocurrir que las rectas sean paralelas o que se crucen.

1. Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces las rectas L y L_1 no son paralelas, esto hace que se intercepten en un punto (x_0, y_0). Haciendo la traslación de coordenadas $\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$ y reemplazando en (2.7), resulta finalmente la ecuación diferencial homogénea en las variables u y v

$$\frac{du}{dv} = F\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right)$$

2. Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, entonces $L//L_1$ y $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k$. Esto hace que $\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ de (2.7) sea equivalente a $\frac{(a_1x+b_1y)k+c}{a_1x+b_1y+c_1}$. Luego, aplicando el cambio de variable $u = a_1x+b_1y$ queda la ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{1}{b_1}\frac{du}{dx} - \frac{a_1}{b_1} = F\left(\frac{ku+c}{u+c_2}\right)$$

[13]Si las rectas se interceptan en un punto, podemos hacer traslación de coordenadas a dicho punto y el término independiente de las expresiones lineales desaparece. Queda de esta manera una expresión homogénea de grado cero en las nuevas variables.

Caso 2: En algunas ecuaciones diferenciales funciona el cambio de variable $w=\frac{y}{x^n}$, donde n debe escogerse de manera apropiada de tal forma que resulte una ecuación de cualquiera de los tipos ya vistos.

Caso 3: En algunas situaciones es beneficioso hacer el cambio de variable $\left\{\begin{array}{ll} x & =u^p \\ y & =v^q \end{array}\right.$, luego escoger valores apropiados para p y q que hagan la ecuación diferencial separable u homogénea.

Veamos algunos ejemplos

■ **Ejemplo 2.18** Resuelva $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-3}{x-2y+1}$

Resolución

La ecuación no es homogénea, sin embargo con las expresiones del numerador y el denominador se puede definir las rectas

$$\begin{array}{lll} L_1 & : & 2x+y-3=0 \\ L_2 & : & x-2y+1=0 \end{array}$$

Estas rectas no son paralelas y se interceptan en el punto $(1;1)$. Haciendo el cambio de coordenadas $\left\{\begin{array}{l} u=x-1 \\ v=y-1 \end{array}\right.$, se tiene $\left\{\begin{array}{l} x=u+1 \\ y=v+1 \end{array}\right.$ y $\left\{\begin{array}{l} dx=du \\ dy=dv \end{array}\right.$; luego, reemplazando en la ecuación dada, se obtiene la ecuación homogénea

$$\frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{u-2v}$$

que mediante el cambio de variable $w=\frac{v}{u}$ se convierte en la ecuación diferencial de variables separables

$$u\frac{dw}{du}=\frac{2(1+w^2)}{1-2w}$$

Resolviendo esta ecuación se tiene

$$\int \frac{1-2w}{1+w^2}dw=2\int\frac{du}{u}+c,\quad c \text{ es constante}$$
$$\arctan w-\ln(1+w^2)=2\ln|u|+c$$

Como $w=\frac{v}{u}$, entonces $\arctan\frac{v}{u}-\ln\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)=\ln u^2+c$. Finalmente la solución general en las variables x e y es:

$$\arctan\frac{y-1}{x-1}=\ln\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]+c$$

■

■ **Ejemplo 2.19** Resuelva $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{x-3y-5}{x+y-1}\right)^2$. Asimismo, determine las soluciones estacionarias y singulares si las hay.

Resolución

Con las expresiones lineales que aparecen en la derecha de la ecuación diferencial definimos las rectas $\begin{cases} L_1: & x-3y-5=0 \\ L_2: & x+y-1=0 \end{cases}$, las cuales no son paralelas y se interceptan en el punto $(2;-1)$. A continuación trasladamos el sistema de coordenadas a dicho punto haciendo $\begin{cases} u=x-2 \\ v=y-(-1) \end{cases}$, así, $\begin{cases} x=u+2 \\ y=v-1 \end{cases}$ y $\begin{cases} du=dx \\ dv=dy \end{cases}$. Usando este cambio de coordenadas, la ecuación diferencial se convierte en la ecuación homogénea

$$\frac{dv}{du}=\left(\frac{u-3v}{u+v}\right)^2,$$

Esta, a la vez, con el cambio de variable $w=\frac{v}{u}$, se transforma en la ecuación diferencial de variables separables:

$$u\frac{dw}{du}=-\frac{(w-1)(w^2-6w+1)}{(w+1)^2}$$

Separando las variables e integrando se tiene[14]:

$$\int\frac{(w+1)^2}{(w-1)(w-3-2\sqrt{2})(w-3+2\sqrt{2})}dw=-\int\frac{du}{u}$$

Luego, aplicando fracciones parciales en la integral de la izquierda vemos que

$$-\int\frac{dw}{w-1}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}\int\frac{dw}{w-3-2\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\int\frac{dw}{w-3+2\sqrt{2}}=-\ln|u|+\ln c$$

$$-2\ln|w-1|+\ln\left|(w-3-2\sqrt{2})^{2+\sqrt{2}}(w-3+2\sqrt{2})^{2-\sqrt{2}}\right|-2\ln|u|+2\ln c$$

$$\ln\left|\frac{(w-3-2\sqrt{2})^{2+\sqrt{2}}(w-3+2\sqrt{2})^{2-\sqrt{2}}}{(w-1)^2}\right|=\ln\left|\frac{k}{u^2}\right|,\text{ con }\ln k=2\ln c$$

$$(w-3-2\sqrt{2})^{2+\sqrt{2}}(w-3+2\sqrt{2})^{2-\sqrt{2}}=k\frac{(w-1)^2}{u^2},\text{ como }w=\frac{v}{u}$$

$$\left[v-(3+2\sqrt{2})u\right]^{2+\sqrt{2}}\left[v-(3-2\sqrt{2})u\right]^{2-\sqrt{2}}=k(v-u)^2$$

[14] Antes hay que asumir que $w\neq 1,\ 3+2\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2}$.

Finalmente, si expresamos en las variables x e y se tiene la solución general:

$$\begin{aligned}\left[(y+1)-(3+2\sqrt{2})(x-2)\right]^{2+\sqrt{2}} & \left[(y+1)-(3-2\sqrt{2})(x-2)\right]^{2-\sqrt{2}} \\ = & \ k(y-x+3)^2\end{aligned}$$

Las soluciones estacionarias son en este caso:

$$\begin{aligned}w_1 = 1 &\equiv y_1(x) = x-3 \\ w_2 = 3+2\sqrt{2} &\equiv y_2(x) = (3+2\sqrt{2})(x-2)-1 \\ w_3 = 3-2\sqrt{2} &\equiv y_3(x) = (3-2\sqrt{2})(x-2)-1\end{aligned}$$

Haciendo $k=0$ en la solución general se obtiene $y_2(x)$ e $y_3(x)$, mientras que $y_1(x)$ no puede ser obtenida de la solución general, por lo tanto, se trata de una solución singular. ■

■ **Ejemplo 2.20** Resuelva $(2x+2y+1)dx+(x+y-1)dy=0$ y determine la solución singular.

Resolución

Ponemos la ecuación diferencial en la forma apropiada

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+2y+1}{x+y-1},$$

con las expresiones lineales del numerador y denominador de la derecha definimos las rectas $\begin{cases} L_1: & 2x+2y+1=0 \\ L_2: & x+y-1 \end{cases}$, las cuales son paralelas. Si hacemos $z=x+y$ la ecuación diferencial se transforma en una de variables separables, la cual es:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z+2}{z-1}$$

Su correspondiente solución es en este caso

$$z-3\ln|z+2| = -x+c, \ \ c \text{ es constante}$$

que expresada en las variables x e y nos conduce finalmente a la solución general

$$x+y-3\ln|x+y+2| = -x+c$$

La solución estacionaria que resulta ser $z=-2$, es equivalente a $y(x)=-x-2$. Puesto que es imposible de ser obtenida de la solución general, afirmamos que es una solución singular. ■

■ **Ejemplo 2.21** Resuelva $(3xy+y^3)dy = (2x+3y^2)dx$ usando cambio de variable apropiado, luego determinar las soluciones estacionarias y singulares si es que existen.

Resolución

Para determinar el cambio de variable adecuado, es conveniente escribir la ecuación diferencial en una forma más idónea, así tenemos:

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{2+\frac{3y^2}{x}}{3+\frac{y^2}{x}} \qquad (*)$$

Observando la expresión de la derecha, intentamos el cambio de variable

$$z = \frac{y^2}{x}, \quad \text{con el cual} \quad y\frac{dy}{dx} = \frac{z}{2} + \frac{x}{2}\frac{dz}{dx}$$

Poniendo este cambio de variable en (*) se llega a la ecuación separable:

$$x\frac{dz}{dx} = -\frac{(z-4)(z+1)}{z+3}$$

cuya resolución es como sigue:

$$\begin{aligned}
&\frac{z+3}{(z-4)(z+1)}dz = -\frac{dx}{x}, \; z \neq 4, \; z \neq -1 \\
&\frac{7}{5}\int\frac{dz}{z-4} - \frac{2}{5}\int\frac{dz}{z+1} = -\int\frac{dx}{x} + \ln c, \; c \text{ es constante} \\
&7\ln|z-4| - 2\ln|z+1| = -5\ln|x| + \ln k, \; \text{donde } \ln k = 5\ln c \\
&(z-4)^7 = k\frac{(z+1)^2}{x^5}
\end{aligned}$$

Expresando esto último en las variables x e y, se obtiene la solución general[15]

$$\left(y^2-4x\right)^7 = k\left(y^2+x\right)^2$$

Las soluciones estacionarias de la ecuación diferencial son:

$$\begin{aligned}
z_1 = 4 \quad &\equiv \quad y_1^2(x) = 4x \\
z_1 = -1 \quad &\equiv \quad y_2^2(x) = -x
\end{aligned}$$

Haciendo $k = 0$ en la solución general se obtiene $y_1(x)$; sin embargo, es imposible obtener $y_2(x)$ a partir de la solución general. Por lo tanto la solución singular es: $y_2(x)$ con $Dom(y_2) = \langle -\infty; 0]$. ■

[15] En forma implícita.

■ **Ejemplo 2.22** Resuelva la ecuación $(ax+y-1)dx+(y-x-1)dy=0$, donde $a>0$.

Resolución

Ponemos la ecuación diferencial en la forma:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+y-1}{x-y+1} \qquad (*)$$

Con las expresiones lineales que aparecen en el numerador y denominador del lado derecho, definimos las rectas $\begin{cases} ax+y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$, las cuales se interceptan en el punto $(0;1)$. Hacemos traslación de coordenadas a dicho punto, para lo cual tomamos $\begin{cases} u=x \\ v=y-1 \end{cases}$, así $\begin{cases} x=u \\ y=v+1 \end{cases}$ y $\begin{cases} dx=du \\ dy=dv \end{cases}$. Si escribimos (*) en las variables u y v, se obtiene la ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{dv}{du}=\frac{au+v}{u-v},$$

que con el cambio de variable $w=\frac{v}{u}$ se convierte en la ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{1-w}{a+w^2}dw=\frac{du}{u}$$

cuya resolución se hace a continuación:

$$\int\frac{dw}{w^2+a}-\int\frac{wdw}{w^2+a}=\int\frac{du}{u}$$
$$\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{w}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2}\ln(w^2+a)=\ln|u|+c,\ c \text{ es constante}$$
$$\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{a}u}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{v^2}{u^2}+a\right)=\ln|u|+c$$

Si expresamos esta solución en las variables x e y se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{y-1}{\sqrt{a}x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(y-1)^2+ax}{x}\right)=\ln|x|+c$$

■

■ **Ejemplo 2.23** Resuelva $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^5+3x^2y^2}{2x^3y-2y^3}$ aplicando el método de los casos 2 y 3.

Resolución

A continuación hay que resolver la ecuación diferencial con cada uno de los casos que se indica. En efecto:

a) De acuerdo al caso 2, se debe hacer el cambio de variable $w = \frac{y}{x^n}$, de tal manera que n debe escogerse apropiadamente[16]. En este cambio de variable vemos que:

$$y = x^n w \quad y \quad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}w + x^n\frac{dw}{dx}$$

Luego, reemplazando en la ecuación diferencial y agrupando convenientemente se obtiene:

$$x^n\frac{dw}{dx} = \frac{3x^5 + (3w^2 - 2nw^2)x^{2n+2} + 2nw^4x^{4n-1}}{2wx^{n+3} - 2w^3x^{3n}} \qquad (*)$$

Debemos indicar que no existe una regla para determinar n; sino que se hace de manera heurística apelando a la capacidad de observación y procurando obtener una ecuación más sencilla. En este caso, si en (*) hacemos $2n+2 = 4n-1$, entonces $n = \frac{3}{2}$.

Al reemplazar este valor de n en (*) nos queda la ecuación diferencial separable

$$x^{\frac{3}{2}}\frac{dw}{dx} = \frac{3x^5 + 3w^4x^5}{2wx^{\frac{9}{2}} - 2w^3x^{\frac{9}{2}}}$$

cuya forma simplificada es

$$\frac{w - w^3}{1 + w^4}dw = \frac{3}{2}\frac{dx}{x}$$

Procediendo a su resolución se tiene:

$$\int \frac{w - w^3}{1 + w^4}dw = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + c, \quad c \text{ es constante}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\left(w^2\right)}{1 + \left(w^2\right)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{d\left(1 + w^4\right)}{1 + w^4} = \frac{3}{2}\ln|x| + c$$

$$\frac{1}{2}\arctan\left(w^2\right) - \frac{1}{4}\ln(1 + w^4) = \frac{3}{2}\ln|x| + c$$

Luego, la solución en las variables x e y es:

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y^2}{x^3}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{y^4 + x^6}{x^6}\right) = \frac{3}{2}\ln|x| + c$$

b) Según el caso 3, debemos hacer el cambio de variable $\begin{cases} x = u^p \\ y = v^q \end{cases}$,

cuya expresión en diferenciales es:

$$\begin{cases} dx = pu^{p-1}du \\ dy = qv^{q-1}dv \end{cases}$$

[16] Buscando siempre que la ecuación diferencial se haga homogénea.

Luego, reemplazando en la ecuación diferencial y simplificando se tiene la expresión[17]

$$\frac{q}{p}\frac{dv}{du} = \frac{3u^{3p-1}}{2v^{2q-1}}\left(\frac{u^{3p}+v^{2q}}{u^{3p}-2v^{q}}\right) \qquad (**)$$

Haciendo una inspección en los exponentes, se tiene que los valores apropiados de p y q que hacen de (**) una ecuación de variables separables son $p=\frac{1}{3}$ y $q=\frac{1}{2}$, así nos queda la ecuación diferencial

$$\frac{1-w}{1+w^2}dw = \frac{du}{u},$$

cuya resolución se hace a continuación

$$\int \frac{1-w}{1+w^2}dw = \int \frac{du}{u} + k, \ \ k \text{ es constante}$$
$$\arctan w - \frac{1}{2}\ln(1+w^2) = \ln|u| + k$$

Si expresamos la solución[18] en las variables x e y se tiene la expresión en forma implícita:

$$\arctan\left(\frac{y^2}{x^3}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^6+y^4}{x^6}\right) = 3\ln|x| + k$$

■

■ **Ejemplo 2.24** Resuelva: $\frac{dy}{dx} = \frac{2+3xy^2}{4x^2y}$.

Resolución

La ecuación diferencial no es homogénea, pero los términos algebraicos que aparecen en la expresión de la derecha nos sugiere hacer el cambio de variable $w=\frac{y}{x^n}$, donde se debe escoger n apropiadamente. Efectuando tal cambio de variable se tiene

$$y = wx^n \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}w + x^n\frac{dw}{dx}$$

Luego, reemplazando en la ecuación diferencial

$$nx^{n-1}w + x^n\frac{dw}{dx} = \frac{2+3w^2x^{2n+1}}{4wx^{n+2}}$$

[17] Es necesario escribir la ecuación diferencial en una forma apropiada para que sea fácil escoger los valores convenientes de p y q.

[18] Verifique que esta solución con la obtenida por el método anterior sean equivalentes.

Para determinar el valor de n, buscamos que el lado derecho de la ecuación diferencial sea de variables separables, así debe ocurrir que $2n+1=0$, es decir $n=-\frac{1}{2}$. Con este valor de n se obtiene $w=y\sqrt{x}$ y la ecuación diferencial de variables separables

$$x\frac{dw}{dx}=\frac{2+5w^2}{4w}$$

cuya resolución se hace en seguida

$$\begin{aligned}
&\frac{4w}{5w^2+2}dw=\frac{dx}{x}\\
&\frac{4}{10}\int\frac{d(5w^2+2)}{5w^2+2}=\int\frac{dx}{x}+\frac{2}{5}\ln c,\ c \text{ es constante}\\
&\ln(5w^2+2)=\frac{5}{2}\ln|x|+\ln c\\
&5w^2=c|x|^{\frac{5}{2}}-2
\end{aligned}$$

Si expresamos en las variables x e y, la solución general está dada por la expresión

$$5xy^2=c|x|^{\frac{5}{2}}-2$$

■

■ **Ejemplo 2.25** Resuelva: $\frac{dy}{dx}=\frac{y+xy^2}{x-x^2y}$

Resolución

Si factorizamos el lado derecho de la ecuación diferencial se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\frac{1+xy}{1-xy}\right) \qquad (*)$$

Así la expresión del paréntesis nos sugiere hacer el cambio de variable $u=xy$, según el cual

$$y=\frac{u}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\left(\frac{du}{dx}-y\right)$$

Si escribimos (*) en función de las variables u y x se tiene la ecuación separable:

$$\frac{du}{dx}=\frac{2}{x}\left(\frac{u}{1-u}\right)$$

que resolvemos a continuación

$$\begin{aligned}
&\frac{1-u}{u}du=2\frac{dx}{x}\\
&\int\frac{du}{u}-\int du=2\int\frac{dx}{x}+\ln c,\ \text{ donde } c \text{ es constante}\\
&\ln|u|-u=2\ln|x|+\ln c
\end{aligned}$$

Si escribimos la solución en las variables x e y se tiene:

$$y = cxe^{xy}$$

■

2.1.4 Ecuaciones diferenciales exactas

Antes de establecer qué se entiende por ecuación diferencial exacta, hay que explicar algunos aspectos relacionados con la diferencial total de una función real de varias variables. Así tenemos, que dada la función $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, para un número $c\in\ Ran(f)$, la ecuación

$$f(x,y) = c \tag{2.8}$$

representa una curva[19] en Ω llamada **curva de nivel** c, para la cual si calculamos la diferencial total se obtiene

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

que también representa la ecuación diferencial de la curva[20] (2.8). Suponer ahora que se tiene la situación contraria, es decir, la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.9}$$

Inmediatamente surge la pregunta de si existe alguna función $f(x,y)$ cuya diferencial total coincida con $M(x,y)dx+N(x,y)dy$. Si esto llegara a ocurrir, entonces debe acontecer que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \quad \text{y} \quad df(x,y) = 0$$

donde $df(x,y) = 0$ implica que $f(x,y) = c$, donde c es constante.

Definición 2.1.2 La expresión de la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es una **diferencial exacta** en una región $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, si existe alguna función $f:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy, \ \ \forall(x,y)\in\Omega$$

es decir: $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$.

En base a esta definición decimos que la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ es exacta, si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

[19]También podemos explicar esta situación usando el concepto de imagen inversa. En este caso, la imagen inversa de c es el conjunto $f^{-1}(c) = \{(x,y)\in\Omega\ /\ f(x,y) = c\}\subset\Omega$.

[20]Si tomamos c de manera arbitraria, la ecuación $f(x,y) = c$ representa una familia de curvas.

Theorema 2.1.3 Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$ funciones continuas cuyas primeras derivadas parciales también son continuas en el rectángulo $R = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Entonces $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ es una diferencial exacta si y solo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Observación

Saber que la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta, implica que existe la función $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, tal que: $\frac{\partial f}{\partial x}=M$, $\frac{\partial f}{\partial y}=N$ y $f(x,y)=c$.

Para determinar f usamos cualquiera de las dos derivadas parciales; por ejemplo, si tomamos la igualdad $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$, e integramos respecto de x, obtenemos:

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+\phi(y) \tag{2.10}$$

Así el problema de determinar $f(x,y)$ depende ahora de encontrar $\phi(y)$. Por tal razón derivamos (2.10) respecto de y y usamos la igualdad $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$, para obtener la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+\phi'(y)=N(x,y)$$

cuya integración respecto de y nos conduce a encontrar

$$\phi(y)=\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy$$

Poniendo $\phi(y)$ en (2.10), la solución de la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

es la familia de curvas $f(x,y)=c$.
También se pudo haber iniciado el proceso de solución usando $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$; el método es similar.

■ **Ejemplo 2.26** Resuelva: $(2x+e^y)dx+xe^ydy=0$

Resolución

Se tiene la ecuación diferencial $\underbrace{(2x+e^y)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{xe^y}_{N(x,y)}dy=0$, donde $M(x,y)=2x+e^y$ y $N(x,y)=xe^y$. Si calculamos $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$, obtenemos $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=e^y$; que de acuerdo al teorema 2.1.3, la ecuación diferencial es exacta. Esto significa que existe $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ y $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$. Así de la igualdad $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=2x+e^y$, y tomando la integral respecto de x se obtiene $f(x,y)=\int(2x+e^y)dx+\phi(y)$, de donde

$$f(x,y)=x^2+xe^y+\phi(y) \qquad (*)$$

Ahora, si en (*) derivamos respecto de y, ocurre que $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$, así tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+xe^y+\phi(y)\right)=N(x,y)\equiv xe^y\\
&xe^y+\phi'(y)=xe^y\\
&\phi'(y)=0\\
&\phi(y)=k
\end{aligned}$$

Luego, reemplazando en (*) se tiene $f(x,y)=x^2+xe^y+k$. Por último como $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$, entonces la solución final es la familia de curvas $f(x,y)=x^2+xe^y+k=c$, o también

$$x^2+xe^y=C,\ \text{ donde } C=c-k$$

El proceso de resolver este tipo de ecuaciones es similar al ejemplo que acabamos de realizar. ∎

■ **Ejemplo 2.27** Determine la solución de la ecuación diferencial

$$\left(x^3+e^x\operatorname{sen}y+y^3\right)dx+\left(3xy^2+e^x\cos y+y^3\right)dy=0$$

Resolución

Sean $M(x,y)=x^3+e^x\operatorname{sen}y+y^3$ y $N(x,y)=3xy^2+e^x\cos y+y^3$. Para comprobar la exactitud de la ecuación diferencial tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^x\cos y+3y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=3y^2+e^x\cos y$$

Puesto que $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación diferencial es exacta, así existe $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ y $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$. Para determinar $f(x,y)$, procedemos de $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=x^3+e^x\operatorname{sen}y+y^3$, de donde

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int\left(x^3+e^x\operatorname{sen}y+y^3\right)dx+\phi(y)\\
&= \frac{x^4}{4}+e^x\operatorname{sen}y+xy^3+\phi(y) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ahora, si se aplica la derivada a f respecto de y ocurre lo siguiente

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4} + e^x \operatorname{sen} y + xy^3 + \phi(y)\right) = N(x,y) \equiv 3xy^2 + e^x \cos y + y^3$$
$$e^x \cos y + 3xy^2 + \phi'(y) = 3xy^2 + e^x \cos y + y^3$$
$$\phi'(y) = y^3$$
$$\phi(y) = \frac{y^4}{4}$$

que al reemplazar en (*) resulta:

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + e^x \operatorname{sen} y + xy^3 + \frac{y^4}{4}$$

Como $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$, entonces la solución de la ecuación diferencial está dada por la familia de curvas

$$\frac{x^4 + y^4}{4} + e^x \operatorname{sen} y + xy^3 = c$$

■

■ **Ejemplo 2.28** Determine la solución general de la ecuación diferencial:

$$(e^y \cos x - 2x \operatorname{sen} y)\, dx + \left(e^y \operatorname{sen} x - x^2 \cos y\right) dy = 0$$

Resolución

Para $M(x,y) = e^y \cos x - 2x \operatorname{sen} y$ y $N(x,y) = e^y \operatorname{sen} x - x^2 \cos y$, se tiene:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \cos x - 2x \cos y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

así la ecuación diferencial es exacta y existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ y $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$. Siendo $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$, entonces

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y) dx + \phi(y) \\ &= \int (e^y \cos x - 2x \operatorname{sen} y)\, dx + \phi(y) \\ &= e^y \operatorname{sen} x - x^2 \operatorname{sen} y + \phi(y) \qquad (*) \end{aligned}$$

Ahora, si aplicamos la derivada a f respecto de y se obtiene $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, cuyo desarrollo nos conduce a lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \operatorname{sen} x - x^2 \operatorname{sen} y + \phi(y)\right) = N(x,y) \equiv e^y \operatorname{sen} x - x^2 \cos y$$
$$e^y \operatorname{sen} x - x^2 \cos y + \phi'(y) = e^y \operatorname{sen} x - x^2 \cos y$$
$$\phi'(y) = 0$$
$$\phi(y) = k,\ k \text{ es constante}$$

Ponemos $\phi(y)$ en (*) y se obtiene:

$$f(x,y) = e^y \operatorname{sen} x - x^2 \operatorname{sen} y + k$$

Dado que $f(x,y) = c$, $\forall(x,y) \in \Omega$, la solución de la ecuación diferencial está dada por la familia de curvas

$$e^y \operatorname{sen} x - x^2 \operatorname{sen} y = C, \text{ donde } C = c - k$$

■

■ **Ejemplo 2.29** Resuelva: $\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy = 0.$

Resolución

Sean $M(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $N(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$, si calculamos $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ vemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

De esta manera la ecuación diferencial es exacta y existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ y $f(x,y) = c$, $\forall(x,y) \in \Omega$. Si empezamos de $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$, entonces

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y)dx + \phi(y) \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \phi(y) \\ &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right) + \phi(y) \qquad (*) \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos la derivada a f respecto de y para obtener

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right) + \phi(y)\right] = N(x,y) \equiv \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x + \sqrt{x^2+y^2})} + \phi'(y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{y(x - \sqrt{x^2+y^2})}{-y^2\sqrt{x^2+y^2}} + \phi'(y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\phi'(y) = 0$$

$$\phi(y) = k, \quad k \text{ es constante}$$

Ponemos $\phi(y)$ en (*) y usamos el hecho de que $f(x,y) = c$, $\forall(x,y) \in \Omega$ para así obtener

$$f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right) + k = c$$

de donde la solución de la ecuación diferencial está dada por

$$y^2 = C^2 - 2Cx, \;\text{ con } \ln C = c - k$$

■

■ **Ejemplo 2.30** Determine la curva que satisface el problema:

$$\begin{cases} (x^2 + 2ye^{2x})y' + 2xy + 2y^2e^{2x} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Resolución

Multiplicando por dx a la ecuación diferencial se tiene

$$(x^2 + 2ye^{2x})dy + (2xy + 2y^2e^{2x})dx = 0$$

de donde al hacer $\begin{cases} M(x,y) = 2xy + 2y^2e^{2x} \\ \\ N(x,y) = x^2 + 2ye^{2x} \end{cases}$, se obtiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 4ye^{2x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Esto último muestra que la ecuación diferencial es exacta y así existe la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para la cual $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ y $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$. Si empezamos de la expresión $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 2xy + 2y^2e^{2x}$, se obtiene

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (2xy + 2y^2e^{2x})dx + \phi(y) \\ &= x^2y + y^2e^{2x} + \phi(y) \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

Asimismo, la derivada de f respecto a la variable y nos conduce a la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + y^2e^{2x} + \phi(y)\right) = N(x,y) \equiv x^2 + 2ye^{2x}$$

de donde

$$\begin{aligned} &x^2 + 2ye^{2x} + \phi'(y) = x^2 + 2ye^{2x} \\ &\phi'(y) = 0 \\ &\phi(y) = k \end{aligned}$$

Poniendo $\phi(y)$ en (*) y haciendo $C = c - k$, la solución general está dada por

$$x^2y + y^2e^{2x} = C$$

Aplicando la condición $y(0) = 1$ se obtiene $C = 1$, por lo tanto la curva que pasa por el punto $(0;1)$ es

$$x^2y + e^{2x}y^2 = 1$$

que expresada en forma explícita, ésta es:

$$y(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 4e^{2x}} - x^2}{2e^{2x}}$$

En la figura 2.3 se muestra el campo de direcciones del problema con la respectiva curva integral. ■

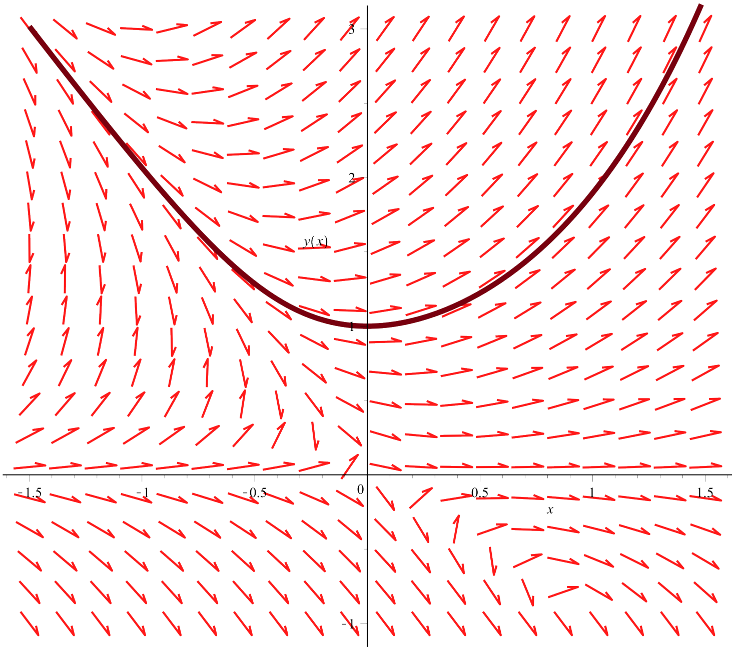


Figura 2.3: Campo de direcciones de $(x^2 + 2ye^{2x})y' + 2xy + 2y^2e^{2x} = 0$ y la curva integral que pasa por el punto $(0,1)$ dada por $y(x) = \frac{\sqrt{x^4+4e^{2x}}-x^2}{2e^{2x}}$.

■ **Ejemplo 2.31** Resuelva: $\frac{4y^2-2x^2}{4xy^2-x^3}dx + \frac{8y^2-x^2}{4y^3-x^2y}dy = 0$

Resolución

Sean $M(x,y) = \frac{4y^2-2x^2}{4xy^2-x^3}$ y $N(x,y) = \frac{8y^2-x^2}{4y^3-x^2y}$, es fácil verificar que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{8xy}{(4y^2 - x^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Luego, la ecuación diferencial es exacta y existe $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ y $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$. Para determinar $f(x,y)$ tomamos $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=\frac{4y^2-2x^2}{4xy^2-x^3}$, así:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int\left(\frac{4y^2-2x^2}{4xy^2-x^3}\right)dx+\phi(y) \\ &= \int\frac{4y^2-3x^2}{4xy^2-x^3}dx-\frac{1}{2}\int\frac{-2xdx}{4y^2-x^2}dx+\phi(y) \\ &= \ln|4xy^2-x^3|-\frac{1}{2}\ln|4y^2-x^2|+\phi(y) \qquad (*) \end{aligned}$$

Ahora, desarrollando $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln|4xy^2-x^3|-\frac{1}{2}\ln|4y^2-x^2|+\phi(y)\right)=N(x,y)=\frac{8y^2-x^2}{4y^3-x^2y} \\ &\phi'(y)=\frac{1}{y} \\ &\phi(y)=\ln|y| \end{aligned}$$

Si ponemos $\phi(y)$ en (*) y usamos el hecho de que $f(x,y)=c=\frac{1}{2}\ln k$, $\forall(x,y)\in\Omega$, se llega a la solución general:

$$\ln|4xy^2-x^3|-\frac{1}{2}\ln|4y^2-x^2|+\ln|y|=\frac{1}{2}\ln k$$

cuya expresión simplificada es

$$x^2y^2(4y^2-x^2)=k$$

Esta ecuación diferencial también se resuelve como una ecuación homogénea. Sugerimos al lector aplicar tal método. ■

■ **Ejemplo 2.32** Dada la ecuación diferencial

$$\left(x+ye^{2xy}\right)dx+nxe^{2xy}dy=0$$

a) Determine el valor de n para que la ecuación sea exacta.
b Con el valor de n encontrado, resuelva la ecuación diferencial.

Resolución

a) Sean $\begin{cases} M(x,y)=x+ye^{2xy} \\ N(x,y)=nxe^{2xy} \end{cases}$. La ecuación diferencial es exacta si, y solo si $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, es decir

$$e^{2xy}+2xye^{2xy}=ne^{2xy}+2nxye^{2xy},\ 2xy\neq-1$$

de donde $n=1$

b) Poniendo $n=1$ en la ecuación diferencial se tiene:

$$\left(x+ye^{2xy}\right)dx+xe^{2xy}dy=0$$

con $\begin{cases} M(x,y)=x+ye^{2xy} \\ N(x,y)=xe^{2xy} \end{cases}$. Puesto que la ecuación diferencial es exacta, entonces existe $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ y $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$. Siendo $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=xe^{2xy}$, entonces

$$f(x,y)=\frac{1}{2}e^{2xy}+\psi(x) \qquad (*)$$

Ahora, si derivamos f respecto de x se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}e^{2xy}+\psi(x)\right)=M(x,y)=x+ye^{2xy}\\
&\psi'(x)=x\\
&\psi(x)=\frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

Reemplazando $\psi(x)$ en (*) y usando el hecho de que $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$ se tiene:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}e^{2xy}+\frac{x^2}{2}=c$$

de donde

$$e^{2xy}+x^2=k,\quad k=2c$$

■

2.1.5 Ecuaciones diferenciales no exactas. Factor integrante (FI)

Se trata de ecuaciones de la forma: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, donde

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

Sin embargo, este tipo de ecuaciones pueden transformarse en exactas, si se les multiplica por una función apropiada llamada **factor integrante**[21]. Veamos como funciona esto:

[21] Siempre una ecuación diferencial no exacta que tenga solución general, admite factor integrante.

Sea $U = U(x,y)$ el factor integrante, al multiplicar la ecuación diferencial por dicha función se tiene

$$\underbrace{U(x,y)M(x,y)}_{\overline{M}(x,y)}dx + \underbrace{U(x,y)N(x,y)}_{\overline{N}(x,y)}dy = 0$$

Tenga en cuenta que al multiplicar la ecuación diferencial por el factor integrante, ésta se hace exacta. De esta manera si

$$\overline{M}(x,y) = U(x,y)M(x,y) \quad \text{y} \quad \overline{N}(x,y) = U(x,y)N(x,y)$$

entonces debe ocurrir que

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial y}(UM) = \frac{\partial}{\partial x}(UN)$$

Desarrollando esto último se obtiene

$$N\frac{\partial \ln U}{\partial x} - M\frac{\partial \ln U}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.11}$$

La igualdad en 2.11 es muy importante, porque a partir de ella determinamos $U(x,y)$. Veamos algunos casos:

1. Suponer que U está en función sólo de x, es decir $U = U(x)$, entonces (2.11) se escribe en la forma

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{2.12}$$

y para que la hipótesis funcione, el lado derecho de (2.12), debe estar en función solamente de la variable x. Poniendo $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$, vemos que (2.12) se transforma en la ecuación diferencial

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dx} = p(x)$$

con la cual se determina $U(x)$.

2. Si asumimos que $U = U(y)$, entonces (2.11) se escribe en la forma:

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \tag{2.13}$$

En este caso la hipótesis es válida siempre que el lado derecho de (2.13) dependa solamente de y. Poniendo $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=q(y)$ en (2.13), nos queda la ecuación diferencial

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}=q(y)$$

con la cual se determina $U=U(y)$.

3. En muchos casos no siempre U depende sólo de x o de y. Ocurre que $U=U(w)$, donde $w=xy$, $w=\frac{x}{y}$, $w=x^2+y^2$, etc. Determinar w requiere de un poco de habilidad que se consigue con la práctica.

Veamos a continuación algunos ejemplos:

■ **Ejemplo 2.33** Dada la ecuación diferencial: $2\frac{dy}{dx}=\frac{5+2x-2y^2}{y}$, $y\neq 0$.

a) Verifique que la ecuación diferencial no es exacta, luego encuentre el factor integrante.
b) Usando el factor integrante resuelva la ecuación diferencial.
c) Encuentre la solución particular que pasa por el punto $(0;\sqrt{5})$ y el intervalo máximo donde está definida.

Resolución

a) Escribimos la ecuación diferencial en la forma adecuada

$$(5+2x-2y^2)dx-2ydy=0$$

Con $M(x,y)=5+2x-2y^2$ y $N(x,y)=-2y$, verificamos que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-4y\neq 0=\frac{\partial N}{\partial x}$$

lo cual hace que la ecuación diferencial no sea exacta. Si multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante U se tiene

$$(5+2x-2y^2)U\,dx-2yU\,dy=0 \tag{2.14}$$

en la cual hacemos

$$\overline{M}(x,y)=(5+2x-2y^2)U \quad \text{y} \quad \overline{N}(x,y)=-2yU$$

Puesto que (2.14) es una ecuación diferencial exacta, entonces

$$\frac{\partial\overline{M}}{\partial y}=\frac{\partial\overline{N}}{\partial x}$$

desarrollando las derivadas parciales se obtiene la identidad (2.11) dada por

$$N\frac{\partial\ln U}{\partial x}-M\frac{\partial\ln U}{\partial y}=-4y \tag{2.15}$$

Como se dijo antes, esta ecuación es muy importante porque según como esté dada nos permite hacer suposiciones acerca de la dependencia de U. Examinando el lado derecho vemos que ésta solo depende de y; sin embargo al asumir $U = U(y)$, (2.15) se convierte en

$$\frac{1}{u}\frac{dU}{dy} = \frac{4y}{5+2x-2y^2}$$

donde la expresión de la derecha depende de x e y, y eso no es conveniente[22]. Ahora, si suponemos que $U = U(x)$, entonces (2.15) se transforma en la ecuación[23] $\frac{1}{U}\frac{dU}{dy} = \frac{-4y}{-2y} = 2$, cuya forma más simple es $\frac{1}{U}dU = 2dx$, y así $U(x) = e^{2x}$.

b) Para determinar la solución de la ecuación diferencial, multiplicamos ésta por el factor integrante que acabamos de hallar en (a). Así se tiene:

$$(5+2x-2y^2)e^{2x}dx - 2ye^{2x}dy = 0 \qquad (2.16)$$

con

$$\overline{M}(x,y) = (5+2x-2y^2)e^{2x} \text{ y } \overline{N}(x,y) = -2ye^{2x}$$

Como (2.16) es exacta[24], entonces existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \overline{M}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \overline{N}(x,y)$ y $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$. A continuación, para encontrar f se conoce que $\frac{\partial f}{\partial y} = \overline{N}(x,y) = -2ye^{2x}$, entonces

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -2\int ye^{2x}dy + \psi(x) \\ f(x,y) &= -y^2e^{2x} + \psi(x) \qquad (*) \end{aligned}$$

Ahora, derivando f respecto de x se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-y^2e^{2x} + \psi(x)\right) = \overline{M}(x,y) = (5+2x-2y^2)e^{2x} \\ &-2y^2e^{2x} + \psi'(x) = e^{2x}(5+2x-2y^2) \\ &\psi'(x) = (5+2x)e^{2x} \\ &\psi(x) = (2+x)e^{2x} \end{aligned}$$

Poniendo $\psi(x)$ en (*) y usando el hecho de que $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$ vemos que

$$f(x,y) = -y^2e^{2x} + (2+x)e^{2x} = c$$

y de esta manera la solución general está dada por:

$$(2+x-y^2) = ce^{-2x}$$

[22]Pues hemos supuesto que $U = U(y)$

[23]Esta ecuación sí está en concordancia con la hipótesis de que $U = U(x)$.

[24]Recuerde que desde el momento que una ecuación no exacta se multiplica por su factor integrante, ésta se hace exacta.

c) De la familia de curvas encontradas en (b) hay que determinar aquella que pase por el punto $(0;\sqrt{5})$. En efecto, haciendo $y(0)=\sqrt{5}$, se tiene que $c=-3$, luego despejando y se obtiene

$$y(x)=\pm\sqrt{2+x+3e^{-2x}}$$

donde se debe escoger el signo positivo, quedando así la función

$$y(x)=\sqrt{2+x+3e^{-2x}}$$

Para determinar el dominio[25] de $y(x)$ analizamos cómo se comporta la expresión del radicando. En este caso nos interesa conocer su valor máximo o mínimo. Veamos, para $r(x)=2+x+3e^{-2x}$, se tiene:

$$r'(x)=1-6e^{-2x} \quad \text{y} \quad r''(x)=12e^{-2x}$$

Resolviendo $r'(x)=0$, el punto crítico es $x_c=\frac{1}{2}\ln 6$. Luego, siendo $r''(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, entonces $r(x)$ tiene un mínimo absoluto en x_c. Evaluando la función en dicho punto se tiene:

$$r(x_c)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln 6>0$$

de donde se concluye que $r(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, así el dominio de $y(x)$ es $\mathbb{R}$. El campo de direcciones para la familia de curvas integrales con la curva que pasa por el punto $(0,\sqrt{5})$ se muestra en figura 2.4:

■

■ **Ejemplo 2.34** Para $f(x)\neq g(x)$ considere la ecuación diferencial no exacta:

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0 \tag{2.17}$$

a) Pruebe que $U(w)=\frac{1}{w(f(w)-g(w))}$ con $w=xy$, es factor integrante de la ecuación diferencial.
b) Usando el método en (a) resuelva la ecuación diferencial

$$(xy^2+2y)dx+(3x^2y-4x)dy=0$$

Resolución

a) Si en (2.17) hacemos

$$\begin{aligned} M(x,y) &= yf(xy)\equiv yf(w) \\ N(x,y) &= xg(xy)\equiv xg(w) \end{aligned}$$

[25] En este caso, determinar el dominio es complicado.

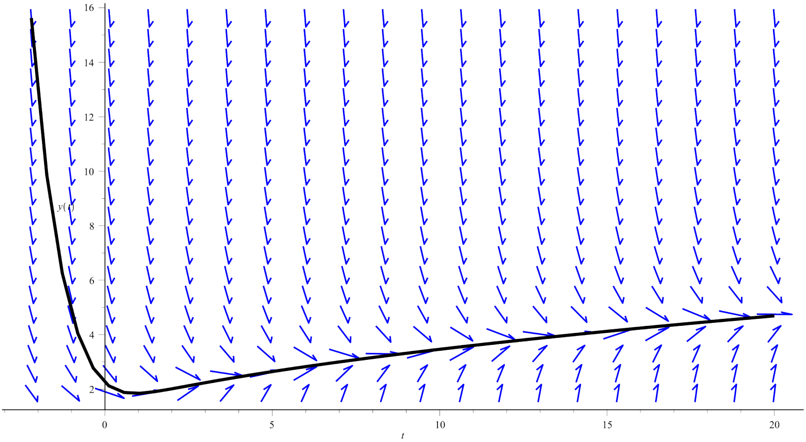


Figura 2.4: Campo de direcciones de $2\frac{dy}{dx} = \frac{5+2x-2y^2}{y}$ con la curva integral $y(x) = \sqrt{2+x+3e^{-2x}}$ que pasa por el punto $(0;\sqrt{5})$.

entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = f(w) + wf'(w) \quad \neq \quad g(w) + wg'(w) = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ pues } f \neq g$$

es decir, la ecuación no es exacta. Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante U se tiene la ecuación exacta:

$$\underbrace{yf(xy)U}_{\overline{M}(x,y)}\,dx + \underbrace{xg(xy)U}_{\overline{N}(x,y)}\,dy = 0$$

en la cual ocurre que

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$$

Desarrollando las derivadas parciales se obtiene la ecuación equivalente a (2.11) dada por

$$N\frac{\partial \ln U}{\partial x} - M\frac{\partial \ln U}{\partial y} = f(w) - g(w) + w(f'(w) - g'(w)) \qquad (2.18)$$

En vista que $U = U(w)$, entonces

$$\frac{\partial \ln U}{\partial x} = \frac{1}{U}\frac{dU}{dw}y \quad \text{y} \quad \frac{\partial \ln U}{\partial y} = \frac{1}{U}\frac{dU}{dw}x$$

Poniendo estas expresiones en (2.18) se tiene

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dw} = -\frac{1}{w} - \frac{f'(w)-g'(w)}{f(w)-g(w)}$$

de donde

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dU}{U} = -\int \frac{dw}{w} - \int \frac{f'(w)-g'(w)}{f(w)-g(w)}dw \\
&\ln U = -\ln w - \ln(f(w)-g(w)) \\
&U = \frac{1}{w(f(w)-g(w))}
\end{aligned}$$

Así el factor integrante es:

$$U = \frac{1}{xy(f(xy)-g(xy))}$$

b) En este caso la ecuación diferencial la escribimos así:

$$y(xy+2)dx + x(3xy-4)dy = 0$$

que resulta ser semejante a (2.17), donde $f(w) = w+2$, $g(w) = 3w-4$, con $w = xy$. Haciendo

$$M(x,y) = yf(xy) \ \text{ y } \ N(x,y) = xg(xy)$$

vemos que la ecuación diferencial no es exacta y usando lo realizado en (a), el factor integrante está dado por

$$U = \frac{1}{w(f(w)-g(w))} \equiv \frac{1}{xy(6-2xy)}$$

Ahora, si multiplicamos la ecuación dada por U se obtiene la ecuación diferencial exacta

$$\underbrace{\frac{xy+2}{x(6-2xy)}}_{\overline{M}}dx + \underbrace{\frac{3xy-4}{y(6-2xy)}}_{\overline{N}}dy = 0$$

para la cual existe $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \overline{M}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \overline{N}(x,y)$ y $f(x,y) = c$, $\forall(x,y)\in\Omega$. Para determinar f principiamos de

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \overline{M}(x,y) \equiv \frac{xy+2}{x(6-2xy)}$$

Así tenemos:

$$f(x,y) = \int \frac{xy+2}{x(6-2xy)}dx + \phi(y)$$
$$f(x,y) = \int \left(\frac{1}{2}\frac{y}{3-xy} + \frac{1}{x(3-xy)}\right)dx$$
$$f(x,y) = \int \left(\frac{1}{2}\frac{y}{3-xy} + \frac{1}{3}\frac{y}{3-xy} + \frac{1}{3}\frac{1}{x}\right)dx$$
$$f(x,y) = \frac{1}{3}\ln x - \frac{5}{6}\ln(xy-3) + \phi(y) \qquad (*)$$

Ahora, si derivamos f respecto de y vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3}\ln x - \frac{5}{6}\ln(3-xy) + \phi(y)\right) = \overline{N}(x,y) \equiv \frac{3xy-4}{y(6-2xy)}$$
$$\frac{5}{6}\frac{x}{3-xy} + \phi'(y) = \frac{3xy-4}{y(6-2xy)}$$
$$\phi'(y) = -\frac{2}{3y}$$
$$\phi(y) = -\frac{2}{3}\ln y$$

Luego, si ponemos $\phi(y)$ en (*) y usando el hecho de que $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$, se obtiene

$$f(x,y) = \frac{1}{3}\ln x - \frac{5}{6}\ln(3-xy) - \frac{2}{3}\ln y = c = \frac{1}{6}\ln k$$

de donde

$$\frac{x^2}{(3-xy)^5y^4} = k$$

■

■ **Ejemplo 2.35** Dada la ecuación: $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx + \left(y^2+2xy-x^2\right)dy = 0$

a) Determine el factor integrante $U=U(z)$, sabiendo que $z=x+y$.

b) Con el factor integrante hallado en (a), resuelva la ecuación diferencial.

Resolución

a) Se tiene la ecuación diferencial

$$\left(x^2+2xy-y^2\right)dx + \left(y^2+2xy-x^2\right)dy = 0 \qquad (2.19)$$

Haciendo $M(x,y)=x^2+2xy-y^2$ y $N(x,y)=y^2+2xy-x^2$, vemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x-2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2y-2x$$

De esta manera (2.19) es una ecuación diferencial no exacta, y al multiplicarla por el factor integrante $U = U(x,y)$, se tiene la ecuación diferencial exacta:

$$\underbrace{U(x,y)\left(x^2+2xy-y^2\right)}_{\overline{M}(x,y)=UM}dx+\underbrace{U(x,y)\left(y^2+2xy-x^2\right)}_{\overline{N}(x,y)=UN}dy=0 \qquad (2.20)$$

La exactitud de (2.20) hace que $\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$, y de esto se obtiene:

$$\frac{1}{U}\left(\frac{\partial U}{\partial y}M-\frac{\partial U}{\partial x}N\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} \qquad (2.21)$$

Como $U = U(x,y) = U(z)$ y $z = x+y$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{dU}{dZ}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dU}{dz}\\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{dU}{dZ}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dU}{dz}\end{aligned}$$

Con estos resultados en (2.21) se tiene $\frac{d}{dz}(\ln U) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M-N}$, de donde fácilmente se llega a $\frac{d}{dz}(\ln U) = -\frac{2}{z}$. Integramos esto último para obtener el factor integrante

$$U(z) = \frac{1}{z^2} \equiv \frac{1}{(x+y)^2}$$

b) Si ponemos el factor integrante que hemos encontrado en (2.20) resulta:

$$\left[\frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}\right]dx+\left[\frac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}\right]dy=0$$

Puesto que esta ecuación es exacta, existe la función $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}\ \text{ y }\ f(x,y)=c,\ \ \forall(x,y)\in\Omega$$

En efecto, puesto que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}$, entonces

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \int \frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}dx+\phi(y)\\ f(x,y) &= \int\left[1-\frac{2y^2}{(x+y)^2}\right]dx+\phi(y)\\ f(x,y) &= x+\frac{2y^2}{x+y}+\phi(y) \qquad (*)\end{aligned}$$

derivamos f respecto de y para obtener

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x + \frac{2y^2}{x+y} + \phi(y)\right) \equiv \overline{N} = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{(x+y)^2}$$

de donde $\phi'(y) = -1$ y así $\phi(y) = -y$. Si ponemos $\phi(y)$ en (*) y usamos el hecho de que $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x - y + \frac{2y^2}{x+y} = c$$

∎

■ **Ejemplo 2.36** Para $y > 1$ considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{(y^2-1)\sqrt{y+1} - x}$$

a) Muestre que la ecuación no es exacta, luego encuentre el factor integrante.
b) Hallar la solución general.

Resolución

a) Poniendo la ecuación diferencial en la forma usual se tiene:

$$(y^2-1)dx + \left[x - (y^2-1)\sqrt{y+1}\right] dy = 0$$

en la cual hacemos $M(x,y) = y^2 - 1$ y $N(x,y) = x - (y^2-1)\sqrt{y+1}$. Para M y N se verifica

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

lo que confirma que la ecuación diferencial no es exacta. Multiplicando la ecuación por el factor integrante U resulta

$$\underbrace{(y^2-1)U}_{\overline{M}=UM} dx + \underbrace{\left[x - (y^2-1)\sqrt{y+1}\right] U}_{\overline{N}=UN} dx = 0 \tag{2.22}$$

puesto que (2.22) es exacta, entonces $\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$, del cálculo de las derivadas parciales se llega a

$$N\frac{\partial \ln U}{\partial x} - M\frac{\partial \ln U}{\partial y} = 2y - 1 \tag{2.23}$$

Aquí fácilmente vemos que conviene asumir $U = U(y)$, luego (2.23) se convierte en la ecuación diferencial

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dy} = -\frac{2y-1}{y^2-1}$$

de donde es fácil obtener

$$U(y) = e^{-\int \frac{2y-1}{y^2-1}dy} \tag{2.24}$$

Para el cálculo de la integral tenemos

$$\frac{2y-1}{y^2-1} = \frac{3}{2}\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{y-1}$$

así:

$$-\int \frac{2y-1}{y^2-1}dy = -\frac{3}{2}\ln(y+1) - \frac{1}{2}\ln(y-1)$$

Reemplazando en (2.24) se tiene finalmente el factor integrante dado por:

$$U(y) = \frac{1}{(y+1)^{\frac{3}{2}}(y-1)^{\frac{1}{2}}}$$

b) Poniendo el factor integrante en (2.22) se tiene la ecuación diferencial exacta

$$\underbrace{\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}}}_{\overline{M}}dx + \underbrace{\left[\frac{x}{(y+1)^{\frac{3}{2}}(y-1)^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{y-1}\right]}_{\overline{N}}dy = 0$$

para la cual existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \overline{M}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \overline{N}(x,y)$ y $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$. Teniendo $\frac{\partial f}{\partial x} = \overline{M} \equiv \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}}$

$$f(x,y) = \int \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}}dx + \phi(y)$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}}x + \phi(y) \qquad (*)$$

Ahora, si derivamos f respecto de y vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}}x + \phi(y)\right) = \overline{N} \equiv \frac{x}{(y+1)^{\frac{3}{2}}(y-1)^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{y-1}$$

$$\frac{x}{(y-1)^{\frac{1}{2}}(y+1)^{\frac{3}{2}}} + \phi'(y) = \frac{x}{(y+1)^{\frac{3}{2}}(y-1)^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{y-1}$$

$$\phi'(y) = -\sqrt{y-1}$$

$$\phi(y) = -\frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}$$

Finalmente ponemos $\phi(y)$ en (*) y usamos el hecho de que $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$ para obtener:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}}x-\frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}=c$$

de donde

$$\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}}x-\frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}=c$$

En la figura 2.5 se muestra el campo de direcciones de la ecuación diferencial.

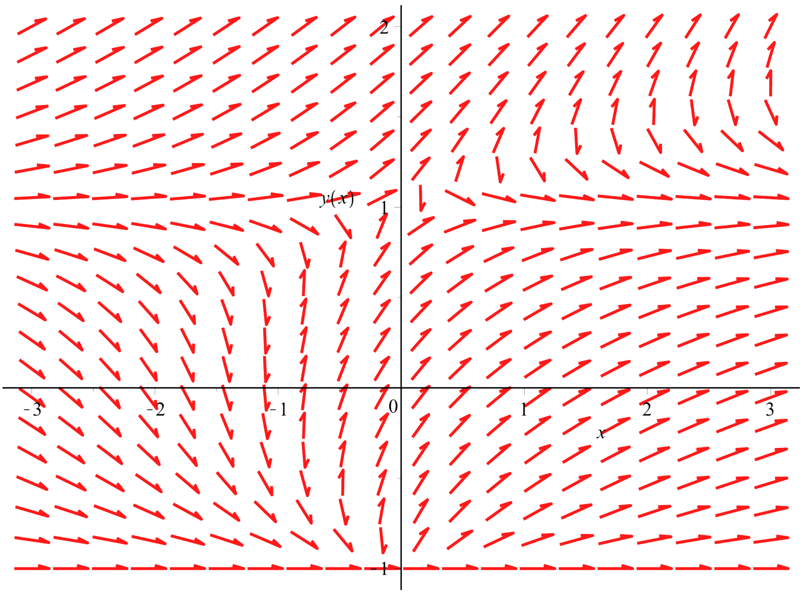


Figura 2.5: Campo de direcciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{(y^2-1)\sqrt{y+1}-x}$.

■

■ **Ejemplo 2.37** Para todo (x,y) en la región $\langle 0,\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle$ se tiene la ecuación diferencial

$$\left[2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} y}+e^x\right]dx-\frac{\operatorname{sen} x\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}dy=0$$

Compruebe que la ecuación no es exacta, luego encuentre su solución general con el factor integrante adecuado.

Resolución

Haciendo $M(x,y)=2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} y}+e^x$ y $N(x,y)=-\frac{\operatorname{sen} x\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}$ se verifica que la ecuación no es exacta, pues

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2\frac{\cos x\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}\neq-\frac{\cos x\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante U se obtiene

$$\underbrace{\left[2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} y}+e^x\right]U}_{\overline{M}=UM}dx-\underbrace{\frac{U\operatorname{sen} x\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}}_{\overline{N}=UN}dy=0 \tag{2.25}$$

De la exactitud de (2.25) se tiene $\frac{\partial\overline{M}}{\partial y}=\frac{\partial\overline{N}}{\partial x}$, lo cual es equivalente a

$$N\frac{\partial\ln U}{\partial x}-M\frac{\partial\ln U}{\partial y}=-\frac{\cos x\cos y}{\operatorname{sen}^2 y} \tag{2.26}$$

Por lo que se observa en (2.26), es conveniente asumir $U=U(x)$, así se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

de cuya resolución se obtiene el factor integrante:

$$U=\operatorname{sen} x$$

Poniendo el factor integrante en (2.25) se obtiene:

$$\underbrace{\left(2\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen} y}+e^x\operatorname{sen} x\right)}_{\overline{M}}dx-\underbrace{\frac{\cos y\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 y}}_{\overline{N}}dy=0$$

para la cual existe $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=\overline{M}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\overline{N}(x,y)$ y $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$. Puesto que $\frac{\partial f}{\partial y}=\overline{N}\equiv-\frac{\cos y\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 y}$, entonces

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=-\int\frac{\cos y\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 y}dy+\psi(x)\\
f(x,y)&=-\operatorname{sen}^2 x\int\frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}dy+\psi(x)\\
f(x,y)&=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} y}+\psi(x) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ahora derivamos f respecto de x y vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} y} + \psi(x)\right) = \overline{M} \equiv 2\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} y} + e^x \operatorname{sen} x \\
\psi'(x) &= e^x \operatorname{sen} x \\
\psi(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)e^x
\end{aligned}$$

Ponemos ψ en (*) y usamos el hecho que $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$ para obtener

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} y} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)e^x = c$$

de donde la solución general es:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} y} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)e^x = c$$

■

■ **Ejemplo 2.38** Resuelva la ecuación diferencial:

$$2\left[3y + 2y^3 + 3x^4 \operatorname{sen} x\right] dx - 3x\left[x^2 + 1 + 2y^2\right] dy = 0$$

Resolución

Si hacemos $M(x,y) = 2\left[3y + 2y^3 + 3x^4 \operatorname{sen} x\right]$ y $N(x,y) = -3x\left[x^2 + 1 + 2y^2\right]$, entonces tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6(1 + 2y^2) \neq -3x(x^2 + 1 + 2y^2)$$

por lo cual la ecuación no es exacta. Si multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante U, entonces se tiene

$$\underbrace{2\left[3y + 2y^3 + 3x^4 \operatorname{sen} x\right] U\, dx}_{\overline{M} = UM} \underbrace{-3x\left[x^2 + 1 + 2y^2\right] U}_{\overline{N} = UN} dy = 0 \tag{2.27}$$

De la exactitud de (2.27) ocurre que $\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$, y a partir de esto, la ecuación diferencial

$$N\frac{\partial \ln U}{\partial x} - M\frac{\partial \ln U}{\partial y} = 9(x^2 + 2y^2 + 1)$$

Aquí vemos que lo más adecuado es asumir $U = U(x)$, con lo cual se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dx} = -\frac{3}{x}$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene el factor integrante $U = \frac{1}{x^3}$; poniendo esto en (2.27) se tiene

$$\underbrace{2\left(\frac{3y}{x^3}+\frac{2y^3}{x^3}+3x\operatorname{sen}x\right)}_{\overline{M}}dx\underbrace{-3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{2y^2}{x^2}\right)}_{\overline{N}}dy=0$$

para la cual existe $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=\overline{M}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\overline{N}(x,y)$ y $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\overline{N}\equiv -3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{2y^2}{x^2}\right),$$

entonces

$$f(x,y)=-3\int\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{2y^2}{x^2}\right)dy+\psi(x)$$
$$f(x,y)=-3\left(y+\frac{y}{x^2}+\frac{2y^3}{3x^2}\right)+\psi(x) \qquad (*)$$

Ahora, derivamos f respecto de x y vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-3\left(y+\frac{y}{x^2}+\frac{2y^3}{3x^2}\right)+\psi(x)\right]=\overline{M}\equiv 2\left(\frac{3y}{x^3}+\frac{2y^3}{x^3}+3x\operatorname{sen}x\right)$$
$$\frac{6y}{x^3}+\frac{4y^3}{x^3}+\psi'(x)=\frac{6y}{x^3}+\frac{4y^3}{x^3}+6x\operatorname{sen}x$$
$$\psi'(x)=6x\operatorname{sen}x$$
$$\psi(x)=6(\operatorname{sen}x-x\cos x)$$

Poniendo $\psi(x)$ en (*) y usando el hecho de que $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$ se tiene

$$f(x,y)=-3\left(y+\frac{y}{x^2}+\frac{2y^3}{3x^2}\right)+6(\operatorname{sen}x-x\cos x)=c=-3k$$

de donde

$$y+\frac{y}{x^2}+\frac{2y^3}{3x^2}-2(\operatorname{sen}x-x\cos x)=k$$

■

■ **Ejemplo 2.39** Dada la ecuación diferencial $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{y+2x-1}{x+y}$

a) Encuentre el factor integrante.

b) Resuelva la ecuación diferencial, luego determine la curva integral que pasa por el punto $(0;1)$.

Resolución

a) En primer lugar escribimos la ecuación diferencial en la forma adecuada:

$$(y-y^2-2xy)dx+(x+y)dy=0$$

Luego, haciendo $M(x,y)=y-y^2-2xy$ y $N(x,y)=x+y$ vemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1-2y-2x\neq 1=\frac{\partial N}{\partial x}$$

es decir, la ecuación diferencial no es exacta. Ahora, con el factor integrante U se obtiene la ecuación exacta:

$$\underbrace{(y-y^2-2xy)U}_{\overline{M}=UM}dx+\underbrace{(x+y)U}_{\overline{N}=UN}dy=0 \tag{2.28}$$

Puesto que $\frac{\partial\overline{M}}{\partial y}=\frac{\partial\overline{N}}{\partial x}$, desarrollando las derivadas de esta igualdad se llega a la ecuación diferencial

$$N\frac{\partial \ln U}{\partial x}-M\frac{\partial \ln U}{\partial y}=-2(x+y)$$

Aquí es fácil darse cuenta que conviene asumir $U=U(x)$. Usando esto se tiene $\frac{dU}{dx}=-2U$, de cuya resolución se obtiene el factor integrante

$$U(x)=e^{-2x}$$

b) Si ponemos $U(x)$ en (2.28) se obtiene:

$$e^{-2x}(y-y^2-2xy)dx+e^{-2x}(x+y)dy=0$$

Como esta ecuación diferencial es exacta, entonces existe $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-2x}(y-y^2-2xy),\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=e^{-2x}(x+y)\ \ \text{y}\ \ f(x,y)=c,\ \forall(x,y)\in\Omega$$

Siendo $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-2x}(y-y^2-2xy)$, entonces

$$f(x,y)=\int e^{-2x}(y-y^2-2xy)dx+\phi(y)$$
$$f(x,y)=\frac{1}{2}y^2e^{-2x}+xye^{-2x}+\phi(y) \qquad (*)$$

Ahora derivamos f respecto de y y se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}y^2e^{-2x} + xye^{-2x} + \phi(y)\right] = e^{-2x}(x+y)$$
$$\phi'(y) = 0$$
$$\phi(y) = k$$

Poniendo $\phi(y)$ en (*) y usando el hecho de que $f(x,y) = c$ se tiene

$$f(x,y) = \frac{1}{2}y^2e^{-2x} + xye^{-2x} + k = c$$

de donde la solución general es:

$$\frac{1}{2}y^2 + xy = Ce^{2x};\ \ C = c - k$$

Para determinar la curva que pasa por el punto $(0;1)$ hacemos $y(0) = 1$, y se obtiene $C = \frac{1}{2}$. Luego la curva integral que pasa por el punto $(0;1)$ está dada en forma implícita por

$$y^2 + 2xy = e^{2x}$$

y en forma explícita por la función

$$y(x) = \sqrt{x^2 + e^{2x}} - x, \quad Dom(y) = \mathbb{R}$$

■

■ **Ejemplo 2.40** a) Dada la ecuación diferencial (no exacta) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ para la cual

$$\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = F(xy) \tag{2.29}$$

es decir, F es función del producto xy. Demuestre que el factor integrante está dado por $U = e^{\int F(w)dw}$, con $w = xy$.

b) Usando (a), resolver: $(4xy^3 + 3x^2y^2)dx + (4x^3y + 3x^2y^2)dy = 0$.

Resolución

a) Si la ecuación no es exacta, la hacemos exacta multiplicando por el factor integrante U, y queda $MUdx + NUdy = 0$. Como debe ocurrir que $\frac{\partial}{\partial y}(UM) = \frac{\partial}{\partial x}(UN)$, entonces desarrollando las derivadas parciales se llega a la ecuación

$$\frac{1}{U}\left(N\frac{\partial U}{\partial x} - M\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.30}$$

Aquí, hay que prestar atención al hecho de que $U = U(w)$ con $w = xy$. Calculando las derivadas parciales de U vemos que: $\frac{\partial U}{\partial x} = y\frac{dU}{dw}$ y $\frac{\partial U}{\partial y} = x\frac{dU}{dw}$. Luego, reemplazando en (2.30) se obtiene:

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dw}(yN - xM) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

que usando (2.29) se convierte en: $\frac{1}{U}\frac{dU}{dw} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} \equiv F(w)$, cuya resolución se hace a continuación

$$\begin{aligned}
\int \frac{dU}{U} &= \int F(w)dw \\
\ln U &= \int F(w)dw \\
U &= e^{\int F(w)dw}
\end{aligned}$$

que es lo que se pedía demostrar.

b) En la ecuación

$$(4xy^3 + 3x^2y^2)dx + (4x^3y + 3x^2y^2)dy = 0$$

hacemos $M(x,y) = 4xy^3 + 3x^2y^2$ y $N(x,y) = 4x^3y + 3x^2y^2$, con lo cual $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, es decir, la ecuación no es exacta. Aplicando el método en (a) vemos que:

$$\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \equiv -\frac{6}{xy}$$

es decir el lado derecho es función del producto xy. Haciendo $F(w) = -\frac{6}{w}$, con $w = xy$; el factor integrante está dado por

$$U = e^{\int F(w)dw} = e^{-6\int \frac{dw}{w}} = e^{\ln \frac{1}{w^6}} = \frac{1}{w^6} \equiv \frac{1}{x^6y^6}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante se tiene la ecuación exacta

$$\underbrace{\left(\frac{4}{x^5y^3} + \frac{3}{x^4y^4}\right)}_{\overline{M}}dx + \underbrace{\left(\frac{4}{x^3y^5} + \frac{3}{x^4y^4}\right)}_{\overline{N}}dy = 0$$

para la cual existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \overline{M}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \overline{N}(x,y)$ y $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \overline{M} \equiv \frac{4}{x^5y^3} + \frac{3}{x^4y^4},$$

entonces

$$f(x,y) = \int \left(\frac{4}{x^5y^3} + \frac{3}{x^4y^4} \right) dx + \phi(y)$$
$$f(x,y) = -\frac{1}{x^4y^3} - \frac{1}{x^3y^4} + \phi(y) \qquad (*)$$

Ahora, derivamos f respecto de y se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x^4y^3} - \frac{1}{x^3y^4} + \phi(y) \right) = \overline{N} \equiv \frac{4}{x^3y^5} + \frac{3}{x^4y^4}$$
$$\phi'(y) = 0$$
$$\phi(y) = k$$

Ponemos $\phi(y)$ en (*) y usamos el hecho de que $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$ para obtener

$$f(x,y) = -\frac{1}{x^4y^3} - \frac{1}{x^3y^4} + k = c$$

de donde la solución general es

$$\frac{1}{x^4y^3} + \frac{1}{x^3y^4} = C$$

con $C = k - c$.

■

■ **Ejemplo 2.41** Resuelva: $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$.

Resolución

En primer lugar hacemos $M(x,y) = x^2 + y^2 + y$ y $N(x,y) = -x$, con esto verificamos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 1 \neq -1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Luego, la ecuación diferencial no es exacta. Multiplicando por el factor integrante se tiene la ecuación exacta

$$\underbrace{(x^2 + y^2 + y)U}_{\overline{M} = UM} dx - \underbrace{xU}_{\overline{N} = UN} dy = 0 \qquad (2.31)$$

Puesto que $\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$, desarrollando las derivadas parciales se tiene

$$N \frac{\partial \ln U}{\partial x} - M \frac{\partial \ln U}{\partial y} = 2(y+1) \qquad (2.32)$$

Si en (2.32) intentamos hacer $U = U(x)$ o $U = U(y)$, vemos que ninguno de los dos casos funciona, así que intentamos otra manera. Podemos suponer que $U = U(w)$ con $w = x^2 + y^2$, calculando las derivadas parciales se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x\frac{dU}{dw} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y\frac{dU}{dw}$$

Luego, poniendo estas derivadas en (2.32) se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dw} = \frac{y+1}{xN - yM},$$

así

$$\begin{aligned}
\frac{1}{U}\frac{dU}{dw} &= -\frac{1}{x^2+y^2} \equiv -\frac{1}{w}\\
\frac{dU}{U} &= -\frac{dw}{w}\\
U &= \frac{1}{w} \equiv \frac{1}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Reemplazando la función U en (2.31) tenemos

$$\underbrace{\left(1 + \frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{\overline{M}} dx \underbrace{- \frac{x}{x^2+y^2}}_{\overline{N}} dy = 0$$

para la cual existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \overline{M}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \overline{N}(x,y)$ y $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$. Como $\frac{\partial f}{\partial y} = \overline{N} \equiv -\frac{x}{x^2+y^2}$, entonces

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= -\int \frac{x}{x^2+y^2} dy + \psi(x)\\
f(x,y) &= -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(x) \qquad\qquad (*)
\end{aligned}$$

Ahora, si derivamos f respecto de x se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(x)\right) = \overline{M} \equiv 1 + \frac{y}{x^2+y^2}\\
&\psi'(x) = 1\\
&\psi(x) = x
\end{aligned}$$

Poniendo $\psi(x)$ en (*) y usando el hecho de que $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$ se obtiene

$$f(x,y) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(x) = c$$

de donde

$$x - \arctan \frac{y}{x} = c$$

■

Observación

Dada la ecuación diferencial no exacta $Mdx + Ndy = 0$, un método muy eficaz para determinar el factor integrante U es asumiendo que

$$U(x,y) = f(x)g(y)$$

de tal manera que si multiplicamos la ecuación diferencial por dicha expresión queda la ecuación diferencial exacta

$$f(x)g(y)M(x,y)dx + f(x)g(y)N(x,y)dy = 0$$

donde debe ocurrir

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x)g(y)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)g(y)N(x,y)\right)$$

Desarrollando las derivadas se llega a la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]N - \left[\frac{g'(y)}{g(y)}\right]M \tag{2.33}$$

donde $\frac{f'(x)}{f(x)}$ y $\frac{g'(y)}{g(y)}$ deben escogerse de manera apropiada de tal forma que ocurra la igualdad (2.33).

■ **Ejemplo 2.42** Resuelva la ecuación diferencial:

$$(\cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)dx + (\cos x + \operatorname{sen} y + \cos y)dy = 0$$

Resolución

Sean $M(x,y) = \cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ y $N(x,y) = \cos x + \operatorname{sen} y + \cos y$, vemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y \neq -\operatorname{sen} x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

es decir, la ecuación no es exacta. A continuación, multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante $U(x,y) = f(x)g(y)$, obteniéndose por consiguiente

$$\underbrace{(\cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)f(x)g(y)}_{\overline{M}=UM}dx + \underbrace{(\cos x + \operatorname{sen} y + \cos y)f(x)g(y)}_{\overline{N}=UN}dy = 0 \tag{2.34}$$

Como (2.34) es exacta, entonces $\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$, que desarrollando las derivadas parciales se obtiene (igualdad semejante a (2.33))

$$\cos y + \operatorname{sen} x = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) N - \left(\frac{g'(y)}{g(y)}\right) M$$

de donde

$$\cos y + \operatorname{sen} x = \frac{f'(x)}{f(x)}(\cos x + \operatorname{sen} y + \cos y) - \frac{g'(y)}{g(y)}(\cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)$$

En este caso la igualdad se convierte en una identidad si, y solo si, $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$ y $\frac{g'(y)}{g(y)} = 1$, desarrollando estas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad d(\ln f(x)) = dx \Longrightarrow f(x) = e^x \\
\frac{g'(y)}{g(y)} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad d(\ln g(y)) = dy \Longrightarrow g(y) = e^y
\end{aligned}$$

Así, el factor integrante es:

$$U(x,y) = f(x)g(y) = e^x e^y = e^{x+y}$$

Poniendo el factor integrante en (2.34) se tiene la ecuación diferencial:

$$\underbrace{(\cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)e^{x+y}}_{\overline{M}} dx + \underbrace{(\cos x + \operatorname{sen} y + \cos y)e^{x+y}}_{\overline{N}} dy = 0$$

Como es exacta, entonces existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= (\cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)e^{x+y}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= (\cos x + \operatorname{sen} y + \cos y)e^{x+y}
\end{aligned}$$

y $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$. Desarrollando la primera igualdad se tiene

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int (\cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)e^{x+y} dx + \phi(y) \\
f(x,y) &= (\cos x + \operatorname{sen} y)e^{x+y} + \phi(y) \qquad\qquad (*)
\end{aligned}$$

Ahora, si derivamos f respecto de y entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big((\cos x + \operatorname{sen} y)e^{x+y} + \phi(y)\big) = (\cos x + \operatorname{sen} y + \cos y)e^{x+y} \\
&\phi'(y) = 0 \\
&\phi(y) = k
\end{aligned}$$

Reemplazando $\phi(y)$ en (*) y usando el hecho de que $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$ se tiene finalmente

$$f(x,y) = (\cos x + \operatorname{sen} y)e^{x+y} + k = c$$

de donde

$$(\cos x + \operatorname{sen} y)e^{x+y} = C$$

con $C = c - k$. ■

Si el método no hubiera funcionado, entonces se habría buscado otra forma de resolución.

Observación

En algunos casos resulta eficaz asumir el factor integrante como $U(x,y) = x^r y^s$, donde r y s son números apropiados que hacen que la ecuación diferencial se haga exacta. Veamos el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 2.43** Resuelva: $ydx + 3xdy = x^2y^3dy$

Resolución

Reordenando la ecuación diferencial para escribirla en la forma usual se tiene:

$$ydx + (3x - x^2y^3)dy = 0$$

donde $M(x,y) = y$ y $N(x,y) = 3x - x^2y^3$. Analizando la exactitud vemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq 3 - 2xy^3 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por lo tanto la ecuación no es exacta. En seguida multiplicamos la ecuación diferencial por el factor integrante $U(x,y) = x^r y^s$, resultando

$$x^r y^{s+1}dx + (3x^{r+1}y^s - x^{r+2}y^{s+3})dy = 0 \qquad (2.35)$$

Como (2.35) es exacta, entonces debe ocurrir que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^r y^{s+1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^{r+1}y^s - x^{r+2}y^{s+3}\right)$$

de donde

$$(r+2)xy^3 + (s - 3r - 2) = 0$$

y es una identidad si, y sólo si, $\begin{cases} r+2=0 \\ s-3r-2=0 \end{cases}$. Resolviendo el sistema resulta $r=-2$ y $s=-4$; así el factor integrante es $U=x^{-2}y^{-4}$ y reemplazando en (2.35) se tiene la ecuación exacta

$$\frac{1}{x^2y^3}dx+\left(\frac{3}{xy^4}-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

para la cual existe $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x^2y^3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{3}{xy^4}-\frac{1}{y}$ y $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x^2y^3}$, entonces

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int \frac{1}{x^2y^3}dx+\phi(y) \\ f(x,y) &= -\frac{1}{xy^3}+\phi(y) \qquad (*) \end{aligned}$$

Derivando f respecto de y se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{xy^3}+\phi(y)\right)+\phi(y)=\frac{3}{xy^4}-\frac{1}{y} \\ &\frac{3}{xy^4}+\phi'(y)=\frac{3}{xy^4}-\frac{1}{y} \\ &\phi'(y)=-\frac{1}{y} \\ &\phi(y)=-\ln y \end{aligned}$$

Reemplazando $\phi(y)$ en (*) y usando el hecho de que $f(x,y)=c$, $\forall(x,y)\in\Omega$ se obtiene:

$$f(x,y)=-\frac{1}{xy^3}-\ln y=c=-k$$

de donde

$$\frac{1}{xy^3}+\ln y=k$$

■

■ **Ejemplo 2.44** Resuelva $(2y^2+4x^2y)dx+(4xy+3x^3)dy=0$, dado que existe un factor integrante de la forma $U(x,y)=x^ry^s$, para r, s apropiados.

Resolución

Sean $M(x,y)=2y^2+4x^2y$ y $N(x,y)=4xy+3x^3$, se tiene que $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$, es decir la ecuación no es exacta. Como el factor integrante es de la forma $U(x,y)=x^ry^s$, entonces la ecuación diferencial exacta queda como

$$\underbrace{(2y^2+4x^2y)x^ry^s}_{\overline{M}}dx+\underbrace{(4xy+3x^3)x^ry^s}_{\overline{N}}dy=0 \qquad (2.36)$$

donde debe ocurrir $\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$, desarrollando esta igualdad se llega a la expresión:

$$2(s+2)x^r y^{s+1} + 4(s+1)x^{r+2}y^s = 4(r+1)x^r y^{s+1} + 3(r+3)x^{r+2}y^s$$

la cual es una identidad si, y sólo si, $\begin{cases} 2(s+2) = 4(r+1) \\ 4(s+1) = 3(r+3) \end{cases}$. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene $r = 1$ y $s = 2$, con lo cual el factor integrante es $U = xy^2$. Reemplazando los valores de r y s en (2.36) se tiene:

$$(2xy^4 + 4x^3y^3)dx + (4x^2y^3 + 3x^4y^2)dy = 0$$

Como es exacta, entonces existe $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 + 4x^3y^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^3 + 3x^4y^2$ y $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$. De la igualdad $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 + 4x^3y^3$ se tiene

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (2xy^4 + 4x^3y^3)dx + \phi(y) \\ f(x,y) &= x^2y^4 + x^4y^3 + \phi(y) \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

Ahora, derivamos f respecto de y y ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^4 + x^4y^3 + \phi(y)\right) + \phi(y) = 4x^2y^3 + 3x^4y^2 \\ \phi'(y) &= 0 \\ \phi(y) &= k \end{aligned}$$

Reemplazando la función $\phi(y)$ en (*) y usando el hecho que $f(x,y) = c$, $\forall (x,y) \in \Omega$ se obtiene:

$$f(x,y) = x^2y^4 + x^4y^3 + k = c$$

de donde

$$x^2y^4 + x^4y^3 = C$$

■

Observación

Sea $Mdx + Ndy = 0$ una ecuación diferencial no exacta. El factor integrante es de la forma:

1. $U(x) = x^k$ si, y sólo si, $\frac{x}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ es constante e igual a k.
2. $U(x) = e^x$ si, y sólo si, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} + N$.
3. $U(y) = y^m$ si, y sólo si, $\frac{y}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ es constante e igual a m.
4. $U = x^k y^m$ si, y sólo si, $m(\frac{M}{y}) - k\left(\frac{N}{x}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$, para k y m apropiados.

Pedimos al lector verificar cada una de estas posibilidades.

2.1.6 Ecuación diferencial lineal de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \tag{2.37}$$

donde p y q deben ser funciones definidas en algún intervalo $I\subset\mathbb{R}$. Según que $q(x)\equiv 0$ ó no, diremos que la ecuación es homogénea o no homogénea[26]. Para resolver este tipo de ecuaciones seguiremos dos métodos que se explican a continuación:

Método 1

Que llamaremos **método de Lagrange o de variación del parámetro**, consiste en asumir primero que la ecuación es homogénea, es decir, $q(x)\equiv 0$. De este modo (2.37) se convierte en la ecuación de variables separables

$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y \tag{2.38}$$

Resolviendo esta ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}
&\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx+\ln c, \quad \text{donde } c \text{ es constante}\\
&\ln y=-\int p(x)dx+\ln c\\
&y=ce^{-\int p(x)dx}
\end{aligned}$$

Por lo visto, ya encontramos la solución de (2.38). Para determinar la solución de (2.37) aplicamos lo que llamaremos variación del parámetro, que consiste que asumir que c no es constante, sino más bien una función, es decir: $c=c(x)$. Queda de esta manera que la solución de (2.37) es:

$$y(x)=c(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{2.39}$$

y al reemplazarla en (2.37), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(c(x)e^{-\int p(x)dx}\right)+p(x)\left(c(x)e^{-\int p(x)dx}\right)=q(x)\\
&c'(x)e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)\\
&c'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}
\end{aligned}$$

[26] Aquí la condición de homogeneidad es diferente al que hemos visto en la Definición 2.1.1. En ese caso nos referíamos a la función homogénea en las variables x e y.

luego, integrando

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + k, \quad k \text{ es constante} \tag{2.40}$$

Ahora, si ponemos $c(x)$ en (2.40) la solución de (2.37) resulta ser

$$y(x) = \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} + k\right] e^{-\int p(x)dx} \tag{2.41}$$

La fórmula (2.41) es la que usualmente usaremos para resolver este tipo de ecuaciones.

Método 2:

Este es el método del factor integrante. Si ponemos la ecuación diferencial en la forma $Mdx + Ndy = 0$, entonces ocurre que $U = e^{\int p(x)dx}$ es un factor integrante. Usando este hecho multiplicamos la ecuación (2.37) por el factor integrante y se obtiene:

$$\underbrace{e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx}}_{\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right)} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

de donde $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}$. Así

$$\begin{aligned}
\int d\left(ye^{\int p(x)dx}\right) &= \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + k \\
y(x)e^{\int p(x)dx} &= \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + k \\
y(x) &= \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + k\right] e^{-\int p(x)dx}
\end{aligned}$$

que es la misma fórmula (2.41) que se obtuvo en el método anterior.

A continuación resolvemos algunas ecuaciones diferenciales lineales.

■ **Ejemplo 2.45** Dada la ecuación diferencial:

$$g'(y)y' + p(x)g(y) = f(x)$$

a) Demuestre que con la transformación $z = g(y)$ la ecuación diferencial se convierte en una lineal de primer orden.

b) Aplicando (a), resolver la ecuación diferencial $e^{y^2}\left(2yy' + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$. Luego, indicar la curva integral que pase por el punto $\left(2; -(\ln 2)^{\frac{1}{2}}\right)$ y el dominio donde está definida.

Resolución

a) Siendo $z = g(y)$, entonces $\frac{dz}{dx} = g'(y)\frac{dy}{dx}$. Luego, reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden en las variables x y z.

b) En la ecuación diferencial: $e^{y^2}\left(2yy' + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$, efectuando el producto se tiene

$$2ye^{y^2}y' + \frac{2}{x}e^{y^2} = \frac{1}{x^2} \tag{2.42}$$

Si hacemos $z = e^{y^2}$ resulta $\frac{dz}{dx} = 2ye^{y^2}y'$. Con esta variable z la ecuación (2.42) se convierte en:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$$

cuya solución según (2.41) es

$$z = \frac{1}{x} + \frac{k}{x^2}$$

que, regresando a la variable y, la solución de (2.42) está dada por

$$e^{y^2} = \frac{1}{x} + \frac{k}{x^2},$$

o también

$$y(x) = \pm\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x} + \frac{k}{x^2}\right)}$$

Ahora, si escogemos la curva que pasa por el punto $\left(2, -\sqrt{\ln 2}\right)$, se tiene $k = 6$. Por lo tanto la curva que pasa por el punto indicado es:

$$y(x) = -\sqrt{\ln\left(\frac{x+6}{x^2}\right)} \tag{2.43}$$

Estando esta función bien definida para $\frac{x+6}{x^2} \geq 1$, es decir, para $x \in [-2,0\rangle \cup \langle 0,3]$. Puesto que $2 \in \langle 0,3]$, entonces el dominio de $y(x)$ en (2.43) es $\langle 0,3]$.

■

■ **Ejemplo 2.46** Dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)f(y) + q(x)g(y)$$

a) Muestre que la ecuación dada se convierte en una ecuación lineal mediante la transformación $u = \frac{f(y)}{g(y)}$ ó $u = \frac{g(y)}{f(y)}$, siempre que

$$\frac{f(y)g'(y) - g(y)f'(y)}{g(y)} \quad \text{ó} \quad \frac{f(y)g'(y) - g(y)f'(y)}{f(y)}$$

sea constante.

b) Aplique el método (a) para resolver $\frac{dy}{dx} = \sec y + x \tan y$

Resolución

a) Si hacemos $u = \frac{f(y)}{g(y)}$, entonces $\frac{du}{dy} = \frac{f'(y)g(y) - f(y)g'(y)}{g^2(y)} \frac{dy}{dx}$. Así

$$\frac{du}{dy} = -\left(\frac{g'(y)f(y) - g(y)f'(y)}{g(y)}\right) \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx}$$

que, poniendo $\frac{f(y)g'(y) - g(y)f'(y)}{g(y)} = C$, donde C es constante, se tiene $\frac{du}{dy} = -\frac{C}{g(y)} \frac{dy}{dx}$, luego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(y)}{C} \frac{du}{dx}$$

Reemplazando esto último en la ecuación diferencial dada se obtiene

$$-\frac{g(y)}{C} \frac{du}{dx} = g(y) \left[p(x) \frac{f(y)}{g(y)} + q(x) \right]$$

Así llegamos a la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{du}{dx} + Cp(x)u = -Cq(x)$$

También se tiene el mismo resultado con el otro cambio de variable.

b) En la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \sec y + x \tan y$$

hacemos: $f(y) = \sec y$, $p(x) = 1$, $g(y) = \tan y$ y $q(x) = x$. Para definir el cambio de variable, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{f(y)g'(y) - g(y)f'(y)}{g(y)} &= \frac{\sec y}{\tan y} = \frac{1}{\operatorname{sen} y} \longrightarrow \text{no es constante} \\ \frac{f(y)g'(y) - g(y)f'(y)}{f(y)} &= \frac{\sec y}{\sec y} = 1 \longrightarrow \text{sí es constante} \end{aligned}$$

De donde, el cambio de variable que se sugiere en (a) es $u = \frac{g(y)}{f(y)}$. Haciendo los cálculos se tiene

$$u = \operatorname{sen} y, \quad \frac{du}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \sec y \frac{du}{dx}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene

$$\sec y \frac{du}{dx} = \sec y \left(1 + x\frac{\tan y}{\sec y}\right)$$

cuya forma simplificada es

$$\frac{du}{dx} - xu = 1$$

y según (2.41) la solución está dada por

$$u(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left[\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + k\right]$$

que expresada en las variables x e y se tiene finalmente

$$\operatorname{sen} y = e^{\frac{x^2}{2}} \left[\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + k\right]$$

■

■ **Ejemplo 2.47** Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - 3y}$$

■

Resolución

En este caso vemos que la ecuación no está en la forma estándar de una ecuación lineal de primer orden. Pero recuerde que así como está escrita la ecuación, la variable independiente es x y la dependiente es y, así que lo que haremos es invertir la ecuación para obtener:

$$\frac{dx}{dy} = x - 3y$$

Escrita así, cambia el rol de las variables; es decir $x = x(y)$. En este caso la ecuación sería:

$$\frac{dx}{dy} - x = -3y$$

Con $p(y) = -1$ y $q(y) = -3y$; aplicando la fórmula (2.41) se tiene

$$x = 3 + 3y + ke^{y}$$

■ **Ejemplo 2.48** Halle la solución de general de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x^2\operatorname{sen}3x$$

Resolución

En este caso tenemos $p(x)=-\frac{2}{x}$ y $q(x)=x^2\operatorname{sen}3x$. Algunas veces será complicado recordar la fórmula (2.41); una forma alternativa es usar el método 2. Para esto recuerde que el factor integrante es:

$$U=e^{\int p(x)dx}=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{\ln\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\frac{1}{x^2}$ se obtiene:

$$\underbrace{\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x^3}y}_{\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right)}=\operatorname{sen}3x$$

$$\int d\left(\frac{y}{x^2}\right)=\int\operatorname{sen}3xdx+k$$

$$\frac{y}{x^2}=-\frac{1}{3}\cos 3x+k$$

Luego, la solución está dada por:

$$y(x)=x^2\left(k-\frac{1}{3}\cos 3x\right)$$

■

■ **Ejemplo 2.49** Determine la solución general de la ecuación diferencial:

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}=x^2+2x-1-4xy$$

Resolución

En primer lugar adecuamos la ecuación diferencial al modelo (2.37) para obtener:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{x^2+2x-1}{x^2+1} \tag{2.44}$$

Ponemos $p(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ y $q(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$; luego resolvemos aplicando el caso 2. En efecto, el factor integrante se calcula de la siguiente manera:

$$U=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{4x}{x^2+1}dx}=e^{\ln(x^2+1)^2}=(x^2+1)^2$$

Multiplicando (2.44) por el factor integrante se obtiene

$$\underbrace{(x^2+1)^2\frac{dy}{dx}+4x(x^2+1)y}_{\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)^2y\right]}=(x^2+2x-1)(x^2+1)$$

de donde

$$\begin{aligned}
d\left[(x^2+1)^2y\right] &= (x^2+2x-1)(x^2+1)dx\\
\int d\left[(x^2+1)^2y\right] &= \int (x^2+2x-1)(x^2+1)dx+c\\
(x^2+1)^2y &= \frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}x^4+x^2-x+c
\end{aligned}$$

Luego, la solución resulta ser:

$$y(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}x^4+x^2-x+c\right)$$

■

■ **Ejemplo 2.50** Resuelva el problema

$$\begin{cases} x\frac{dy}{dx}-3y=x^4\left(e^x+\cos x\right)-2x^2\\ y(\pi)=\pi^3e^\pi+2\pi^2\end{cases}$$

Resolución

Poniendo la ecuación diferencial en la forma usual (2.37) se tiene:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=x^3\left(e^x+\cos x\right)-2x \tag{2.45}$$

donde $p(x)=-\frac{3}{x}$ y $q(x)=x^3\left(e^x+\cos x\right)-2x$. Podemos aplicar en forma directa la fórmula (2.45); pero en este caso aplicaremos nuevamente el método del caso 2. En efecto, el factor integrante se calcula de la siguiente manera:

$$U=e^{\int p(x)dx}=e^{-3\int\frac{dx}{x}dx}=e^{-3\ln x}=\frac{1}{x^3}$$

Luego, multiplicando la ecuación diferencial (2.45) por dicho factor integrante se tiene:

$$\underbrace{\frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x^4}y}_{\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^3}\right)}=e^x+\cos x-\frac{2}{x^2}$$

de donde

$$d\left(\frac{y}{x^3}\right) = \left(e^x + \cos x - \frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$\int d\left(\frac{y}{x^3}\right) = \int \left(e^x + \cos x - \frac{2}{x^2}\right)dx + c$$
$$\frac{y}{x^3} = e^x + \operatorname{sen} x + \frac{2}{x} + c$$

Y así, la solución general es:

$$y(x) = x^3\left(e^x + \operatorname{sen} x + \frac{2}{x} + c\right)$$

Para determinar la solución particular que pasa por el punto $(\pi; \pi^3 e^\pi + 2\pi^2)$ reemplazamos en la solución general y se obtiene $c = 0$. Luego la curva que pasa por el punto indicado es:

$$y(x) = x^3\left(e^x + \operatorname{sen} x + \frac{2}{x}\right)$$

■

Hasta ahora hemos resuelto ecuaciones lineales donde la función $q(x)$ es continua, pero ¿qué hay de los casos donde se comporta como discontinua? Veamos los siguientes ejemplos:

■ **Ejemplo 2.51** Resuelva el problema $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y = q(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$, teniendo en cuenta que $q(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

Resolución

Una forma de resolver este tipo de problemas es por partes según como se nos dé el dominio. En este caso, primero hay que resolver para $x \in [0;3]$ y luego para $x \in \langle 3; +\infty\rangle$. En efecto:

Para $x \in [0;3]$ se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 1$$

cuya solución según (2.41) es[27]:

$$y(x) = \frac{1}{2} + ce^{-2x}$$

[27] También se lo puede resolver como una ecuación de variables separables.

Como la condición inicial se nos da en $x=0$ y $y(0)=0$, entonces $c=-\frac{1}{2}$, luego la solución en este intervalo es

$$y(x)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2x}\right)$$

Para $x\in\langle 3;+\infty\rangle$ se tiene la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}+2y=0$, cuya solución es $y(x)=ke^{-2x}$. Con estos resultados, podemos decir que la solución para $x\geq 0$ es:

$$y(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1-e^{-2x}\right), & 0\leq x\leq 3\\ ke^{-2x}, & x>3\end{cases} \tag{2.46}$$

La pregunta que ahora surge es la siguiente: ¿cómo determinamos la constante k? Recuerde que la antiderivada de una función cualquiera que sea integrable es continua[28]. Teniendo en cuenta este hecho, $y(x)$ debe ser continua en $x=3$, es decir:

$$y(3^-)=\lim_{x\to 3^-}y(x)=\lim_{x\to 3^+}y(x)=y(3^+)$$

Haciendo los cálculos

$$\frac{1}{2}\left(1-e^{-6}\right)=ke^{-6}$$

de donde $k=\frac{1}{2}\left(e^6-1\right)$. Poniendo el valor de k en (2.46) se tiene finalmente que la solución del problema es:

$$y(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1-e^{-2x}\right), & 0\leq x\leq 3\\ \frac{1}{2}\left(e^6-1\right)e^{-2x}, & x\geq 3\end{cases}$$

El campo de direcciones para la familia de curvas integrales y la curva solución del problema se muestra en la figura 2.6. ■

■ **Ejemplo 2.52** Resuelva el problema $\begin{cases}(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=q(x)\\ y(0)=0\end{cases}$, donde $q(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x<1\\ -x, & x\geq 1\end{cases}$. ■

Resolución

La resolución de este problema es similar a la del problema anterior[29]. Así:

Para $x\in[0;1\rangle$ se tiene la ecuación diferencial

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=x$$

[28] También tenga en cuenta que la diferenciabilidad implica continuidad de la función.

[29] Antes de empezar a resolver este problema, le recomendamos al lector estudiar bien la solución del ejemplo 2.51.

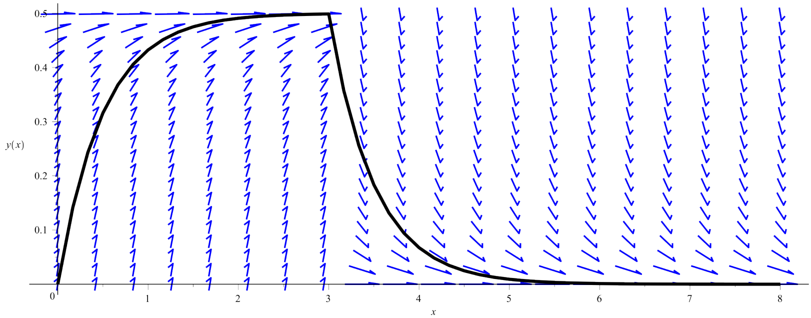


Figura 2.6: Campo de direcciones de la ecuación diferencial con la curva integral que pasa por el punto $(0,0)$.

que escrita en la forma de (2.37) resulta ser:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}$$

cuya solución general aplicando (2.41) es

$$y(x) = \frac{1}{x^2+1}\left(\frac{x^2}{2} + k\right)$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 0$ se obtiene $k = 0$. Por lo tanto la solución en el intervalo $[0;1\rangle$ es:

$$y(x) = \frac{x^2}{2(x^2+1)}$$

Para $x \in [1;+\infty\rangle$ se tiene la ecuación diferencial

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = -x$$

que escrita en la forma de (2.37) resulta ser:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = -\frac{x}{x^2+1}$$

cuya solución general aplicando (2.41) es:

$$y(x) = \frac{1}{x^2+1}\left(c - \frac{x^2}{2}\right)$$

Por consiguiente, la solución en todo el dominio está dada por:

$$y(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2(x^2+1)}, & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2+1}\left(c-\frac{x^2}{2}\right), & x\ge 1\end{cases}$$

Para determinar el valor de c usamos el hecho que $y(x)$ tiene que ser continua en $x=1$; por lo tanto resolvemos:

$$y(1^-)=y(1^+)$$

obteniendo así $c=1$. Finalmente la solución del problema está dada por la función

$$y(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2(x^2+1)}, & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{x^2+1}\left(1-\frac{x^2}{2}\right), & x\ge 1\end{cases}$$

cuya gráfica con el campo de direcciones de la ecuación diferencial se muestran en la figura 2.7.

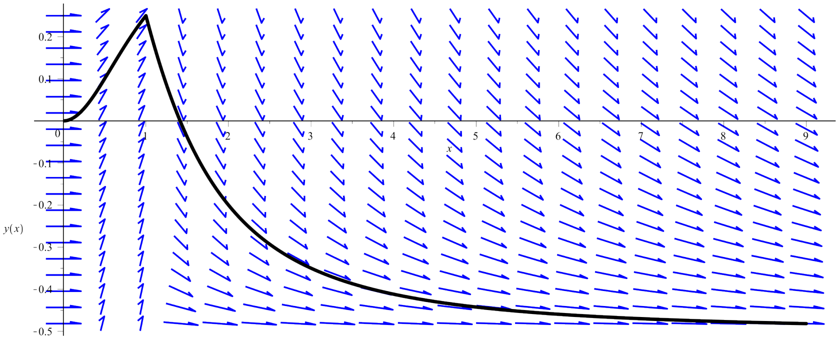


Figura 2.7: Campo de direcciones de la ecuación diferencial y la curva integral que pasa por el punto $(0,0)$.

■ **Ejemplo 2.53** Dada la ecuación diferencial: $f(y)^2\,\frac{dx}{dy}+3f(y)f'(y)x=f'(y)$, determine su solución.

Resolución

Una manera sencilla de resolver una ecuación de este tipo es cambiar el rol de las variables. La ecuación que se nos da tiene como variable independiente a y y la dependiente a x; cambiando x por y e y por x nos queda

$$f(x)^2\frac{dy}{dx}+3f(x)f'(x)y=f'(x) \tag{2.47}$$

donde x es ahora la variable independiente e y la dependiente. Con el cambio de variable $z = f(x)$ se tiene

$$\frac{dz}{dx} = f'(x) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \equiv \frac{dy}{dz}f'(x)$$

que reemplazando en (2.47) resulta:

$$z^2\frac{dy}{dz}f'(x) + 3zf'(x)y = f'(x)$$

La simplificación de esto nos lleva a la ecuación diferencial lineal de primer orden en la variables z y y:

$$\frac{dy}{dz} + \frac{3}{z}y = \frac{1}{z^2}$$

que aplicando (2.41) su solución es como sigue

$$\begin{aligned} y &= \left[\int \frac{1}{z^2}e^{3\int\frac{dz}{z}}dz + k\right]e^{-3\int\frac{dz}{z}} \\ &= \left[\int zdz + k\right]e^{-3\ln z} \\ y &= \frac{1}{2z} + \frac{k}{z^3} \end{aligned}$$

Como $z = f(x)$, entonces

$$y = \frac{1}{2f(x)} + \frac{k}{f(x)^3}$$

Por último, invirtiendo el papel de las variables, se tiene:

$$x = \frac{1}{2f(y)} + \frac{k}{f(y)^3}$$

■

■ **Ejemplo 2.54** a) Pruebe que $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y\ln y$ se transforma en una ecuación diferencial lineal haciendo $z = \ln y$.

b) Usando a), resuelva la ecuación diferencial $x\frac{dy}{dx} = 2x^2y + y\ln y$.

Resolución

a) Según el cambio de variable sugerido, se tiene: $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, de donde

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{dz}{dx}$$

Luego, reemplazando en la ecuación diferencial nos queda: $y\frac{dz}{dx}+yp(x)=yq(x)z$, de donde eliminando y se obtiene la ecuación lineal en las variables x y z

$$\frac{dz}{dx}-q(x)z=-p(x)$$

b) En la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx}=2x^2y+y\ln y$$

con el cambio de variable $z=\ln y$ se obtiene la nueva ecuación lineal en las variables x y z dada por

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=2x$$

Su resolución aplicando (2.41) es:

$$\begin{aligned} z &= \left[\int 2xe^{-\int\frac{dx}{x}}dx+k\right]e^{\int\frac{dx}{x}} \\ &= \left[\int 2dx+k\right]x \\ z &= 2x^2+kx \end{aligned}$$

Como $z=\ln y$, entonces $\ln y=2x^2+kx$, luego la solución final en forma explícita es

$$y(x)=e^{2x^2+kx}$$

■

■ **Ejemplo 2.55** Dada la ecuación diferencial: $2xyy'+(x-1)y^2=x^2e^x$.

a) Transforme la ecuación dada en una lineal, aplicando un cambio de variable apropiado.

b) Usando (a), halle su solución

Resolución

a) En primer lugar, escribiendo la ecuación diferencial en forma adecuada se tiene:

$$2y\frac{dy}{dx}+(x-1)\frac{y^2}{x}=xe^x$$

Observando cada uno de los términos, nuestro primer intento sería hacer $z=\frac{y^2}{x}$, con lo cual tenemos:

$$y^2=xz \quad \text{y} \quad 2y\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$$

Poniendo estos resultados en la ecuación diferencial se obtiene la ecuación diferencial lineal de primer orden[30]

$$\frac{dz}{dx}+z=e^x$$

b) En esta última ecuación diferencial aplicamos (2.41) para su resolución. En efecto:

$$\begin{aligned} z &= \left[\int e^x e^{\int dx}dx+k\right]e^{\int -dx} \\ &= \left[\int e^{2x}dx+k\right]e^{-x} \\ z &= \frac{e^x}{2}+ke^{-x} \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el cambio de variable la solución de la ecuación diferencial está dada por

$$y^2=\frac{x}{2}e^x+kxe^{-x}$$

■

2.1.7 Ecuación diferencial de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli, es una ecuación no lineal que se escribe según el modelo

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n,\;\; n\neq 1,\; n\neq 0 \tag{2.48}$$

Este tipo de ecuaciones pueden transformarse en ecuaciones diferenciales lineales mediante cambio de variable apropiado. En efecto, si multiplicamos (2.48) por y^{-n}, entonces queda

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)$$

haciendo $z=y^{1-n}$ se tiene $y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$, y con esto llegamos a la ecuación

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$$

Si hacemos $P(x)=(1-n)p(x)$ y $Q(x)=(1-n)q(x)$, entonces se obtiene finalmente la ecuación lineal de primer orden en las variables x y z:

$$\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$$

[30]En este ejemplo vemos que el cambio de variable escogido sÃ funciona.

■ **Ejemplo 2.56** Resuelva el problema: $\begin{cases} y' = \frac{(1-2t)y^4 - y}{3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e indique el valor máximo de su solución.

Resolución

La ecuación diferencial es de Bernoulli. Aplicando el método, multiplicamos por y^{-4} y se tiene:

$$3y^{-4}y' = (1-2t) - y^{-3}$$

Ahora hacemos el cambio de variable $z = y^{-3}$, de donde $-z' = 3y^{-4}y'$. Poniendo la nueva variable en la ecuación diferencial se tiene

$$\frac{dz}{dt} - z = 2t - 1$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} z(t) &= \left[\int (2t-1)e^{\int -dt}dt + k\right] e^{\int dt} \\ &= \left[\int (2t-1)e^{-t} + k\right] e^{t} \\ z(t) &= ke^{t} - 2t - 1 \end{aligned}$$

Puesto que $z(t) = \frac{1}{y^3(t)}$, entonces la solución general del problema es:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{ke^t - 2t - 1}}$$

Ahora, si aplicamos la condición inicial $y(0) = 1$, se obtiene $k = 2$. Por lo tanto la solución particular que pasa por el punto $(0,1)$ es:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{2e^t - 2t - 1}}$$

Para determinar el valor máximo de la función nos fijamos en el valor mínimo del denominador. Para esto analizamos el comportamiento de la función

$$r(t) = 2e^t - 2t - 1$$

Para la cual se tiene que

$$r'(t) = 2e^t - 2 \quad \text{y} \quad r''(t) = 2e^t > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Resolviendo

$$r'(t) = 0 \Longrightarrow t = 0$$

de esta manera, el punto crítico de $r(t)$ está en $t = 0$, para el cual $r''(0) > 0$, concluyendo así que $r(t)$ tiene un mínimo absoluto en $t = 0$, cuyo valor es $r(0) = 1$. Como $r(t) \geq r(0) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces el valor máximo de $y(t)$ será $y(0) = 1$.

El campo de direcciones de la ecuación diferencial y la solución del problema se muestran en la figura 2.8. Debemos indicar también que del

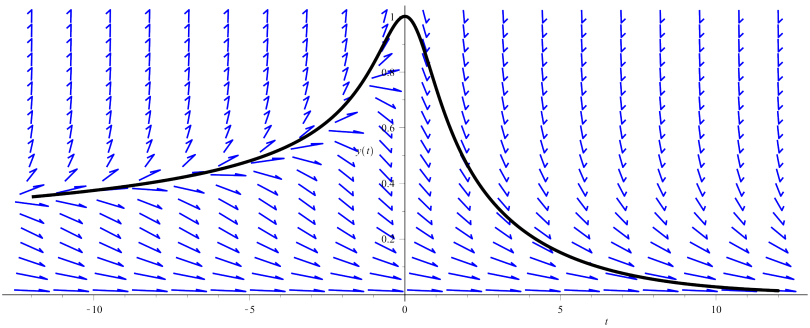


Figura 2.8: Campo de direcciones de la ecuación diferencial y la solución $y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{2e^t - 2t - 1}}$.

análisis de $r(t)$, el dominio de la solución es $\mathbb{R}$. ■

■ **Ejemplo 2.57** Resuelva: $\frac{dy}{dx} + xy = \frac{x}{y}$

Resolución

Si ponemos la ecuación diferencial en la forma

$$\frac{dy}{dx} + xy = xy^{-1}$$

vemos que se trata de una ecuación de Bernoulli; por tal motivo multiplicamos la ecuación por y y se obtiene

$$y\frac{dy}{dx} + xy^2 = x$$

Luego, haciendo el cambio de variable $z = y^2$, se tiene $y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dz}{dx}$, y reemplazando estos resultados en la última ecuación diferencial queda:

$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2x$$

la cual es una ecuación diferencial lineal en las variables x y z. Haciendo $p(x) = 2x$, $q(x) = 2x$ y aplicando (2.41) la solución se encuentra del siguiente modo

$$\begin{aligned}
z(x) &= \left(\int 2xe^{\int 2xdx}+k\right)e^{\int -2xdx}\\
&= e^{-x^2}\left(\int 2xe^{x^2}dx+k\right)\\
z(x) &= 1+ke^{-x^2}
\end{aligned}$$

Si regresamos a las variables x e y la solución final es:

$$y^2 = 1+ce^{-x^2}$$

■

■ **Ejemplo 2.58** Resuelva: $xy^2y' = x^2+y^3$

Resolución

Expresando la ecuación diferencial en la forma (2.48), se tiene: $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y = xy^{-2}$. Luego, multiplicando por y^2 resulta:

$$y^2\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^3 = x$$

la cual con el cambio de variable $z = y^3$ se transforma en:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{3}{x}z = 3x$$

cuya resolución según la fórmula (2.41) es como sigue

$$\begin{aligned}
z(x) &= \left[\int 3xe^{-\int \frac{3}{x}dx}dx+k\right]e^{\int \frac{3}{x}dx}\\
&= \left[\int 3xe^{-3\ln x}dx+k\right]e^{3\ln x}\\
z(x) &= -3x^2+kx^3
\end{aligned}$$

Luego, la solución en las variables x e y está dada por

$$y^3 = -3x^2+kx^3$$

o también en la forma explícita como:

$$y(x) = \sqrt[3]{cx^3-3x^2}$$

■

■ **Ejemplo 2.59** Resuelva la ecuación diferencial:

$$2(x+1)y' + 2y + (x+1)^4 y^2 = 0$$

Resolución

En este caso la ecuación diferencial la escribimos así:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} + \frac{(x+1)^3}{2} y^2 = 0$$

por lo que vemos que es una ecuación de Bernoulli. Multiplicando por y^{-2} y haciendo el cambio de variable $z = y^{-1}$ se tiene la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x+1} = \frac{(x+1)^3}{2}$$

cuya solución es como sigue

$$\begin{aligned} z &= \left[\int \frac{(x+1)^3}{2} e^{-\int \frac{dx}{x+1}} dx + k\right] e^{\int \frac{dx}{x+1} dx} \\ &= \left[\int \frac{(x+1)^2}{2} dx + k\right](x+1) \\ z &= \frac{(x+1)^4}{6} + k(x+1) \end{aligned}$$

Como $z = \frac{1}{y}$, entonces

$$y(x) = \frac{6}{(x+1)\left[(x+1)^3 + 6k\right]}$$

■

■ **Ejemplo 2.60** Resuelva: $2(y+1)\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}(y+1)^2 = x^4$.

Resolución

La ecuación diferencial es de Bernoulli y aplicando en forma directa el cambio de variable $z = (y+1)^2$ se tiene $2(y+1)\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$. Luego, reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene la ecuación lineal[31]:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = x^4$$

[31]En algunos casos diremos simplemente ecuación lineal, haciendo referencia siempre a la ecuación diferencial lineal de primer orden.

Resolviendo según (2.41) resulta

$$\begin{aligned} z(x) &= \left(\int x^4 e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx + k \right) e^{\int \frac{2}{x}dx} \\ &= x^2 \left(\int x^2 dx + k \right) \\ z(x) &= x^2 \left(\frac{x^3}{3} + k \right) \end{aligned}$$

como $z = (y+1)^2$, entonces la solución final es

$$(y+1)^2 = x^2 \left(\frac{x^3}{3} + k \right)$$

■

■ **Ejemplo 2.61** Dada la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x} - q(x)y(\ln y)^{\frac{1}{3}}$. Transforme la ecuación diferencial en una de Bernoulli y encuentre su solución.

Resolución

Según la forma en que se presenta la ecuación, lo primero que se nos ocurre es hacer el cambio de variable $v = \ln y$, de donde se deduce que $\frac{dy}{dx} = y\frac{dv}{dx} \equiv e^v \frac{dv}{dx}$. Reemplazando estos resultados en la ecuación diferencial se tiene la ecuación de Bernoulli

$$v^{-\frac{1}{3}} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v^{\frac{2}{3}} - q(x) \tag{2.49}$$

Haciendo nuevamente el cambio de variable $z = v^{\frac{2}{3}}$ se obtiene $v^{-\frac{1}{3}} \frac{dv}{dx} = \frac{3}{2} \frac{dz}{dx}$, y reemplazando en (2.49) se tiene la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{3x} z = -\frac{2}{3} q(x)$$

Resolviendo según la fórmula (2.41) se obtiene:

$$\begin{aligned} z(x) &= \left(-\frac{2}{3} \int q(x) e^{-\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x}} dx + k \right) e^{\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x}} \\ z(x) &= \left(-\frac{2}{3} \int q(x) x^{-\frac{2}{3}} dx + k \right) x^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Como $z = v^{\frac{2}{3}} = (\ln y)^{\frac{2}{3}}$, entonces

$$\ln y = x \left(k - \frac{2}{3} \int q(x) x^{-\frac{2}{3}} dx \right)^{\frac{3}{2}}$$

■

■ **Ejemplo 2.62** Demuestre que el problema de Cauchy[32] $\begin{cases} t\frac{dy}{dt} - ty^2 - y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones distintas.

Resolución

La ecuación es de Bernoulli y expresada en la forma (2.47) se tiene: $\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t}y = y^2$, de donde

$$y^{-2}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t}y^{-1} = 1$$

Resolviendo con el cambio de variable $z = y^{-1}$, se tiene finalmente que su solución está dada por la familia de curvas

$$y(t) = \frac{2t}{c - t^2}$$

Es fácil ver que todos los elementos de esta familia pasan por el punto $(0,0)$ para cualquier valor de $c \neq 0$. La figura2.9 muestra como algunas de dichas soluciones pasan por el punto $(0,0)$. ■

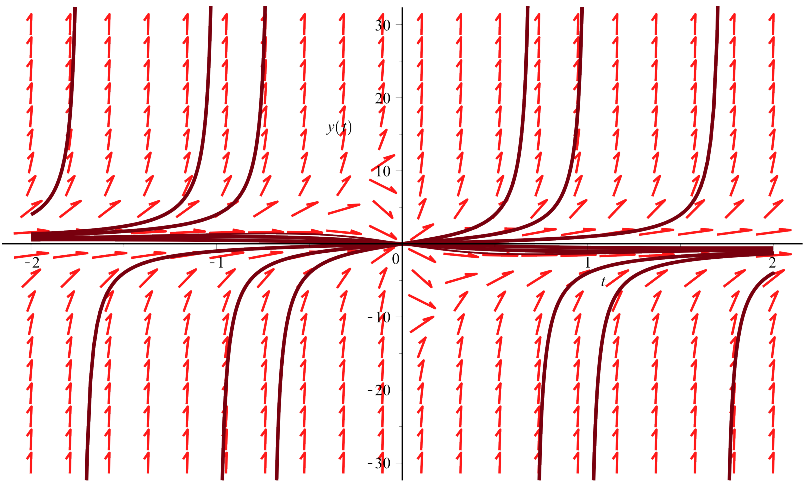


Figura 2.9: El gráfico muestra el campo de direcciones de la ecuación diferencial y las curvas integrales pasando por el origen.

[32]Llamamos problema de Cauchy a cualquier problema de la forma: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, donde f es una función definida en algún conjunto de $\mathbb{R}^2$.

2.1.8 Ecuación diferencial de Riccati

Llamamos ecuación diferencial de Riccati a la ecuación no lineal de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad p(x) \not\equiv 0 \tag{2.50}$$

Como se observa en (2.50) la variable dependiente y aparece con grado dos en la ecuación diferencial, y para que la técnica de resolución del caso lineal se pueda aplicar es necesario transformar dicha ecuación en una ecuación diferencial lineal, para lo cual necesitaremos de una solución particular[33] de la ecuación diferencial que llamaremos $y_p(x)$, para luego hallar la solución general $y(x)$ que lo asumimos como

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{w(x)} \tag{2.51}$$

donde $w(x)$ está por determinar. Si derivamos $y(x)$ en (2.51) y reemplazamos en (2.50) se obtiene

$$y_p'(x) - \frac{w'(x)}{w^2(x)} = p(x)\left(y_p(x) + \frac{1}{w(x)}\right)^2 + q(x)\left(y_p(x) + \frac{1}{w(x)}\right) + r(x)$$

Luego, desarrollando y agrupando convenientemente se tiene:

$$\underbrace{y_p'(x) - \left[p(x)y_p^2(x) + q(x)y_p(x) + r(x)\right]}_{(*)} = \frac{w'(x)}{w^2(x)} + 2\frac{p(x)y_p(x)}{w(x)} + \frac{p(x)}{w^2(x)} + \frac{q(x)}{w(x)}$$

Como y_p es solución de (2.50) entonces la expresión de (*) se hace cero, y de este modo nos queda:

$$\frac{w'(x)}{w^2(x)} + 2\frac{p(x)y_p(x)}{w(x)} + \frac{p(x)}{w^2(x)} + \frac{q(x)}{w(x)} = 0$$

Multiplicando por $w^2(x)$ y haciendo algunos arreglos se tiene finalmente la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dw}{dx} + \left[2p(x)y_p(x) + q(x)\right]w = -p(x) \tag{2.52}$$

Tenga en cuenta que es (2.52) la ecuación con la cual se va a determinar $w(x)$ para luego reemplazar en (2.51) y obtener la solución $y(x)$.

[33]Es una solución sencilla que hay que hallar por inspección si es que no se nos da, o encontrarla con algún método sencillo, heurístico.

Esta solución se comporta como una **solución auxiliar** porque en base a ella, encontramos la solución general.

■ **Ejemplo 2.63** Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - 2y + 4 - 4x$$

Resolución

En primer lugar hay que determinar la solución auxiliar o particular de la ecuación diferencial. Por inspección es fácil darse cuenta que tal solución es:

$$y_p(x) = 2$$

Luego, con la información de esta solución particular asumimos que la solución general de la ecuación diferencial está dada por

$$y(x) = 2 + \frac{1}{w(x)} \tag{2.53}$$

que al reemplazar en la ecuación diferencial resulta:

$$\frac{d}{dx}\left(2 + \frac{1}{w(x)}\right) = x\left(2 + \frac{1}{w(x)}\right)^2 - 2\left(2 + \frac{1}{w(x)}\right) + 4 - 4x$$
$$-\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dx} = \frac{4x}{w} + \frac{x}{w^2} - \frac{2}{w}$$

y de esto último la ecuación lineal en las variables x y w

$$\frac{dw}{dx} + (4x - 2)w = -x$$

cuya solución según (2.41) está dada por

$$\begin{aligned} w(x) &= \left[\int -xe^{\int (4x-2)dx} dx + k\right] e^{\int (2-4x)dx} \\ w(x) &= \left[k - \int xe^{2x^2-2x} dx\right] e^{2x-x^2} \end{aligned}$$

Después de hallado $w(x)$ reemplazamos en (2.53), y la solución de la ecuación diferencial es finalmente

$$y(x) = 2 + \frac{e^{x^2-2x}}{k - \int xe^{2x^2-2x}dx}$$

■

■ **Ejemplo 2.64** En la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{\cos x - 1} + \frac{y}{\operatorname{sen} x} = 0$$

la solución auxiliar es $y_1(x) = \tan x$. Encuentre la solución general.

Resolución

El lector antes debe verificar que y_1 es, en efecto, solución de la ecuación diferencial. Puesto que ya se cuenta con la solución auxiliar, entonces la solución general $y(x)$ se formula como:

$$y(x) = \tan x + \frac{1}{w(x)} \tag{2.54}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial y simplificando, se obtiene la ecuación lineal en las variables x y w:

$$\frac{dw}{dx} - \left(\frac{2\tan x}{\cos x - 1} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) w = \frac{1}{\cos x - 1}$$

que aplicando (2.41) su solución está dada por

$$w(x) = \left[\int \frac{1}{\cos x - 1} e^{-\int\left(\frac{2\tan x}{\cos x - 1} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)dx} dx + k\right] e^{-\int -\left(\frac{2\tan x}{\cos x - 1} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)dx} \tag{2.55}$$

Desarrollando la integral de la exponencial se tiene:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{2\tan x}{\cos x - 1} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) dx &= -\int \left(\frac{2}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) dx \\
&= -4\int \operatorname{cosec} 2x dx - \int \operatorname{cosec} x dx \\
&= -2\ln(\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x) - \ln(\operatorname{cosec} x - \cot x)
\end{aligned}$$

Luego reemplazando en (2.55)

$$\begin{aligned}
w(x) &= \left[\int \frac{(\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x)^2 (\operatorname{cosec} x - \cot x)}{\cos x - 1} dx + k\right] \\
&\quad \frac{1}{(\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x)^2 (\operatorname{cosec} x - \cot x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(x) &= \left[k - \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} (\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x)^2 dx\right] \\
&\quad \frac{1}{(\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x)^2 (\operatorname{cosec} x - \cot x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(x) &= \left[k - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx\right] \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)} \\
w(x) &= \left[k - \frac{1}{\cos x}\right] \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}
\end{aligned}$$

de donde se obtiene:

$$w(x) = \frac{\cos x(k\cos x - 1)}{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}$$

Poniendo la función $w(x)$ en (2.54), la solución de la ecuación diferencial es finalmente

$$y(x) = \tan x + \frac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{\cos x(k\cos x - 1)}$$

■

■ **Ejemplo 2.65** Para $\frac{1}{2\pi} < x < \frac{1}{\pi}$, considere la ecuación diferencial (de Riccati)

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - y + \frac{1}{x^2} \tag{2.56}$$

a) Encuentre la solución particular $y_p(x)$, si está dada por $y_p(x) = x^{\alpha}\cot\left(\frac{1}{x}\right)$.
b) Determine la solución general.

Resolución

a) Siendo la solución particular (o auxiliar)

$$y_p(x) = x^{\alpha}\cot\left(\frac{1}{x}\right)$$

y su derivada

$$y_p'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\cot\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\alpha-2}\csc^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

Reemplazando y_p y y_p' en (2.56) se tiene:

$$\alpha x^{\alpha}\cot\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\alpha-1}\csc^2\left(\frac{1}{x}\right) = x^{2\alpha}\cot^2\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha}\cot\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}$$

Expresando $\csc^2$ en término de $\cot^2$, la última ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} x^{\alpha-1}\cot^2\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha x^{\alpha}\cot\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\alpha-1} &= x^{2\alpha}\cot^2\left(\frac{1}{x}\right) \\ &- x^{\alpha}\cot\left(\frac{1}{x}\right) + x^{-2} \end{aligned}$$

de donde por comparación de los miembros de la ecuación es fácil ver que $\alpha = -1$. Por lo tanto

$$y_p(x) = \frac{1}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) Para hallar la solución general de (2.56) se asume que ésta es

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z(x)} \tag{2.57}$$

que al derivarla se tiene

$$y'(x) = y'_p(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)}$$

Luego, reemplazando en (2.56) se obtiene:

$$x\left(y'_p - \frac{z'}{z^2}\right) = \left(y_p + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(y_p + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{x^2}$$

Desarrollando los productos y agrupando convenientemente llegamos a la ecuación:

$$\underbrace{\left[xy'_p - \left(y_p^2 - y_p + \frac{1}{x^2}\right)\right]}_{(*)} - x\frac{z'}{z^2} = 2\frac{y_p}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$$

donde la expresión de (*) es cero por ser y_p solución de (2.56). Queda así la ecuación lineal de primer orden en las variables x y z

$$\frac{dz}{dx} + \underbrace{\left[\frac{2}{x^2}\cot\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]}_{p(x)} z = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{q(x)}$$

cuya solución según (2.41) está dada por

$$\begin{aligned}
z(x) &= \left\{\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + k\right\}e^{-\int p(x)dx} \\
&= \left\{-\int \frac{1}{x}e^{\int\left(\frac{2}{x^2}\cot\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)dx}dx + k\right\}e^{-\int\left(\frac{2}{x^2}\cot\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)dx} \\
&= \left\{k - \int \frac{1}{x^2}\csc^2\frac{1}{x}dx\right\}\frac{x}{\csc^2\frac{1}{x}} \\
&= \left(k - \cot\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\csc^2\frac{1}{x}} \\
z(x) &= x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\left(k\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Reemplazando $z(x)$ y $y_p(x)$ en (2.57) la solución general está dada por la función

$$y(x) = \frac{1}{x}\cot\frac{1}{x} + \frac{1}{x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\left(k\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)}$$

■

■ **Ejemplo 2.66** Para $x > 0$ considere la ecuación de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + e^{-2x}y^2 - \frac{1}{x}\left(1+4x+2x^2\right)y = -\frac{e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3) \tag{2.58}$$

a) Encuentre la solución particular y_p, si es de la forma

$$y_p(x) = e^{2x}(Ax+B)$$

b) Encuentre la solución general.

Resolución

a) Si la solución particular es como se indica, entonces reemplazando en (2.58) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[e^{2x}(Ax+B)\right] &+ e^{-2x}\left[e^{2x}(Ax+B)\right]^2 \\ &- \frac{1}{x}\left(1+4x+2x^2\right)\left[e^{2x}(Ax+B)\right] \\ &= -\frac{e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3) \end{aligned}$$

que al simplificar y agrupar convenientemente se convierte en

$$1+x+2x^2+x^3 = B+(2B-B^2)x+(2A+2B-2AB)x^2+(2A-A^2)x^3$$

Luego, aplicando criterio de comparación encontramos que $A = 1$ y $B = 1$. Queda de esta forma la solución particular

$$y_p(x) = e^{2x}(x+1)$$

b) Como ya se tiene la solución particular, entonces la solución general de la ecuación diferencial se la asume como

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{w(x)} \quad \text{que es equivalente a} \quad y(x) = e^{2x}(x+1) + \frac{1}{w(x)} \tag{2.59}$$

Reemplazando $y(x)$ en (2.58) y usando el hecho que y_p es solución se obtiene:

$$-\frac{w'(x)}{w^2(x)} + e^{-2x}\left[2\frac{y_p(x)}{w(x)} + \frac{1}{w^2(x)}\right] - \frac{1}{x}(1+4x+2x^2)\frac{1}{w(x)} = 0$$

que, simplificando, se llega a la ecuación diferencial lineal en las variables x y w

$$\frac{dw}{dx} + \frac{1}{x}(1+2x)w = e^{-2x}$$

cuya solución según (2.41) es:

$$w(x) = \frac{e^{-2x}}{x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

Ahora, si ponemos $w(x)$ en (2.59) la solución de la ecuación diferencial es

$$y(x) = e^{2x}(x+1) + \frac{2xe^{2x}}{x^2+2c}$$

■

■ **Ejemplo 2.67** a) Demuestre que la ecuación $y' + ay^2 + by + c = 0$, donde a, b, c son constantes, tiene una solución de la forma $y_1(x) = m$, si m es una raíz de la ecuación cuadrática $am^2 + bm + c = 0$.

b) Aplicando (a), resuelva $y' + y^2 + 3y + 2 = 0$.

Resolución

a) En efecto si $y_1(x) = m$ es solución de la ecuación diferencial, entonces al reemplazar en dicha ecuación se tiene:

$$\frac{d}{dx}(m) + am^2 + bm + c = 0$$

la cual nos conduce a:

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2.60}$$

Ahora, para que $y_1(x) = m$ sea solución, debe ocurrir que en efecto, m debe ser raíz de (2.60).

b) En la ecuación

$$y' + y^2 + 3y + 2 = 0$$

Si asumimos que $y_1(x) = m$ es solución, entonces

$$0 + m^2 + 3m + 2 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = -2$ y $m_2 = -1$. En este caso vemos que existen dos raíces distintas, por lo cual hay dos soluciones particulares distintas de la ecuación dadas por $y_1(x) = -2$ y $y_2(x) = -1$. Escogiendo la primera, la solución general según (2.51) estaría dada por

$$y(x) = -2 + \frac{1}{w(x)} \tag{2.61}$$

que al reemplazar en la ecuación diferencial resulta la ecuación lineal

$$\frac{dw}{dx} + w = 1$$

cuya solución es: $w(x) = 1 + k\,e^{-x}$. Poniendo la función $w(x)$ en (2.61) se tiene finalmente

$$y(x) = \frac{1}{1 + k e^{-x}} - 2$$

■

El lector debe resolver usando la segunda solución.

■ **Ejemplo 2.68** Dada la ecuación $\frac{dy}{dx} + 16x^2 + 8xy + y^2 = 0$, calcule la solución general, sabiendo que la solución auxiliar (o particular) es de la forma $y_p(x) = mx + n$, donde m y n son constantes.

Resolución

Reemplazando y_p en la ecuación diferencial se tiene

$$\frac{d}{dx}(mx+n) + 16x^2 + 8x(mx+n) + (mx+n)^2 = 0$$
$$\left(16 + 8m + m^2\right)x^2 + (8n + 2mn)x + \left(m + n^2\right) = 0$$

Como esto último ocurre para x en algún intervalo, entonces debe acontecer que el polinomio cuadrático debe ser idéntico a cero[34], para lo cual: $\begin{cases} 16 + 8m + m^2 = 0 \\ 8n + 2mn = 0 \\ m + n^2 = 0 \end{cases}$. Resolviendo el sistema se obtiene $m = -4$ y $n = \pm 2$, de donde proceden dos soluciones particulares

$$y_1(x) = 2 - 4x \qquad \text{y} \qquad y_2(x) = -2 - 4x$$

Escogiendo la primera solución, la solución general de la ecuación diferencial según (2.51) viene dada por

$$y(x) = 2 - 4x + \frac{1}{w(x)} \tag{2.62}$$

Reemplazando en la ecuación dada, resulta la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dw}{dx} - 4w = 1$$

[34]La justificación más idónea es usando el hecho que el conjunto $\{1, x, x^2\}$ es linealmente independiente, $\forall x \in \mathbb{R}$.

cuya solución es $w(x) = ke^{4x} - \frac{1}{4}$. Poniendo $w(x)$ en (2.62) se obtiene finalmente

$$y(x) = 2 - 4x + \frac{4}{4ke^{4x} - 1}$$

El lector debe resolver usando la segunda solución. ■

Proposición 2.1.4 Sean y_1, y_2 soluciones de la ecuación de Riccati $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$. Demostrar que su solución general es:

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y(x) - y_2(x)} = K\, e^{\int p(x)[y_1(x) - y_2(x)]dx}, \quad K \text{ es constante} \tag{2.63}$$

Demostración. Si y_1 es una solución particular de la ecuación de Riccati, hemos visto que su solución general está dada por

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{w(x)}$$

que al reemplazar en la ecuación diferencial se llegaba a

$$\frac{dw}{dx} + [2p(x)y_1(x) + q(x)]w = -p(x) \tag{2.64}$$

con la cual se determina $w(x)$. Ahora, si se tiene otra solución particular de la ecuación diferencial, ésta se obtiene a partir de la solución general. En este caso, siendo $y_2(x)$ también solución de la ecuación, entonces debe existir $w_2(x)$ de tal manera que

$$y_2(x) = y_1(x) + \frac{1}{w_2(x)}$$

donde $w_2(x)$ tiene que ser solución de (2.64), es decir:

$$\frac{dw_2}{dx} + [2p(x)y_1(x) + q(x)]w_2 = -p(x) \tag{2.65}$$

Si restamos (2.65) de (2.64), entonces se tiene:

$$\frac{d}{dx}(w - w_2) + [2p(x)y_1(x) + q(x)](w - w_2) = 0$$

que haciendo $z = w - w_2$ se transforma en:

$$\frac{dz}{dx} = -[2p(x)y_1(x) + q(x)]z$$

cuya resolución es como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{z} &= -[2p(x)y_1(x)+q(x)]dx \\
\int \frac{dz}{z} &= -\int [2p(x)y_1(x)+q(x)]dx \\
\ln z &= -\int [2p(x)y_1(x)+q(x)]dx + \ln c
\end{aligned}$$

Luego,

$$w(x) - w_2(x) = z = c\, e^{-\int [2p(x)y_1(x)+q(x)]dx} \tag{2.66}$$

Puesto que y_1, y_2 son soluciones de la ecuación de Riccati, entonces se cumple:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x) \\
\frac{dy_2}{dx} &= p(x)y_2^2 + q(x)y_2 + r(x)
\end{aligned}$$

que restando las ecuaciones nos da:

$$\frac{d}{dx}(y_2 - y_1) = p(x)(y_2+y_1)(y_2-y_1) + q(x)(y_2-y_1)$$

Esto último con el cambio de variable $u = y_2 - y_1$ se transforma en

$$\frac{du}{dx} = p(x)[y_2(x)+y_1(x)]u + q(x)u$$

cuya resolución es como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{du}{u} &= [p(x)(y_2(x)+y_1(x))+q(x)]dx \\
\int \frac{du}{u} &= \int [p(x)(y_2(x)+y_1(x))+q(x)]dx \\
\ln u &= \int [p(x)(y_2(x)+y_1(x))+q(x)]dx + \ln \overline{c}
\end{aligned}$$

de donde

$$y_2(x) - y_1(x) = u(x) = \overline{c}\, e^{\int [p(x)(y_2(x)+y_1(x))+q(x)]dx} \tag{2.67}$$

A continuación veamos el siguiente hecho, como $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{w(x)}$ y $y_2(x) = y_1(x) + \frac{1}{w_2(x)}$. Entonces

$$w(x) = \frac{1}{y(x) - y_1(x)} \quad \text{y} \quad w_2(x) = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}$$

Calculando la diferencia $w(x) - w_2(x)$ se obtiene:

$$w(x) - w_2(x) = \frac{1}{y(x) - y_1(x)} - \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)} \equiv -\frac{y(x) - y_2(x)}{(y_x - y_1(x))(y_2(x) - y_1(x))}$$

lo cual al reemplazar en (2.66) da como resultado

$$\frac{y(x) - y_2(x)}{y(x) - y_1(x)} = -[y_2(x) - y_1(x)]c\, e^{-\int [2p(x)y_1(x) + q(x)]dx}$$

En esto último usamos (2.67) para obtener

$$\frac{y(x) - y_2(x)}{y(x) - y_1(x)} = -\bar{c}c\, e^{\int [p(x)(y_2(x) + y_1(x)) + q(x)]dx}\, e^{-\int [2p(x)y_1(x) + q(x)]dx}$$

haciendo $d = -c\bar{c}$ y simplificando las integrales

$$\frac{y(x) - y_2(x)}{y(x) - y_1(x)} = d\, e^{\int p(x)(y_2(x) - y_1(x)]dx}$$

Invirtiendo (o elevando a la -1) ambos miembros y haciendo $K = \frac{1}{d}$ se obtiene finalmente

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y(x) - y_2(x)} = K\, e^{\int p(x)[y_1(x) - y_2(x)]dx}$$

que es lo que se tenía que demostrar. ■

■ **Ejemplo 2.69** Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x-1} - \frac{xy}{x-1} + 1$, usando el hecho que $y = 1$ y $y = x$ son soluciones.

Resolución

En este caso se tiene dos soluciones particulares de la ecuación diferencial. Poniendo $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = x$, la solución general $y(x)$ de acuerdo a lo expuesto en la proposición anterior está dada según (2.63) por

$$\frac{y(x) - 1}{y(x) - x} = Ke^{\int p(x)[1-x]dx}$$

donde $p(x) = \frac{1}{x-1}$. Resolviendo esto se tiene:

$$\frac{y(x) - 1}{y(x) - x} = Ke^{\int \frac{1}{x-1}(1-x)dx}$$
$$\frac{y(x) - 1}{y(x) - x} = Ke^{-x}$$

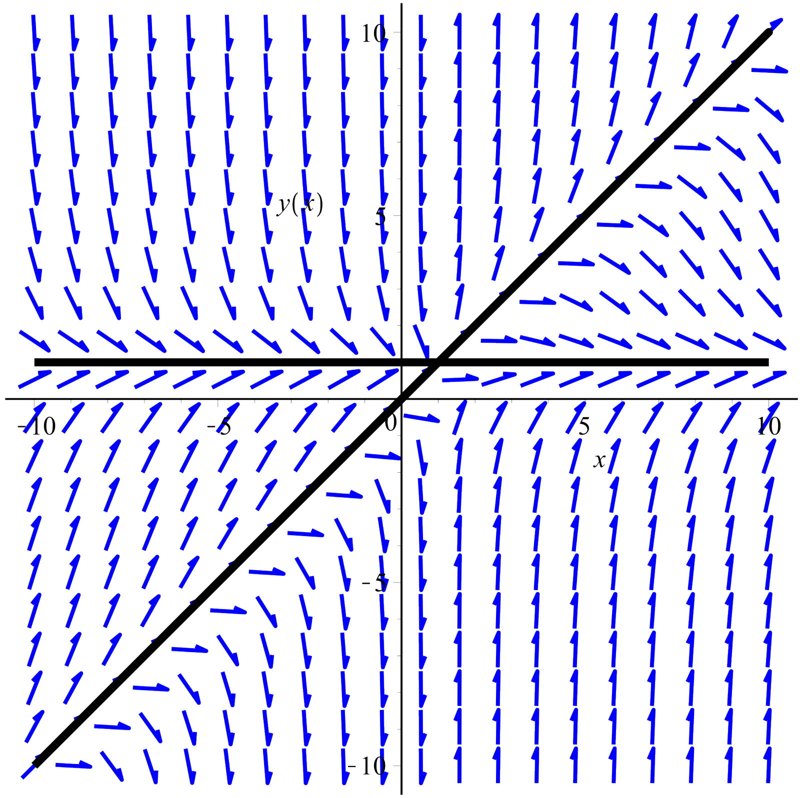


Figura 2.10: Campo de direcciones de la ecuación diferencial con las soluciones auxiliares $y = 1$, $y = x$.

Finalmente la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = x + \frac{x-1}{Ke^{-x} - 1}$$

En la figura 2.10 se muestra el campo de direcciones de la solución general (o ecuación diferencial) y las soluciones auxiliares. ∎

Observación

Sugerimos al lector resolver las ecuaciones diferenciales de los ejemplos 2.67 y 2.68 aplicando la proposición 2.1.4.

2.2 EJERCICIOS PROPUESTOS 2

1. Dada la ecuación diferencial $y' = \frac{1+\sqrt{x-y}}{1-\sqrt{x-y}}$, determine su solución general y solución singular.
2. Resuelva:
   a) $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$.
   b) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2(x-y+1)$
3. Resuelva: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+y-1}}{\sqrt{x+y+1}}$.
4. Resuelva: $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$.
5. Resuelva: $4x^2yy' = 2+3xy^2$.
6. Resuelva: $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2y-4x}{1+y+2x}$.
7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:
   a) $x^2\frac{dy}{dx} = 3(x^2+y^2)\arctan\frac{y}{x} + xy$
   b) $x^2\frac{dy}{dx} - 3xy = 2y^2$
   c) $\left(x\operatorname{sen}\frac{y}{x}\right)dy = \left(y\operatorname{sen}\frac{y}{x} + x\right)$
   d) $(x-y)dx - (x+y)dy = 0$
   e) $x\frac{dy}{dx} = 2x+3y$
   f) $xdy = \sqrt{x^2+y^2}dx$
   g) $\left[\operatorname{sen}\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}\right]dx = \frac{y}{x}dy$
   h) $ydx - \left(x+\sqrt{y^2-x^2}\right)dy = 0$
   i) $(2x^2+xy+y^2)dx + (2y^2-xy+x^2)dy = 0$
8. Resuelva aplicando cambio de variable
   a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy^2}{2x^2y}$
   b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-xy^2}{x+x^2y}$
9. Resuelva: $\begin{cases} 2x^2yy' = \tan(x^2y^2) - 2xy^2 \\ y(1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.
10. Resuelva: $x^2y' = y^2+5xy+4x^2$.
11. Resuelva: $\begin{cases} xyy' = 2y^2+4x^2 \\ y(2) = 4 \end{cases}$.
12. Resuelva: $\begin{cases} (y^2-4x^2)dy + 3xydx = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$.
13. Resuelva: $\begin{cases} y' = \frac{y-x}{y-x-1} \\ y(-5) = -5 \end{cases}$.
14. Resuelva las ecuaciones diferenciales que sean exactas
   a) $(2xy^3 + y\cos x)dx + (3x^2y^2 + \operatorname{sen} x)dy = 0$

b) $(2xy^4 + \operatorname{sen} y)dx + (4x^2y^3 + x\cos y)dy = 0$
c) $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx = \sqrt{x^2 - y}dy$
d) $\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ydy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$

15. Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{y^2-x^2-1}{y^2-x^2+1}$, transformando la ecuación a coordenadas polares[35] r y θ.
16. Muestre que si la ecuación $Mdx + N(x)dy = 0$ es tal que

$$\frac{x^2}{xM + yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \equiv F\left(\frac{y}{x}\right)$$

es decir, está en función de $\frac{y}{x}$. Entonces un factor integrante está dado por $e^{\int f(w)dw}$, donde $w = \frac{y}{x}$.
17. Determine el valor de n para que la ecuación diferencial $(xy^2 + nx^2y)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$ sea exacta, y luego resolver.
18. Encuentre el factor integrante apropiado para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales
a) $(y\ln y - 2xy)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$
b) $(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$
c) $(x^3 + xy^3)dx + 3y^2dy = 0$
d) $(2xy - y^2 + y)dx + (3x^2 - 4xy + 3x)dy = 0$
e) $\left(3y + \frac{2}{x}\right)dx + \left(x - \frac{1}{x^2}\right)dy = 0$
f) $y(4xy + 3)dx + x(2xy + 1)dy = 0$
g) $x(1 - y^3)dx - 3y^2dy = 0$
h) $y(\ln x - \ln y)dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$
i) $(y^3 + xy^2 + y)dx + (x^3 + x^2y + x)dy = 0$
j) $2\frac{dy}{dx} + y\tan x + 2\tan x\sec x + 1 = 0$
k) $\left(\frac{1}{x}\right)dx - (1 + xy^2)dy = 0$
l) $y(2x + y^3)dx + x(y^3 - x)dy = 0$
19. Una solución de $\operatorname{sen}(2x)\frac{dy}{dx} = 2y + 2\cos x$ permanece acotada cuando $x \to \frac{\pi}{2}$. Hallarla.
20. Sea $y(t)$ solución del problema $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = e^{t(y+1)} - \cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$. Demuestre que $y(t)$ tiene un mínimo relativo en 0.
21. Resuelva el problema: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + y = f(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$, teniendo en cuenta la función

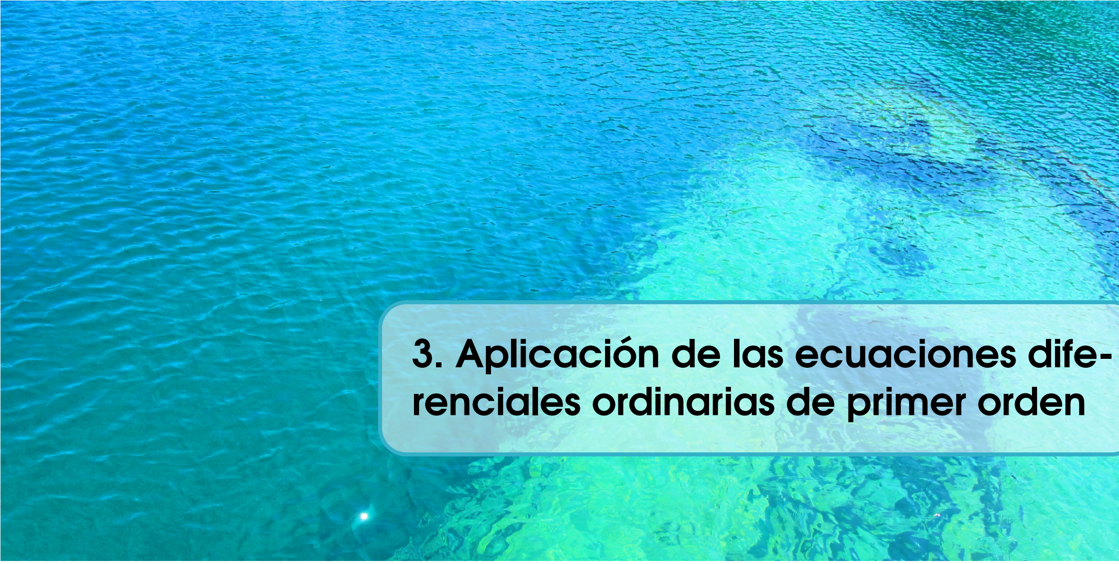
[35] En este caso, hacer $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ -1, & x>1\end{cases}.$$

22. Resuelva el problema: $\begin{cases}\frac{dy}{dx}+2xy=f(x)\\ y(0)=2\end{cases}$, teniendo en cuenta la función $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}.$
23. Resuelva el problema: $\begin{cases}\frac{dy}{dx}+p(x)y=4x\\ y(0)=3\end{cases}$, teniendo en cuenta la función $p(x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1\\ -\frac{2}{x}, & x>1\end{cases}.$
24. Resuelva: $xy'+y=y^2\ln x$.
25. Resuelva: $8xy'-y=-\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$.
26. Resuelva: $x^2y'+2x^3y=y^2(1+2x^2)$.
27. Resuelva los ejemplos 2.64 y 2.65 usando factor integrante.
28. Resuelva las ecuaciones de Riccati:
    a) $\frac{dy}{dx}+y^2=1+x^2$.
    b) $x^2y'+xy+x^2y^2=4$, su solución particular es de la forma $y_p(x)=\frac{A}{x}$.
    c) $3y'+y^2+\frac{2}{x^2}=0$.
    d) $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$.
    e) $y'+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x$.
    f) $(2+x^3)y'+2xy^2+x^2y+2=0$, su solución particular es de la forma $y_p(x)=ax$.
29. Dada la ecuación $\frac{dy}{dx}=y(\ln y)^2p(x)+y\ln y q(x)+yr(x)$. Transforme la ecuación en una de Riccati. Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones, encuentre la solución general. ¿Es dicha solución dada por $\frac{\ln y-y_1(x)}{\ln y-y_2(x)}=ce^{\int\frac{y(x)-y_2(x)}{x}dx}$?
30. Dada la ecuación: $y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$. Si $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $y_3(x)$ son tres soluciones particulares de esta ecuación, entonces demuestre que su solución general $y(x)$ está dada por la relación:

$$\frac{(y(x)-y_1(x))(y_2(x)-y_3(x))}{(y(x)-y_2(x))(y_1(x)-y_3(x))}=c,\ c \text{ es constante}$$

31. Dada la ecuación diferencial $y'+4x^2+4xy+y^2=0$, determine dos de sus soluciones particulares sabiendo que éstas son funciones lineales, luego determine su solución general usando factor integrante.



3. Aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

3.1 Trayectorias ortogonales

Se tiene una familia de curvas $F: \ f(x,y,c) = 0$. Aplicando diferenciación implícita eliminamos el parámetro c y esto nos permite expresar esta familia en términos de su ecuación diferencial. Así tenemos $F: \ \frac{dy}{dx} = \phi(x,y)$. El problema ahora es encontrar otra familia de trayectorias, de tal manera que si escogemos cualquiera de ellas, ésta es ortogonal con todas las curvas de la familia F.

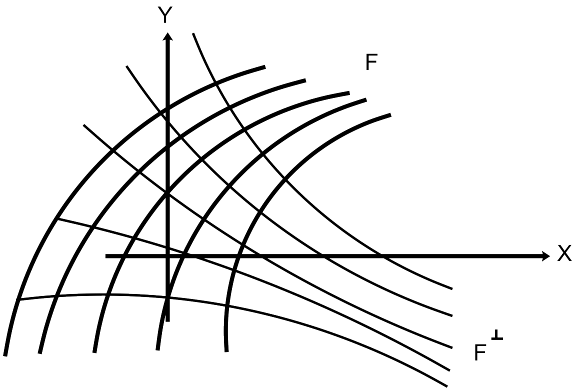


Figura 3.1: El gráfico muestra las familias de curvas ortogonales F y $F^{\perp}$.

Esta nueva familia de curvas, es la **familia de trayectorias ortogonales** a F y lo denotamos mediante $F^{\perp}$ (Ver figura 3.1). Para determinar la ecuación diferencial asociada a $F^{\perp}$, escogemos el punto del plano (x,y), la curva de F que pase por este punto tendrá allí pendiente $\phi(x,y)$, mientras que una curva de $F^{\perp}$ en dicho punto su pendiente[1] debe ser $-\frac{1}{\phi(x,y)}$. De esta manera se tiene

$$F^{\perp}: \ \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\phi(x,y)}$$

Ejemplo 3.1 Se tiene la familia de curvas $\mathcal{F}: \ x^2+cxy+y^2=1$. Encuentre la familia $\mathcal{F}^{\perp}$ de curvas ortogonales a $\mathcal{F}$ e indique la curva de $\mathcal{F}^{\perp}$ que pasa por el punto $(0,1)$.

Resolución

Se tiene la familia de curvas

$$\mathcal{F}: \ x^2+cxy+y^2=1 \tag{3.1}$$

de cuya derivación implícita se tiene:

$$2x+cy+cxy'+2yy'=0 \tag{3.2}$$

Despejando c de (3.1) se llega a

$$c = \frac{1-x^2-y^2}{xy}, \ \ xy \neq 0 \tag{3.3}$$

Poniendo (3.3) en (3.2), la familia de curvas $\mathcal{F}$ queda expresada con la ecuación diferencial:

$$\mathcal{F}: \ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{y^2-x^2-1}{y^2-x^2+1} = \phi(x,y)$$

Ahora, si $\mathcal{F}^{\perp}$ es la familia de curvas ortogonales a $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}^{\perp}$ está dada por la ecuación diferencial

$$\mathcal{F}^{\perp}: \ \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\phi(x,y)} \equiv -\frac{x}{y}\frac{y^2-x^2+1}{y^2-x^2-1} \tag{3.4}$$

La ecuación (3.4) no es homogénea en las variables x, y; sin embargo podemos resolverla aplicando el cambio de variable $z=y^2-x^2$, de donde

$$z' = 2yy'-2x \ \text{ y } \ y' = \frac{z'+2x}{2y}$$

con estos últimos resultados en (3.4) se tiene:

$$\frac{z'+2x}{2y} = -\frac{x}{y}\frac{z+1}{z-1}$$

[1]Dos curvas que se interceptan en un punto (x,y), son ortogonales si y sólo si, sus rectas tangentes son ortogonales. Además, dos rectas son ortogonales, si y sólo si, el producto de sus pendientes es -1.

cuya forma simplificada es $\frac{z-1}{z}dz = -4xdx$. Resolviendo esto se obtiene:

$$z - \ln|z| = c - 2x^2$$

que expresada en las variables x e y, la solución general (o familia de trayectorias ortogonales) está dada implícitamente por la relación:

$$y^2 - x^2 - \ln|y^2 - x^2| = c - 2x^2$$

Escogiendo la curva que pasa por el punto $(0,1)$ se tiene que $c = 1$. Por lo tanto la curva de la familia $\mathcal{F}^\perp$ que pasa por el punto indicado es:

$$y^2 - \ln|y^2 - x^2| = 1 - x^2$$

■

■ **Ejemplo 3.2** Se tiene la familia de curvas $\mathcal{F}: (x^2+y^2)^2 = c(x^2-y^2)$. Encuentre la familia $\mathcal{F}^\perp$ de curvas ortogonales a $\mathcal{F}$. Indique la curva de $\mathcal{F}^\perp$ que pasa por el punto $(1;2)$.

Resolución

En primer lugar se tiene la familia de curvas

$$\mathcal{F}: (x^2+y^2)^2 = c(x^2-y^2) \tag{3.5}$$

donde es fácil ver que

$$c = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2} \tag{3.6}$$

Derivando implícitamente (3.5) respecto de x se tiene

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') = c(2x-2yy') \tag{3.7}$$

Luego, poniendo (3.6) en (3.7), la pendiente de la familia $\mathcal{F}$ está dada por la relación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3-3xy^2}{y^3-3x^2y}$$

de donde se deduce que la familia de trayectorias ortogonales y su pendiente está dada por:

$$\mathcal{F}^\perp: \ \frac{dy}{dx} = -\frac{y^3-3x^2y}{x^3-3xy^2} \tag{3.8}$$

Para resolver (3.8) hacemos el cambio de variable $w = \frac{y}{x}$, para el cual

$$y = xw \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = w + x\frac{dw}{dx}$$

poniendo w en (3.8) se obtiene la ecuación diferencial

$$x\frac{dw}{dx} = \frac{2w(w^2+1)}{1-3w^2}$$

cuya resolución es como sigue:

$$\int \frac{1-3w^2}{w(w^2+1)}dw = \int \frac{2}{x}dx$$
$$\int \frac{dw}{w} - 2\int \frac{2w}{w^2+1}dw = 2\int \frac{dx}{x} + \ln k$$
$$\ln|w| - 2\ln(w^2+1) = 2\ln|x| + \ln k$$

De esto último

$$\frac{w}{(w^2+1)^2} = kx^2$$

Expresando esta relación en las variables x e y según el cambio de variable efectuado, se obtiene que la familia de curvas ortogonales está dada por:

$$\mathcal{F}^{\perp}: \; xy = k(x^2+y^2)^2$$

Para determinar la curva que pasa por el punto $(1,2)$, evaluamos $y(1) = 2$ en la familia $\mathcal{F}^{\perp}$ y se obtiene $k = \frac{2}{25}$. Luego la trayectoria ortogonal que pasa por el punto indicado es

$$xy = \frac{2}{25}(x^2+y^2)^2$$

■

■ **Ejemplo 3.3** Halle las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que consiste en todas las circunferencias que pasan por el origen y cuyos centros están sobre la recta $y = x$.

Resolución

Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las circunferencias que pasan por el origen y tienen sus centros sobre la recta $y = x$ como se muestra en la figura 3.2. Si C es una de tales circunferencias, su ecuación es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (*)$$

la cual debe verificar:

- $(0,0) \in C$, entonces $h^2 + k^2 = r^2$.
- (h,k) está en la recta $y = x$, entonces $h = k$.

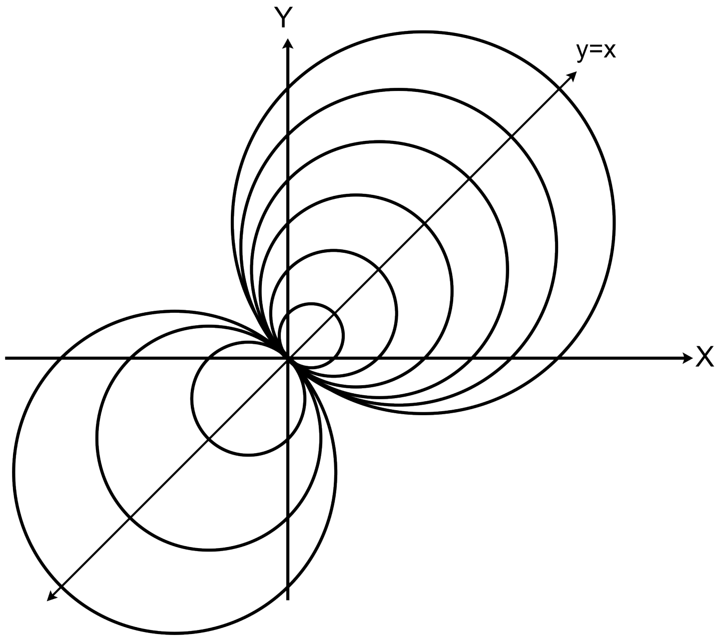


Figura 3.2: Familia de circunferencias que pasan por el origen y tienen sus centros sobre la recta $y = x$.

De estos dos resultados, se deduce que $r^2 = 2h^2$. Reemplazando en (*) se obtiene la familia de curvas $\mathcal{F}$ y su ecuación, dada por:

$$\mathcal{F}:\ x^2 + y^2 - 2h(x+y) = 0$$

De esta ecuación se deduce que

$$2h = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$

lo cual hay que derivar implícitamente respecto de x para obtener la ecuación diferencial de $\mathcal{F}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(2h) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+y^2}{x+y}\right]\\
&0 = \frac{(2x+2yy')(x+y) - (x^2+y^2)(1+y')}{(x+y)^2}\\
&y'(2xy+y^2-x^2) = y^2 - x^2 - 2xy
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{F}:\ \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2-2xy}{2xy+y^2-x^2}$$

Ahora, si $\mathcal{F}^{\perp}$ es la familia de trayectorias ortogonales a $\mathcal{F}$, entonces debe ocurrir que la familia $\mathcal{F}^{\perp}$ y su pendiente[2] debe estar dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{F}^{\perp}:\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+y^2-x^2}{y^2-x^2-2xy} \tag{3.9}$$

Para resolver (3.9) hacemos el cambio de variable $w=\frac{y}{x}$, según el cual

$$y=xw \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}=w+x\frac{dw}{dx}$$

Reemplazando esto último en (3.9) y simplificando, se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{w^2-2w-1}{1-w+w^2-w^3}dw=\frac{dx}{x}$$

cuya resolución se hace en seguida

$$\begin{aligned}
&\int\frac{w^2-2w-1}{(w^2+1)(w-1)}dw=-\int\frac{dx}{x}+\ln c\\
&\int\frac{2w}{w^2+1}dw-\int\frac{dw}{w-1}=-\ln|x|+\ln c\\
&\ln(w^2+1)-\ln|w-1|=-\ln|x|+\ln c\\
&\ln\frac{w^2+1}{|w-1|}=\ln\frac{c}{|x|}\\
&\frac{w^2+1}{w-1}=\frac{c}{x}
\end{aligned}$$

Expresando la última relación en las variables x e y, se obtiene:

$$x^2+y^2=c(y-x)$$

de donde al completar cuadrados se tiene finalmente

$$\mathcal{F}^{\perp}:\ \left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{2}$$

Vemos que las trayectorias ortogonales corresponden a circunferencias que también pasan por el origen y que sus centros están sobre la recta $y=-x$. ■

[2]O ecuación diferencial.

Ejemplo 3.4 Una familia de curvas está determinada por la ecuación

$$x^2 + 3y^2 = cy$$

a) Determine la familia de curvas ortogonales.
b) Determine aquella curva ortogonal que pasa por el punto $(1,2)$.

Resolución

a) En primer lugar se nos da la familia de curvas[3]:

$$\mathcal{F}: \ x^2 + 3y^2 = cy \tag{3.10}$$

Derivando implícitamente respecto de x para determinar la pendiente de $\mathcal{F}$, se tiene:

$$2x + 6yy' = cy' \tag{3.11}$$

Pero en (3.10) es fácil ver que $c = \frac{x^2+3y^2}{y}$; luego poniendo esta expresión de c en (3.11) se tiene finalmente que la pendiente de $\mathcal{F}$ está dada según la expresión

$$\mathcal{F}: \ \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2}$$

Ahora, si $\mathcal{F}^{\perp}$ es la familia de trayectorias ortogonales a $\mathcal{F}$, entonces debe ocurrir que su pendiente debe estar dada según la relación:

$$\mathcal{F}^{\perp}: \ \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

Para resolver esta ecuación diferencial hacemos el cambio de variable $w = \frac{y}{x}$, según el cual se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{x}\frac{w^2-1}{2w}$$

cuya resolución se hace a continuación:

$$\frac{2w}{w^2-1}dw = \frac{1}{x}dx, \ w \neq 1, \ w \neq -1$$
$$\int \frac{2w}{w^2-1}dw = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$
$$\ln|w^2-1| = \ln|x| + \ln c$$

de donde $w^2 = cx + 1$, puesto que $w = \frac{y}{x}$; entonces $\mathcal{F}^{\perp}$ y su ecuación está dada por

$$\mathcal{F}^{\perp}: \ y^2 = x^2(1+cx) \tag{3.12}$$

[3]Es una familia de elipses que pasan todas por el origen.

Debemos indicar que las soluciones estacionarias $w = \pm 1$ que equivalen a las rectas $y = \pm x$ también son trayectorias ortogonales[4]. Ilustramos ambas familias de curvas ortogonales en la figura 3.3

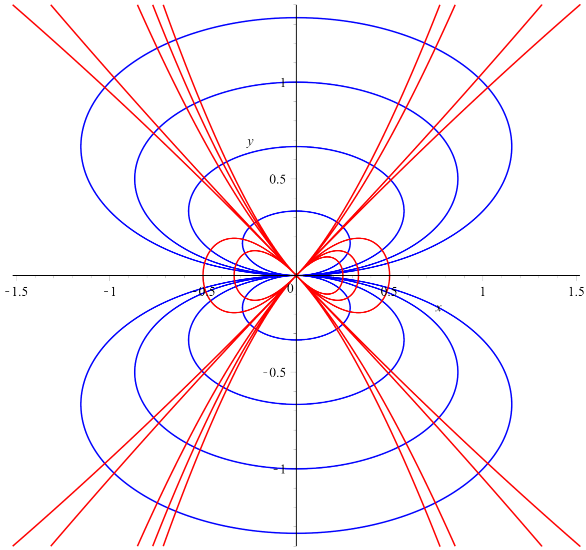


Figura 3.3: Representación geométrica de las familias de curvas ortogonales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{\perp}$.

b) Para determinar la curva ortogonal que pasa por el punto $(1,2)$, evaluamos $y(1) = 2$ en (3.12) y se obtiene que $c = 3$. Por lo tanto la curva ortogonal que pasa por el punto indicado es:

$$y(x) = x\sqrt{1+3x}, \quad \mathrm{Dom}(y) = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right\rangle$$

■

■ **Ejemplo 3.5** Halle las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$\mathcal{F}: \; x^2 + cy^2 = c$$

Resolución

Para $c > 0$ vemos que $\mathcal{F}$ es una familia de elipses, mientras que para $c < 0$ es una familia de hipérbolas. Derivando implícitamente la ecuación de $\mathcal{F}$ respecto de x se tiene

$$cyy' = -x \tag{3.13}$$

[4]Pueden ser obtenidas haciendo $c = 0$ en la ecuación de $\mathcal{F}^{\perp}$.

Puesto que $c = \frac{x^2}{1-y^2}$, al reemplazar en (3.13) se obtiene la pendiente de $\mathcal{F}$, la cual escribimos así:

$$\mathcal{F}: \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1-y^2}{xy}$$

Ahora, si $\mathcal{F}^{\perp}$ es la familia de trayectorias ortogonales a $\mathcal{F}$, entonces su pendiente es como sigue:

$$\mathcal{F}^{\perp}: \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1-y^2} \tag{3.14}$$

Resolviendo (3.14) se tiene

$$\frac{1-y^2}{y}dy = xdx$$
$$\int \frac{1-y^2}{y}dy = \int xdx + \frac{k}{2}$$
$$\ln|y| - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{k}{2}$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\mathcal{F}^{\perp}: \quad x^2 + y^2 = \ln y^2 + k$$

■

■ **Ejemplo 3.6** En el movimiento de fluidos, la trayectoria de una partícula de un fluido se conoce como línea de corriente y las trayectorias ortogonales de este tipo como líneas equipotenciales. Suponga que las líneas de corriente son $y^2 - x^2 = c$. Demuestre que las paredes del canal que se muestran en la figura

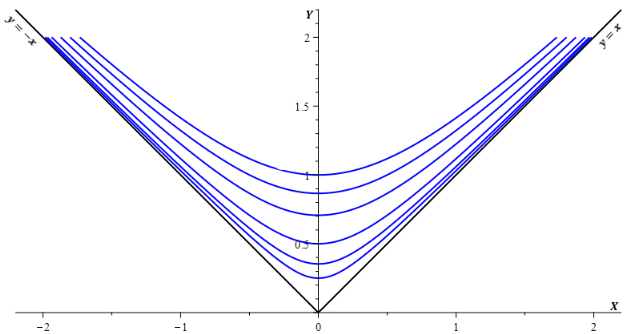


Figura 3.4:

3.4 son líneas de corriente, de modo que se puede considerar el flujo como en torno de una esquina. Hallar y trazar la gráfica de las líneas equipotenciales. ¿A qué se debe el nombre de líneas equipotenciales?

Resolución

Sea $\mathcal{F}: \; y^2 - x^2 = c$ la familia de hipérbolas, que vendrían a ser las líneas de corriente que indica el problema. Derivando implícitamente la ecuación respecto de x se tiene la pendiente de $\mathcal{F}$ y escribimos

$$\mathcal{F}: \; \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Ahora, si $\mathcal{F}^{\perp}$ es la familia de trayectorias ortogonales a $\mathcal{F}$, esto es, las curvas equipotenciales, entonces $\mathcal{F}^{\perp}$ con su pendiente es

$$\mathcal{F}^{\perp}: \; \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \tag{3.15}$$

Resolviendo (3.15) se tiene: $\ln|y| + \ln|x| = \ln k$, de donde

$$\mathcal{F}^{\perp}: \; y = \frac{k}{x}, \; y > 0$$

que corresponde a una familia de hipérbolas equiláteras cuyos ejes son las rectas $y = \pm x$, las cuales son ortogonales (Ver figura 3.5). Se llaman líneas

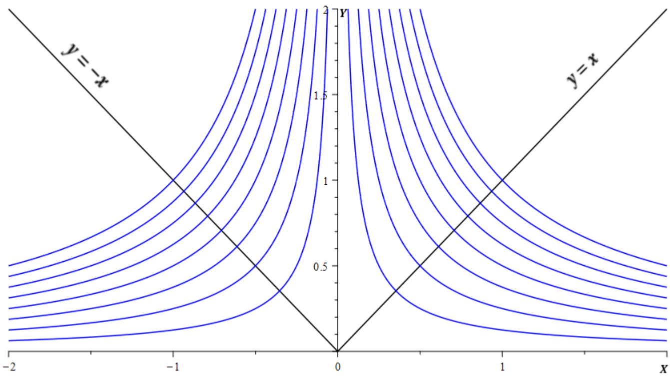


Figura 3.5: Curvas de $\mathcal{F}^{\perp}$ con las rectas $y = \pm x$, $y > 0$.

equipotenciales porque el potencial calculado en cualquier punto de una curva de $\mathcal{F}^{\perp}$ es constante. ■

■ **Ejemplo 3.7** Muestre que las familias de curvas

$$\mathcal{F}_1: \; x^2 + 4y^2 = c_1 \; \text{ y } \; \mathcal{F}_2: \; y = c_2 x^4$$

son ortogonales.

Resolución

Para que las familias $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ sean ortogonales, debe ocurrir que el producto de sus pendientes es -1. En efecto:
En la familia $\mathcal{F}_1: \ x^2+4y^2=c_1$, si derivamos implícitamente su ecuación respecto de x se tiene: $2x+8yy'=0$, de donde:

$$\mathcal{F}_1: \ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y} \tag{3.16}$$

Asimismo, en la familia $\mathcal{F}_2: \ y=c_2x^4$ también derivamos implícitamente respecto de x para obtener: $y'=4c_2x^3$. Pero $c=\frac{y}{x^4}$, entonces $\mathcal{F}_2$ y su pendiente está dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{F}_2: \ \frac{dy}{dx}=-\frac{4y}{x} \tag{3.17}$$

Por último, si multiplicamos las pendientes de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dadas en (3.16) y (3.17) respectivamente, se obtiene: -1. Por lo tanto las familias de curvas $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, son ortogonales. ■

■ **Ejemplo 3.8** Encuentre la constante a para que las familias

$$y^3=c_1x \ \text{ y } \ x^2+ay^2=c^2$$

sean ortogonales.

Resolución

Ponemos $\mathcal{F}_1: \ y^3=c_1x$ y $\mathcal{F}_2: \ x^2+ay^2=c^2$. Si derivamos implícitamente la ecuación de $\mathcal{F}_1$ se obtiene:

$$\mathcal{F}_1: \ \frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}$$

Haciendo lo mismo para la ecuación de $\mathcal{F}_2$ se tiene

$$\mathcal{F}_2: \ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{ay}$$

Para que $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ sean ortogonales, debe ocurrir que el producto de las pendientes debe ser -1. Así tenemos

$$\frac{3y}{x}\left(\frac{-x}{ay}\right)=-1$$

de donde $a=3$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son ortogonales si y solo si, $a=3$. ■

■ **Ejemplo 3.9** Muestre que la familia de parábolas $y^2 = 4cx + 4c^2$ es "a sí misma ortogonal". ■

Resolución

Sea $\mathcal{F}: \ y^2 = 4cx + 4c^2$. Calculando la derivada respecto de x y poniendo $c = -\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$, se obtiene:

$$\mathcal{F}: \ \frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

Si $\mathcal{F}^{\perp}$ es la familia de trayectorias ortogonales a $\mathcal{F}$, entonces la pendiente (o ecuación diferencial) de $\mathcal{F}$ está dada por:

$$\mathcal{F}^{\perp}: \ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x \mp \sqrt{x^2+y^2}} \tag{3.18}$$

La resolución de la ecuación (3.18) es como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 \mp \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

que poniendo $w = \frac{y}{x}$ se convierte en $\frac{1 \mp \sqrt{1+w^2}}{w\sqrt{1+w^2}} dw = \pm \frac{dx}{x}$. Luego

$$\int \frac{1 \mp \sqrt{1+w^2}}{w\sqrt{1+w^2}} dw = \pm \int \frac{dx}{x}$$

Poniendo $w = \tan\theta$ en la integral de la izquierda se tiene:

$$\begin{aligned}
&\int \operatorname{cosec}\theta d\theta \mp \int \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta} = \pm \ln|x| \mp \ln k \\
&\ln|\operatorname{cosec}\theta| \mp \ln|\tan\theta| = \pm \ln|x| \mp \ln k \\
&x = k\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}
\end{aligned}$$

Expresando el lado derecho en función de w y simplificando

$$\begin{aligned}
x\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\right) &= \frac{k}{\sqrt{1+w^2}} \\
x &= \frac{k \mp x}{\sqrt{1+w^2}}
\end{aligned}$$

Luego del cambio de variable $w = \frac{y}{x}$ se tiene finalmente

$$\mathcal{F}^{\perp}: \ y^2 = \mp 2cx + (\mp k)^2$$

donde tomando indistintamente del signo $c = \mp k$ se obtiene

$$\mathcal{F}^{\perp}: \; y^2 = 2cx + c^2$$

En esto último si ponemos $2c$ en lugar de c vemos que

$$\mathcal{F}^{\perp}: \; y^2 = 4cx + 4c^2$$

que es la misma ecuación de $\mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{\perp}$ coinciden, es decir se trata de la misma familia de curvas.

En los siguientes ejemplos se estudiará el caso donde dos familias de curvas se interceptan en un ángulo que no necesariamente es 90^o.

■ **Ejemplo 3.10** a) Deduzca una ecuación para que dos rectas se intercepten formando un ángulo de 45^o.

b) Usando a), determine la familia de curvas en la cual cada uno de sus miembros corta a cada miembro de la familia de líneas rectas $y = mx$ en un ángulo de 45^o.

Resolución

a) Sean L_1 y L_2, dos rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente como se muestran en la figura 3.6. Según dicha figura:

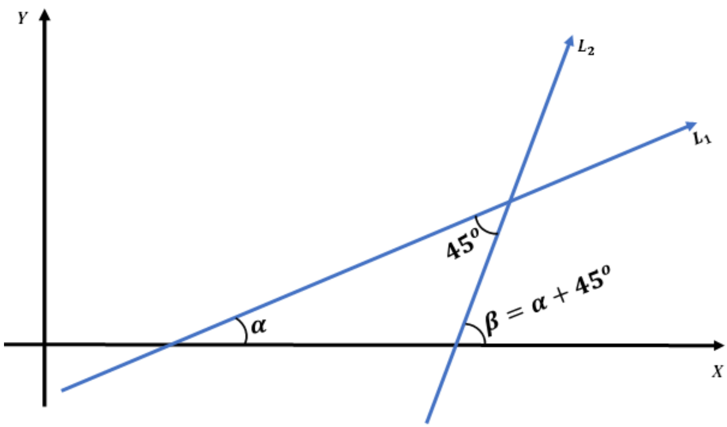


Figura 3.6: Dos rectas L_1 y L_2 que se interceptan en un ángulo de 45^o.

$$m_1 = \tan\alpha \qquad y \qquad m_2 = \tan\beta$$

Puesto que $\beta = 45^o + \alpha$, entonces

$$\tan\beta = \tan(45^o + \alpha) = \frac{\tan 45^o + \tan\alpha}{1 - \tan 45^o \tan\alpha}$$

Luego, la ecuación que relaciona las pendientes de dos rectas que se cortan en un ángulo de 45^o es:

$$m_2 = \frac{1+m_1}{1-m_1} \tag{3.19}$$

b) Dos curvas se cruzan en un ángulo de 45^0, si sus rectas tangentes forman un ángulo de 45^o, es decir, sus pendientes satisfacen (3.19).
Procediendo a resolver el problema, se tiene la familia de rectas:

$$\mathcal{F}: \;\; y = mx$$

de donde: $m = \frac{y}{x}$; derivando esta ecuación respecto de x, se obtiene la pendiente para la familia $\mathcal{F}$ dada por:

$$\mathcal{F}: \;\; \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \equiv m_2$$

Sea $\mathcal{F}^*$ la familia de curvas que se interceptan con $\mathcal{F}$ formando ángulo de 45^o. Si $\frac{dy}{dx} \equiv m_1$ es su pendiente, entonces junto con m_2 deben satisfacer (3.19), es decir, debe ocurrir

$$\mathcal{F}^*: \; \frac{y}{x} = \frac{1+\frac{dy}{dx}}{1-\frac{dy}{dx}}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned}
& y - y\frac{dy}{dx} = x + x\frac{dy}{dx} \\
& \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, \;\; \text{haciendo } w = \frac{y}{x} \\
& x\frac{dw}{dx} = -\frac{1+w^2}{1+w} \\
& \int \frac{dw}{1+w^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2w}{1+w^2}dw = -\int \frac{dx}{x} \\
& \arctan w + \frac{1}{2}\ln(1+w^2) = -\ln|x| + \frac{1}{2}c \\
& 2\arctan w + \ln(x^2(1+w^2)) = c
\end{aligned}$$

Expresando en las variables x e y se tiene finalmente

$$\mathcal{F}^*: \;\; \arctan\frac{y}{x} + \ln(x^2+y^2) = c$$

■

Ejemplo 3.11 Determine la curva que pasa por $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y corta a cada miembro de la familia $x^2 + y^2 = c^2$ en un ángulo de 60^o.

Resolución

Sea $\mathcal{F}: x^2 + y^2 = c^2$ la familia de circunferencias con centro en el origen y $\mathcal{F}^*$ la familia de curvas que interceptan a $\mathcal{F}$ en un ángulo de 60^o. Expresando ambas familias en término de sus pendientes, se tiene:

$$\mathcal{F}^*: \ \frac{dy}{dx} = m_1 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}: \ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Para que las curvas se intercepten en un ángulo de 60^o las pendientes deben cumplir[5] la ecuación:

$$m_1 = \frac{\sqrt{3} + \frac{-x}{y}}{1 - \sqrt{3}\frac{-x}{y}} \quad \text{o} \quad -\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3} + m_1}{1 - \sqrt{3}m_1}$$

de donde vemos que

$$\mathcal{F}^*: \ \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}y - x}{y + \sqrt{3}x} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + \sqrt{3}y}{\sqrt{3}x - y} \tag{3.20}$$

Resolviendo la primera ecuación diferencial de (3.20) se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}y - x}{y + \sqrt{3}x}, \text{ haciendo } w = \frac{y}{x}\\
&w + x\frac{dw}{dx} = \frac{\sqrt{3}w - 1}{w + \sqrt{3}}\\
&\int \frac{w + \sqrt{3}}{1 + w^2} dw = -\int \frac{dx}{x}\\
&\frac{1}{2}\ln(1 + w^2) + \sqrt{3}\arctan w = -\ln|x| + \frac{1}{2}c\\
&\ln\left[x^2(1 + w^2)\right] + 2\sqrt{3}\arctan w = c
\end{aligned}$$

que en las variables x e y se tiene la familia de curvas

$$\ln(x^2 + y^2) + 2\sqrt{3}\arctan\frac{y}{x} = c$$

resolviendo la otra ecuación se tiene:

$$\ln(x^2 + y^2) - 2\sqrt{3}\arctan\frac{y}{x} = c$$

[5] Sean L_1 y L_2 dos rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. L_1 y L_2 se interceptan en un ángulo de 60^o, si y sólo si, $m_2 = \frac{\sqrt{3}+m_1}{1-\sqrt{3}m_1}$.

Finalmente

$$F^*: \quad \ln(x^2+y^2) \pm 2\sqrt{3}\arctan\frac{y}{x} = c$$

Para obtener la curva que pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, hacemos $y(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y se obtiene $c = \pm\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. Luego la ecuación de la curva es:

$$\ln(x^2+y^2) \pm 2\sqrt{3}\arctan\frac{y}{x} = \pm\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

■

Proposición 3.1.1 Muestre que si una ecuación diferencial de una familia de curvas en coordenadas polares (r,θ) está dada por

$$\frac{dr}{d\theta} = f(r,\theta)$$

entonces una ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales es:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{f(r,\theta)} \tag{3.21}$$

Demostración. Sea C la curva en las coordenadas (r,θ), su derivada en estas coordenadas está dada por $\frac{dr}{d\theta}$. Esta derivada no es la pendiente de la recta tangente, sólo representa la variación de r respecto de θ, para calcular la pendiente de la recta tangente hay que escribir la curva en coordenadas cartesianas vía coordenadas paramétricas, así se tiene $C: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$, calculando la pendiente de la curva vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{\theta}(r\operatorname{sen}\theta)}{\frac{d}{d\theta}(r\cos\theta)} = \frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} \tag{3.22}$$

Ahora, si $C^{\perp}$ es una curva ortogonal a C, entonces su pendiente es $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. Poniendo $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ en (3.22) se tiene

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} &= \frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{r\operatorname{sen}\theta - r'\cos\theta}{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}, \quad \text{usando (3.22)} \\
\frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} &= \frac{r\operatorname{sen}\theta - r'\cos\theta}{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}
\end{aligned}$$

entonces

$$(r')^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2rr' \operatorname{sen}\theta\cos\theta \quad + \quad r^2\cos^2\theta$$
$$= \quad -r^2\operatorname{sen}^2\theta + 2rr'\operatorname{sen}\theta\cos\theta - (r')^2\cos^2\theta$$

de donde al simplificar vemos que

$$(r')^2 = -r^2$$

De esto último se obtiene la ecuación diferencial para $C^{\perp}$, la cual viene dada por $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{r'}$; como $\frac{dr}{d\theta} = f(r,\theta)$, entonces

$$C^{\perp}: \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{f(r,\theta)}$$

■

■ **Ejemplo 3.12** Determine las trayectorias ortogonales de la cardioide $r = c(1-\cos\theta)$

Resolución

Para resolver este problema hay que aplicar la proposición anterior. En efecto, sea $C : r = c(1-\cos\theta)$, derivando la ecuación respecto de θ se obtiene

$$\frac{dr}{d\theta} = c\operatorname{sen}\theta \tag{3.23}$$

Ahora, si ponemos $c = \frac{r}{1-\cos\theta}$ en (3.23) se tiene la ecuación diferencial de la cardioide dada por

$$C: \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$$

Si $C^{\perp}$ es la familia de trayectorias ortogonales a la cardioide, entonces según (3.21) su ecuación diferencial es:

$$C^{\perp}: \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{\frac{r\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}}$$

Simplificando

$$C^{\perp}: \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{r(1-\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta}$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}d\theta$$
$$\ln|r| = \int \frac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}d\theta + \ln k$$
$$\ln|r| = \ln|\operatorname{sen}\theta| - \ln|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta|$$

Finalmente, simplificando

$$C^{\perp}: \quad r = \frac{k \operatorname{sen}^2 \theta}{1 - \cos \theta}$$

Ilustramos las trayectorias de C y $C^{\perp}$ en la figura 3.7. ■

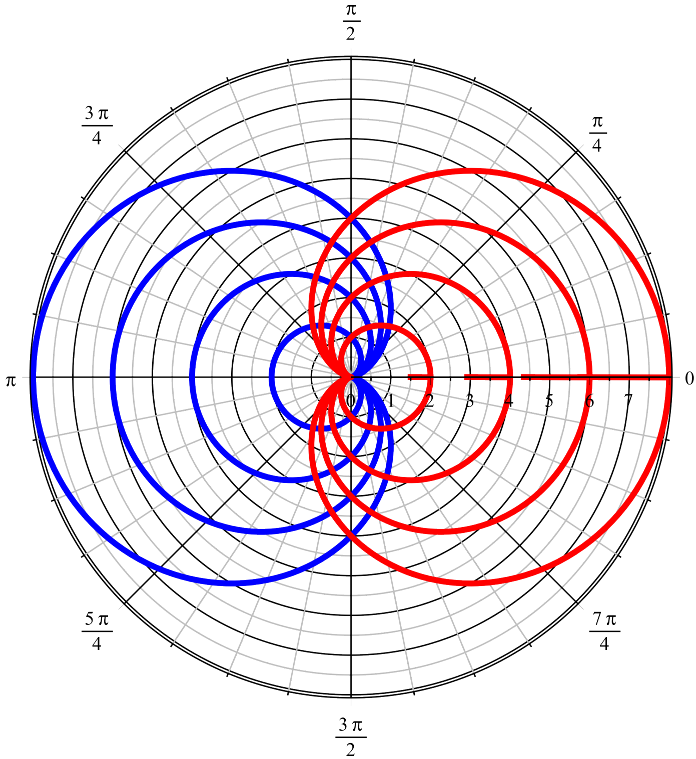


Figura 3.7: El gráfico muestra las trayectorias ortogonales de C y $C^{\perp}$.

3.1.1 Ejercicios 3.1

1. Halle las trayectorias ortogonales a cada una de las familias de curvas que se indican a continuación. Trace las gráficas de algunas de ellas.
   a) $y = x + ce^{-x}$
   b) $y^2 = ce^x + x + 1$
   c) $y = cx^2$
   d) $y = \sqrt{x+c}$
   e) $y = \sqrt{c + \ln x}$

f) $y = ce^{-x^2}$
g) $y = ce^{-2x}$
h) $y^2 + 2xy - x^2 = c$
i) $\cos x \operatorname{senh} y = c$
j) $e^x \cos y = c$
k) $y^2 = x^2 + ax^3$
l) $x = \ln \frac{a}{y}$
m) $y = a(\operatorname{cosec} x + \cot x)$
n) $\cos y - \cosh x = a \operatorname{senh} x$
ñ) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$
o) $2x^2 - xy + y^2 = a$

2. Obtenga la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas cuya ecuación es:
$$(x-1)^2 = cxy$$
3. Encuentre la ecuación de las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dada por la ecuación
$$y^2 = c(x^2 - 1)$$
4. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas
$$\mathcal{F}: \; x^2 + y^2 = 2cy$$
5. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia $\mathcal{F}: \; y^3 = cx^2$.
6. Determine las trayectorias ortogonales de cada familia de curvas y encuentre miembros particulares de cada una que pasen por el punto P que se indique:
   a) $x^2 + cy^2 = 1$, $P = (2,1)$.
   b) $x^2 = cy + y^2$, $P = (3,-1)$.
   c) $y = c\tan 2x + 1$, $P = \left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$.
   d) $y^2 = c(1 + x^2)$, $P = (-2,5)$.
   e) $y = ce^{2x} + 3x$, $P = (0,3)$.
7. Mediante experimento se muestra que las líneas de fuerza eléctrica de dos cargas opuestas de la misma intensidad y que se encuentran en $(-1,0)$ y $(1,0)$ son los círculos que pasan por $(-1,0)$ y $(1,0)$. Demuestre que estos círculos están dados por la ecuación $x^2 + (y-c)^2 = 1 + c^2$. Luego determine las trayectorias ortogonales (líneas equipotenciales).
8. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias que pasan por el origen y tienen su centro sobre el eje de las abscisas.
9. Encuentre las trayectorias ortogonales a la familia de curvas integrales de $y(1-x)dx + x^2(1-y)dy = 0$.
10. Muestre que la familia $\frac{x^2}{a^2+c} + \frac{y^2}{b^2+c} = 1$ donde a y b son constantes dadas, es así mismo ortogonal. Esta se llama una familia de cónicas confocales. Grafique algunos miembros de la familia.

11. Encuentre todas las curvas que cortan a la familia $y = ce^x$ en un ángulo constante α.
12. Encuentre las trayectorias ortogonales de:
    a) $r = c\cos\theta$
    b) $r = e^{r\theta}$

3.2 Problemas de mezclas

Este tipo de problemas trata acerca del proceso dinámico de cambio que se da entre dos sustancias, donde una de ellas se comporta como soluto y la otra como solvente; por ejemplo: la sal con agua, algún contaminante en el agua, alcohol con agua, colorante con agua o alcohol, un cierto gas en el aire, etc. Un dato importante que interviene en este tipo de problemas es la concentración, que no es otra cosa que la comparación del soluto con el solvente, es decir, la cantidad de soluto que está disuelto en una cierta cantidad de solvente. Por ejemplo:
Suponer que la concentración de sal en un tanque es de 0,8 gr/l. Esto significa que en un litro de agua están disueltos 0,8 gramos de sal, o equivalentemente, en 5 litros de agua están disueltos 4 gramos de sal. Para determinar la concentración, se calcula

$$\text{concentración} = \frac{\text{soluto}}{\text{solvente}}$$

A continuación se propone algunos problemas con su resolución.

■ **Ejemplo 3.13** Un tanque con una capacidad de 500 litros, contiene originalmente 200 litros de agua con 100 libras de sal en solución. Agua conteniendo 1 lb de sal por litro es introducida a una rapidez de 2 l/min, y la mezcla es desalojada del tanque a una rapidez de 1 l/min.

a) Determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo antes de que la solución llene el tanque.
b) Determine la concentración (en lb por litro) de sal en el tanque en el instante en que se llena.
c) Compare esta concentración con la concentración teórica límite si suponemos que el tanque tiene capacidad infinita. ¿Qué opina usted de ello?

Resolución

a) La capacidad del tanque es de 500 litros. Sea $v(t)$ la cantidad (o el volumen) de agua salina en cualquier instante t (min) y $x(t)$ la cantidad de sal (lb) contenida (disuelta) en el tanque. Como el tanque en un principio ya tenía sal, entonces $x(0) = 100$. Para determinar $v(t)$, nos fijamos en cuanta solución entra y sale del tanque. Al respecto vemos que el agua ingresa con una rapidez de 2 l/min y sale a 1 l/min, lo que significa que en un minuto el tanque gana un litro, y de esta manera el volumen tiene que estar dado por la función

$$v(t) = 200 + t$$

A continuación calculamos la tasa a la que entra la sal en el tanque en cualquier instante t. En efecto:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de sal}: \ c_e = 1\text{lb}/\text{l} \\ \text{razón a la que entra el agua}: \ r_e = 2\text{l}/\text{min} \end{array}\right\} T_e \begin{array}{cl} = & 1\dfrac{\text{lb}}{\text{l}} \times 2\dfrac{\text{l}}{\text{min}} \\ \equiv & 2\dfrac{\text{lb}}{\text{min}} \end{array}$$

Ahora, para determinar la concentración $c(t)$ de sal en el tanque en cualquier instante t debemos comparar la cantidad de sal $x(t)$ con el volumen $v(t)$, En este caso

$$c(t) = \frac{x(t)}{v(t)}\frac{\text{lb}}{\text{l}} \equiv \frac{x(t)}{200+t}\frac{\text{lb}}{\text{l}} \tag{3.24}$$

En seguida hay que determinar la tasa a la cual la sal sale del tanque. Al respecto se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de salida de sal}: \ c_s = \frac{x(t)}{200+t}\frac{\text{lb}}{\text{l}} \\ \\ \text{razón a la que sale el agua}: \ r_s = 1\frac{\text{l}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_s \begin{array}{cl} = & \dfrac{x(t)}{200+t}\dfrac{\text{lb}}{\text{l}} \\ & \times 1\dfrac{\text{l}}{\text{min}} \\ \equiv & \dfrac{x(t)}{200+t}\dfrac{\text{lb}}{\text{min}} \end{array}$$

De esta manera, conociendo las tasas de entrada y salida, ya podemos disponer de una relación con la cual se pueda determinar x en función del tiempo. Como la variación de la cantidad de sal en el tiempo está dada por la derivada $\frac{dx}{dt}$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = T_e - T_s$$

Con la condición inicial se tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2 - \frac{x}{200+t} \\ \\ x(0) = 100 \end{cases} \tag{3.25}$$

Resolviendo la ecuación diferencial de (3.25) se tiene:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{1}{200+t}x=2;\ \text{aplicando (2.41)}$$
$$x(t)=\left[\int 2e^{\int \frac{dt}{200+t}dt}dt+k\right]e^{-\int \frac{dt}{200+t}}$$
$$x(t)=(t^2+400t+k)\frac{1}{t+200}$$

Como $x(0)=100$, entonces $k=20000$. Luego, la solución $x(t)$ del problema está dada por:

$$x(t)=(t^2+400t+20000)\frac{1}{200+t}$$

Respecto del volumen vemos que el tanque se llena cuando $v(t)=500$, es decir $t=300$. Por lo tanto, $\text{Dom}(x)=[0,300]$.

b) La concentración de sal en el tanque en cualquier instante $0\leq t\leq 300$ está dada según (3.24) por la función

$$c(t)=\frac{t^2+400t+20000}{(t+200)^2}$$

Como nos piden la concentración en el instante en que se llena el tanque ($t=300$), entonces ello es:

$$c(300)=\frac{23}{25}\frac{\text{lb}}{1}=0,92\frac{\text{lb}}{1}$$

c) Suponiendo que el tanque tiene capacidad infinita, la concentración teórica límite está dada por

$$\lim_{t\to+\infty}c(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2+400t+20000}{t^2+400t+40000}=1\equiv 1\frac{\text{lb}}{1}$$

es decir, para un tiempo grande la concentración en el tanque será de 1 libra de sal por litro, que es aproximadamente igual a $c(30)$. Esta situación la mostramos en la figura 3.8. La curva de concentración es creciente y se estabiliza para valores grandes de t.

■

■ **Ejemplo 3.14** Un depósito grande se llena parcialmente con 100 galones de líquido en el que se disolvieron 10 libras de sal. Se bombea al depósito salmuera que contiene media libra de sal por galón a razón de 6 galones por minuto. La solución bien mezclada se bombea al exterior con una rapidez de 4 galones por minuto. Calcule la cantidad y concentración de sal en el depósito a los 30 minutos.

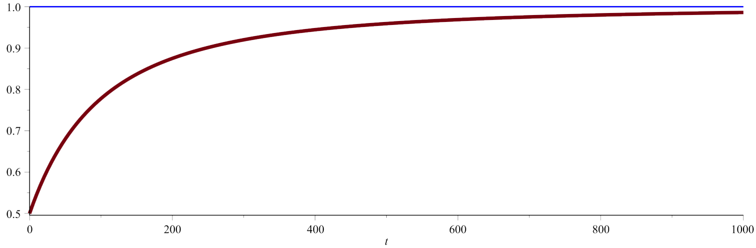


Figura 3.8: Gráfico que muestra la estabilidad de la curva $c(t)$.

Resolución

En primer lugar vemos que la rapidez con la que ingresa la solución al tanque es de 6 gal/min, mientras que sale a 4 gal/min, por lo que el tanque gana dos galones en un minuto; si $v(t)$ es el volumen o cantidad de líquido (gal) en el tanque, entonces

$$v(t) = 100 + 2t$$

Para determinar la tasa a la cual entra la sal al tanque en cualquier instante t hacemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de sal}: \;\; c_e = \frac{1}{2}\text{lb}/\text{gal} \\ \text{razón a la que entra el agua}: \;\; r_e = 6\text{gal}/\text{min} \end{array}\right\} T_e = \frac{1}{2}\frac{\text{lb}}{\text{gal}} \times 6\frac{\text{gal}}{\text{min}} \equiv 3\frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

Ahora, si $x(t)$ es la cantidad (lb) de sal en el tanque en el instante t, entonces la concentración es[6]

$$c(t) = \frac{x(t)}{v(t)} \equiv \frac{x(t)}{100+2t}\frac{\text{lb}}{\text{gal}} \tag{3.26}$$

Con esto se puede determinar la tasa a la cual escapa la sal del tanque. En efecto:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de salida de sal}: \;\; c_s = \frac{x(t)}{100+2t}\frac{\text{lb}}{\text{gal}} \\ \\ \text{razón a la que sale el agua}: \;\; r_s = 4\frac{\text{gal}}{\text{min}} \end{array}\right\} \begin{array}{rl} T_s = & \dfrac{x(t)}{100+2t}\dfrac{\text{lb}}{\text{gal}} \\ & \times 4\dfrac{\text{gal}}{\text{min}} \\ \equiv & \dfrac{2x(t)}{50+t}\dfrac{\text{lb}}{\text{min}} \end{array}$$

[6]Esta es también la concentración de la solución que está saliendo del tanque.

Obtenidas las tasas de entrada y salida, la variación de la sal en el tanque respecto de tiempo está dada por la ecuación $\frac{dx}{dt} = T_e - T_s$, de donde se tiene el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 - \frac{2x}{t+50}, \ t > 0 \\ \\ x(0) = 10 \end{cases} \tag{3.27}$$

Resolviendo la ecuación diferencial de (3.27) se tiene:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{t+50}x = 3; \text{ aplicando (2.41)}$$

$$x(t) = \left(\int 3e^{\int \frac{2dt}{t+50}} dt + k \right) e^{-\int \frac{2dt}{t+50}}$$

$$x(t) = t + 50 + \frac{k}{(t+50)^2}$$

Aplicando la condición inicial $x(0) = 10$, se obtiene $k = -40(50)^2$. Por lo tanto, la solución del problema es la función

$$x(t) = t + 50 - 40\left(\frac{50}{t+50}\right)^2, \ t \geq 0$$

Para determinar la cantidad de sal a los 30 minutos hay que calcular $x(30)$, haciendo esto se obtiene

$$x(30) = 80 - 40\frac{25}{64} \equiv 64,375 \text{ libras}$$

Poniendo la función $x(t)$ en (3.26) se obtiene que la concentración en cualquier instante t está dada por la función

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{50000}{(t+50)^3}$$

Luego, la concentración a los 30 minutos es

$$c(30) = 0,04 \ \frac{\text{lb}}{\text{gal}}$$

■

■ **Ejemplo 3.15** Una tina tiene 10 galones de agua mezclada con 20 libras de un cierto contaminante. Empieza a fluir agua hacia la tina con una concentración de contaminante de 2 lb/gal a razón de 1 gal/min durante los primeros 20 minutos, y luego un filtro muy eficaz elimina todo el contaminante del flujo de entrada. En todo el proceso el agua sale a razón de 1 gal/min.

a) Encuentre la cantidad de contaminante $x(t)$ en cualquier instante t.
b) ¿Qué ocurre con el contaminante cuando el tiempo es grande?

Resolución

a) De acuerdo al problema, el volumen de agua en la tina es constante e igual a 15 galones. A continuación hay que determinar la tasa de entrada del contaminante al depósito en cualquier instante t. Para esto esto $c_e(t)$ representa la concentración de contaminante en la solución que fluye hacia la tina; y está dada por

$$c_e(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 2, & 0 \leq t \leq 20 \\ 0, & t > 20 \end{array} \right\} \frac{\text{lb}}{\text{gal}}$$

Luego, la tasa a la cual ingresa el contaminante a la tina es como sigue:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de sal}: \ c_e(t)\frac{\text{lb}}{\text{gal}} \\ \text{razón a la que entra el agua}: \ r_e = 1\frac{\text{gal}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_e \begin{array}{l} = c_e(t)\dfrac{\text{lb}}{\text{gal}} \\ \quad \times 1\dfrac{\text{gal}}{\text{min}} \\ \equiv c_e(t)\dfrac{\text{lb}}{\text{min}} \end{array}$$

Siendo $c(t) = \frac{x(t)}{10}\frac{\text{lb}}{\text{gal}}$ la concentración de contaminante en la tina en cualquier tiempo t, se tiene que la tasa a la que sale el contaminante de la tina está dada por

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de salida de sal}: \ c_s = \frac{x(t)}{10}\frac{\text{lb}}{\text{gal}} \\ \\ \text{razón a la que sale el agua}: \ r_s = 1\frac{\text{gal}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_s \begin{array}{l} = \dfrac{x(t)}{10}\dfrac{\text{lb}}{\text{gal}} \\ \quad \times 1\dfrac{\text{gal}}{\text{min}} \\ \equiv \dfrac{x(t)}{10}\dfrac{\text{lb}}{\text{min}} \end{array}$$

Luego, la tasa de variación del contaminante en la tina respecto del tiempo está dada por la ecuación $\frac{dx}{dt} = T_e - T_s$, de donde se tiene

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{10}x = c_e(t), \ t > 0$$

Resolvemos la ecuación en dos partes:

Cuando $0 \leq t \leq 20$: se tiene el problema $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{10}x = 2 \\ \\ x(0) = 20 \end{array} \right.$, donde la solución de la ecuación diferencial es $x(t) = 20 + ke^{-\frac{t}{10}}$. Aplicando la condición inicial resulta $k = 0$. Por lo tanto:

$$x(t) = 20, \ 0 \leq t < 20$$

Cuando $t > 20$: se tiene el problema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{10}x = 2 \\ \\ x(0) = 20 \end{cases}$, donde la solución de la ecuación diferencial es $x(t) = \overline{k}e^{-\frac{t}{10}}$. Para determinar el valor de $\overline{k}$ usamos el hecho que x tiene que ser continua para todo $t \geq 0$, en particular en $t = 20$; es decir:

$$x(20^-) = x(20^+) \Longrightarrow 20 = \overline{k}e^{-2} \Longrightarrow \overline{k} = 20e^2$$

Con este valor de $\overline{k}$, la cantidad de contaminante en la tina está dada por la función:

$$x(t) = \begin{cases} 20, \ \ 0 \leq t \leq 20 \\ \\ 20e^{2-\frac{t}{10}}, \ \ t \geq 20 \end{cases}$$

b) Para determinar qué sucede con el contaminante cuando el tiempo es grande calculamos

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} 20e^{2-\frac{t}{10}} = 0$$

lo que significa que después de un tiempo relativamente grande la tina estará libre de contaminante[7]. Observe la figura 3.9.

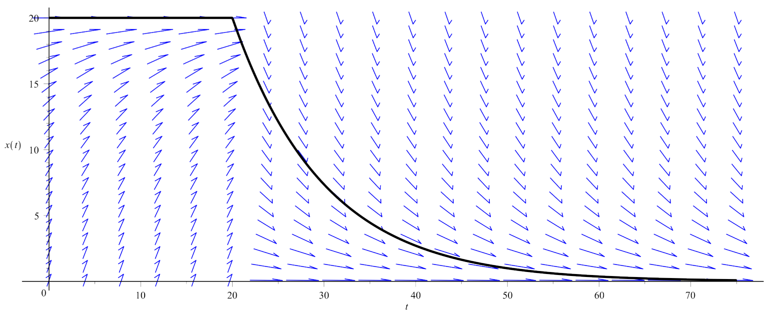


Figura 3.9: Campo de direcciones de la ecuación diferencial para $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ y la solución $x(t)$ del problema.

■

[7]El efecto del filtro es que el agua en la tina se va limpiando.

Ejemplo 3.16 Un tanque cuya capacidad es de 432 litros contiene inicialmente 125 litros de solución salina cuya concentración es de $\frac{2}{5}$ gramos por litro. En el instante $t = 0$ comienza a entrar salmuera con una concentración de $\frac{4}{25}$ gramos por litro y a una rapidez de 5 litros por minuto. Al mismo tiempo empieza a salir solución del tanque a 2 litros por minuto. Cuando el tanque llega a la mitad de su capacidad se abre una segunda llave que permite la salida de solución del tanque a 2 litros por minuto. Determine la cantidad de sal que hay en el tanque antes de las 4 horas. ■

Resolución

Sean $x(t)$ y $v(t)$, respectivamente, la cantidad de sal (gr) y el volumen (l) de solución en el tanque en el instante t. Según el problema se tiene que $v(0) = 125$ litros. Con las funciones que acabamos de definir la concentración de sal en el tanque está dada por la función $c(t) = \frac{x(t)}{v(t)}$. Como la concentración en $t = 0$ es $c(0) = \frac{2}{5}\frac{\text{gr}}{1}$, entonces

$$\frac{x(0)}{v(0)} = \frac{2}{5} \Longrightarrow x(0) = 50$$

es decir, al inicio había $x(0) = 50$ gramos de sal en el tanque. Respecto del volumen $v(t)$, vemos que antes que el tanque se llene hasta la mitad, en un minuto éste gana 3 litros, lo que significa que

$$v(t) = 125 + 3t$$

Aplicando esta fórmula, el tanque se llena hasta la mitad de su capacidad cuando $v(t) = 216$. Resolviendo la ecuación se obtiene $t = \frac{91}{3}$, que es el instante en que el tanque se llena hasta su mitad. Para $t > \frac{91}{3}$, está abierta la otra llave que permite la salida de 2 litros más del tanque; esto hace que en un minuto el depósito sólo gane un litro de solución[8] y de esta manera la fórmula para el volumen es

$$v(t) = 216 + \left(t - \frac{91}{3}\right) \equiv \frac{557}{3} + t$$

Para determinar el instante en que el tanque se llena resolvemos $\frac{557}{3} + t = 432$, de donde se obtiene $t = \frac{739}{3} \approx 246,3$ minutos. Por lo tanto, respecto del volumen escribimos

$$v(t) = \begin{cases} 125 + 3t, & 0 \leq t \leq \frac{91}{3} \\ \frac{557}{3} + t, & \frac{91}{3} \leq t \leq \frac{739}{3} \end{cases}$$

[8]Tenga en cuenta que antes entraban 5 litros y salían 2 litros, es decir ganaba 3 litros en un minuto, pero a partir del instante $t = \frac{91}{3}$ del tanque fugan dos litros más de solución, es decir, entran 5 y salen 4 litros, por lo que sólo hay ganancia de un litro en un minuto.

Para determinar $x(t)$ resolvemos el problema en dos partes:
Cuando $0 \leq t \leq \frac{91}{3}$. En este caso la tasa a la cual entra la sal en cualquier instante t se determina según el siguiente esquema:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de sal}: \quad c_e = \frac{4}{25}\ \mathrm{gr/l} \\ \text{razón a la que entra el agua}: \quad r_e = 5\ \mathrm{l/min} \end{array}\right\} T_e = \frac{4}{25}\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{l}} \times 5\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} \equiv \frac{4}{5}\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{min}}$$

Para determinar la tasa a la que sale la sal en cualquier instante t del tanque vemos que:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de salida de sal}: \quad c_s = \frac{x(t)}{125+3t}\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{l}} \\ \\ \text{razón a la que sale el agua}: \quad r_s = 2\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} \end{array}\right\} \begin{aligned} T_s &= \frac{x(t)}{125+3t}\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{l}} \times \frac{2\mathrm{l}}{\mathrm{min}} \\ &\equiv \frac{2x(t)}{125+3t}\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{min}} \end{aligned}$$

Conociendo estas tasas, la variación de la sal respecto del tiempo en el tanque está dada por la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = T_e - T_s$, con lo cual se tiene el problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{4}{5} - \frac{2x(t)}{125+3t} \\ \\ x(0) = 50 \end{cases} \tag{3.28}$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene

$$x(t) = \frac{4}{25}(125+3t) + \frac{k_1}{(125+3t)^{\frac{2}{3}}}$$

que, aplicando la condición inicial $x(0) = 50$, resulta $k_1 = 750$ y de esta manera la solución del problema (3.28) está dada por la función

$$x(t) = \frac{4}{25}(125+3t) + \frac{750}{(125+3t)^{\frac{2}{3}}}, \ 0 \leq t \leq \frac{91}{3} \tag{3.29}$$

Cuando $\frac{91}{3} \leq t \leq \frac{739}{3}$: la tasa de entrada de la sal es $T_e = \frac{4}{5}\ \frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{min}}$ igual al caso anterior, mientras que la tasa de salida es como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} \text{primera llave}\left\{\begin{array}{l} c_{s1} = \frac{x(t)}{\frac{57}{3}+t}\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{l}} \\ r_{s1} = 2\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} \end{array}\right\} T_{s1} = \frac{2x(t)}{\frac{557}{3}+t}\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{min}} \\ \text{segunda llave}\left\{\begin{array}{l} c_{s2} = \frac{x(t)}{\frac{57}{3}+t}\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{l}} \\ r_{s1} = 2\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} \end{array}\right\} T_{s2} = \frac{2x(t)}{\frac{57}{3}+t}\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{min}} \end{array}\right\} \begin{aligned} T_s &= T_{s1} + T_{s2} \\ &= \frac{4x(t)}{\frac{557}{3}+t}\frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{min}} \end{aligned}$$

Luego, la variación de sal en el tanque en el instante t está dada por la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = T_e - T_s$, es decir:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{5} - \frac{12x}{557+3t}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, resulta

$$x(t) = \frac{4}{75}(557+3t) + \frac{k_2}{(557+3t)^4} \tag{3.30}$$

De (3.29) y (3.30) se tiene

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4}{25}(125+3t) + \frac{750}{(125+3t)^{\frac{2}{3}}}, & 0 \leq t \leq \frac{91}{3} \\ \\ \frac{4}{75}(557+3t) + \frac{k_2}{(557+3t)^4}, & \frac{91}{3} \leq t \leq \frac{739}{3} \end{cases}$$

Como $x(t)$ tiene que ser continua en $t = \frac{91}{3}$, entonces $x\left(\frac{91}{3}^-\right) = x\left(\frac{91}{3}^+\right)$. Resolviendo esta ecuación se obtiene $k_2 = 125\frac{648^4}{6}$; por lo tanto la función $x(t)$ antes de las 4 horas está dada por:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4}{25}(125+3t) + \frac{750}{(125+3t)^{\frac{2}{3}}}, & 0 \leq t \leq \frac{91}{3} \\ \\ \frac{4}{75}(557+3t) + 125\frac{648^4}{6(557+3t)^4}, & \frac{91}{3} \leq t \leq \frac{739}{3} \end{cases}$$

■ **Ejemplo 3.17** Un tanque contiene al principio 40 litros de salmuera con 8 kilogramos de sal en solución. Empieza a entrar al tanque salmuera a razón de 8 litros por minuto y con una concentración $\frac{1}{8}$kg de sal por litro. La mezcla bien agitada para que sea haga homogénea sale del tanque a razón de 4 litros por minuto.

a) Encuentre una función con la cual se pueda determinar la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante t.
b) Determine la cantidad de sal que hay en el tanque a los 5 minutos.
c) A los 10 minutos se modifica la concentración de entrada de sal a $\frac{1}{8}+c$ kilogramos de sal por litro. Si se mantienen los otros datos, calcule c de modo que a los 20 minutos la concentración de sal en el tanque sea igual a $\frac{6}{25}\,\frac{\text{kg}}{1}$.

Resolución

a) Sea $x(t)$ la cantidad de sal (kg) y $v(t)$ el volumen (l) de solución en el tanque. En $t=0$ se tiene que

$$x(0) = 8 \qquad v(0) = 40$$

Como antes de los 10 minutos el tanque gana 4 litros en un minuto, entonces

$$v(0) = 40 + 4t$$

A continuación analizamos las tasas de entrada y salida de la sal en cualquier instante t. Al respecto se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración con que entra la sal}: \ c_e = \frac{1}{8}\frac{\text{kg}}{\text{l}} \\ \text{razón a la que entra el agua}: \ r_e = \frac{8\text{l}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_e \begin{array}{l} = c_e \times r_e \\ \equiv 1\dfrac{\text{kg}}{\text{min}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración con que sale la sal}: \ c_s = \frac{x(t)}{40+4t}\frac{\text{kg}}{\text{l}} \\ \text{razón a la que sale el agua}: \ r_s = 4\frac{\text{l}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_s \begin{array}{l} = c_s \times r_s \\ \equiv \dfrac{x(t)}{10+t}\dfrac{\text{lb}}{\text{min}} \end{array}$$

Con estas tasas, se tiene la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = T_e - T_s$, luego

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{x}{10+t} \\ x(0) = 8 \end{cases} \tag{3.31}$$

La solución general de la ecuación diferencial en (3.31) está dada por:

$$x(t) = \frac{10+t}{2} + \frac{k}{10+t}$$

Y aplicando la condición inicial se obtiene que $k = 30$, luego la solución del problema (3.31) está dada por la función

$$x(t) = \frac{10+t}{2} + \frac{30}{10+t}, \ \ 0 \leq t \leq 10$$

b) Para determinar la cantidad de sal que hay en el tanque a los 5 minutos evaluamos $x(5)$. En efecto:

$$x(5) = \frac{10+5}{2} + \frac{30}{10+5} = \frac{19}{5} = 9,5$$

Por lo tanto, a los 5 minutos hay en el tanque $9,5$ kilogramos de sal disueltos.

c) A los 10 minutos se modifica la concentración de entrada de sal en el tanque a $\frac{1}{8} + c$. Analizando nuevamente las tasas de entrada y salida de sal para $t \geq 10$, se tiene al respecto:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de sal a la que entra}: \ c_e = \left(\frac{1}{8} + c\right)\frac{\text{kg}}{\text{l}} \\ \text{razón a la que entra el agua}: \ r_e = 8\frac{\text{l}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_e = c_e \times r_e$$

$$\equiv (1 + 8c)\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de sal a la que sale}: \; c_s = \frac{x(t)}{40+4t}\frac{\text{kg}}{\text{l}} \\ \text{razón a la que sale el agua}: \; r_s = 4\frac{\text{l}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_s = c_s \times r_s$$

$$\equiv \frac{4x(t)}{40+4t}\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Con estas tasas se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 1+8c - \frac{x}{10+t}, \;\; t > 10$$

cuya solución general es:

$$x(t) = \frac{(1+8c)(10+t)}{2} + \frac{\bar{k}}{10+t} \tag{3.32}$$

Como x tiene que ser continua en $t = 10$, entonces debe ocurrir que

$$x(10^-) = x(10^+)$$

desarrollando esta ecuación se obtiene $\bar{k} = 30 - 1600c$, poniendo este resultado en (3.32) se tiene

$$x(t) = \frac{(1+8c)(10+t)}{2} + \frac{30-1600c}{10+t} \tag{3.33}$$

Usando (3.33), la concentración de sal en el tanque para $t \geq 10$ es:

$$C(t) = \frac{\frac{(1+8c)(10+t)}{2} + \frac{30-1600c}{10+t}}{40+4t} \equiv \frac{1+8c}{8} + \frac{15-800c}{2(10+t)^2}, \;\; t \geq 10$$

De acuerdo al problema, a los 20 minutos la concentración de sal en el tanque es igual a $\frac{6}{25}$, es decir $C(20) = \frac{6}{25}$. Luego

$$\frac{1+8c}{8} + \frac{15-800c}{2(10+20)^2} = \frac{6}{25}$$

Así se obtiene $c = \frac{24}{125}$.

■

■ **Ejemplo 3.18** Un tanque de 100 litros de capacidad contiene inicialmente 25 litros de salmuera a una concentración de 1 gramo de sal por litro. En el instante $t = 0$ empieza a entrar solución con concentración de $\frac{3}{4}$ gramos por litro y con una rapidez de 3 litros por minuto. En forma simultánea sale solución del tanque a 1 litro por minuto. Cuando el tanque llega a los tres cuartos de su capacidad se abre una segunda llave que permite la entrada de agua pura al tanque a un litro por minuto. Determine la cantidad de sal que hay en el tanque en todo tiempo inferior a 33 minutos.

Resolución

Sean $x(t)$ y $v(t)$ funciones que representan respectivamente la cantidad de sal (gr) y el volumen (L) de solución en el tanque en el instante t. Como al inicio hay 25 litros de solución, entonces $v(0) = 25$. Para determinar la cantidad inicial de sal usamos el hecho que $\frac{x(0)}{v(0)} = 1$, de donde $x(0) = 25$. El problema consta de dos partes: para antes y después de completar los $\frac{3}{4}$ de su capacidad. En el primer caso, el tanque gana 2 litros de solución en un minuto, es decir:

$$v(t) = 25 + 2t$$

Para encontrar el instante en que el tanque se llena hasta los $\frac{3}{4}$ de su capacidad, resolvemos la ecuación $v(t) = \frac{3}{4}(100)$, de donde $t = 25$. Es decir, en el instante $t = 25$ el tanque completa los tres cuartos de su capacidad.
Resolvemos ahora para $0 \leq t \leq 25$; calculando las tasas de entrada y salida de la sal en cualquier tiempo t tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de sal a la que entra: } \; c_e = \frac{3}{4}\frac{\text{gr}}{1} \\[2ex] \text{razón a la que entra el agua: } \; r_e = 3\frac{1}{\text{min}} \end{array}\right\} T_e = \frac{3}{4}\frac{\text{gr}}{1} \times 3\frac{1}{\text{min}} \equiv \frac{9}{4}\frac{\text{gr}}{\text{min}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de sal a la que sale: } \; c_s = \frac{x(t)}{25+2t}\frac{\text{gr}}{1} \\[2ex] \text{razón a la que sale el agua: } \; r_s = 1\frac{1}{\text{min}} \end{array}\right\} T_s = \frac{x(t)}{25+2t}\frac{\text{gr}}{1} \times 1\frac{1}{\text{min}}$$

$$\equiv \frac{x(t)}{25+2t}\frac{\text{gr}}{\text{min}}$$

Luego, la variación de sal en el tanque respecto del tiempo está dada por $\frac{dx}{dt} = T_e - T_s$. Poniendo T_e y T_s se obtiene el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{9}{4} - \frac{x}{25+2t}, \;\; 0 < t < 10 \\[2ex] x(0) = 25 \end{cases}$$

cuya solución general está dada por la expresión

$$x(t) = \frac{3}{4}(25 + 2t) + \frac{k}{\sqrt{25 + 2t}}$$

Aplicando la condición inicial $x(0) = 25$ se obtiene que $k = \frac{125}{4}$, luego la solución del problema es la función

$$x(t) = \frac{3}{4}(25 + 2t) + \frac{125}{4\sqrt{25 + 2t}}, \;\; 0 \leq t \leq 25$$

Ahora resolvemos para $t > 25$. Para este caso se pone en funcionamiento otra llave por la que ingresa adicionalmente agua pura con una rapidez de un litro por minuto. Puesto que el agua que ingresa es pura, su concentración de sal es cero, además el tanque tiene una ganancia de 3 litros en un minuto, modificándose de esta manera la función volumen a la expresión

$$v(t) = 75 + 3(t-25) \equiv 3t$$

Con estos datos tenemos nuevamente las tasas de entrada y salida. Escribiendo en su forma simplificada se tiene

$$T_e = \frac{9}{4}\frac{\text{gr}}{\text{min}} \qquad \text{y} \qquad T_s = \frac{x(t)}{3t}\frac{\text{gr}}{\text{min}}$$

de donde la variación de sal en el tanque respecto del tiempo está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = T_e - T_s = \frac{9}{4} - \frac{x}{3t}$$

La solución general de esta ecuación es

$$x(t) = \frac{27}{16}t + \frac{\overline{k}}{\sqrt[3]{t}}$$

Como $x(t)$ debe ser continua en $t = 25$, entonces debe ocurrir que $x(25^-) = x(25^+)$. Resolviendo esto resulta

$$\frac{3}{4}(75) + \frac{25}{4\sqrt{3}} = \frac{27}{16}(25) + \frac{\overline{k}}{\sqrt[3]{25}}$$
$$\overline{k} = \frac{25\sqrt[3]{25}}{4}\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Luego

$$x(t) = \frac{27}{16}t + \frac{25\sqrt[3]{25}}{4}\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{t}}, \;\; 25 \le t \le \frac{100}{3}$$

Poniendo la función x hasta el instante $t = \frac{100}{3}$, que es el momento en que se llena el tanque vemos que

$$x(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}(25+2t) + \frac{125}{4\sqrt{25+2t}}, & 0 \le t \le 25 \\ \\ \frac{27}{16}t + \frac{25\sqrt[3]{25}}{4}\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{t}}, & 25 \le t \le \frac{100}{3} \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 3.19** Un tanque contiene inicialmente 70 litros de agua pura. A partir del instante $t_0 = 0$ le ingresa salmuera por dos entradas diferentes. Por la primera lo hace a 2 litros por segundo y con concentración de 10 gramos por litro. Por la segunda lo hace a una velocidad de 1 litro por segundo y con concentración de 20 gramos por litro. A su vez, a los 10 segundos se abre un orificio en el depósito que permite la salida del contenido a 4 litros por segundo. Determine la concentración de sal en el tanque al cabo de 60 segundos.

Resolución

En primer lugar, sean $x(t)$ y $v(t)$ funciones que representan respectivamente la cantidad (gr) de sal y el volumen (l) de solución presente en el tanque en el instante t. **Durante los 10 primeros segundos** el tanque no tiene fuga, por lo que se está llenando a una razón de 3 litros por segundo. De esta manera el volumen $v(t)$ está dado por

$$v(t) = 70 + 3t, \;\; 0 \leq t \leq 10$$

Durante este intervalo de tiempo, el tanque llega a almacenar 100 litros de salmuera, siendo además las tasas de entrada y salida respecto de t:

$$T_e = 40\frac{\text{gr}}{\text{s}} \qquad \text{y} \qquad T_s = 0\frac{\text{gr}}{\text{s}}$$

Tenga en cuenta que $T_s = 0$, pues la solución se está almacenando en el tanque[9]. Con estas tasas se tiene $\frac{dx}{dt} = T_e - T_s = 40$, cuya solución general es $x(t) = 40t + k$. Usando el hecho que al inicio el agua en el tanque era pura (es decir, no tenía sal), se tiene $x(0) = 0$, lo cual hace $k = 0$. Luego afirmamos que

$$x(t) = 40t, \;\; 0 \leq t \leq 10$$

Al cabo de 10 segundos y en adelante, la solución sale del tanque a una razón de 4 litros por segundo, esto hace que en un segundo el tanque pierda un litro de salmuera. Luego, el volumen está dado por la función

$$v(t) = 110 - t, \;\; t \geq 10$$

En este nuevo intervalo de tiempo, las tasas de entrada y salida de la sal respecto de t son

$$T_e = 40\frac{\text{gr}}{\text{s}} \qquad \text{y} \qquad T_s = \frac{4x(t)}{110-t}\,\frac{\text{gr}}{\text{s}}$$

[9]No hay fuga de sal del tanque.

Con esto se tiene $\frac{dx}{dt} = T_e - T_s$ que es equivalente a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 40 - \frac{4x}{110-t}$$

La solución general de esta ecuación es

$$x(t) = \frac{40}{3}(110-t) + \bar{k}(110-t)^4 \tag{3.34}$$

Para determinar el valor de $\bar{k}$ usamos el hecho que x tiene que ser continua en $t = 10$, es decir, $x(10^-) = x(10^+)$, de donde resulta $\bar{k} = -\frac{28}{3(10^6)}$. Poniendo este valor en (3.34) se tiene:

$$x(t) = \frac{40}{3}(110-t) - \frac{28}{3(10^6)}(110-t)^4, \;\; 10 \le t \le 110$$

Finalmente

$$x(t) = \begin{cases} 40t, \;\; 0 \le t \le 10 \\ \\ \frac{40}{3}(110-t) - \frac{28}{3(10^6)}(110-t)^4, \;\; 10 \le t \le 110 \end{cases}$$

y

$$v(t) = \begin{cases} 70+3t, \;\; 0 \le t \le 10 \\ 110-t, \;\; 10 \le t \le 110 \end{cases}$$

Si $C(t) = \frac{x(t)}{v(t)}$ es la concentración de sal en el instante t, entonces la concentración de sal al cabo de 60 segundos es:

$$c(60) = \frac{x(60)}{v(40)} = \frac{73}{6} \approx 12,17\ \frac{\text{gr}}{1}$$

■

■ **Ejemplo 3.20** Un tanque contiene, en un principio 1000 litros de agua pura, y le entra salmuera con $0,05kg$ de sal por litro de agua a razón de $5\ l/min$, así como otra salmuera con $0,04\ kg$ de sal por litro de agua a razón de $10\ l/min$. La solución se mantiene mezclada por completo y se drena del tanque con una rapidez de $15\ l/min$.

a) ¿Cuánta sal está en el tanque después de t minutos?
b) ¿Al cabo de una hora?

Resolución

a) En este caso hay que determinar las tasas y concentraciones de sal con las cuales entra y sale el agua del tanque, en efecto:

Al tanque ingresan dos tipos de salmuera. Una de ellas ingresa al tanque con las siguientes características:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de sal : } \ c_1 = 0,05\frac{\text{kg}}{\text{l}} \\ \text{razón a la que entra el agua : } \ r_1 = 5\frac{\text{l}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_1 = 0,25\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

La otra salmuera

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de sal : } \ c_2 = 0,04\frac{\text{kg}}{\text{l}} \\ \text{razón a la que entra el agua : } \ r_2 = 10\frac{\text{l}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_2 = 0,4\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Luego podemos afirmar que la sal disuelta en el agua entra a una tasa de

$$T_e = T_1 + T_2 = 0,65 \text{ kg/min}$$

Para determinar el volumen de agua en el tanque vemos que ingresan 15 litros de salmuera en un minuto, así también en un minuto sale la misma cantidad de solución, lo que significa que el tanque no gana ni pierde volumen, es decir, en todo el tiempo se mantiene con un volumen constante de 1000 litros. Ahora, si asumimos que $x(t)$ es la cantidad de sal (en kilogramos) que hay en el tanque en el instante t, entonces la concentración de la misma en ese instante será: $c_s = \frac{x(t)}{1000}$ kg/l. Para determinar la tasa a la que sale la sal del tanque establecemos:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de salida de sal : } \ c_s = \frac{x(t)}{1000}\frac{\text{kg}}{\text{l}} \\ \\ \text{razón a la que sale el agua : } \ r_2 = 15\frac{\text{l}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_s = \frac{3x(t)}{200}\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Luego, la ecuación de variación de la sal estará dada por:

$$\frac{dx}{dt}(t) = T_e - T_s = 0,65 - \frac{3x(t)}{200}$$

Así se tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 0,65 - \frac{3x(t)}{200}, \ t > 0 \\ \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

La ecuación diferencial en (3.35) es separable, y está dada por

$$\frac{dx}{3x - 130} = -\frac{dt}{200}$$

Integrando esto último se tiene

$$\ln|3x - 130| = -\frac{3t}{200} + \ln c$$

lo cual es equivalente a

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(130 + ce^{-\frac{3t}{200}}\right) \tag{3.36}$$

Para determinar el valor de la constante c usamos la condición inicial $x(0) = 0$, con lo cual se obtiene $c = -130$. Poniendo el valor de c en (3.36) se tiene finalmente que la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante t está dada por:

$$x(t) = \frac{130}{3}\left(1 - e^{-\frac{3t}{200}}\right)$$

b) Para determinar la cantidad de sal que hay en el tanque al cabo de una hora, evaluamos $x(t)$ en $t = 1\ h \equiv 60\ min$ y obtenemos:

$$x(60) = \frac{130}{3}\left(1 - e^{-\frac{3(60)}{200}}\right) = 25,715 \text{ kg}$$

■

■ **Ejemplo 3.21** Un depósito contiene 50 galones de salmuera con 25 libras de sal disuelta en ella. A partir del instante $t = 0$ entra agua en él a un ritmo de 2 galones/minuto y la mezcla escapa al mismo ritmo por un orificio de salida hacia un segundo depósito que contenía inicialmente 50 galones de agua pura. ¿Cuándo alcanzará el segundo depósito la máxima cantidad de sal?

Resolución

a) En primer lugar hay que determinar la tasa y concentración a la cual entra el agua en el primer tanque. En efecto:
El agua entra con las siguientes características:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de entrada de sal}^{10}: \ c_e = 0\ \frac{\text{lb}}{\text{gal}} \\[2ex] \text{razón a la que entra el agua}: \ r_e = 2\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_e = 0\ \frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

Como la solución sale del tanque con una rapidez de 2 gal/min, entonces el tanque no gana ni pierde volumen, es decir, en todo el tiempo se mantiene con un volumen de 50 galones. Ahora, sea $x(t)$ la cantidad de sal (en libras) que hay en el primer tanque en el instante t, entonces la concentración de la misma en ese instante será:

$$c_s = \frac{x(t)}{50}\ \frac{\text{lb}}{\text{gal}}$$

Para determinar la tasa a la que sale la sal del tanque establecemos:

$$\left.\begin{array}{r} \text{concentración de salida de sal}: \ c_s = \frac{x(t)}{50}\ \frac{\text{lb}}{\text{gal}} \\[2ex] \text{razón a la que sale el agua}: \ r_2 = 2\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \end{array}\right\} T_s = \frac{x(t)}{25}\ \frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

Luego, la ecuación de variación de la sal estará dada por:

$$\frac{dx}{dt}(t) = T_e - T_s = 0 - \frac{x(t)}{25}$$

Así se tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = -\frac{x(t)}{25},\ t > 0 \\ \\ x(0) = 25 \end{cases}$$

cuya solución está dada por la función

$$x(t) = 25e^{-\frac{t}{25}}$$

b) En el segundo tanque la solución entra con una concentración de $\frac{x(t)}{50} \equiv \frac{e^{-\frac{t}{25}}}{2}$. Si $y(t)$ es la cantidad de sal en el segundo tanque, entonces se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^{-\frac{t}{25}}}{2}\frac{\text{lb}}{\text{gal}} \times 2\frac{gal}{min} \equiv e^{-\frac{t}{25}}\frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

Luego, para el segundo tanque se tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = e^{-\frac{t}{25}},\ t > 0 \\ \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.37}$$

La solución de (3.37) es en este caso:

$$y(t) = 25 - 25e^{-\frac{t}{25}}$$

Como se observa, $y'(t) = e^{-\frac{t}{25}}$, y se tiene que

$$y'(t) \to 0, \text{ si } t \to +\infty$$

Por lo tanto, se puede decir que el segundo tanque alcanza la cantidad máxima de sal cuando el tiempo es muy grande; además:

$$y(t) \to 25, \text{ si} t \to +\infty$$

donde 25 libras sería la cantidad máxima de sal que habría en el segundo tanque cuando el tiempo es muy grande. ■

■ **Ejemplo 3.22** Un tanque de 300 litros de capacidad contiene 50 litros de agua pura. En el instante $t = 0$, comienza a entrar una solución que contiene 100 cm^3 de alcohol por cada litro de solución y lo hace a una velocidad de

5 litros por minuto. Este suministro sólo se detiene al llenarse el estanque. Después de media hora ingresa al estanque una segunda solución de agua con alcohol, pero con un 20 por ciento de alcohol por litro de solución y a una velocidad de 5 litros por minuto. Simultáneamente al ingreso de esta solución, se abre una llave en el fondo del estanque y a una velocidad de 6 litros por minuto, la solución perfectamente mezclada, sale del estanque. Determine el porcentaje de alcohol en el estanque cuando éste complete su capacidad.

Resolución

Definir las funciones:

$$\begin{cases} x(t): & \text{cantidad de alcohol en el tanque en el instante } t \\ v(t): & \text{cantidad de solución en el tanque en el instante } t \end{cases}$$

Ambas se miden en litros (L). El problema lo vamos a resolver por partes:

a Durante $t = 0$ y $t = 30$ minutos, entra al tanque solución a una velocidad de 5 litros por minuto. Puesto que en ese lapso no hay fuga de líquido del tanque, entonces éste gana 5 litros de solución en un minuto, de tal manera que la solución al cabo de t minutos tiene un volumen

$$v(t) = 50 + 5t, \;\; t \in [0, 30]$$

Puesto que 100 cm^3 equivalen a $0,1$ litros, entonces se tiene el problema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5(0,1) \\ \\ x(0) = 0 \end{cases}$, cuya solución es

$$x(t) = \frac{t}{2}, \;\; t \in [0, 30]$$

b) Para $t \geq 30$, el tanque gana 4 litros en un minuto, de tal manera que el volumen ahora está dado por la función

$$v(t) = 200 + 4(t - 30) \equiv 80 + 4t, \;\; t \geq 30$$

Para determinar el instante en que el tanque se llena, resolvemos $V(t_1) = 300$, de donde $t_1 = 55$ minutos. Es decir el tanque se llena al cabo de 55 minutos. Luego, para $t \in [30, 55]$ la tasa de cambio de x respecto a t está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = [5(0,1) + 5(0,2)] - 6\frac{x}{v}$$

la cual es equivalente a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\frac{x}{t + 20}$$

Resolviendo esta última ecuación[11] se tiene

$$x(t) = \frac{3}{5}(t+20) + k(t+20)^{-\frac{3}{2}}$$

Pero en $t = 30$ se debe cumplir la condición de continuidad $x(30^-) = x(30^+)$, es decir:

$$15 = 30 + k(50)^{-\frac{3}{2}}$$

se obteniene de esto último $k = -15(50)^{\frac{3}{2}}$. Luego

$$x(t) = \frac{3}{5}(t+20) - 15\left(\frac{50}{t+20}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad t \in [30, 55]$$

Luego, en cualquier tiempo la cantidad de alcohol en el tanque antes de que se llene está dada por la función

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & t \in [0, 30] \\ \\ \frac{3}{5}(t+20) - 15\left(\frac{50}{t+20}\right)^{\frac{3}{2}}, & t \in [30, 55] \end{cases}$$

En el instante $t_1 = 55$ la cantidad de alcohol en el tanque es $x(55) = 36,9$ lt. Entonces, la concentración o el porcentaje de alcohol justo en ese instante será:

$$\frac{x(55)}{v(55) \times 100}\,\% = 36,9\frac{100}{300}\,\% = 12,3\,\%$$

■

3.2.1 Ejercicios 3.2

1. Un depósito contiene dos galones de salmuera con 2 libras de sal disueltas en ella. Se introduce en el depósito salmuera que contiene disuelta una libra de sal por cada galón a razón de 3 galones por minuto, y la mezcla, bien revuelta, se deja salir a razón de 4 galones por minuto. Hallar una función $x(t)$ con la cual se pueda determinar la cantidad de sal en el depósito en el instante t.
2. Considérese un gran tanque que contiene 1000 litros de agua, inicialmente pura. Una solución de salmuera comienza a fluir al tanque a una velocidad constante de 6 litros por minuto, abriéndose a la vez un orificio del tanque por el que se deja salir el mismo volumen de líquido que entra. Teniendo en cuenta que la concentración de sal en la salmuera que entra es de 1 kilogramo por litro y que la mezcla se encuentra en todo momento perfectamente agitada, calcular la cantidad de sal presente en el tanque en cada instante t.

[11] Es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

3. Una solución de sal en agua fluye a razón de 4 litros por minuto hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 100 litros de agua. La solución en el tanque se mantiene agitada y fluye hacia el exterior a razón de 3 litros por minuto. Si la concentración de sal en el agua que fluye es de 0,2 kilogramos por litro, determinar la cantidad de sal que hay en el tanque al cabo de t minutos.
4. Un tanque está lleno con 8 galones de agua salada en la cual 2 libras de sal están disueltas. Agua salada con 3 libras de sal por galón entra al tanque a 4 galones por minuto, y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.
   a) Establezca una ecuación diferencial para la cantidad de sal como una función del tiempo t.
   b) Encuentre la cantidad de sal como una función del tiempo.
   c) Encuentre la concentración de sal después de 8 minutos.
   d) ¿Cuánta sal hay después de un largo tiempo?
5. Un tanque tiene 40 galones de agua pura. Una solución de agua salada con una libra de sal por galón entra a 2 galones por minuto, y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.
   a) ¿Cuánta sal hay en el tanque en cualquier tiempo?
   b) ¿Cuándo el agua que sale tendrá $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón?
6. Un tanque tiene 60 galones de agua salada con 2 libras de sal por galón. Una solución con 3 libras de sal por galón entra a 2 galones por minuto, y la mezcla sale a la misma tasa. ¿Cuándo habrá 150 libras de sal en el tanque?
7. Un tanque tiene 100 galones de agua salada con 40 libras de sal disuelta. Agua pura entra a 2 galones por minuto y sale con la misma tasa.
   a) ¿Cuándo la concentración de sal será 0,2 lb/gal?
   b) ¿Cuándo la concentración será menor que 0,01 lb/gal?
8. Un tanque tiene 10 galones de agua salada con 2 libras de sal disuelta. Agua salada con 1,5 libras de sal por galón entra a 3 galones por minuto, y la mezcla bien agitada sale a 4 galones por minuto.
   a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo.
   b) Encuentre la concentración de sal después de 10 minutos.
   c) Dibuje gráficas de la cantidad y concentración de sal contra el tiempo y obtenga el máximo en cada caso.
9. Un tanque tiene 60 galones de agua pura. Una solución con 3 libras de sal por galón entra a 2 gal/min y sale a 2,5 gal/min.
   a) Encuentre la concentración de sal en el tanque en cualquier tiempo.
   b) Encuentre la concentración de sal cuando el tanque tenga 30 galones de agua salada.
   c) Encuentre la cantidad de agua en el tanque cuando se tenga la máxima concentración.

d) Determine la máxima cantidad de sal presente en cualquier tiempo.

10. Un depósito contiene 200 litros de líquido en el que se disuelven 30 gramos de sal. La salmuera que contiene un gramo de sal por litro se bombea hacia el depósito a una rapidez de 4 l/min; la solución bien mezclada se bombea hacia fuera a la misma rapidez. Encuentre la función $x(t)$ con la cual se pueda determinar la cantidad de sal en el depósito en el instante t.
11. Resolver el problema anterior suponiendo que se bombea agua pura al depósito.
12. Un depósito grande se llena al máximo con 500 galones de agua pura. Se bombea al depósito salmuera que contiene dos libras de sal por galón a razón de 5 gal/min; la solución bien mezclada se bombea hacia el exterior a la misma rapidez.

    a) Encuentre la función $x(t)$ con la cual se pueda determinar la cantidad de sal en el depósito en el instante t.
    b) ¿Cuál es la concentración de sal en el depósito en el tiempo t?
    c) ¿Cuál es la concentración de sal en el depósito al cabo de 5 minutos?
    d) ¿Cuál es la concentración de sal después de un tiempo largo?
    e) ¿En qué momento la concentración de sal en el depósito es igual a la mitad del valor límite encontrado en d) ?

13. Resuelva el problema anterior asumiendo que la solución se bombea al exterior del depósito a una razón de 10 gal/min.
14. Un depósito grande se llena parcialmente con 100 galones de líquido en el que se disolvieron 10 libras de sal. Se bombea al depósito salmuera que contiene media libra de sal por galón a razón de 6 gal/min. La solución bien mezclada se bombea al exterior del tanque con una rapidez de 4 gal/min. ¿Cuánta sal habrá en el tanque al cabo de 30 minutos?
15. Un tanque contiene 1000 litros de una solución compuesta de 100 kg de sal disuelta en agua. Se bombea agua pura dentro del tanque a una razón de 5 litros por segundo, y la mezcla que se conserva uniforme por agitación se bombea al exterior del tanque en la misma proporción. ¿Cuánto tiempo pasará para que queden solamente 10 kg de sal en el tanque?
16. Considere un depósito con un volumen de 8000 millones de pies cúbicos y una concentración de contaminantes inicial de 0,25 %. Se tiene una inyección diaria de 500 millones de pies cúbicos de agua con una concentración de contaminantes de 0,05 % y una salida diaria de agua con iguales características perfectamente mezclada en el depósito. ¿Cuánto tomará reducir la concentración de contaminante a 0,10 % en el depósito?
17. Un tanque contiene inicialmente 60 galones de agua pura. Salmuera, que

contiene 1 lb de sal por galón entra al tanque a una razón de 2 gal/min, y la solución (perfectamente mezclada) sale del recipiente a razón de 3 gal/min; en estas condiciones el tanque se vacía exactamente después de una hora.

a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque en el instante t.
b) ¿Cuál es la cantidad máxima de sal dentro del recipiente?

18. Inicialmente, un tanque de 400 galones contiene 100 galones de salmuera con 50 libras de sal. Salmuera con 1 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 5 gal/s, y la mezcla total de salmuera del recipiente sale a una razón de 3 gal/s. ¿Cuánta sal contendrá el tanque cuando esté completamente lleno de salmuera?
19. Suponga que una salmuera que contiene 2 kg de sal por litro fluye hacia el interior de un tanque que se encuentra inicialmente lleno con 500 litros de agua que contiene 50 kg de sal. La salmuera entra al tanque a una velocidad de 5 l/min. La mezcla que se mantiene uniforme por medio de la agitación está saliendo del tanque a razón de 5 l/min.

a) Encuentre la concentración de sal en el tanque en kg/l al cabo de 10 minutos.
b) Luego de transcurridos 10 minutos en el tanque se presenta una fuga que ocasiona que salga de él un litro adicional por minuto ¿Cuál será la concentración de sal contenida en el tanque al cabo de 20 minutos?

20. Se está celebrando una fiesta en una habitación que contiene 1800 pies cúbicos de aire libre de monóxido de carbono. En el instante $t = 0$ varias personas comienzan a fumar. El humo, que contiene 6 por 100 de monóxido de carbono, se introduce en la habitación a razón de 0,15 pies cúbicos por minuto, y la mezcla, removida por ventilación sale a ese ritmo por una ventana entreabierta. ¿Cuándo deberá abandonar una persona prudente esa fiesta, si el nivel de monóxido de carbono comienza a ser peligroso a partir de una concentración de 0,00018?
21. Considere la cascada de los dos tanques mostrados en la figura 3.10.

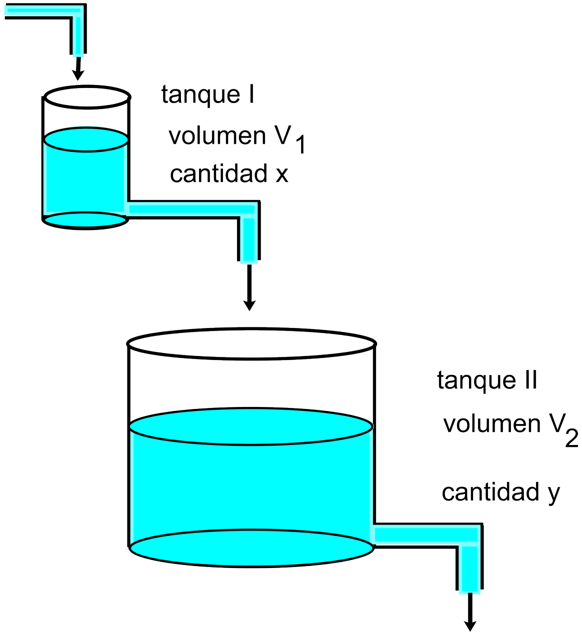


Figura 3.10:

Siendo los volúmenes de cada tanque $V_1 = 100$ gal y $V_2 = 200$ gal respectivamente. Aunado a ello, cada tanque contiene inicialmente 50 lb de sal. Las tres tasas de flujo indicadas en la figura son cada una de 5 gal/min, siendo de agua pura el flujo de entrada al tanque I.

a) Encuentre la cantidad $x(t)$ de sal en el tanque I en el tiempo t.

b) Suponga que $y(t)$ es la cantidad de sal en el tanque II en t. Muestre que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5x}{100} - \frac{5y}{200}$$

y después resuelva para $y(t)$ aplicando la función $x(t)$ encontrada en el inciso a).

c) Finalmente, halle la cantidad máxima de sal en el tanque II.

22. Suponga que en la cascada del problema anterior se tiene que inicialmente el tanque I contiene 100 galones de etanol puro y el tanque II contiene 100 galones de agua pura. El flujo de entrada al tanque I es de 10 gal/min, y los otros dos flujos son también de 10 gal/min.

a) Encuentre las cantidades $x(t)$ y $y(t)$ de etanol en los dos tanques en el tiempo $t \geq 0$.

b) Descubra la cantidad máxima de etanol en el tanque II.

23. Los tanques que se muestran en la figura 3.11, contienen cada uno v galones de agua.

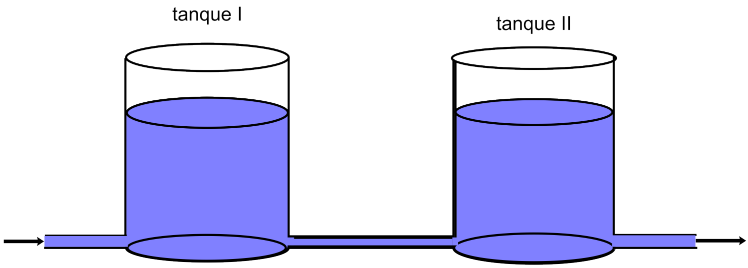


Figura 3.11:

Empezando en el tiempo $t = 0$, una solución con a lb/gal de un solvente químico fluye dentro del tanque I a la tasa de b gal/min. La mezcla luego entra y sale del tanque II a la misma tasa. Asumiendo agitación completa en ambos tanques, muestre que la cantidad de químico en el tanque II después de $t > 0$ es $av(1-e^{-btv}) - abte^{-btv}$.

3.3 Cable colgante

Se trata de problemas en los cuales el objetivo es determinar la forma geométrica que adopta un cable suspendido por sus extremos. En este caso el cable cuelga por efecto de su propio peso, como es el de los cables de energía eléctrica que observamos en la calle o alguna carga que se adhiere a él, como es el caso de los puentes colgantes. A continuación se presenta un ejemplo modelo en el cual se hace la deducción mediante un sistema físico para determinar la ecuación que hace el cable cuando cuelga de dos extremos fijos por efecto de una carga adherida a él; luego en el ejemplo 3.27 se hace lo mismo pero asumiendo que el cable se dobla por efecto de su propio peso, en este caso se incluye el término de la densidad lineal[12]

■ **Ejemplo 3.23** Un cable flexible está suspendido entre dos apoyos verticales[13] y soporta la carga de la capa firme de la carretera de un puente colgante. Si asumimos que el cable tiene un peso despreciable, determine la ecuación diferencial para la curva que adopta el cable.

Resolución

En la figura 3.12 se ilustra el contexto del problema.

[12] Viene a ser la cantidad de masa por unidad de longitud.
[13] Debemos asumir que los apoyos están a un mismo nivel.

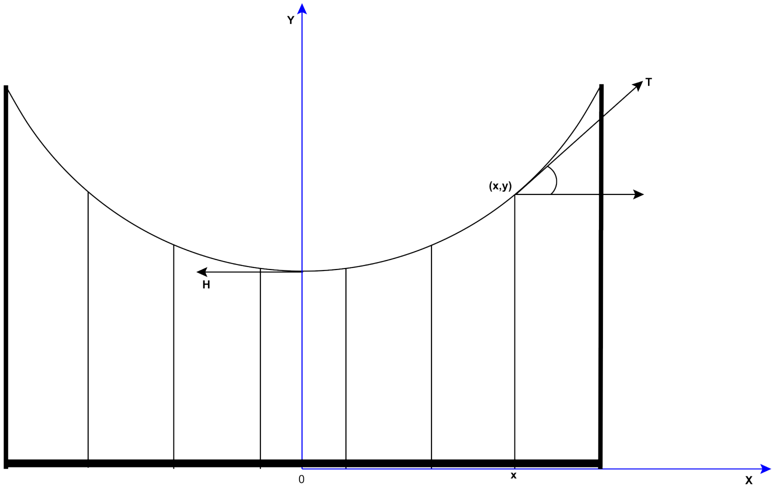


Figura 3.12:

La cuestión que tenemos ahora es la de encontrar un modelo matemático que describa la forma que adopta el cable. Para esto, tenemos que tomar una parte muy pequeña del cable como el arco $\widehat{AB}$, y luego determinar el conjunto de fuerzas que intervienen en dicha porción[14] de cable (ilustramos esta situación en la figura 3.13).

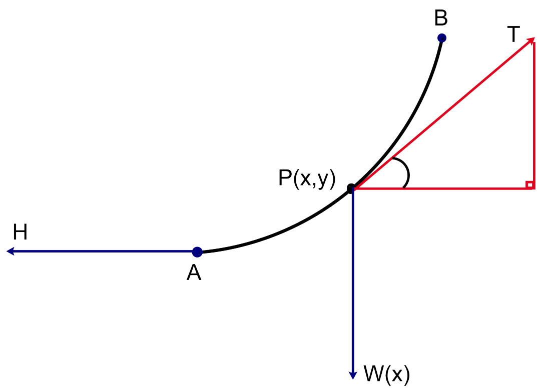


Figura 3.13:

En primer lugar, para hacer un modelo matemático, es necesario un sistema

[14]La porción de cable es un infinitésimo, lo que aparece en la figura asúmala como una ampliación del infinitésimo.

de referencia como el de la figura 3.10, en el cual asumimos que el punto mínimo del cable está en la posición $(0,d)$. Ahora, observando la sección $\widehat{AB}$ del cable en la figura 3.13, la cual está en equilibrio, se cumple que la suma algebraica de fuerzas en el eje X y en el eje Y, respectivamente, son iguales a cero[15]. Las fuerzas en este caso son: la tensión constante H que actúa en dirección horizontal (izquierda) y en el punto mínimo del cable, la carga $W(x)$ y la tensión T que es tangencial a la curva.

Descomponiendo todas las fuerzas en mención, se obtiene las ecuaciones

$$T \operatorname{sen} \theta = W(x), \qquad T \cos \theta = H \tag{3.38}$$

Luego dividiendo ambas ecuaciones se obtiene:

$$\tan \theta = \frac{W(x)}{H}$$

como $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W(x)}{H}$$

Ahora hay que ver que la carga W es una función de x cuya derivada $W'(x)$ equivale a la distribución de carga a lo largo del eje X. Derivando la última ecuación se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W'(x)}{H} \tag{3.39}$$

Esta ecuación diferencial es de segundo orden; sin embargo se resuelve como una ecuación de primer orden, haciendo el cambio de variable $z = \frac{dy}{dx}$.
Si asumimos que la distribución de carga a lo largo del eje X es constante, es decir $W'(x) = w_0$, entonces integrando la última ecuación se obtiene

$$y = \frac{w_0 x^2}{2H} + c_1 x + c_2$$

la cual es una parábola[16]. ■

■ **Ejemplo 3.24** Determine la ecuación de la curva que adopta el cable de un puente colgante, si en el problema anterior se conoce que los soportes están al mismo nivel, separados una distancia de 500 pies, y 100 pies más altos que el punto mínimo del cable. Además asuma que el peso del puente es uniforme y el peso del cable es despreciable. ¿Cuál es la pendiente del cable en los soportes?

[15] También es lo mismo decir que la suma de fuerzas que van hacia la derecha es igual a la suma de fuerzas que van hacia la izquierda; lo mismo sucede con las fuerzas que van hacia arriba y hacia abajo.

[16] Es decir, cuando se asume que la distribución de carga es uniforme a lo largo del eje X, entonces la curva que adopta el cable es una parábola.

Resolución

Ilustramos los datos del problema en la figura 3.14.

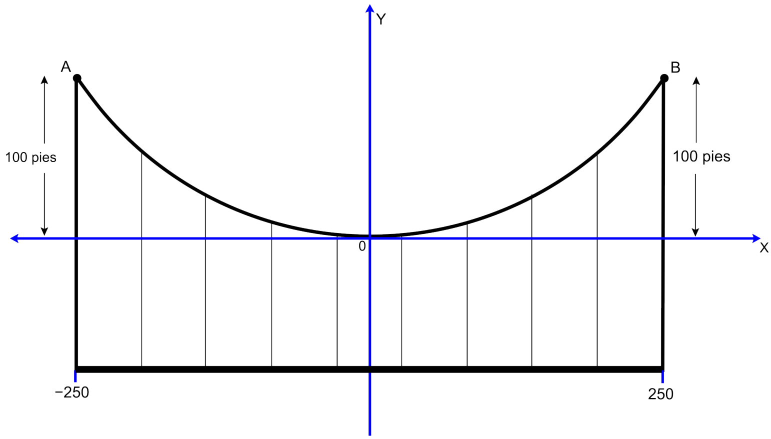


Figura 3.14:

Como podemos ver, el punto mínimo del cable lo hemos hecho coincidir con el origen del sistema de coordenadas[17]. En forma similar a (3.39) del ejemplo anterior, para cualquier punto (x,y) sobre la curva se cumple que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W'(x)}{H}$$

Pero la distribución del peso del puente según dato es uniforme, es decir $W'(x) = w_0$ (donde w_0 es una constante) Luego queda la ecuación diferencial con condiciones de frontera

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_0}{H}, & -250 < x < 250 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(250) = 100 \end{cases}$$

Integrando dos veces se llega a la expresión

$$y = \frac{w_0x^2}{2H} + c_1x + c_2$$

[17]Usted puede escoger otro sistema de referencia, lo importante es que el sistema escogido nos sea más cómodo de operar con las ecuaciones.

Para hallar las constantes usamos las condiciones del problema. Observando el gráfico vemos que: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ y $y(250) = 100$. Luego $c_2 = 0$, $c_1 = 0$ y $\frac{w_0}{2H} = \frac{1}{625}$. Con estos resultados la curva del cable está dada por la función

$$y = \frac{x^2}{625}, \quad x \in [-250, 250]$$

Para determinar la pendiente del cable hay que derivar la ecuación y evaluar en ± 250. En efecto: $y'(x) = \frac{2x}{625}$, luego la pendiente en los extremos $x = -250$ y $x = 250$ es respectivamente

$$y'(-250) = -\frac{4}{5} \qquad \text{y} \qquad y'(250) = \frac{4}{5}$$

■

■ **Ejemplo 3.25** Un cable de peso despreciable que soporta la plataforma de un puente colgante tiene sus soportes a un mismo nivel, separados a una distancia de 500 pies. Si los soportes están a 100 pies más altos que el punto mínimo del cable, use un conjunto apropiado de ejes para determine una ecuación para la curva que hace el cable, asumiendo que el puente tiene un peso variable de $400 + \frac{x^2}{1000}$ libras por pie de longitud, donde x es la distancia en pies desde el centro del puente.

Resolución

El esquema del problema es similar al del problema anterior. Por lo tanto, usando la misma figura se tiene de acuerdo a (3.39) que la curva que hace el cable está dada según la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\frac{dW}{dx} \tag{3.40}$$

Respecto del peso del puente hay que tener cuidado, el dato que se nos da no es la carga $W(x)$, sino mas bien cómo ésta está distribuida a lo largo de la longitud x, es decir:

$$\frac{dW}{dx} = 400 + \frac{x^2}{1000} \tag{3.41}$$

Reemplazando (3.41) en (3.40) se tiene finalmente el problema:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\left(400 + \frac{x^2}{1000}\right), & -250 < x < 250 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(250) = 100 \end{cases}$$

Integrando dos veces la ecuación diferencial se llega a la expresión

$$y = \frac{1}{H}\left(200x^2 + \frac{x^4}{12000}\right) + c_1 x + c_2$$

Para hallar las constantes usamos las condiciones del problema, en efecto: con $y(0) = y'(0) = 0$ se obtiene $c_1 = c_2 = 0$, luego

$$y = \frac{1}{H}\left(200x^2 + \frac{x^4}{12000}\right) \tag{3.42}$$

Finalmente, aplicando $y(250) = 100$ se obtiene $\frac{1}{H} = \frac{24}{3078125}$. Poniendo este resultado en (3.42), la ecuación de la curva está dada por la ecuación

$$y = \frac{24}{3078125}\left(200x^2 + \frac{x^4}{12000}\right), \quad -250 \le x \le 250$$

■

■ **Ejemplo 3.26** Un cable de un puente colgante tiene sus soportes en el mismo nivel, separados a una distancia de L pies. Los soportes están a pies por encima del punto mínimo del cable. Si el peso del cable es despreciable pero el puente tiene un peso uniforme de ω libras por pie muestre que

a) la tensión del cable en el punto más bajo es: $\frac{\omega L^2}{8a}$lb.

b) la tensión del cable en los soportes es: $\frac{\omega L}{8a}\sqrt{L^2 + 16a^2}$lb.

Resolución

a) De acuerdo a los datos que se nos da en el problema se tiene la figura 3.15.

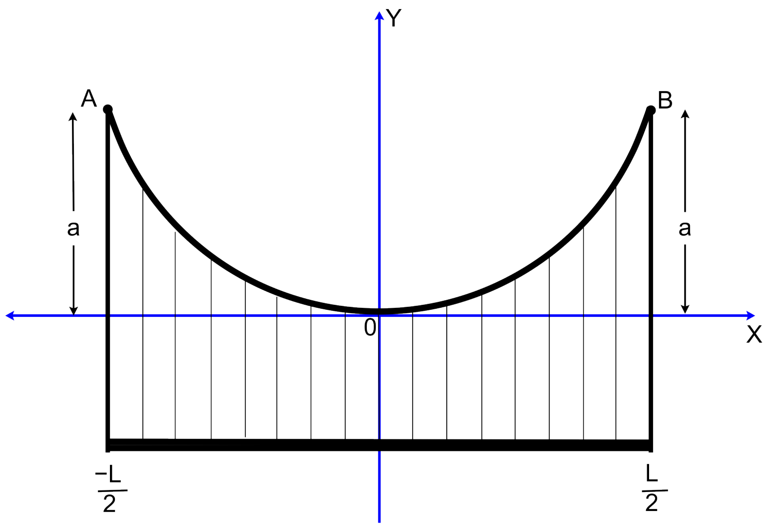


Figura 3.15:

Según (3.39), la ecuación diferencial está dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\frac{dW}{dx}$; puesto que el peso del puente (plataforma) es uniforme y de ω libras por pie, entonces este dato se refiere a la distribución del peso a lo largo de x, es decir $\omega = \frac{dW}{dx}$. Reemplazando este dato en la ecuación diferencial se tiene el problema: $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{H}, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y\left(\frac{L}{2}\right) = a \end{cases}$. Resolviendo la ecuación diferencial de este problema y aplicando las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$ se obtiene

$$y(x) = \frac{\omega x^2}{2H} \tag{3.43}$$

La tensión en el punto más bajo que se pide en el problema es H, para determinarla aplicamos la condición $y\left(\frac{L}{2}\right) = a$ en (3.43), de donde

$$H = \frac{\omega L^2}{8a} \text{ libras}$$

b) En el desarrollo de (a) hemos visto que $\frac{dW}{dx} = \omega$. Al integrar se obtiene $W(x) = \omega x + k$; puesto que $W(0) = 0$, entonces $W(x) = \omega x$. Para determinar la tensión T en los soportes aplicamos (3.38), que elevando al cuadrado cada una de las ecuaciones y sumando miembro a miembro da como resultado

$$T^2 = H^2 + W^2 \tag{3.44}$$

Por simetría basta evaluar en $x = \frac{L}{2}$, haciendo esto en (3.44) y poniendo el valor de H ya obtenido se tiene

$$T^2 = \left(\frac{\omega L^2}{8a}\right)^2 + W^2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$T^2 = \frac{\omega^2 L^4}{64a^2} + \left(\frac{\omega L}{2}\right)^2$$

$$T^2 = \left(\frac{\omega L}{8a}\right)^2 \left(L^2 + 16a^2\right)$$

Extrayendo la raíz cuadrada en esto último se tiene finalmente que

$$T = \frac{\omega L}{8a}\sqrt{L^2 + 16a^2}$$

■

■ **Ejemplo 3.27** Determine la ecuación de la curva de un cable flexible con densidad[18] constante ρ, el cual está fijo por sus extremos a dos soportes

[18] En este caso nos referimos a la densidad lineal, la cual está dada por el peso por unidad de longitud de cable.

Resolución

La resolución de este problema es semejante a la del ejemplo 3.23 hasta obtener la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\frac{dW}{dx}$$

El lector debe darse cuenta que en este caso el cable no soporta carga alguna, sino mas bien se dobla por efecto de su propio peso. Por esto hay que buscar una expresión matemática que relacione $\frac{dW}{dx}$ con la densidad del cable y su longitud. Para esto, escojamos una sección infinitesimal del cable. En la figura 3.16 se muestra una ampliación de la sección infinitesimal $\widehat{AB}$ de la curva

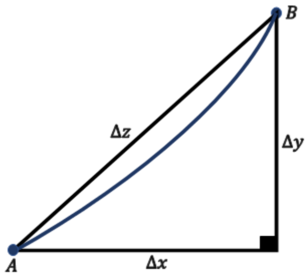


Figura 3.16:

Para Δx bien pequeño, la longitud del segmento $\overline{AB}$ es casi igual a la longitud del arco $\widehat{AB}$; en tal sentido, si s es la longitud del arco, entonces la longitud de $\overline{AB}$ es Δs. Luego aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

de donde

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Ahora, haciendo $\Delta x \to 0$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Pero $\frac{dW}{dx} = \frac{dW}{ds}\frac{ds}{dx}$, entonces con el resultado anterior

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dW}{ds}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{3.45}$$

Teniendo en cuenta que la variación del peso por unidad de longitud de cable es la densidad, entonces $\rho = \frac{dW}{ds}$. Luego (3.45) se convierte en:

$$\frac{dW}{dx} = \rho\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{3.46}$$

Poniendo (3.46) en (3.39) se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{3.47}$$

Para resolver esta ecuación hacemos el cambio de variable $z = \frac{dy}{dx}$, de modo que se tiene la nueva ecuación

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1+z^2}$$

de cuya integración se obtiene

$$\ln(z+\sqrt{1+z^2}) = \frac{\rho}{H}x + \ln(c_1)$$

Aplicando la condición $z = 0$ cuando $x = 0$, [19] se obtiene $c_1 = 1$, teniéndose así la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{\rho x}{H}} - e^{\frac{-\rho x}{H}}\right]$$

cuya solución general está dada por

$$y = \frac{H}{\rho}\cosh\frac{\rho x}{H} + c_2$$

Si ponemos que $y(0) = \frac{H}{\rho}$, entonces $c_2 = 0$, y de esta manera se tiene la curva

$$y = \frac{H}{\rho}\cosh\frac{\rho x}{H}$$

La gráfica de esta función se llama **catenaria**[20]. Si $\frac{\rho}{H} = 3,2$ y $x \in [-4,4]$, se tiene la catenaria que se muestra en la figura 3.17

[19]Se asume de ese modo, tomando en cuenta que el punto mínimo del cable ocurre cuando $x = 0$.

[20]La palabra **catenaria** proviene del latín, y significa cadena.

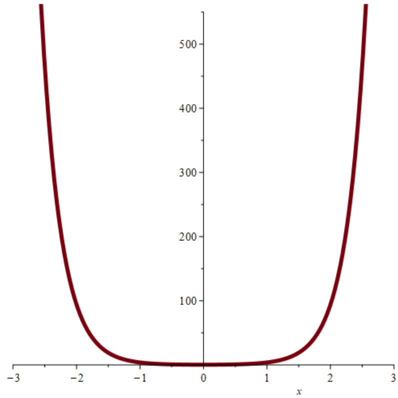


Figura 3.17:

■

■ **Ejemplo 3.28** Un cable de 0,5 lb/pie cuelga de dos soportes que están en un mismo nivel y separados 100 pies. Si la pendiente del cable en uno de los soportes es $\frac{12}{5}$

a) Encuentre la tensión del cable en su punto más bajo.
b) Determine una ecuación para la curva que hace el cable.

Resolución

a) Poniendo los datos del problema en un gráfico se tiene la figura 3.18, donde O es el origen del sistema de coordenadas. Según lo que indica el problema, la densidad es $\rho = 0,5$, luego poniendo la ecuación diferencial (3.47) con sus condiciones de frontera se tiene:

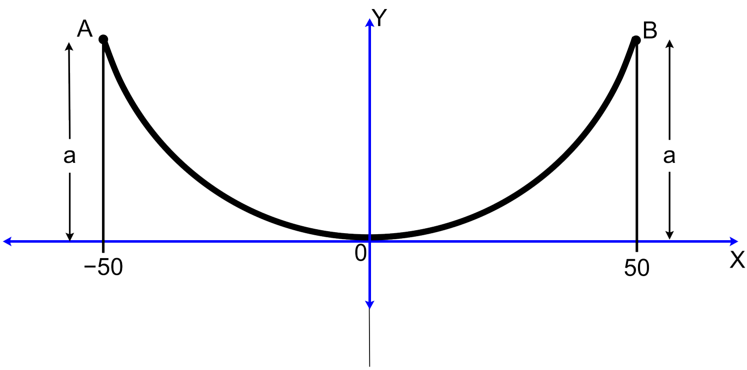


Figura 3.18:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, & -50 < x < 50 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y'(50) = \frac{12}{5} \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación diferencial según el ejemplo anterior se tiene

$$y(x) = 2H\cosh\frac{x}{2H} + c$$

aplicando la condición $y(0) = 0$ resulta $c = -2H$, luego

$$y(x) = 2H\cosh\frac{x}{2H} - 2H \tag{3.48}$$

Para determinar H usamos la tercera condición del problema, según la cual $y'(50) = \operatorname{senh}\frac{50}{2H} = \frac{12}{5}$. Resolviendo esto se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{e^{\frac{25}{H}} - e^{-\frac{25}{H}}}{2} = \frac{12}{5}, \quad \text{haciendo } z = e^{\frac{25}{H}} \\ &5z^2 - 24z - 5 = 0 \\ &z = 5 \quad \vee \quad z = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Escogiendo la raíz positiva se tiene $z = e^{\frac{25}{H}} = 5$, de donde la tensión del cable en el punto más bajo está dada por:

$$H = \frac{25}{\ln 5}$$

1. Poniendo el valor de H en (3.48), la curva que hace el cable está dada por la ecuación

$$y(x) = \frac{50}{\ln 5}\left[\cosh\left(\frac{\ln 5}{50}x\right) - 1\right], \quad -50 \le x \le 50$$

■

■ **Ejemplo 3.29** Un cable tiene una densidad constante de ρ libras por pie y cuelga de dos soportes al mismo nivel separados L pies. Si la tensión en el punto más bajo del cable es H libras,

a) Muestre que la tensión del cable en los soportes está dada, en libras por $H\cosh\left(\frac{\rho L}{2H}\right)$.

b) Muestre que el peso total del cable es $2H\operatorname{senh}\left(\frac{\rho L}{2H}\right)$.

Resolución

a) Teniendo como referencia la resolución del ejemplo 3.27, se tiene según (3.46) que el peso $W(x)$ está dado por la ecuación diferencial $\frac{dW}{dx} = \rho\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, en la cual reemplazamos $\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\frac{\rho x}{H}$ para obtener el problema: $\begin{cases} \frac{dW}{dx} = \rho\sqrt{1+\operatorname{senh}^2\frac{\rho x}{H}} \\ W(0) = 0 \end{cases}$, cuya solución es

$$W(x) = H\operatorname{senh}\left(\frac{\rho x}{H}\right)$$

Ahora, usando la identidad (3.44) y evaluando en $x = \frac{L}{2}$ (en el soporte de la derecha) resulta

$$T^2 = H^2 + W^2\left(\frac{L}{2}\right)$$
$$T^2 = H^2 + H^2\operatorname{senh}^2\left(\frac{\rho L}{2H}\right)$$
$$T^2 = H^2\cosh^2\left(\frac{\rho L}{2H}\right)$$

Luego, de esto último se concluye que la tensión en cualquiera de los soportes (por la simetría) es

$$T_{x=\frac{L}{2}} = H\cosh\left(\frac{\rho L}{2H}\right)$$

b) Para determinar el peso total del cable P_c, simplemente multiplicamos la densidad ρ por la longitud del cable L_c, es decir:

$$P_c = \rho L_c$$

Desarrollando esta igualdad se tiene:

$$\begin{aligned} P_c &= \rho\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \\ &= 2\rho\int_0^{\frac{L}{2}}\cosh\left(\frac{\rho x}{H}\right)dx \\ P_c &= 2H\left\{\operatorname{senh}\left(\frac{\rho x}{H}\right)\right\}_0^{\frac{L}{2}} \end{aligned}$$

de donde finalmente el peso total del cable es

$$P_c = 2H\operatorname{senh}\left(\frac{\rho L}{2H}\right)$$

■

■ **Ejemplo 3.30** Un cable de l pies de longitud tiene una densidad constante ρ libras por pie. El cable cuelga de dos soportes que están en un mismo nivel y separados L pies. Si además estos soportes están a pies por encima del punto más bajo del cable. Muestre que la tensión H correspondiente al punto más bajo del cable está dada por la fórmula

$$H = \frac{\rho L}{2\ln\frac{l+2a}{l-2a}} \tag{3.49}$$

Resolución

Ponemos los datos del problema en la figura 3.19.

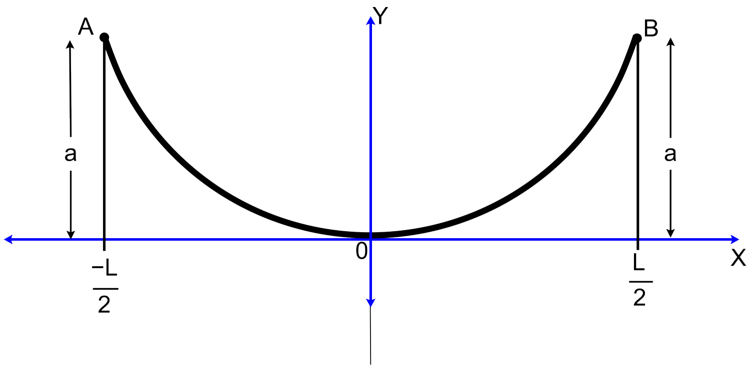


Figura 3.19:

En este caso, la curva que hace el cable se determina resolviendo (3.47), que con las condiciones que ilustra la figura se tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \ -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ y\left(\frac{L}{2}\right) = a \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación diferencial con las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$ se obtiene

$$y(x) = \frac{H}{\rho}\cosh\frac{\rho x}{H} - \frac{H}{\rho}$$

Luego, aplicando la condición $y\left(\frac{L}{2}\right) = a$ en esto último resulta $\frac{H}{\rho}\cosh\frac{\rho L}{2H} - \frac{H}{\rho} = a$, de donde

$$\cosh\frac{\rho L}{2H} - 1 = \frac{\rho a}{H} \tag{3.50}$$

Sabiendo que la longitud del cable es l, tenemos

$$L_c = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = l$$

de donde

$$\operatorname{senh}\frac{\rho L}{2H} = \frac{\rho l}{2H} \tag{3.51}$$

Dividiendo (3.50) entre (3.51) vemos que:

$$\frac{\cosh\frac{\rho L}{2H} - 1}{\operatorname{senh}\frac{\rho L}{2H}} = \frac{2a}{l}$$

de donde $\frac{e^{\frac{\rho L}{2H}}+e^{-\frac{\rho L}{2H}}-2}{e^{\frac{\rho L}{2H}}-e^{-\frac{\rho L}{2H}}} = \frac{2a}{l}$, y haciendo $z = e^{\frac{\rho L}{2H}}$

$$(l-2a)z^2 - 2lz + l + 2a = 0$$
$$z = \frac{l \pm 2a}{l-2a}$$

como $z \neq 1$, entonces $z = e^{\frac{\rho l}{2H}} = \frac{l+2a}{l-2a}$. Tomando logaritmo en esto último se tiene finalmente:

$$H = \frac{\rho l}{2\ln\frac{l+2a}{l-2a}}$$

que es lo que pide demostrar. ∎

3.3.1 Ejercicios 3.3

1. Determine la ecuación de la curva que adopta el cable de un puente colgante, si si los soportes están al mismo nivel, separados una distancia de 800 pies, y 800 pies más altos que el punto mínimo del cable. Además asuma que el peso del puente es uniforme y el peso del cable es despreciable. ¿Cuál es la pendiente del cable en los soportes?
2. Un cable de peso despreciable que soporta la plataforma de un puente colgante tiene sus soportes a un mismo nivel, separados a una distancia de 400 pies. Si los soportes están a 80 pies más altos que el punto mínimo del cable, use un conjunto apropiado de ejes para determine una ecuación para la curva que hace el cable, asumiendo que el puente tiene un peso variable de $200 + \frac{x^2}{1500}$ libras por pie de longitud, donde x es la distancia en pies desde el centro del puente.
3. Una cortina está formada por varillas muy delgadas colgando de una cuerda de densidad despreciable. Si las varillas están unas junto a otras e igualmente espaciadas horizontalmente, ¿cuál es la forma de la cuerda?

4. Un cable de densidad 0,4 lb/pie tiene 250 pies de largo y cuelga de dos soportes que están al mismo nivel. Los soportes están separados 200 pies.
   a) Calcule la distancia de los soportes por encima del punto más bajo del cable.
   b) Calcule la tensión en el punto más bajo del cable.
5. Un cable de densidad 0,5 lb/pie cuelga de dos soportes que están al mismo nivel y separados 50 pies. Si los soportes están a 10 pies por encima del punto más bajo del cable
   a) Calcule la longitud del cable.
   b) Calcule la tensión en el punto más bajo del cable.
   c) Calcule la tensión en los soportes del cable.

3.4 Vaciado de tanques

Se trata de problemas en los cuales hay que hacer un modelo matemático usando ecuaciones diferenciales con el que se pueda determinar el tiempo en el cual un tanque que contenga cierto líquido demore en vaciar parte de su contenido. En la figura 3.20 se tiene un depósito conteniendo un cierto líquido cuya sección transversal es constante y de área A, si se hace un agujero en la parte inferior de área B, entonces el contenido del tanque empieza a fluir a través de él. Para elaborar el modelo matemático asumimos que $h(t)$ es la altura del líquido en el tanque en el instante t, cuando transcurre un tiempo Δt, la altura del líquido debe ser $h(t+\Delta t)$

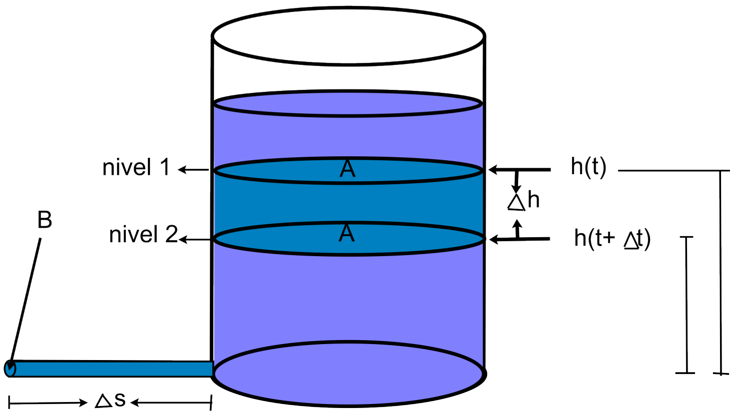


Figura 3.20:

De esta manera el líquido pasa del nivel 1 al nivel 2, el volumen entre estos dos niveles sería $\Delta V = -A\Delta h$, donde $\Delta h = h(t+\Delta t) - h(t)$. Pensando de manera intuitiva, el volumen ΔV al salir por el orificio, hace un cilindro de longitud Δs y área transversal B. Igualando volúmenes en este caso se tiene

$$-A\Delta h = B\Delta s$$

Dividiendo entre Δt entonces

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{B}{A}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Luego, haciendo $\Delta t \to 0$ se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{B}{A}\frac{ds}{dt} \tag{3.52}$$

donde $\frac{ds}{dt}$ podríamos interpretarlo como la velocidad a la cual está escapando el líquido[21]. Para determinar tal velocidad calculamos la energía del volumen ΔV; en efecto: El volumen ΔV por encontrarse a una altura h tiene energía potencial igual a mgh; dicho volumen al escapar por el orificio produce energía cinética igual a $\frac{mv^2}{2}$, donde $v \equiv \frac{ds}{dt}$; como tales energías tienen que ser iguales debe ocurrir

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Longrightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gh}$$

poniendo esto último en (3.52) se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{B}{A}\sqrt{2gh} \tag{3.53}$$

Acá hay que indicar que no todos los líquidos salen con la misma rapidez, dependiendo de lo densos que sean, la fricción en el orificio hace que la rapidez de escape sea diferente, por tal motivo, en la ecuación (3.53) debemos introducir una constante que mida tal efecto, si llamamos c la constante de fricción[22] entonces se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{B}{A}c\sqrt{2gh} \tag{3.54}$$

Cuando no se indique la fricción asumiremos $c = 1$.

■ **Ejemplo 3.31** Un tanque esférico de 4 pies de radio está completamente lleno con gasolina. Se permite la salida del combustible por un orificio de radio una pulgada en su parte inferior. ¿En cuánto tiempo se vaciará toda la gasolina del tanque?

[21]También recibe el nombre de caudal.
[22]O coeficiente de fricción.

Resolución

Sea $h(t)$ la altura del nivel del combustible en el instante t. Para aplicar (3.54) debemos definir A y B; en este caso $A = A(t)$ es el área de la sección transversal de la esfera en el instante t el cual es un círculo de radio $r(t)$, y B es el área de la sección transversal del orificio. Observe la figura 3.21.

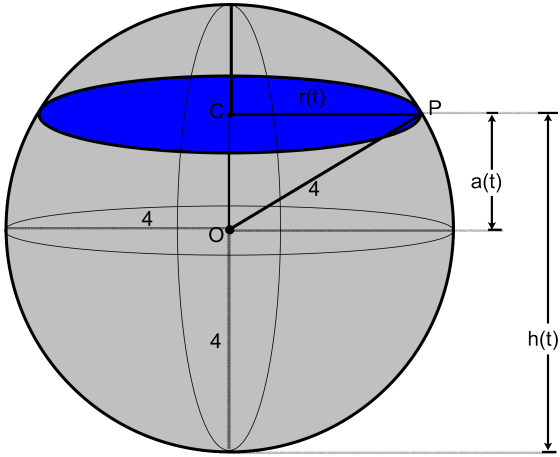


Figura 3.21:

Para determinar $A(t)$, antes vemos que $a(t) = h(t) - 4$, luego aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo OCP se tiene

$$\begin{aligned}
&a^2 + r^2 = 4^2 \\
&r^2 = 16 - (h-4)^2 \\
&r(t) = \sqrt{8h(t) - h^2(t)}, \;\; h(t) \in [0,8]
\end{aligned}$$

Luego el área de la sección transversal de radio $r(t)$ es

$$A(t) = \pi r^2(t) \;\text{ o también }\; A(t) = \pi(8h - h^2)$$

Para determinar B, el radio del orificio es de 1 pulg $= \frac{1}{12}$ pie, de donde

$$B = \pi \left(\frac{1}{12}\right)^2 \equiv \frac{\pi}{144}$$

Poniendo las expresiones de A y B en (3.54) y asumiendo $c = 1$ se tiene la ecuación diferencial:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\frac{\pi}{144}}{\pi(8h - h^2)} \sqrt{2(32)h}$$

Simplificando esta ecuación se tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{h}}{18(h^2-8h)} \\ h(0) = 8 \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$\int (h^{\frac{3}{2}} - 8h^{\frac{1}{2}})dh = \int \frac{1}{18}dt$$

$$\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}h^{\frac{3}{2}} = \frac{t}{18} + k$$

Como $h(0) = 8$, entonces $k = -\frac{512\sqrt{2}}{15}$, luego $h(t)$ está dada implícitamente por la relación

$$\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}h^{\frac{3}{2}} = \frac{t}{18} - \frac{512\sqrt{2}}{15}$$

El tanque queda vacío cuando $h = 0$, poniendo este valor en la solución se obtiene:

$$t = 18\left(\frac{512\sqrt{2}}{15}\right) \approx 868,89 \text{ seg} \approx 14,48 \text{ min}$$

es decir, el tanque queda vacío en un tiempo de 14,48 minutos. ■

■ **Ejemplo 3.32** Un depósito con forma de cono circular recto como se muestra en la figura 3.22

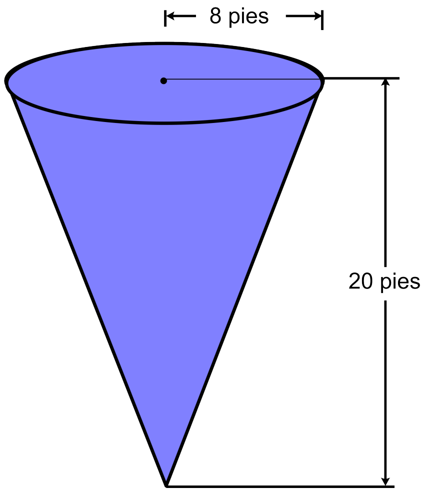


Figura 3.22:

está lleno con agua, a la cual se le permite salir por un orificio circular de radio 2 pulgadas ubicado en su parte inferior (vértice). Si se considera que la constante de fricción es $c = 0,6$

a) Determine una ecuación diferencial con su condición inicial con la cual se pueda determinar la altura h del nivel del agua en función del tiempo t.

b) Determinar el tiempo en que se vacía totalmente el agua del tanque.

■

Resolución

a) En todo el proceso de vaciado, la sección transversal del tanque es un círculo cuyo radio está disminuyendo a medida que el nivel del agua desciende; para determinar su área establecemos antes la relación de su radio con la altura. En efecto, si escogemos un instante t cualquiera en que el tanque se está vaciando, se tiene la figura 3.23,

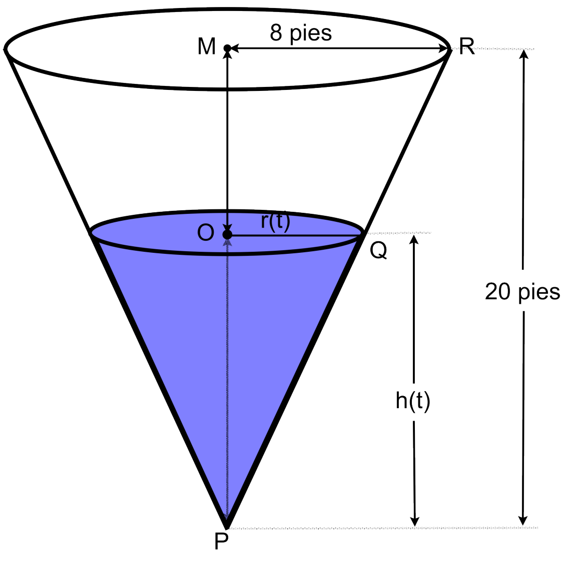


Figura 3.23:

donde por semejanza de triángulos vemos que: $\frac{20}{8} = \frac{h}{r}$, de lo cual se obtiene

$$r(t) = \frac{2}{5}h(t)$$

Si $A(t)$ es el área de la sección transversal del cono en cualquier instante

t, entonces

$$A(t) = \pi r^2(t) \text{ o también } A(t) = \frac{4}{25}\pi h^2(t)$$

Ahora, sea B el área del orificio, se sabe que el radio es de 2 pulgadas, entonces

$$B = \pi\left(\frac{1}{6}\right)^2 \text{ o también } B = \frac{\pi}{36}$$

Reemplazando A, B, $g = 32$ y $c = 0,6$ en (3.54) se tiene

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\frac{\pi}{36}}{\frac{4\pi h^2}{25}} 0,6\sqrt{64h}$$

de donde finalmente con la condición inicial $h(0) = 20$ se tiene el problema

$$(P)\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\frac{5}{6}h^{-\frac{3}{2}} \\ h(0) = 20 \end{cases}$$

1. Resolviendo el problema (P) se tiene que $\frac{2}{5}[h(t)]^{\frac{5}{2}} = k - \frac{5}{6}t$. Aplicando la condición $h(0) = 20$ resulta $k = \frac{2}{5}(20)^{\frac{5}{2}}$. Por lo tanto, la solución del problema está dada por la función

$$h(t) = \sqrt[5]{\left(20^{\frac{5}{2}} - \frac{25}{12}t\right)^2}$$

Ahora, el tanque queda totalmente vacío cuando $h(t) = 0$. Resolviendo esta ecuación se obtiene $t = 858,65$ segundos. Es decir, el tanque se vacía totalmente en un tiempo de 14,31 minutos.

3.4.1 Ejercicios 3.4

1. Un cilindro circular de 10 pies de radio y 20 pies de altura está lleno con agua. Esta empieza a vaciarse del tanque por un orificio en el fondo de 1 pulgada de diámetro. ¿Cuándo se vaciará toda el agua? (Considere la constante de fricción $c = 0,6$)
2. Un tanque que tiene la forma de un cubo de 12 pies de arista está lleno hasta sus tres cuartas partes con agua. Debido a un pequeño orificio en el fondo de 2 pul^2 de área el agua se vacía del tanque (asuma que $c = 0,6$).
   a) ¿Cuándo estará a la mitad?

b) ¿Cuándo estará vacío?

3. Un recipiente en forma de cono circular recto en posición vertical, con el vértice hacia abajo y ángulo de 60^o tiene una altura de 9 pies. Al inicio el recipiente está lleno con agua pero empieza a vaciarse por un orificio circular de radio de 2 pulgadas; si la constante de fricción es $c = 0,6$ y $g = 32\text{pies}/s^2$,
   a) Determine la ecuación diferencial para la altura h en función del tiempo t.
   b) Determine la función $h(t)$ que satisfaga las condiciones del problema.
   c) Determine el tiempo que demora el recipiente en vaciarse totalmente.

4. El tanque que se ilustra en la figura 3.24 está totalmente lleno con agua

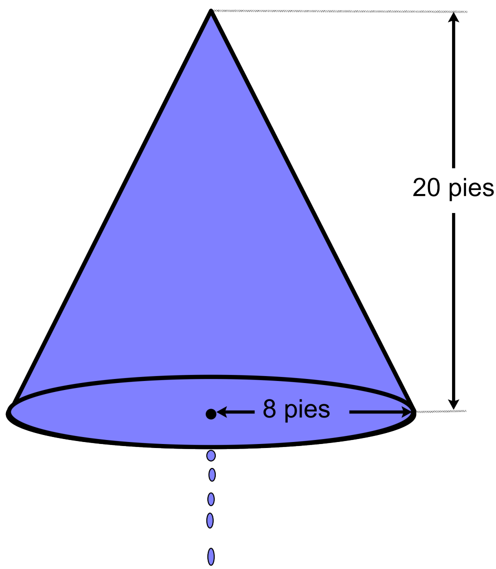


Figura 3.24:

Se permite la salida del agua por un orificio circular con un radio de 2 pulgadas en el centro de su base circular. Si la constante de fricción es $c = 0,6$ y $g = 32\text{pies}/s^2$, determine el tiempo que demora el recipiente en vaciarse totalmente.

5. Un tanque en forma de un cilindro circular recto está en posición ver-

tical. Inicialmente contiene agua a una profundidad de 9 pies. En el tiempo $t = 0$(horas) se le quita el tapón inferior; después de una hora la profundidad del agua ha disminuido a 4 pies. ¿En cuánto tiempo quedará el tanque totalmente vacío?

6. Suponga que el tanque del problema anterior tiene un radio de 3 pies y que su orificio en el fondo es circular, con un radio de 1 pulgada. ¿Cuánto tiempo le tomará al agua (inicialmente con una profundidad de 9 pies) vaciarse completamente?

7. Un tanque en forma de cono circular recto de 16 pies de altura, está lleno con agua. En el tiempo $t = 0$ se retira el tapón del fondo (vértice), lo cual ocasiona que después de una hora el agua del tanque tenga una altura de 9 pies. ¿En qué tiempo el agua se vaciará totalmente del tanque?
8. Un tanque de agua tiene la forma obtenida al girar la curva $y = \sqrt[3]{x^4}$ alrededor del eje Y. Se quita el tapón del fondo a las 12 del día, cuando la profundidad del agua en el tanque es de 12 pies. A la una de la tarde, la profundidad del agua es de 6 pies. ¿Cuándo estará vacío el tanque?
9. Un tanque tiene la forma obtenida al girar la parábola $x^2 = by$ alrededor del eje Y. La profundidad del agua es de 4 pies a las 12 del día, cuando se quita el tapón circular del fondo del tanque. A la una de la tarde la profundidad del agua es de 1 pie.

   a) ¿Cuál es la profundidad de agua al cabo de t horas?
   b) ¿Cuándo queda vacío el tanque?
   c) Si el radio inicial de la superficie superior del agua es de 2 pies, ¿cuál es el radio del orificio circular en el fondo?

10. Un tanque cilíndrico con longitud de 5 pies y radio de 3 pies se coloca sobre su eje horizontal. Si se abre un orificio circular en el fondo con un radio de 1 pulgada y el tanque está inicialmente lleno hasta la mitad con xileno, ¿en cuánto tiempo el tanque se vacía totalmente?
11. Un tanque lleno con agua, de forma semiesférica, tiene de radio 1 metro y su lado recto funciona como fondo. El tanque empieza a vaciarse por un orificio de 1 cm de radio ubicado en el fondo. Si se abre dicho orificio a la una de la tarde, ¿a qué hora quedará vacío?
12. Un recipiente de vidrio tiene forma de cilindro circular recto de radio de 1 pie. Si inicialmente está lleno con agua hasta una altura de 2 pies y empieza a vaciarse por un orificio circular en la parte inferior de radio $\frac{1}{32}$ de pulgada, determinar la altura h del nivel de agua en cualquier instante t. Considere $c = 0,6$.
13. Con los datos del problema anterior, ¿a qué distancia del fondo se debe hacer una marca sobre el costado que corresponda al transcurso de una hora? Continúe y determine dónde colocar las marcas correspondientes

a 2h, 3h, . . . , 12 h. Explique por qué estas marcas no están igualmente espaciadas.

14. (Clepsydra o reloj de agua) Un reloj de agua de 12 horas se diseña con las dimensiones que se ilustra en la figura 3.25, donde la superficie del tanque se obtiene al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje Y. ¿Cuál debe ser esta curva, y qué radio debe tener el orificio circular en el fondo para que el nivel del agua caiga a una velocidad constante de 4 pulgadas por hora?

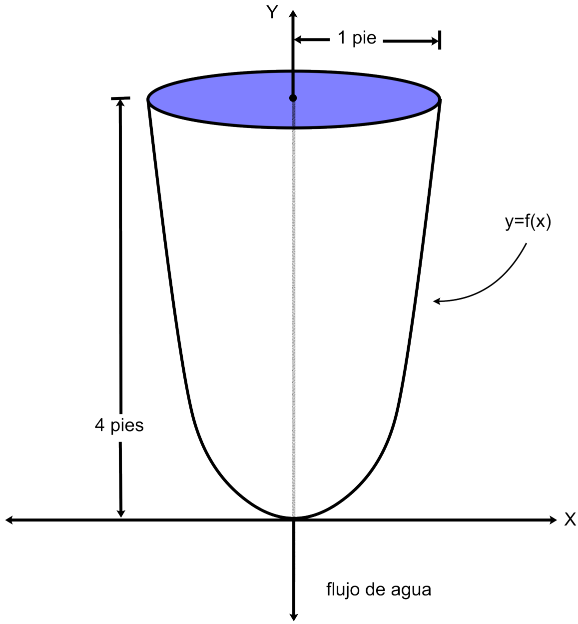


Figura 3.25:

15. Suponga que un recipiente de vidrio tiene forma de cono circular recto de radio de 1 pie. Si inicialmente está lleno con agua hasta una altura de 2 pies y empieza a vaciarse por un orificio circular en la parte inferior de radio $\frac{1}{32}$ de pulgada, determinar la altura h del nivel de agua en cualquier instante t. Considere $c = 0,6$. ¿Es posible medir en este reloj de agua 12 intervalos de tiempo de longitud igual a una hora? Explique.

3.5 Problemas de movimiento

El movimiento de una partícula en un plano, está gobernado de forma específica por la segunda ley de Newton. Según Hewitt P (2007). (pág. 64), fue Isaac Newton el primero que descubrió la relación entre los tres conceptos fundamentales de física: la aceleración[23], fuerza y masa[24]. Propuso una de las más importantes leyes de la naturaleza. La segunda ley de Newton, según la cual la **aceleración (a) de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta (F) que actúa sobre él, tiene la dirección de la fuerza neta y es inversamente proporcional a la masa (m) del objeto.**, según lo cual:

$$\text{Aceleración} \sim \frac{\text{fuerza neta}}{\text{masa}}$$

Eso quiere decir que si F aumenta, a disminuye con el mismo factor; pero si m aumenta, a disminuye con el mismo factor. De manera breve lo expresamos así:

$$a = \frac{F}{m} \tag{3.55}$$

La ecuación (3.55) sólo es aplicable para el caso en que la masa es constante; mas no cuando la masa es variable. Por ejemplo, si queremos estudiar el movimiento de un misil, hay que tener en cuenta que éste, a medida que quema combustible, va perdiendo masa. Para estudiar este tipo de problemas hay que aplicar la segunda ley general de Newton, según la cual: *la fuerza F que actúa sobre un cuerpo de masa m, le transmite momento a un ritmo igual a la fuerza*. En una ecuación esto es:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \tag{3.56}$$

Tenga en cuenta que asumiendo m constante de (3.56) se desprende (3.55). El estudio del movimiento de un móvil, es el estudio de su posición, velocidad y aceleración. Para esto, $s(t)$ representa la posición del móvil en un instante t; para medir la posición se debe implementar un sistema de referencia adecuado. Debemos indicar que el movimiento aquí estudiado será sobre una línea recta. La velocidad y aceleración estarán dadas respectivamente por la primera y segunda derivada de $s(t)$, es decir, $v(t) = \frac{ds}{dt}$ y $a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$.

Veamos a continuación algunos problemas relacionados con movimiento.

■ **Ejemplo 3.33** Un cuerpo de peso w desciende por un plano inclinado cuyo ángulo respecto de la horizontal es α. Si se desprecia el rozamiento, demuestre

[23] La aceleración determina qué tan rápido cambia el movimiento. Específicamente es el cambio de velocidad durante cierto intervalo de tiempo, ver [15].

[24] La masa se define como la cantidad de materia en un objeto. Es también la medida de la inercia u oposición que muestra un objeto en respuesta a algún esfuerzo para ponerlo en movimiento, detenerlo o cambiar de cualquier forma su estado de movimiento. Mientras que el peso es la fuerza sobre un objeto debida a la gravedad. La relación entre peso y masa en objetos en caída libre es igual a la constante g, ver [15].

que con una velocidad inicial v_0, el móvil recorrerá una distancia s_0 en un tiempo dado por

$$\frac{\sqrt{v_0^2+2gs_0\operatorname{sen}\alpha}-v_0}{g\operatorname{sen}\alpha}, \quad \text{donde } g \text{ es la gravedad}$$

¿Qué ocurre con el tiempo si α empieza a variar (aumentar o disminuir) entre 0 y $\frac{\pi}{2}$

Resolución

En primer lugar ilustramos los datos del problema en la figura 3.26,

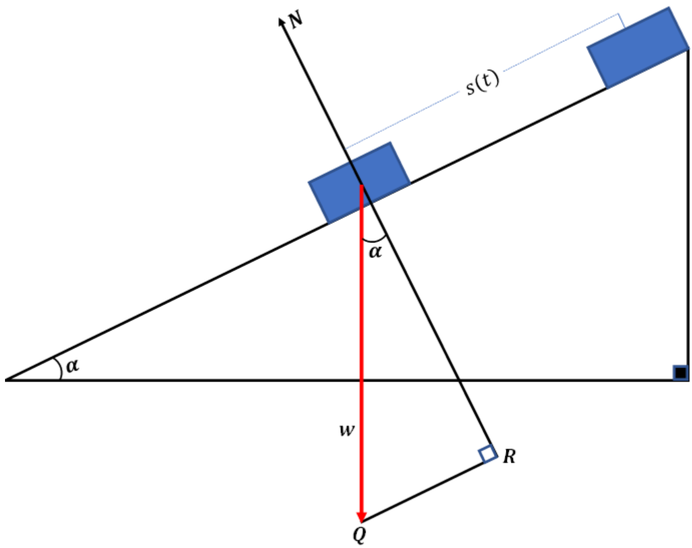


Figura 3.26:

Despreciando el rozamiento, el cuerpo resbala por el plano inclinado por la acción de su peso $w = mg$, cuyo efecto en la dirección del plano es $RQ = w\operatorname{sen}\alpha$; poniendo $s(t)$ la posición del móvil en el instante t y aplicando la segunda ley de Newton se tiene el problema

$$\begin{cases} m\frac{d^2s}{dt^2} = w\operatorname{sen}\alpha,\ t>0 \\ v(0) = \frac{ds}{dt}(0) = v_0 \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

Simplificando la ecuación diferencial se tiene: $\frac{d^2s}{dt^2} = g\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Integrando una vez y aplicando la condición $v(0) = v_0$ se obtiene:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = g\,\mathrm{sen}\,\alpha t + v_0$$

Integrando nuevamente y usando la condición $s(0) = 0$, se tiene finalmente

$$s(t) = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2}t^2 + v_0 t$$

Si asumimos que en un tiempo t_0 el cuerpo recorre una distancia s_0, entonces

$$s_0 = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2}t_0^2 + v_0 t_0$$
$$t_0 = \frac{-2v_0 \pm \sqrt{(2v_0)^2 - 4g\,\mathrm{sen}\,\alpha(-2s_0)}}{2g\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$
$$t_0 = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gs_0\,\mathrm{sen}\,\alpha} - v_0}{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

Respecto de la pregunta, si α crece entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, entonces t_0 decrece, es decir, el cuerpo cae más rápido. ■

■ **Ejemplo 3.34** Suponga que un cuerpo que se mueve con velocidad v encuentra una resistencia de la forma $\frac{dv}{dt} = -kv^{\frac{3}{2}}$. Hallar la velocidad y la posición del cuerpo para cualquier tiempo t. usando el hecho que $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$. Demuestre que el cuerpo sólo podrá recorrer una distancia finita igual a $s_0 + \frac{2}{k}\sqrt{v_0}$ antes de detener su deslizamiento.

Resolución

El caso es sencillo. Sólo hay que integrar, en efecto, sabiendo que $\frac{dv}{dt} = -kv^{\frac{3}{2}}$, entonces $\frac{-2}{\sqrt{v(t)}} = c_1 - kt$; aplicando la condición $v(0) = v_0$ se tiene:

$$v(t) = \frac{4v_0}{(2 + k\sqrt{v_0}t)^2} \tag{3.57}$$

puesto que $\frac{ds}{dt} = v(t)$. Entonces integrando nuevamente y aplicando la condición $s(0) = s_0$ vemos que:

$$s(t) = s_0 + \frac{2\sqrt{v_0}}{k} - \frac{4\sqrt{v_0}}{k(2 + k\sqrt{v_0}t)} \tag{3.58}$$

Haciendo $t \to +\infty$ en (3.57) se tiene que $v(t) \to 0$, es decir, el móvil se detiene cuando el tiempo es muy grande. Haciendo lo mismo en (3.58) vemos que la distancia límite es:

$$s_l = \lim_{t\to+\infty} s(t) = s_0 + \frac{2\sqrt{v_0}}{k}$$

lo que significa que antes de detenerse el móvil ha recorrido una distancia igual a $s_0 + \frac{2\sqrt{v_0}}{k}$. ■

■ **Ejemplo 3.35** Un objeto de 5kg se suelta a partir del reposo a 1000 metros arriba del suelo, cayendo por el efecto de la gravedad. Suponiendo que la fuerza debido a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto con constante de proporcionalidad $k = 50$ kg/s.

a) Determine la ecuación del movimiento del objeto.
b) ¿En qué momento el objeto impactará el suelo?

Resolución

a) Ilustramos los datos del problema en la figura 3.27,

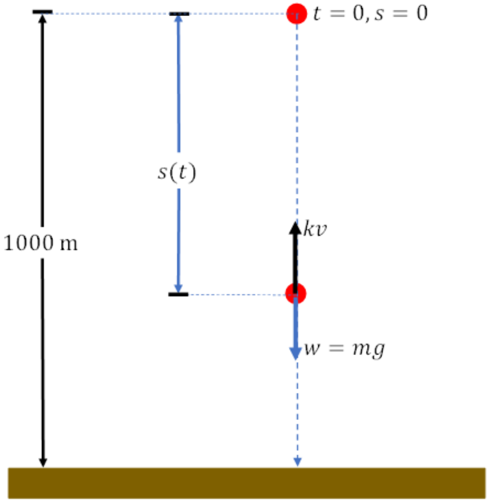


Figura 3.27:

donde consideramos: $m = 5$ kg y $g = 9,81$ m/s^2. Calculando la suma de fuerzas que actúan en la dirección del movimiento se tiene que $m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - kv$, donde $v = \frac{ds}{dt}$. Poniendo la ecuación diferencial con la condición inicial $v(0) = 0$ se tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

cuya solución es

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

Integrando esto último para hallar s se tiene: $s = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + c$, que aplicando la condición $s(0) = 0$ resulta:

$$s(t) = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m^2g}{k^2}$$

Reemplazando m y g se tiene finalmente:

$$s(t) = 0,0981e^{-10t} + 0,981t - 0,0981$$

b) Para determinar el tiempo en que el cuerpo impacta el suelo hay que resolver $s(0) = 1000$, de donde se obtiene: $t = 1019,4680$ segundos, que es aproximadamente 17 minutos.

■

■ **Ejemplo 3.36** Un paracaidista cuya masa es de 75 kg se deja caer desde un helicóptero que se encuentra suspendido a 2000 metros arriba de la superficie. Suponga que la fuerza de resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista, con constante de proporcionalidad $k_1 = 30$ kg/s cuando el paracaídas está cerrado y $k_2 = 90$ kg/s cuando el paracaídas está abierto. Si el paracaídas no se abre sino hasta que la velocidad del paracaidista llega a ser 20 m/s ¿al cabo de qué tiempo llegará al suelo?

Resolución

Ilustramos el problema en la siguiente figura 3.28, donde $m = 75$, $g = 9,81$, $k_1 = 30$ y $k_2 = 90$.

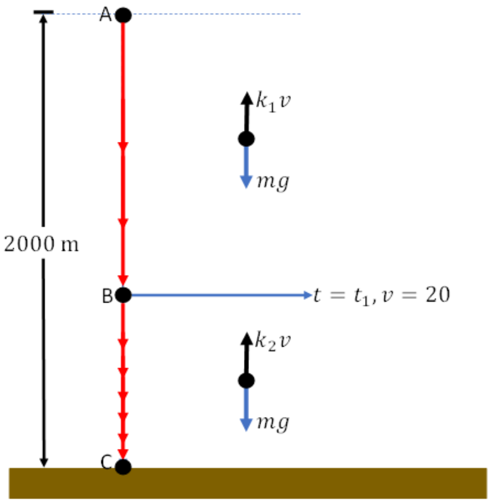


Figura 3.28:

Poniendo $s(t)$ la posición del paracaidista en el instante t y $v(t)$ su velocidad se tiene que $s(0)=0$ y $v(0)=0$.

Analizando en el tramo AB, se tiene $m\frac{dv}{dt}=mg-k_1v$, de donde se forma el problema

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}+\frac{k_1}{m}v=g \\ v(0)=0 \end{cases}$$

cuya solución está dada por la función (velocidad)

$$v(t)=\frac{981}{40}-\frac{981}{40}e^{-\frac{2}{5}t}$$

Puesto que $\frac{ds}{dt}=v(t)$, integrando nuevamente y usando la condición inicial $s(0)=0$ se tiene la función posición

$$s(t)=\frac{981}{16}e^{-\frac{2}{5}t}+\frac{981}{40}t-\frac{981}{16}$$

Si t_1 es el instante en que la velocidad del móvil es 20, entonces para determinar tal tiempo debemos resolver $v(t_1)=20$. En efecto:

$$v(t_1)=20\Longrightarrow\frac{981}{40}-\frac{981}{40}e^{-\frac{2}{5}t_1}=20\Longrightarrow t_1=-\frac{5}{2}\ln\frac{181}{981}$$

Podríamos afirmar que el móvil está en el punto B en el instante $t_1=-\frac{5}{2}\ln\frac{181}{981}$ segundos; y la distancia recorrida hasta ese momento es:

$$s(t_1)=-50-\frac{981}{16}\ln\frac{181}{981}\approx 53,6227 \text{ metros}$$

Resolviendo para el tramo BC, se tiene que $m\frac{dv}{dt}=mg-k_2v$, de donde se forma el problema:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}+\frac{k_2}{m}v=g \\ v(t_1)=20 \end{cases}$$

cuya solución es

$$v(t)=\frac{327}{40}+\frac{446548014693}{237189640}e^{-\frac{6}{5}t}$$

Usando nuevamente el hecho que $\frac{ds}{dt}=v(t)$ y la condición

$$s(t_1)=-50-\frac{981}{16}\ln\frac{181}{981}$$

se tiene:

$$s(t)=-\frac{148849338231}{94875856}e^{-\frac{6}{5}t}+\frac{327}{40}t-\frac{1927}{48}-\frac{327}{8}\ln\frac{181}{981}$$

De esta manera para los tramos AB y BC la posición del móvil está dada por la función

$$s(t) = \begin{cases} \frac{981}{16}e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{981}{40}t - \frac{981}{16},\ 0 \le t \le t_1 \\ \\ -\frac{148849338231}{94875856}e^{-\frac{6}{5}t} + \frac{327}{40}t - \frac{1927}{48} - \frac{327}{8}\ln\frac{181}{981},\ t_1 \le t \end{cases}$$

Para determinar el instante en que el móvil impacta con el suelo hay que resolver[25] la ecuación $s(t) = 2000$; haciendo esto resulta que $t = 241,109$ segundos (aproximadamente 4,02 minutos) ∎

∎ **Ejemplo 3.37** Un cuerpo se mueve horizontalmente a través de un medio cuya resistencia es proporcional al cuadrado de su velocidad, de modo que, $\frac{dv}{dt} = -kv^2$. Demuestre que la velocidad y la posición en cualquier instante t son respectivamente:

$$v(t) = \frac{v_0}{1+v_0kt} \quad \text{y} \quad s(t) = s_0 + \frac{1}{k}\ln(1+v_0kt)$$

donde $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$.

Resolución

En primer lugar, si resolvemos el problema $\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -kv^2 \\ \\ v(0) = v_0 \end{cases}$, es fácil ver que su solución está dada por la función

$$v(t) = \frac{v_0}{1+v_0kt}$$

puesto que $\frac{ds}{dt} = v(t)$. Entonces con la condición inicial $s(0) = s_0$ se tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \frac{v_0}{1+v_0kt} \\ \\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

cuya solución es la función

$$s(t) = s_0 + \frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)$$

∎

∎ **Ejemplo 3.38** Un cuerpo se mueve en un medio cuya resistencia es proporcional a su velocidad v, de modo que $\frac{dv}{dt} = -kv$

[25] En este caso la solución se hace aplicando técnicas de aproximación, o usando software, como por ejemplo Maple 16, que es el que estamos utilizando en el presente trabajo.

a) Si la velocidad y posición iniciales son respectivamente $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$, demuestre que su velocidad y posición en el instante t están dadas por:

$$v(t) = v_0 e^{-kt} \quad \text{y} \quad s(t) = s_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

b) Concluya que el cuerpo viajó solo una distancia finita y encuentre esa distancia.

Resolución

a) En primer lugar la solución del problema $\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -kv \\ \\ v(0) = v_0 \end{cases}$, está dada por la función

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

que al usar el hecho de que $\frac{ds}{dt} = v(t)$ y $s(0) = s_0$, se tiene nuevamente el problema:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = v_0 e^{-kt} \\ \\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

cuya solución es la función

$$s(t) = s_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

b) La presencia de la resistencia hace que el móvil tenga que detenerse en algún momento, si hacemos $t \to +\infty$ en $v(t)$, se tiene que $v(t) \to 0$, teóricamente, el cuerpo se detiene cuando t es infinito. En la realidad esto ocurre para un tiempo relativamente grande. De este razonamiento, si el cuerpo se detiene, entonces debe recorrer una distancia finita, la cual está dada por

$$s_l = \lim_{t \to +\infty} s(t) = s_0 + \frac{v_0}{k}$$

es decir, la distancia que llega a recorrer el móvil antes de detenerse es: $s_0 + \frac{v_0}{k}$.

■

■ **Ejemplo 3.39** Un objeto cuya masa es m, se lanza hacia arriba con una velocidad inicial v_0. La resistencia que ofrece el aire es proporcional a su velocidad instantánea, siendo k la constante de proporcionalidad. Muestre que la altura máxima que llega a alcanza el objeto es:

$$\frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)$$

Resolución

Ilustramos el problema en la figura 3.29.

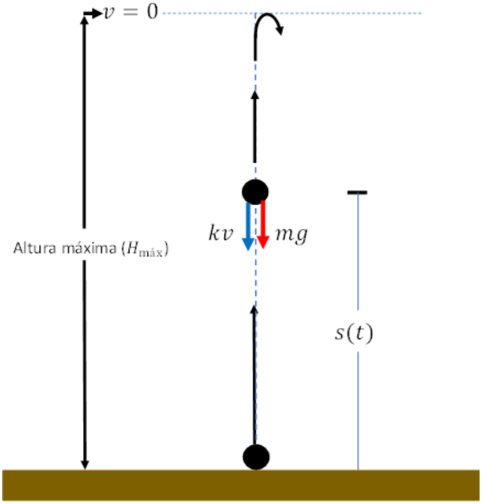


Figura 3.29:

Con la suma de fuerzas que actúan en la dirección del movimiento y la segunda ley de Newton vemos que: $m\frac{dv}{dt} = -mg - kv$. Luego, con la condición inicial $v(0) = v_0$, se forma el problema $\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \\ v(0) = v_0 \end{cases}$, de donde se obtiene que la velocidad en cualquier instante t está dada por la función:

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

Para determinar la posición $s(t)$ usamos el hecho que $\frac{ds}{dt} = v(t)$ y $s(0) = 0$. Resolviendo el problema: $\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} \\ s(0) = 0 \end{cases}$, se tiene que su solución está dada por la función

$$s(t) = \frac{m}{k^2}(v_0 k + mg)\left[1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right] - \frac{mg}{k}t$$

La altura máxima que alcanza el móvil es en el instante t_1 cuando su velocidad se hace cero, es decir: $v(t_1) = 0$. Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$t_1 = -\frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg}{kv_0 + mg}\right)$$

Evaluando $s(t)$ en t_1, la altura máxima está dada por

$$\begin{aligned}
H_{\text{máx}} &= s(t_1) = \frac{mv_0}{k} + \frac{m^2g}{k^2}\ln\left(\frac{mg}{v_0k+mg}\right) \\
&= \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k^2}\ln\left(\frac{kv_0+mg}{mg}\right) \\
H_{\text{máx}} &= \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k^2}\ln\left(1+\frac{kv_0}{mg}\right)
\end{aligned}$$

∎

■ **Ejemplo 3.40** Una partícula de masa unitaria se dispara verticalmente hacia arriba en un campo gravitacional de $g = 10$ m/s^2 y con una velocidad inicial $v_0 = 100$ m/s. El medio donde se mueve la partícula ejerce una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea con constante de proporcionalidad $k = 0,2\ \frac{N\,s^2}{m^2}$.

a) Determine la altura máxima que alcanza la partícula.

b) Determine el tiempo que demora la partícula en alcanzar su altura máxima

Resolución

a) De acuerdo a los datos del problema se tiene la figura 3.30.

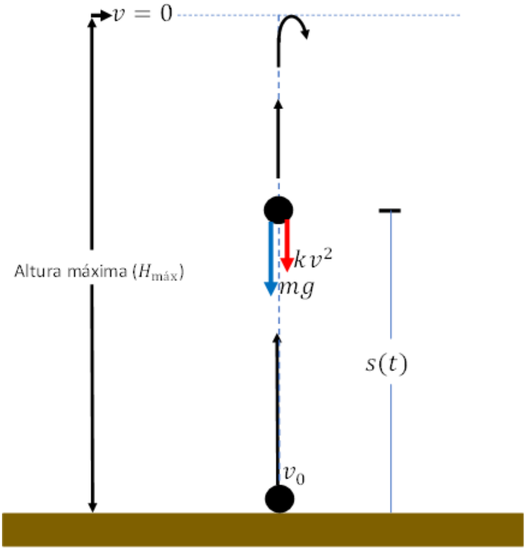


Figura 3.30:

Donde $s(t)$ y $v(t) = \frac{ds}{dt}$ son respectivamente la posición y velocidad de la partícula en cualquier instante t. En $t = 0$ se tiene $s(0) = 0$ y $v(0) = v_0 = 100$. Si tomamos la suma de fuerzas en la dirección del movimiento y la segunda ley de Newton, se obtiene que: $m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2$, de donde

$$\frac{dv}{dt} = -10 - \frac{v^2}{5} \tag{3.59}$$

Como se observa, (3.59) es la expresión de la variación de v respecto de t. Es posible expresar la variación de v respecto de la posición s, para lo cual basta aplicar la regla de la cadena. En efecto:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} \equiv v\frac{dv}{ds}$$

Reemplazando en (3.59) se tiene la ecuación diferencial

$$v\frac{dv}{ds} = -10 - \frac{v^2}{5} \tag{3.60}$$

puesto que para $t = 0$ se tiene que $s = 0$. Entonces $v(s)|_{s=0} = 100$; esto y (3.60) nos conducen al problema:

$$\begin{cases} v\frac{dv}{ds} = -10 - \frac{v^2}{5} \\ v(s)|_{s=0} = 100 \end{cases} \tag{3.61}$$

donde la resolución de la ecuación diferencial es como sigue:

$$\begin{aligned}
&v\frac{dv}{ds} = -10 - \frac{v^2}{5} \\
&\frac{2v}{v^2 - 50}dv = -\frac{2}{5}ds \Longrightarrow \int \frac{2v}{v^2 - 50}dv = -\frac{2}{5}\int ds \\
&\ln(v^2 + 50) = -\frac{2}{5}s + \ln c \\
&v^2 + 50 = ce^{-\frac{2}{5}s}
\end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial del problema resulta $c = 10050$. Luego la solución de (3.61) es:

$$v^2 + 50 = 10050e^{-\frac{2}{5}s}$$

La altura máxima $s_{\text{máx}}$ ocurre cuando $v = 0$, así se tiene

$$\begin{aligned}
&0 + 50 = 10050e^{-\frac{2}{5}s_{\text{máx}}} \\
&\frac{2}{5}s_{\text{máx}} = \ln 201 \\
&H_{\text{máx}} = s_{\text{máx}} = \frac{5}{2}\ln 201 \approx 13{,}2583 \ \text{metros}
\end{aligned}$$

b) Para determinar el tiempo que demora la partícula en alcanzar la altura máxima hay que usar (3.59), que con la condición inicial $v(0) = 100$ nos lleva al problema: $\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -10 - \frac{v^2}{5} \\ v(0) = 100 \end{cases}$, cuya solución es

$$v(t) = -5\sqrt{2}\tan\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2t - \sqrt{2}\arctan(10\sqrt{2})\right)\right]$$

Si $t = t_1 \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ es el tiempo en que el móvil alcanza su altura máxima, entonces $v(t_1) = 0$. Resolviendo esta ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}
&-5\sqrt{2}\tan\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2t_1 - \sqrt{2}\arctan(10\sqrt{2})\right)\right] = 0 \\
&2t_1 - \sqrt{2}\arctan(10\sqrt{2}) = 0 \\
&t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(10\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Así $t_1 \approx 1,0608$ segundos.

■

■ **Ejemplo 3.41** Un cuerpo de 8 libras de peso cae con velocidad inicial v_0 hacia la tierra desde una cierta altura. A medida que cae la resistencia del aire que actúa sobre él es numéricamente igual al doble de la velocidad en pies por segundo.

a) Determine la velocidad y posición respecto del tiempo.
b) Determine v_0 para que al cabo de $\frac{\ln 2}{8}$ segundos, la velocidad se duplique.

Resolución

a) En este caso el gráfico correspondiente al problema está en la figura 3.31, donde $v(t)$ y $s(t)$ son respectivamente la velocidad y la posición del móvil en el instante t. Según el problema el móvil tiene un peso igual a 8 libras, de donde su masa es $m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

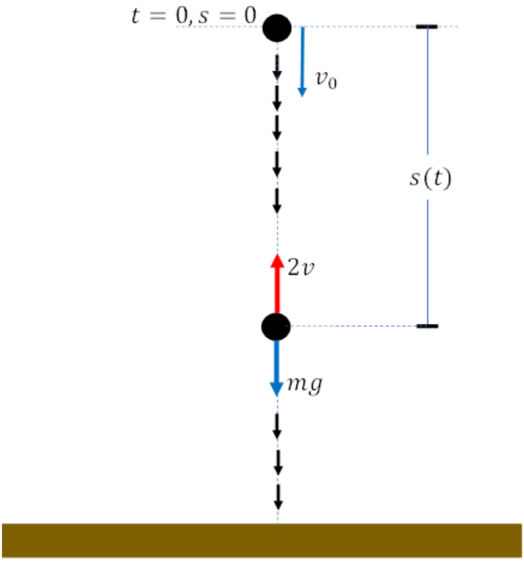


Figura 3.31:

Tomando la dirección del movimiento, se tiene: $m\frac{dv}{dt} = mg - 2v$, luego el problema: $\begin{cases} \frac{1}{4}\frac{dv}{dt} = 8 - 2v \\ v(0) = v_0 \end{cases}$, cuya solución es la función $v(t)$ dada por:

$$v(t) = 4 + (v_0 - 4)e^{-8t}$$

Como $\frac{ds}{dt} = v(t)$, entonces con la condición $s(0) = 0$ se tiene el nuevo problema para $s(t)$ dado por $\begin{cases} \frac{ds}{dt} = 4 + (v_0 - 4)e^{-8t} \\ s(0) = 0 \end{cases}$. En este caso su solución es la función

$$s(t) = -\frac{1}{8}(v_0 - 4)e^{-8t} + 4t + \frac{1}{8}(v_0 - 4)$$

b) Al cabo de $\frac{\ln 2}{8}$ la velocidad del móvil se duplica, es decir: $v\left(\frac{\ln 2}{8}\right) = 2v_0$. Resolviendo esta ecuación se tiene

$$v_0 = \frac{4}{3}\frac{\text{pie}}{\text{segundo}}$$

■

■ **Ejemplo 3.42** Una gota de lluvia, esférica, partiendo del reposo, cae por influjo de la gravedad. Si recoge vapor de agua (supuesto en reposo) a un ritmo proporcional a su superficie y su radio inicial era cero, probar que cae con aceleración constante $\frac{g}{4}$.

Resolución

Este es un caso donde la masa no es constante, sino mas bien, a medida que cae su masa va aumentando. Como la gota tiene la forma de una esfera, entonces el área de su superficie es $A = 4\pi r^2$, donde r es su radio en un instante t cualquiera.

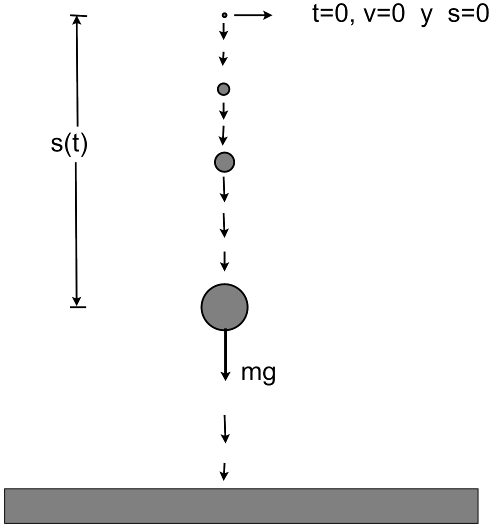


Figura 3.32:

Según el problema, la gota de lluvia recoge vapor a un ritmo proporcional a su superficie, es decir su masa aumenta según la ecuación:

$$\frac{dm}{dt} = k(4\pi r^2) \tag{3.62}$$

Asimismo, el volumen de la gota de lluvia en un instante t está dado por la ecuación $Vol = \frac{4}{3}\pi r^3$. Ahora, si ρ es su densidad entonces ocurre que su masa[26] está dada por $m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$. Derivando respecto de t e igualando con (3.62) se obtiene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{\rho}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial y usando el hecho que $r = 0$ cuando $t = 0$ se tiene que el radio está dado por

$$r(t) = \frac{k}{\rho}t$$

[26]Recuerde que la masa es el producto del volumen por la densidad.

y con este resultado la masa de la gota de lluvia en cualquier tiempo t es:

$$m(t) = \frac{4}{3}\pi\frac{k^3t^3}{\rho^2}$$

Para determinar la ecuación de movimiento de la gota de lluvia asumimos que $s(t)$ y $v(t) = \frac{ds}{dt}$ son respectivamente su posición y velocidad en el instante t. En la figura 3.32 ilustramos las condiciones del movimiento.

Como no menciona resistencia al movimiento, la asumimos de valor cero. Según la dirección de movimiento y usando (3.56) se tiene que $\frac{d}{dt}(mv) = mg$, entonces

$$v\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt} = mg$$

Poniendo la expresión de la masa en esta última ecuación vemos que

$$v\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi\frac{k^3t^3}{\rho^2}\right) + \frac{4}{3}\pi\frac{k^3t^3}{\rho^2}\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi\frac{k^3t^3}{\rho^2}g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3}{t}v = g$$

donde la solución de esto último es:

$$t^3v(t) = \frac{1}{4}gt^4 + c$$

Aplicando la condición $v(0) = 0$, resulta $c = 0$, y de esta manera

$$v(t) = \frac{1}{4}gt$$

Como se nos pide la aceleración, ésta es $a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{g}{4}$. ■

■ **Ejemplo 3.43** Si en el problema anterior el radio inicial de la gota de lluvia es r_0 y r es el radio en el instante t, demostrar que la aceleración en el instante t es $\frac{g}{4}\left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4}\right)$.

Resolución

La resolución de este problema será sobre la base del problema anterior. En efecto, en el problema anterior podemos asumir que $k = \rho$ y de esta mera el cambio del radio de la gota de lluvia en el tiempo está dado por la ecuación diferencial $\frac{dr}{dt} = 1$, que con la condición de $r(0) = r_0$ se obtiene:

$$r(t) = t + r_0$$

Con esto, la masa de la gota en el instante t está dada por

$$m(t) = \frac{4}{3}\pi\left(t + r_0\right)^3$$

Poniendo esto en la ecuación diferencial $v\frac{dm}{dt}+m\frac{dv}{dt}=mg$ resulta el problema $\begin{cases} \frac{dv}{dt}+\frac{3}{t+r_0}v=g \\ v(0)=0 \end{cases}$, cuya solución es:

$$v(t)=\frac{g}{4}(t+r_0)-\frac{gr_0^4}{4(t+r_0)^3}$$

Calculando la aceleración se tiene

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt}=\frac{g}{4}+\frac{3}{4}\frac{gr_0^4}{(t+r_0)^4} \\ &= \frac{g}{4}+\frac{g}{4}\frac{3r_0}{r^4} \\ a(t) &= \frac{g}{4}\left(1+\frac{3r_0^4}{r^4}\right) \end{aligned}$$

■

3.5.1 Ejercicios 3.5

1. Una pequeña gota de aceite de 0,2 gramos de masa, cae en el aire desde el reposo. Para una velocidad de 40 cm/seg, la fuerza debida a la resistencia del aire es 160 dinas. Asumiendo que la fuerza de resistencia del aire es proporcional a la velocidad:
   a) Encuentre la velocidad y la distancia recorrida como una función del tiempo.
   b) Encuentre la velocidad límite.
2. La fuerza de resistencia del agua que actúa sobre un bote es proporcional a su velocidad instantánea, y es tal que a 20 pies/seg la resistencia del agua es 40 lb. Si el bote pesa 320 lb y el único pasajero pesa 160 lb, y si el motor puede ejercer una fuerza estable de 50 lb en la dirección del movimiento:
   a) Encuentre la máxima velocidad a la cual el bote puede viajar.
   b) Encuentre la distancia recorrida y la velocidad en cualquier tiempo, asumiendo que el bote parte del reposo.
3. Un paracaidista y su paracaídas pesan 200 lb. En el instante en que el paracaídas se abre, él está viajando verticalmente hacia abajo a 40 pies/seg. Si la resistencia del aire varía directamente proporcional a la velocidad instantánea y la resistencia del aire es de 80 lb cuando la velocidad es de 20 pies/seg:
   a) Encuentre la velocidad límite.
   b) Determine la posición y velocidad en cualquier tiempo.
4. Un peso de 192 lb tiene una velocidad límite de 16 pies/seg cuando cae en el aire, el cual ofrece una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad instantánea del peso. Si el peso parte del reposo:

a) Encuentre la velocidad del peso después de 1 segundo.

b) ¿A qué distancia se encuentra antes de que la velocidad sea de 15 pies/seg?

5. Resuelva el problema anterior si la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea.
6. Un objeto con peso de 1000 lb se hunde en el agua empezando desde el reposo. Dos fuerzas actúan sobre él, una fuerza de flotación de 200 lb, y una fuerza de resistencia del agua, la cual es numéricamente igual a 100v libras, donde v está en pies/seg. Encuentre la distancia recorrida después de 5 segundos y su velocidad límite.
7. Un peso de 100 lb se desliza hacia abajo desde el reposo en un plano inclinado, el cual forma un ángulo de 30^o con la horizontal. Asumiendo la ausencia de fricción:

   a) Establezca la ecuación diferencial y condiciones que describan el movimiento.

   b) ¿Qué distancia recorrerá el peso 5 segundos después de empezar y cuál será su velocidad y aceleración en ese instante?
8. Un objeto de masa m se lanza hacia arriba por un plano inclinado α. Asumiendo que no hay fricción, muestre que la máxima distancia alcanzada es: $\frac{v_0}{2g\operatorname{sen}\alpha}$, donde v_0 es la velocidad inicial.
9. Si se tiene en cuenta la resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea (constante de proporcionalidad k), muestre que el objeto en el problema anterior alcanza una distancia máxima hacia arriba en el plano inclinado dada por

$$\frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k^2}\operatorname{sen}\alpha\,\ln\left(1+\frac{kv_0}{mg\operatorname{sen}\alpha}\right)$$

10. Un peso de 100 lb parte del reposo hacia abajo por un plano con 30^o de inclinación. Si el coeficiente de fricción entre el peso y el plano es 0,2 ¿qué distancia bajará el peso después de 5 segundos? Encuentre la velocidad y aceleración en ese instante (asuma que el peso sí arranca)
11. Un cohete de masa estructural m_1 contiene combustible de masa inicial m_2. Se lanza en vertical desde la superficie terrestre y va quemando el combustible a un ritmo constante a (de modo que $\frac{dm}{dt} = -a$, siendo m la masa total variable del cohete) expulsando los productos de la combustión hacia atrás con velocidad b constante relativa al cohete. Despreciando todas las fuerzas externas salvo la gravedad y suponiendo g constante, hallar la velocidad y la altura alcanzada en el instante en que se agota el combustible.
12. Un cohete tiene una masa de 25 000 kilogramos, la cual incluye 20000 kg de un combustible. Durante el proceso de quema los productos de la combustión se descargan a una velocidad relativa al cohete de 400

m/seg, involucrando una pérdida de 1000 kg de combustible. El cohete parte de la tierra con velocidad cero y viaja verticalmente hacia arriba. Si la única fuerza que actúa es la de la gravitación (variación con la distancia es despreciable):

a) Encuentre la velocidad del cohete después de 15, 20 y 30 segundos.

b) Encuentre la altura alcanzada cuando se ha quemado la mitad del combustible.

13. Un cohete tiene una masa M, la cual incluye una masa m de un combustible. Durante el proceso de quema los productos de la combustión se descargan a una velocidad $q > 0$ relativa al cohete. Este proceso de quema involucra una pérdida por segundo de una masa p de combustible. Despreciando todas las fuerzas externas excepto una fuerza gravitacional constante, muestre que la altura máxima teórica alcanzada por el cohete es:

$$\frac{qm}{p} + \frac{qM}{p}\ln\left(\frac{M-m}{M}\right) + \frac{q^2}{2g}\ln^2\left(\frac{M-m}{M}\right)$$

Asuma que el cohete parte radialmente de la superficie de la tierra con velocidad cero.

14. Adicionalmente a la fuerza gravitacional que actúa sobre cohete en el problema anterior, hay una fuerza debida a la resistencia del aire, la cual es proporcional a la velocidad instantánea del cohete.

a) Encuentre la velocidad del cohete en cualquier tiempo asumiendo que su velocidad inicial es cero.

b) Determine la altura del cohete en cualquier tiempo.

c) Encuentre la altura máxima teórica alcanzada.

3.6 Dinámica de una población

Sea $p(t)$ una población de individuos en un instante t. Si esta población vive en un medio que le permite crecer y reproducirse sin restricciones, entonces es válida la ley de crecimiento poblacional,[27] la cual afirma que: *la población crece a un ritmo proporcional al tamaño de la misma*. Matemáticamente esto se escribe así:

$$\frac{dp}{dt} = kp \tag{3.63}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Tomando sólo el caso en que $p(t)$ es creciente, entonces en (3.63) se tiene que $\frac{dp}{dt} > 0$ si y sólo si $k > 0$; esto significa que la población siempre va a estar en un proceso de crecimiento.

[27] Llamada también **Modelo de crecimiento exponencial** o **modelo de Malthus**. Thomas Robert Malthus es considerado uno de los primeros demógrafos, en su *Ensayo sobre el principio de la población* (1798) afirma que la rapidez de crecimiento de la población es proporcional a su densidad.

En cambio, para $k < 0$, se tiene que $\frac{dp}{dt} < 0$, y esto implica un decrecimiento en la población (ver figura 3.33); quizás el efecto de reproducción lo interpretemos acá como un proceso de extinción

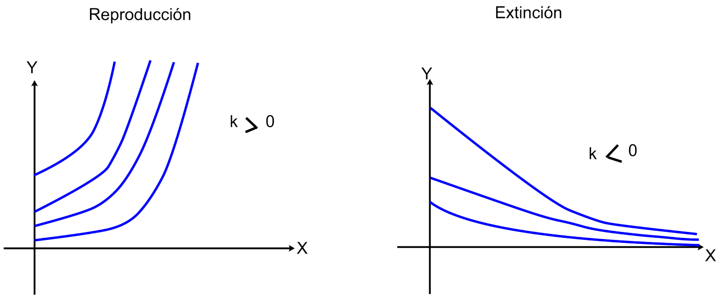


Figura 3.33: En el gráfico de la izquierda las curvas de población son estrictamente crecientes, mientras en el de la derecha decrecen y tienden a cero.

La función que satisface (3.63) es:

$$p(t) = ce^{kt} \tag{3.64}$$

Esta función para la población nos indica que su crecimiento o extinción siempre se da de manera exponencial.
La ecuación (3.63) funciona como se dijo, bajo condiciones ideales; la realidad no siempre muestra esas bondades; al contrario, el crecimiento de una población está sujeta a las condiciones que le brinda el medio donde se desarrolla, las cuales pueden ser: cantidad limitada de alimento, espacio limitado, presencia de depredadores o enfermedades, etc. Pero lo que sí ocurre, es que la ley (3.63) funciona para una población que en un inicio es pequeña, pero a medida que se va reproduciendo comienzan a surgir los condicionantes que traban tal crecimiento.

Pensemos en una población de truchas que viven en una poza o laguna. Al inicio ponemos una cantidad pequeña de truchas; éstas por las condiciones apropiadas de espacio y alimento abundante empiezan a reproducirse según la ley (3.63), si no se realiza captura de peces por parte del hombre o algún depredador, llegará el momento en que la población sea relativamente grande y comenzarán a aparecer los factores condicionantes, como el espacio ya no será suficiente, y la cantidad de alimento no será tan holgada como antes.

Este proceso de alguna manera comenzará a regular o equilibrar la cantidad de peces en la laguna. Esta población de equilibrio que denotamos con la letra K es lo que se llama **capacidad de contención** o **capacidad de carga** del medio, que viene a ser la cantidad de individuos que pueden vivir en condiciones normales de espacio y alimento suficientes para vivir y reproducirse.

Para generar el modelo matemático, necesitamos de un factor que controle el crecimiento desmesurado de (3.63). Para esto, hagamos el siguiente razonamiento:
Si p es pequeña comparada con la capacidad de contención K, es decir: $p < k$, entonces $\frac{p}{K} \approx 0$ y $0 < \left(1 - \frac{p}{k}\right) \approx 1$
Si $p > K$, es decir la población es mayor que la capacidad de contención K, entonces es evidente que el espacio y alimento van a ser insuficientes, y de esta manera algunos individuos van a morir hasta que la población llegue a su equilibrio. En el lenguaje matemático: $1 - \frac{p}{K} < 0$. Multiplicando (3.63) por el factor de control $1 - \frac{p}{K}$ y asumiendo $k > 0$, se tiene:

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{K}\right) \tag{3.65}$$

Así, en (3.65), para $p < K$ como se dijo, ocurre que $\frac{dp}{dt} \approx kp > 0$ (la población crece), mientras que para $p > K$ se tiene $\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{K}\right) < 0$ (la población decrece hasta estabilizarse, ver figura 3.34)

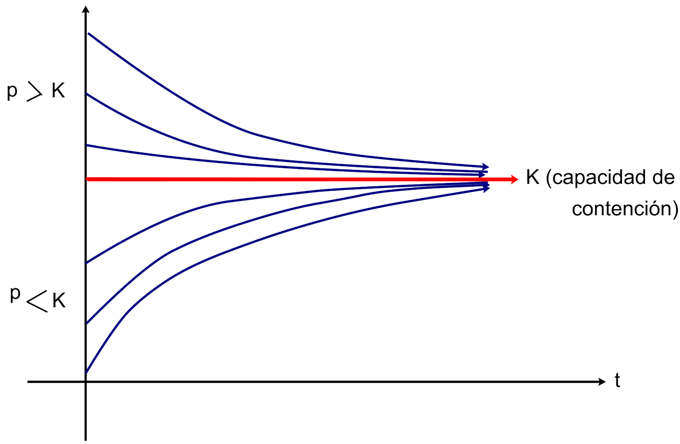


Figura 3.34: En ambos casos las curvas de población se estabilizan hacia la capacidad de contención K.

La ecuación (3.65) se llama **ecuación logística** y $p(t) = K$ es su solución de equilibrio[28].

■ **Ejemplo 3.44** Un cultivo de bacterias se inicia con 500 individuos y crece

[28]Cuando $t \to +\infty$, vemos que la solución de equilibrio se comporta como un atractor.

con una rapidez proporcional a su tamaño. Después de tres horas, hay 8000 bacterias.

a) Halle una expresión para la cantidad de bacterias después de t horas.
b) Encuentre la cantidad de bacterias después de 4 horas.
c) ¿Cuándo habrá 30000 ejemplares?

Resolución

Sea $p(t)$ la población de bacterias en cualquier tiempo t (horas).

a) Puesto que la población de bacterias crece a una tasa proporcional a su tamaño, entonces lo hace según (3.63), es decir: $\frac{dp}{dt} = kp$. Poniendo las condiciones se tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = kp, \ t > 0 \\ p(0) = 500 \\ p(3) = 8000 \end{cases} \tag{3.66}$$

La solución de la ecuación diferencial es

$$p(t) = ce^{kt}$$

con la condición $p(0) = 500$ resulta $c = 500$, luego $p(t) = 500e^{kt}$. Ahora, aplicando la condición $p(3) = 8000$ vemos que $e^k = 16^{\frac{1}{3}}$; finalmente la solución del problema (3.66) es la función

$$p(t) = 500\ (16)^{\frac{t}{3}} \tag{3.67}$$

b) Al cabo de cuatro horas la población de bacterias será:

$$p(4) = 500\ (16)^{\frac{4}{3}} = 20158,73 \approx 20159 \text{ bacterias}$$

c) Si t_1 es el tiempo en que hay 30000 bacterias, entonces de acuerdo con (3.67) se cumple

$$p(t_1) = 500\ (16)^{\frac{t_1}{3}} = 30000$$
$$t_1 = 3\frac{\ln 60}{\ln 16} \approx 4,430168$$

Así $t_1 \approx 4$ horas con 26 minutos.

■

■ **Ejemplo 3.45** La razón de cambio con respecto al tiempo de una población de conejos p es proporcional a la raíz cuadrada de p. En el tiempo $t = 0$ (meses) el número de conejos es de 100, y esta cifra crece a una tasa de 20 individuos por mes. ¿Cuántos conejos habrá un año después?

Resolución

Sea $p(t)$ la población de conejos en el tiempo t meses, la tasa de cambio a la que crece $p(t)$ es según el problema, dada por la ecuación:

$$\frac{dp}{dt} = k\sqrt{p}$$

cuya solución general es $p^{\frac{1}{2}} = \frac{kt}{2} + c$. Puesto que en $t = 0$ se tiene $p = 100$, entonces $c = 10$; con lo cual se tiene la nueva expresión $p^{\frac{1}{2}} = \frac{kt}{2} + 10$. Según el problema, pasado un mes la población de conejos aumenta en 20 individuos. Esto significa que $p(1) = 120$, y de esta manera $k = 4\sqrt{30} - 20$. Finalmente se tiene que la población de conejos en cualquier tiempo t está dada por

$$p(t) = \left[\left(2\sqrt{30} - 10\right)t + 10\right]^2$$

Para determinar la población de conejos al cabo de un año calculamos $p(12)$. En efecto:

$$\begin{aligned} p(12) &= \left(24\sqrt{30} - 110\right)^2 \\ &\approx 460,2489 \approx 460 \text{ conejos} \end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 3.46** Suponga que en un lago una población de peces $p(t)$ es atacada por una enfermedad en el tiempo $t = 0$, con el resultado de que los peces dejan de reproducirse (la tasa de nacimientos es $\beta = 0$) y la tasa de mortalidad δ (muertes a la semana por pez), es a partir de ese momento proporcional a $\frac{1}{\sqrt{p}}$. Si inicialmente había 900 peces en el estanque y 441 se perdieron después de 6 semanas, ¿en cuánto tiempo morirán todos los peces?

Resolución

Para resolver este problema, antes debemos hacer el análisis de variaciones. Si β y δ representan respectivamente el número de nacimientos y muertes por unidad de población por unidad de tiempo, entonces el número de nacimientos y muertes que se registran en un intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ se asemeja a las expresiones:

$$\text{número de nacimientos}: \ \beta p(t)\Delta t \quad \text{y} \quad \text{número de muertes}: \ \delta p(t)\Delta t$$

Así, en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ el cambio en la población que denotamos por Δp se calcula mediante

$$\Delta p = \text{nacimientos} - \text{muertes} \approx (\beta - \delta)\Delta t$$

Dividiendo entre Δt y haciendo $\Delta t \to 0$ se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = (\beta - \delta)p \tag{3.68}$$

Ahora, según lo que indica el problema $\beta = 0$ y $\delta = k\frac{1}{\sqrt{p}}$, poniendo estos datos en (3.68) se obtiene:

$$\frac{dp}{dt} = -k\frac{1}{\sqrt{p}}p$$

cuya solución general es: $\sqrt{p} = c - \frac{kt}{2}$. Aplicando la condición $p(0) = 900$ se obtiene $c = 30$, y de esta manera:

$$\sqrt{p(t)} = 30 - \frac{kt}{2}$$

En 6 semanas se ha perdido 441 peces, quedando 459 peces en ese lapso de tiempo, es decir: $p(6) = 459$, resolviendo esta ecuación resulta $\frac{k}{2} = \frac{10-\sqrt{51}}{2}$. Luego la población de peces en cualquier tiempo t está dada por la función

$$p(t) = \left(30 - \frac{10-\sqrt{51}}{2}t\right)^2$$

Usando esta fórmula, vemos que todos los peces han muerto cuando $p = 0$, así se tiene:

$$\left(30 - \frac{10-\sqrt{51}}{2}t\right)^2 = 0 \Longrightarrow t = \frac{60}{10-\sqrt{51}} \approx 20{,}989$$

es decir, al cabo de aproximadamente 21 semanas todos los peces en el estanque habrán muerto. ■

■ **Ejemplo 3.47** Una población $p(t)$ de roedores tiene una tasa de nacimientos $\beta = \frac{p}{1000}$ (al mes por roedor) y una tasa de mortalidad constante δ. Si $p(0) = 100$ y $p'(0) = 8$, ¿cuánto tiempo (en meses) tomará a esta población duplicarse a 200 roedores?

Resolución

Aplicando el procedimiento de modelación del problema anterior vemos que

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{p}{1000} - \delta\right)p$$

Resolviendo esta ecuación

$$\int \frac{1000\,dp}{p(p-1000\delta)} = \int dt$$

$$p = \frac{1000\delta}{1-ce^{\delta t}}$$

para hallar el valor de c usamos la condición $p(0)=100$, de donde $c=1-10\delta$. Luego

$$p(t) = \frac{1000\delta}{1+(10\delta-1)e^{\delta t}}$$

Calculando la derivada se tiene:

$$p'(t) = -\frac{1000\delta^2(10\delta-1)e^{\delta t}}{\left[1+(10\delta-1)e^{\delta t}\right]^2}$$

Ahora, la condición $p'(0)=8$ nos conduce a la ecuación $8=-10(10\delta-1)$, de donde $\delta=\frac{1}{50}$. Con este dato, la población de roedores está dada por la función

$$p(t) = \frac{100}{5-4e^{\frac{t}{50}}}$$

Si t_1 es el tiempo al cabo del cual hay 200 roedores, entonces $p(t_1)=200$; resolviendo esta ecuación se tiene $t_1 = 50\ln\frac{9}{8}$ que aproximadamente es

$$t_1 \approx 5,889 \text{ meses}$$

o también 5 meses con 27 semanas. ■

■ **Ejemplo 3.48** En una laguna cercana a Huaraz se pusieron 400 truchas. Al cabo del primer año dicha población se triplicó; si se estima que la capacidad de contención de dicha laguna es de 10 000 truchas:

a) Determine la población de peces al cabo de t años.
b) ¿Cuánto tardará la población en aumentar hasta 5 000 truchas?

Resolución

a) Según los datos del problema se trata de un problema logístico. Poniendo $K=10000$ en (3.65) se tiene el problema:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = kp\left(1-\frac{p}{10000}\right) \\ p(0)=400 \\ p(1)=1200 \end{cases} \tag{3.69}$$

donde $p(t)$ es la población de truchas en el tiempo t (años). Resolviendo la ecuación diferencial de (3.69) se tiene:

$$\frac{dp}{p(10000-p)} = \frac{k}{10000}dt$$
$$\int \frac{10000dp}{p(10000-p)} = k\int dt$$

$$\ln|p| - \ln|p-10000| = kt + \ln c$$

de donde

$$p(t) = 10000\left(1 + \frac{1}{ce^{kt}-1}\right)$$

Aplicando la condición $p(0) = 400$ se obtiene $c = -\frac{1}{24}$. Luego

$$p(t) = 10000\left(1 - \frac{24}{e^{kt}+24}\right)$$

Finalmente usando el hecho que $p(1) = 1200$ resulta que $k = \ln\left(\frac{36}{11}\right)$, y de esta manera la solución del problema (3.69) está dada por la función:

$$p(t) = 10000\left[1 - \frac{24}{\left(\frac{36}{11}\right)^t + 24}\right]$$

la cual es la población de truchas en cualquier tiempo t.

b) Si t_1 es el tiempo al cabo del cual hay 5000 truchas, entonces debe ocurrir que

$$p(t_1) = 10000\left[1 - \frac{24}{\left(\frac{36}{11}\right)^{t_1} + 24}\right] = 5000$$
$$t_1 = \frac{\ln 24}{\ln\frac{36}{11}}$$
$$t_1 \approx 2,68 \text{ años (2 años y 8 meses)}$$

■

■ **Ejemplo 3.49** En una comunidad que consta de una población de 50000 habitantes ocurre que 500 de ellos se enferman de una gripe muy contagiosa difícil de curar. Si al cabo de un día hay 1000 personas contagiadas, determine una función con la cual se pueda determinar el número de contagiados con la gripe al cabo de t días. ¿Al cabo de cuántos días la mitad de la población quedará contagiada por la gripe?

Resolución

Sea $c(t)$ el número de personas contagiadas al cabo de t días. La capacidad de contención según el problema es el número de habitantes de tal comunidad, es decir: $K = 50000$. En este caso la tasa con que varía la cantidad de contagiados será proporcional no sólo al número de contagiados $c(t)$ sino también al número de personas sanas $s(t) = 50000 - c(t)$. Matemáticamente:

$$\frac{dc}{dt} = kc(50000 - c)$$

Resolviendo se tiene:

$$\frac{dc}{c(50000 - c)} = kdt$$
$$\int \frac{dc}{c} - \int \frac{dc}{c - 50000} = 50000k \int dt$$
$$\ln \left| \frac{c}{c - 50000} \right| = 50000kt + \ln a$$

$$\frac{c}{c - 50000} = ae^{50000kt}$$

Luego

$$c(t) = 50000 \left(1 + \frac{1}{ae^{50000kt} - 1} \right) \tag{3.70}$$

Aplicando la condición inicial $c(0) = 500$ se obtiene $a = -\frac{1}{99}$, que al ponerla en (3.70) resulta

$$c(t) = 50000 \left(1 - \frac{99}{e^{50000kt} + 99} \right)$$

Finalmente, usando la condición $c(1) = 1000$ se tiene $k = \frac{1}{50000} \ln \frac{99}{49}$, y de esta manera la población de contagiados al cabo de t días estará dada por:

$$c(t) = 50000 \left[1 - \frac{99}{\left(\frac{99}{49}\right)^t + 99} \right]$$

Si al cabo de t_1 días la mitad de la población queda contagiada por la gripe, entonces $p(t_1) = 25000$. Resolviendo esta ecuación resulta:

$$t_1 = \frac{\ln 99}{\ln \frac{99}{49}} \approx 6,5 \text{ días}$$

■

3.6.1 Ejercicios 3.6

1. Suponga que una cierta laguna se llena con peces y que las tasas de natalidad y mortalidad β y δ respectivamente, son ambas inversamente proporcionales a $\sqrt{p}$.
   a) Muestre que la población de peces en cualquier tiempo t (meses) está dada por la función
   $$p(t) = \left(\frac{kt}{2} + \sqrt{p_0}\right)$$
   donde k es una constante y p_0 es la población inicial.
   b) Si $p_0 = 100$ y en 6 meses hay 169 peces en la laguna, ¿cuántos peces habrá al cabo de un año?
2. La relación de cambio con respecto al tiempo de una población p de lagartos en un pantano es proporcional al cuadrado de p. En 1998 el pantano contaba con una docena de lagartos y con dos docenas en 1998. ¿Cuándo habrá cuatro docenas de lagartos en el pantano? ¿Qué sucede a partir de ese momento?
3. Considere una población $p(t)$ que satisface la ecuación logística
   $$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2,$$
   donde $B = ap$ es la tasa de tiempo en la cual ocurren los nacimientos, y $D = bp^2$ es la tasa de muertes. Si la población inicial es $p(0) = p_0$ y se registran tanto B_0 nacimientos como D_0 muertes por mes en el tiempo $t = 0$, demuestre que la población límite es $M = \frac{B_0 p_0}{D_0}$.
4. Suponga una población de conejos $p(t)$ que satisface la ecuación logística del problema anterior. Si la población inicial es de 120 conejos y hay 8 nacimientos y 6 muertes por mes que ocurren en el tiempo $t = 0$, ¿cuántos meses le tomará a $p(t)$ alcanzar el $95^{\circ}/_{\circ}$ de la población límite M?
5. Estime una población de conejos $p(t)$ que satisface la ecuación logística del ejercicio 3. Si la población inicial es de 240 conejos y hay 9 nacimientos y 12 muertes por mes que ocurren en el tiempo $t = 0$, ¿cuántos meses tomará a $p(t)$ alcanzar $105^{\circ}/_{\circ}$ de la población límite M?
6. Considere una población $p(t)$ que satisface la ecuación de extinción - explosión
   $$\frac{dp}{dt} = ap^2 - bp,$$
   donde $B = ap^2$ es la tasa de tiempo en la cual ocurren nacimientos, y $D = bp$ es la tasa de tiempo en la cual se registran los decesos. Si la población inicial es $p(0) = p_0$ y B_0 nacimientos por mes, y D_0 muertes

por mes en el tiempo $t = 0$, demuestre que la población límite es $M = \frac{D_0 p_0}{B_0}$.

7. Suponga que una población de lagartos $p(t)$ satisface la ecuación de extinción - explosión como en el problema anterior. Si la población inicial es de 100 lagartos y hay 10 nacimientos a la vez que 9 muertes por mes en el tiempo $t = 0$, ¿cuántos meses tomará a $p(t)$ alcanzar 10 veces la población límite M?
8. Suponga que una población de lagartos $p(t)$ satisface la ecuación de extinción - explosión como en el ejercicio 6. Si la población inicial es de 110 reptiles y hay tanto 11 nacimientos como 12 muertes por mes en el tiempo $t = 0$, ¿cuántos meses le tomará a $p(t)$ alcanzar $10^\circ/_\circ$ de la población límite M?
9. Considere que la población $p(t)$ de un país satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = kp(200 - p)$$

con k constante. Si su población en 1955 era de 100 millones de personas y fue creciendo a una tasa de 1 millón por año, ¿podría usted predecir la población del país en el año 2015?
10. Suponga que en una población de tamaño K, $p(t)$ representa el número de individuos de esa población que han sido afectados por un cierto rumor, el cual se extiende al resto de la población por encuentros casuales. La tasa respecto del tiempo a la cual se esparce el rumor[29] es proporcional al producto de número p de individuos que ya conocen el rumor y el número $K - p$ de aquellos que aún no lo saben, es decir:

$$\frac{dp}{dt} = kp(K - p)$$

Usando lo anterior, suponga que en el tiempo $t = 0$ la mitad de una población logística de 100000 personas ha escuchado cierto rumor, y que el número de quienes lo conocen se incrementa a una tasa de 1000 personas por día. ¿Cuánto le tomará al rumor ser conocido por el $80^\circ/_\circ$ de la población?
11. Suponga que una comunidad cuenta con 15000 personas que son susceptibles de adquirir el síndrome de Michaud, una enfermedad contagiosa. En el tiempo $t = 0$ el número $p(t)$ de personas que han desarrollado el padecimiento es de 5000 y éste se incrementa a una tasa de 500 sujetos por día. ¿Cuánto tiempo tomará para que otras 5000 personas desarrollen el síndrome de Michaud?
12. La población $p(t)$ de lagartos (t está dado en meses) en un pantano

[29] Es similar al caso de esparcimiento de una enfermedad contagiosa.

satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{10000}p^2 - \frac{1}{100}p$$

a) Si inicialmente hay 25 lagartos, resuelva la ecuación diferencial para determinar qué le sucede a la población de esos reptiles en el largo plazo.
b) Haga lo mismo que en a) pero asumiendo que la población inicial es de 150 lagartos.

13. Un tumor puede ser considerado como una población de células multiplicándose. Se encuentra, empíricamente que la tasa de natalidad de las células en un tumor decrece exponencialmente con el tiempo, tal que $\beta(t) = \beta_0 e^{-\alpha t}$ (donde α y β_0 son constantes positivas), y por lo tanto se satisface el problema

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \beta_0 e^{-\alpha t} p \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

a) Demuestre que la solución de este problema está dada por la función

$$p(t) = p_0 \exp\left[\frac{\beta_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\right]$$

b) Demostrar que $p(t) \to p_0 \exp\left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right)$, cuando $t \to +\infty$

14. En el problema anterior suponga que en el tiempo $t = 0$ hay $p_0 = 10^6$ células y que $p(t)$ se incrementa a una tasa de 3×10^5 células por mes. Después de 6 meses el tumor se ha duplicado en (tamaño y número de células). Resuelva numéricamente para obtener α, y encuentre, después, la población límite del tumor.

15. Dado el problema logístico:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = kp(M - p) \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Demuestre que la solución del problema está dada por la función

$$p(t) = \frac{Mp_0}{p_0 + (M - p_0)e^{kMt}}$$

Aclare cómo su deducción depende de que $0 < p_0 < M$ de que $p_0 > M$.

16. Comúnmente las tasas de natalidad y mortalidad en poblaciones de animales no son constantes, sin embargo varían periódicamente con el paso de las estaciones. Encuentre $p(t)$ si la población p satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = (k + b\cos 2\pi t)p$$

donde t está en años, k y b son constantes positivas. De este modo, la función de la tasa de crecimiento $r(t) = k + b\cos(2\pi t)$ varía periódicamente alrededor del valor medio k. Diseñe una gráfica que contraste el crecimiento de esta población con otra que tenga el mismo valor inicial p_0 pero que satisfaga la ecuación de crecimiento natural $\frac{dp}{dt} = kp$ (con la misma constante k). ¿Cómo son las dos poblaciones al paso de muchos años?

17. La siguiente tabla muestra el crecimiento de una colonia de bacterias sobre un período de un número t de días medido por su tamaño y en centímetros cuadrados.

Edad t (dias)	0	1	2	3	4	5	6
Área y (cm^2)	1,20	3,43	9,64	19,8	27,2	33,8	37,4

   a) Encuentre una ecuación para el área y en términos del tiempo t.
   b) Usando la ecuación hallada en (a), compare los valores calculados del área con los valores reales.
   c) ¿Cuál es el tamaño máximo teórico de la colonia? ¿Esperaría usted que tal máximo exista en la realidad? Explique.

18. La altura promedio de un cierto tipo de planta después de 16, 32 y 48 días está dada respectivamente, por 21,6; 43,8 y $54,2$ cm. Asumiendo que el patrón de crecimiento sigue la curva logística, determine:
   a) La altura máxima teórica esperada.
   b) La ecuación de la curva logística.
   c) Las alturas teóricas después de 8,24 y 60 días.

3.7 Deflexión de vigas

Cuando se hace el estudio de curvas, uno de los aspectos que se estudia es su curvatura, la cual mide, vamos a decir de manera sencilla, su doblez en cada punto de su gráfica. En el caso de una curva dada por la función $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ el cálculo de su curvatura en cualquier punto (x,y) de su gráfica se hace con la fórmula

$$k(x) = \frac{y''(x)}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{3.71}$$

Pensando de manera intuitiva (ver figura 3.35), en este punto de la curva podemos asociar una circunferencia tangente cuya curvatura es también[30] $k(x)$

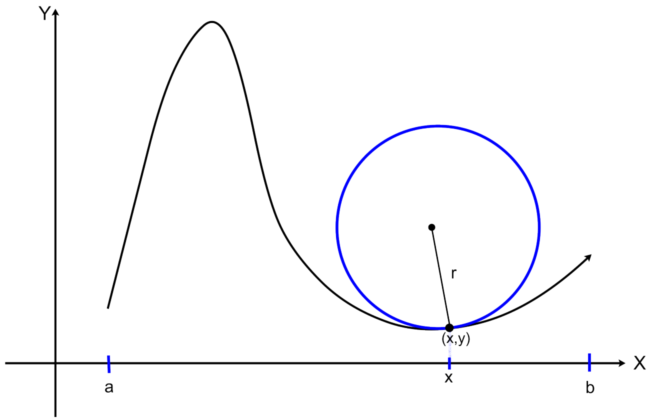


Figura 3.35: La circunferencia de curvatura asociada a la gráfica(curva) de una función en el punto (x,y).

El radio de esta circunferencia es $r(x) = \frac{1}{k(x)}$ y es llamada **circunferencia de curvatura**[31].

Ahora, si tenemos una viga en posición horizontal, y además asumimos que está hecha de un material homogéneo con sección transversal uniforme, entonces ocurre que esta viga[32] por efecto de su propio peso o aplicación de alguna carga externa se va a doblar[33]. El eje de simetría de la viga doblada

[30] Es decir, tanto la curva de la función $y = f(x)$, como la circunferencia tienen la misma curvatura.

[31] De manera intuitiva entendemos la circunferencia de curvatura como una circunferencia que se desliza bajo o sobre una curva (gráfica de una función) teniendo en cada punto de contacto la misma curvatura de la curva de la función.

[32] Que se asume elástica.

[33] Cuando se tira de algo (o se estira) se dice que está en *tensión*. Cuando se aprieta algo (o se comprime), está es *compresión*. Dobla una regla, o cualquier varilla, y la parte doblada en el

es una curva llamada *curva elástica* (ver figura 3.36). Conocer esta curva es importante para estudiar la elasticidad de la viga.

Figura 3.36: Eje de simetría y curva elástica de una viga sujeta a deformación.

Asumiendo que la viga tiene longitud L y poniendo la curva elástica en un sistema de coordenadas como en la figura 3.37, vemos que:

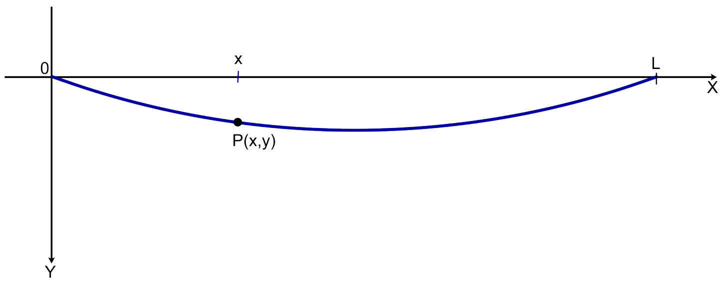


Figura 3.37: La curva elástica posicionada en un sistema de coordenadas.

donde se toma el eje positivo X en el lado derecho y eje positivo Y hacia abajo. En el punto $P(x,y)$ la coordenada y que viene a ser el desplazamiento de la curva elástica desde el eje X, es lo que se llama deflexión de la viga. El momento flexionante $M(x)$ que se genera en la sección transversal del

exterior de la curva está en tensión; en tanto que la parte interna curvada está en compresión. La compresión hace que las cosas se vuelvan más cortas y más gruesas; mientras que la tensión las hace más largas y más delgadas. Sin embargo, esto no es tan evidente en los materiales más rígidos, porque el acotamiento o el estiramiento es muy pequeño. Cuando una viga horizontal está sostenida en uno o ambos extremos está bajo tensión y compresión, al mismo tiempo, debido a su peso y a la carga que sostiene. Ver [15].

punto $P(x,y)$, es la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre un lado de P (ya sea a la izquierda o a la derecha). Adoptaremos momentos negativos para fuerzas que actúan hacia arriba y momentos positivos para fuerzas que actúan hacia abajo. Lo importante en la construcción del modelo matemático para determinar la ecuación de la curva elástica, es la relación que existe entre el momento flexionante y el radio de la circunferencia de curvatura en el punto P. Dicha relación está dada por la ecuación

$$EI\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = M(x) \tag{3.72}$$

donde E es el módulo de elasticidad de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en P respecto a una línea horizontal que pasa por el centro de gravedad de esta sección transversal. Puesto que en la realidad y' asume valores pequeños, entonces $(y')^2 \approx 0$. De esta manera la ecuación (3.72) se escribe de manera simplificada como

$$EIy'' = M(x) \tag{3.73}$$

Veamos en seguida la solución de problemas de aplicación.

■ **Ejemplo 3.50** Una viga uniforme de longitud L está en voladizo, su peso es de ω libras por unidad de longitud (ω es constante). Asumiendo que hay una carga concentrada F_0 en el extremo libre; encuentre la ecuación de la curva elástica, su deflexión máxima, ¿qué pasaría si $F_0 = 0$?

Resolución

La figura 3.38 ilustra las condiciones del problema.

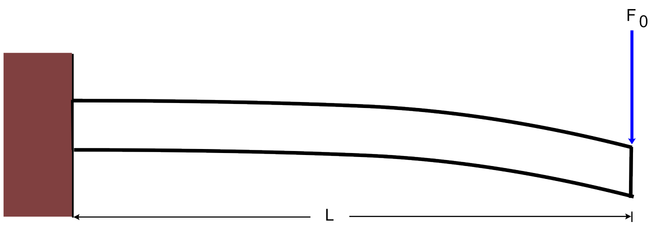


Figura 3.38: Viga en voladizo.

Poniendo la curva elástica en un sistema de coordenadas, se tiene la figura 3.39.

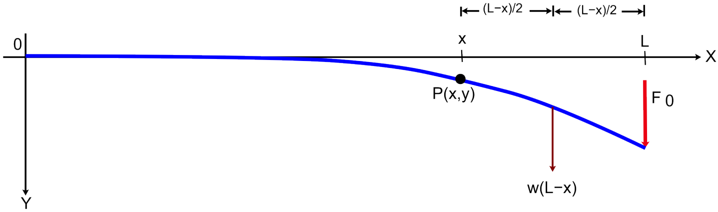


Figura 3.39: Curva elástica de una viga en voladizo posicionada en un sistema de coordenadas.

Donde el peso total de la viga es ωL. En el tramo $[x,L]$ el peso de la viga es $\omega(L-x)$ y actúa a una distancia de $\frac{L-x}{2}$ a la derecha del punto P. También la carga concentrada actúa a una distancia $L-x$ a la derecha del punto P; con esta información el momento flexionante calculado a la derecha del punto P es

$$M(x) = \omega(L-x)\left(\frac{L-x}{2}\right) + F_0(L-x) \equiv \omega\frac{(L-x)^2}{2} + F_0(L-x)$$

Poniendo esto en (3.73) se tiene el problema:

$$\begin{cases} EIy'' = \frac{\omega}{2}(L-x)^2 + F_0(L-x),\ 0 < x < L \\ \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación diferencial vemos que: $EIy' = \frac{\omega x^3}{6} - \frac{\omega L x^2}{2} - \frac{F_0}{2}x^2 + \frac{\omega L^2}{2}x + F_0 L x + k_1$. Aplicando la condición $y'(0) = 0$ resulta $k_1 = 0$. Integrando nuevamente y aplicando la condición $y(0) = 0$ se obtiene:

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{\omega x^4}{24} - \left(\frac{\omega L + F_0}{6}\right)x^3 + \left(\frac{\omega L^2 + 2F_0 L}{4}\right)x^2\right]$$

Para determinar la deflexión máxima, vemos que esta ocurre en $x = L$ y su valor es:

$$y_{\text{máx}} = y(L) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\omega L^4}{8} + \frac{F_0 L^3}{3}\right)$$

Ahora, si $F_0 = 0$, entonces solo actúa el peso de la viga y la curva de deflexión es:

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\omega x^4}{24} - \frac{\omega L x^3}{6} + \frac{\omega L^2 x^2}{4}\right)$$

En este caso la deflexión máxima es: $y_{\text{máx}} = y(L) = \frac{\omega L^4}{8EI}$. ■

■ **Ejemplo 3.51** Una viga uniforme de longitud L cuyo peso es de ω libras por unidad de longitud, tiene sus dos extremos horizontalmente fijos y empotrados. Determine la ecuación de la curva elástica y determine dónde y cuánto es la deflexión máxima.

Resolución

La figura 3.40 ilustra los datos del problema.

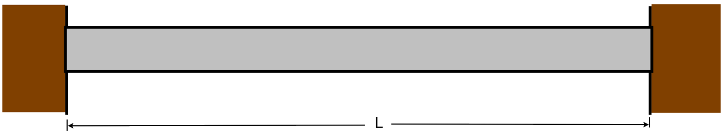


Figura 3.40: Viga empotrada en ambos extremos.

Donde en primer lugar, el peso total de la viga es ωL, y éste se distribuye en ambos extremos en su mitad. Es decir, la resistencia en cada extremo es $R = \frac{\omega L}{2}$. Para determinar el momento flexionante debemos considerar que en el caso de una viga empotrada, en cada extremo se genera un momento que en este caso llamamos K. Poniendo la curva elástica en un sistema de coordenadas se tiene la figura **??**.

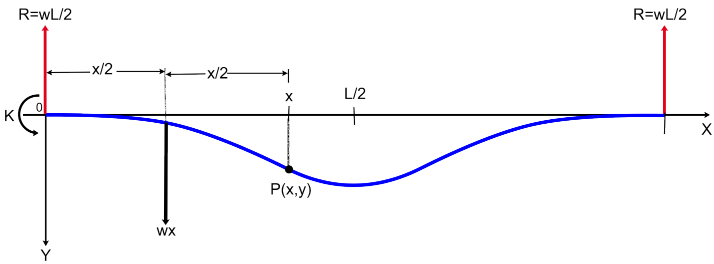


Figura 3.41: Curva elástica de la viga en la figura 3.40 posicionada en un sistema de coordenadas.

El momento flexionante correspondiente al punto P y calculado a su izquierda es:

$$M(x) = \omega x\left(\frac{x}{2}\right) + K - \frac{\omega L}{2}x$$

Poniendo la expresión de $M(x)$ en (3.73) se tiene el problema:

$$\begin{cases} EIy''(x) = \frac{\omega x^2}{2} - \frac{\omega L}{2}x + K, \; 0 < x < L \\ \\ y(0) = y'(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación diferencial para hallar y' y aplicando la condición

$y'(0) = 0$, se obtiene la función

$$EIy'(x) = \frac{\omega x^3}{6} - \frac{\omega L x^2}{4} + Kx$$

Integrando nuevamente y aplicando la condición $y(0) = 0$ se obtiene la función $y(x)$ dada por:

$$EIy(x) = \frac{\omega x^4}{24} - \frac{\omega L x^3}{12} + \frac{K x^2}{2}$$

donde K se determina aplicando la condición $y(L) = 0$, resultando $K = \frac{\omega L^2}{12}$. Luego

$$y(x) = \frac{1}{24EI}\left(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2\right)$$

Como la barra es homogénea, hay simetría en su forma y viendo el gráfico la deflexión máxima ocurre en el centro de la viga y su valor es:

$$y_{\text{máx}} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\omega L^4}{384EI}$$

■

■ **Ejemplo 3.52** Una viga en voladizo uniforme de longitud L y de peso depreciable tiene una carga concentrada S en el extremo libre.

a) Encuentre la ecuación de la curva elástica.

b) Determine la deflexión máxima

Resolución

a) En este caso, se trata de una viga en la cual no se considera su peso, sino mas bien la carga externa que soporta en su extremo libre. Poniendo la curva elástica en un sistema de coordenadas se tiene la figura 3.42.

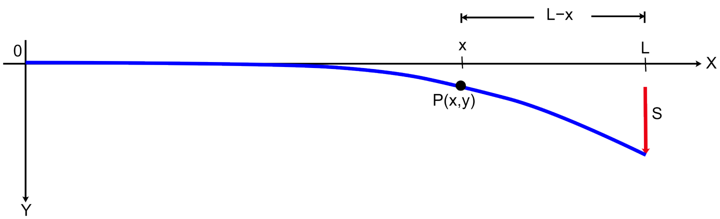


Figura 3.42: Curva elástica de una viga en voladizo.

La única fuerza que actúa en el tramo $[x, L]$ es la carga S, por lo cual el momento flexionante en el punto P y a su derecha es $M(x) = S(L - x)$;

luego en (3.73) se tiene el problema:

$$\begin{cases} EIy''(x) = S(L-x), \ 0 < x < L \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.74}$$

Resolviendo el problema (3.74) se tiene:

$$\begin{aligned} EI\int_0^x y''(t)dt &= \int_0^x S(L-t)dt \\ EI\left\{y'(t)\right\}_0^x &= S\left\{-\frac{(L-t)^2}{2}\right\}_0^x \\ EIy'(x) &= \frac{S}{2}\left(2Lx-x^2\right) \\ EI\int_0^x y'(t)dt &= \frac{S}{2}\int_0^x \left(2Lt-t^2\right)dt \\ EI\{y(t)\}_0^x &= \frac{S}{2}\left\{Lt^2-\frac{t^3}{3}\right\}_0^x \end{aligned}$$

Luego la solución del problema es

$$y(x) = \frac{S}{6EI}(3Lx^2-x^3), \ 0 \le x \le L \tag{3.75}$$

b) De la figura, la deflexión máxima ocurre en el extremo libre de la viga, es decir en $x = L$. Usando (3.75) se tiene:

$$y_{\text{máx}} = y(L) = \frac{SL^3}{3EI}$$

Luego la deflexión máxima de la viga es: $y_{\text{máx}} = \frac{SL^3}{3EI}$.

■

■ **Ejemplo 3.53** Una viga de longitud L y de peso despreciable está simplemente apoyada en ambos extremos. Una carga concentrada S actúa en su centro. Encuentre:

a) La ecuación de la curva elástica.
b) La deflexión máxima.
c) El valor numérico de la pendiente en los extremos.

Resolución

a) Según los datos del problema se tiene la figura 3.43, donde sólo se considera el efecto de la carga externa S que actúa en el centro de la viga:

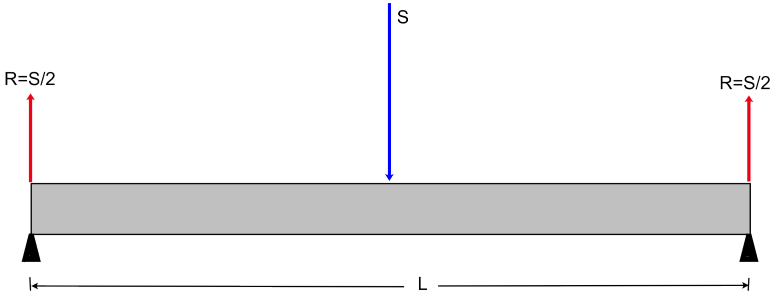


Figura 3.43: Viga simplemente apoyada en sus extremos.

La carga S por actuar en el centro de la viga, se distribuye en ambos extremos en la mitad de su magnitud, por lo cual las resistencias en cada apoyo son iguales a $R = \frac{S}{2}$. Poniendo la curva elástica en un sistema de coordenadas se tiene figura 3.44.

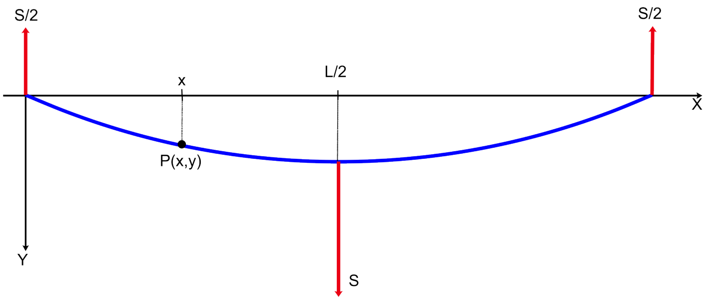


Figura 3.44: Curva elástica para la viga de la figura 3.43.

A continuación analizamos el momento flexionante en el punto $P(x,y)$. En efecto:
Para $0 < x < \frac{L}{2}$: el momento flexionante tomado del lado izquierdo del punto P es

$$M(x) = -\frac{S}{2}x$$

Para $\frac{L}{2} < x < L$: el momento flexionante tomado del lado izquierdo del punto P es

$$M(x) = S\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{S}{2}x$$

Poniendo $M(x)$ en (3.73) se tiene el problema:

$$\begin{cases} EIy''(x) = \begin{cases} -\frac{S}{2}x, \ 0 < x < \frac{L}{2} \\ \\ \frac{Sx}{2} - \frac{SL}{2}, \ \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \\ \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \\ y'\left(\frac{L}{2}\right)^- = y'\left(\frac{L}{2}\right)^+ = 0 \end{cases} \tag{3.76}$$

Integrando la ecuación diferencial de (3.76) se tiene:

$$EIy'(x) = \begin{cases} -\frac{Sx^2}{4} + c_1, \ 0 < x < \frac{L}{2} \\ \\ \frac{Sx^2}{4} - \frac{SL}{2}x + c_2, \ \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Como $y'\left(\frac{L}{2}\right)^- = y'\left(\frac{L}{2}\right)^+ = 0$, entonces ocurre:

$$-\frac{SL^2}{16} + c_1 = \frac{SL^2}{16} - \frac{SL^2}{4} + c_2 = 0 \implies c_1 = \frac{SL^2}{16} \text{ y } c_2 = \frac{3SL^2}{16}$$

Con el valor de cada una de estas constantes se tiene que $y'(x)$ está dada por la relación:

$$EIy'(x) = \begin{cases} -\frac{Sx^2}{4} + \frac{SL^2}{16}, \ 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ \\ \frac{Sx^2}{4} - \frac{SL}{2}x + \frac{3SL^2}{16}, \ \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases}$$

Integramos esto último para obtener

$$EIy(x) = \begin{cases} -\frac{Sx^3}{12} + \frac{SL^2}{16}x + c_3, \ 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ \\ \frac{Sx^3}{12} - \frac{SLx^2}{4} + \frac{3SL^2}{16}x + c_4, \ \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases}$$

Aplicando la condición $y(0) = 0$ resulta $c_3 = 0$, y aplicando la condición $y(L) = 0$ vemos que $c_4 = -\frac{SL^3}{48}$. Finalmente con estas constantes halladas la solución del problema (3.76) es:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{EI}\left(\frac{SL^2x}{16} - \frac{Sx^3}{12}\right), \ 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \\ \frac{1}{EI}\left(\frac{Sx^3}{12} - \frac{SLx^2}{4} + \frac{3SL^2x}{16} - \frac{SL^3}{48}\right), \ \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

b) Por simetría, la deflexión máxima $y_{\text{máx}}$ de la viga ocurre en $x = \frac{L}{2}$. Así se tiene[34] que

$$y_{\text{máx}} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{SL^3}{48EI}$$

c) Para determinar el valor numérico de la pendiente en los extremos de la viga, calculamos la derivada de $y(x)$. Así se tiene:

$$y'(x) = \begin{cases} \frac{1}{EI}\left(\frac{SL^2}{16} - \frac{Sx^2}{4}\right),\ 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ \\ \frac{1}{EI}\left(\frac{Sx^2}{4} - \frac{SLx}{2} + \frac{3SL^2}{16}\right),\ \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases}$$

En el extremo de la izquierda la pendiente es: $y'(0)^+ = \frac{SL^2}{16EI}$, mientras que la pendiente en el extremo de la derecha está dada por $y'(L)^- = -\frac{SL^2}{16EI}$.

■

■ **Ejemplo 3.54** Asuma que en el problema anterior, además de la carga concentrada S libras que actúa en el centro, la viga tiene un peso de ω libras por unidad de longitud, donde ω es constante.

a) Encuentre la ecuación de la curva elástica.
b) Encuentre la deflexión máxima.

Resolución

a) En este caso, como ω es la densidad de la viga, entonces el peso total de la viga es ωL, el cual se distribuye en partes iguales en los puntos de apoyo. De esta manera cada una de las resistencias en los apoyos es $R = \frac{S+\omega L}{2}$. Poniendo la curva elástica en un sistema de coordenadas como en la figura 3.45 se tiene:

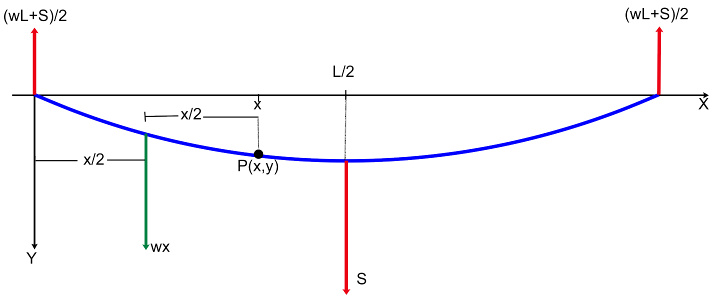


Figura 3.45: Curva elástica mostrando la carga S actuando en su centro.

[34]Puede evaluar con cualquiera de las partes de la función.

Para $0 < x < \frac{L}{2}$: el momento flexionante en el punto P tomado a la izquierda es:

$$M(x) = \omega x\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{S+\omega L}{2}\right)x \equiv \frac{\omega x^2}{2} - \left(\frac{S+\omega L}{2}\right)x$$

Para $\frac{L}{2} < x < L$: el momento flexionante en el punto P tomado a la izquierda es:

$$M(x) = \omega x\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(x - \frac{L}{2}\right) - \left(\frac{S+\omega L}{2}\right)x \equiv \frac{\omega x^2}{2} + \left(\frac{S-\omega L}{2}\right)x - \frac{SL}{2}$$

Poniendo el momento flexionante en (3.73) se tiene el problema:

$$\begin{cases} EIy''(x) = \begin{cases} \frac{\omega x^2}{2} - \left(\frac{S+\omega L}{2}\right)x, \; 0 < x < \frac{L}{2} \\ \\ \frac{\omega x^2}{2} + \left(\frac{S-\omega L}{2}\right)x - \frac{SL}{2}, \; \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \\ y'\left(\frac{L}{2}\right)^{-} = y'\left(\frac{L}{2}\right)^{+} = 0 \end{cases} \tag{3.77}$$

Integrando la ecuación diferencial de (3.77) se tiene:

$$EIy'(x) = \begin{cases} \frac{\omega x^3}{6} - \left(\frac{S+\omega L}{4}\right)x^2 + c_1, \; 0 < x < \frac{L}{2} \\ \\ \frac{\omega x^3}{6} + \left(\frac{S-\omega L}{4}\right)x^2 - \frac{SL}{2}x + c_2, \; \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Puesto que $y'\left(\frac{L}{2}\right)^{-} = y'\left(\frac{L}{2}\right)^{+} = 0$, entonces

$$-\frac{\omega L^3}{24} - \frac{SL^2}{16} + c_1 = -\frac{\omega L^3}{24} - \frac{3SL^2}{16} + c_2 = 0$$

de donde se obtiene: $c_1 = \frac{\omega L^3}{24} + \frac{SL^2}{16}$ y $c_2 = \frac{\omega L^3}{24} + \frac{3SL^2}{16}$. Con estas constantes y' está dada por la relación:

$$EIy'(x) = \begin{cases} \frac{\omega x^3}{6} - \left(\frac{S+\omega L}{4}\right)x^2 + \frac{\omega L^3}{24} + \frac{SL^2}{16}, \; 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ \\ \frac{\omega x^3}{6} + \left(\frac{S-\omega L}{4}\right)x^2 - \frac{SLx}{2} + \frac{\omega L^3}{24} + \frac{3SL^2}{16}, \; \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases}$$

Integrando esto último se obtiene:

$$EIy(x) = \begin{cases} \frac{\omega x^4}{24} - \left(\frac{S+\omega L}{12}\right)x^3 + \left(\frac{\omega L^3}{24} + \frac{SL^2}{16}\right)x + c_3, \; 0 < x \leq \frac{L}{2} \\ \\ \frac{\omega x^4}{24} + \left(\frac{S-\omega L}{12}\right)x^3 - \frac{SLx^2}{4} + \left(\frac{\omega L^3}{24} + \frac{3SL^2}{16}\right)x + c_4, \; \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases}$$

De la condición $y(0)=0$ se obtiene $c_3=0$, mientras que aplicando la condición $y(L)=0$ vemos que $c_4=-\frac{SL^3}{48}$. De esta manera la solución del problema es la función:

$$y(x)=\frac{1}{EI}\begin{cases}\frac{\omega x^4}{24}-\left(\frac{S+\omega L}{12}\right)x^3+\left(\frac{\omega L^3}{24}+\frac{SL^2}{16}\right)x, \ 0\le x\le \frac{L}{2}\\[2ex] \frac{\omega x^4}{24}+\left(\frac{S-\omega L}{12}\right)x^3-\frac{SLx^2}{4}+\left(\frac{\omega L^3}{24}+\frac{3SL^2}{16}\right)x-\frac{SL^3}{48}, \ \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases} \tag{3.78}$$

b) En este caso, por la simetría, la deflexión máxima $y_{\text{máx}}$ de la viga se obtiene en $x=\frac{L}{2}$, cuyo valor según (3.78) se encuentra de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}} = \quad & y\left(\tfrac{L}{2}\right)=\tfrac{1}{EI}\left[\tfrac{\omega}{24}\left(\tfrac{L}{2}\right)^4-\left(\tfrac{S+\omega L}{12}\right)\left(\tfrac{L}{2}\right)^3\right.\\ & \left.+\left(\tfrac{\omega L^3}{24}+\tfrac{SL^2}{16}\right)\left(\tfrac{L}{2}\right)\right]\\ = \quad & \tfrac{1}{EI}\left(\tfrac{S\omega L^4}{384}+\tfrac{SL^3}{48}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de la deflexión máxima es: $y_{\text{máx}}=\frac{1}{EI}\left(\frac{S\omega L^4}{384}+\frac{SL^3}{48}\right)$. ■

■ **Ejemplo 3.55** Una viga en voladizo de longitud L y peso despreciable tiene una carga de S libras concentrada en su centro. Encuentre la ecuación de la curva elástica y determine la deflexión máxima.

Resolución

En este caso, el gráfico apropiado al problema es el siguiente:

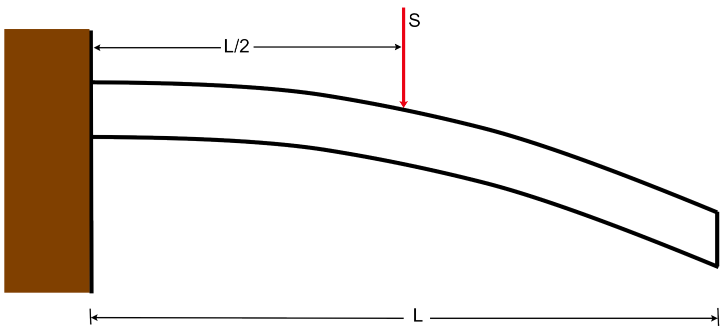


Figura 3.46: Viga en voladizo con una carga S actuando en su centro.

y para la curva elástica en un sistema de coordenadas el que sigue:

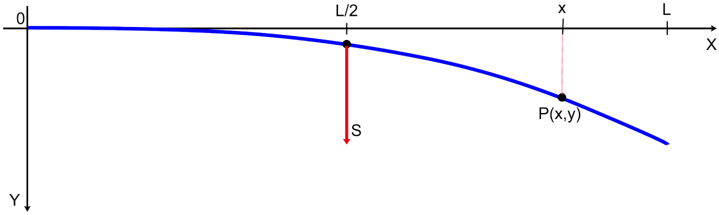


Figura 3.47: Curva elástica para la viga de la figura 3.46.

Para determinar el momento flexionante en el punto P vemos que
Si $0 < x < \frac{L}{2}$, entonces la única fuerza que actúa a la derecha del punto P es la carga S, por lo cual el momento flexionante respectivo es:

$$M(x) = S\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

Si $\frac{L}{2} < x < L$, entonces ninguna fuerza actúa a la derecha del punto P, y por lo tanto el momento flexionante es:

$$M(x) = 0$$

Con el momento flexionante hallado, en (3.73) se tiene el problema

$$\begin{cases} EIy''(x) = \begin{cases} S\left(\frac{L}{2} - x\right), \; 0 < x < \frac{L}{2} \\ \\ 0, \; \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y'\left(\frac{L}{2}\right)^{-} = y'\left(\frac{L}{2}\right)^{+} \\ y\left(\frac{L}{2}\right)^{-} = y\left(\frac{L}{2}\right)^{+} \end{cases} \tag{3.79}$$

Resolviendo la ecuación diferencial de (3.79) y aplicando la condición $y'(0) = 0$ resulta:

$$EIy'(x) = \begin{cases} \frac{SLx}{2} - \frac{Sx^2}{2}, \; 0 < x < \frac{L}{2} \\ \\ c_2, \; \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

en la cual c_2 se determina de la condición $y'\left(\frac{L}{2}\right)^{-} = y'\left(\frac{L}{2}\right)^{+}$, obteniéndose así $c_2 = \frac{SL^2}{8}$, y de esta manera:

$$EIy'(x) = \begin{cases} \frac{SLx}{2} - \frac{Sx^2}{2}, \; 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \\ \frac{SL^2}{8}, \; \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

Integrando esto último y aplicando la condición $y(0) = 0$ resulta:

$$EIy(x) = \begin{cases} \frac{SLx^2}{4} - \frac{Sx^3}{6}, \ 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \\ \frac{SL^2}{8}x + c_4, \ \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

donde la constante c_4 se determina de la condición $y\left(\frac{L}{2}\right)^- = y\left(\frac{L}{2}\right)^+$, resultando así $c_4 = -\frac{SL^3}{48}$. Finalmente, la ecuación de la curva elástica está dada por la función:

$$y(x) = \frac{1}{EI} \begin{cases} \frac{SLx^2}{4} - \frac{Sx^3}{6}, \ 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \\ \frac{SL^2x}{8} - \frac{SL^3}{48}, \ \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

En este caso la deflexión máxima $y_{\text{máx}}$ ocurre en $x = L$. Haciendo los cálculos en la curva de deflexión se tiene:

$$y_{\text{máx}} = y(L) = \frac{5SL^3}{48}$$

■

■ **Ejemplo 3.56** Con las condiciones del problema anterior, determine la ecuación de la curva elástica, si se asume que la viga tiene además un peso uniforme de ω libras por unidad de longitud.

Resolución

Resolvemos en forma similar al problema anterior, para esto, la representación geométrica de la curva elástica con las condiciones del problema es como sigue:

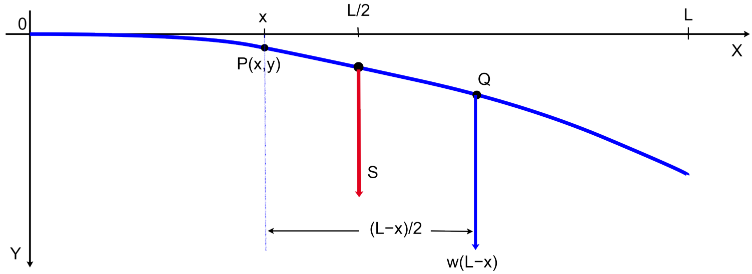


Figura 3.48:

Para $0 < x < \frac{L}{2}$: la sección de viga entre x y L tendrá un peso igual a $\omega(L-x)$, el cual actúa en el centro de gravedad dado por el punto Q. Además del peso se tiene la carga S que actúa a $\frac{L}{2}-x$ de distancia del punto P. Con esta información, el momento flexionante en el punto P y a su derecha está dado por:

$$M(x)=S\left(\frac{L}{2}-x\right)+\omega(L-x)\left(\frac{L-x}{2}\right)\equiv\frac{\omega}{2}(L-x)^2+S\left(\frac{L}{2}-x\right)$$

Para $\frac{L}{2}<x<L$: la única fuerza que actúa en la sección de viga $[x,L]$ es su peso $\omega(L-x)$. Calculando el momento flexionante respectivo se tiene

$$M(x)=\omega(L-x)\left(\frac{L-x}{2}\right)\equiv\frac{\omega}{2}(L-x)^2$$

Poniendo $M(x)$ en (3.73) se tiene el problema:

$$\begin{cases} EIy''(x)=\begin{cases}\frac{\omega}{2}(L-x)^2-Sx+\frac{SL}{2},\ 0<x<\frac{L}{2}\\ \frac{\omega}{2}(L-x)^2,\ \frac{L}{2}<x<L\end{cases}\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\\ y\left(\frac{L}{2}\right)^+=y\left(\frac{L}{2}\right)^-\\ y'\left(\frac{L}{2}\right)^+=y'\left(\frac{L}{2}\right)^-\end{cases} \tag{3.80}$$

Integrando la ecuación diferencial de (3.80) y aplicando la condición $y'(0)=0$ se obtiene:

$$EIy'(x)=\begin{cases}\frac{\omega}{6}(x-L)^3-\frac{Sx^2}{2}+\frac{SLx}{2}+\frac{\omega L^3}{6},\ 0\le x<\frac{L}{2}\\ \frac{\omega}{6}(x-L)^3+c_2,\ \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

en la cual la constante c_2 se determina a partir de la condición de continuidad de la derivada en $x=\frac{L}{2}$, dada por $y'\left(\frac{L}{2}\right)^-=y'\left(\frac{L}{2}\right)^+$; resultando así $c_2=\frac{\omega L^3}{6}+\frac{SL^2}{8}$, y de esta manera $y'(x)$ queda expresada por la siguiente relación:

$$EIy'(x)=\begin{cases}\frac{\omega}{6}(x-L)^3-\frac{Sx^2}{2}+\frac{SLx}{2}+\frac{\omega L^3}{6},\ 0\le x\le\frac{L}{2}\\ \frac{\omega}{6}(x-L)^3+\frac{\omega L^3}{6}+\frac{SL^2}{8},\ \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases}$$

Integrando esto último con la condición $y(0)=0$ se obtiene:

$$EIy(x)=\begin{cases}\frac{\omega}{24}(x-L)^4-\frac{Sx^3}{6}+\frac{SLx^2}{4}+\frac{\omega L^3}{6}x-\frac{\omega L^4}{24},\ 0\le x\le\frac{L}{2}\\ \frac{\omega}{24}(x-L)^4+\frac{\omega L^3}{6}x+\frac{SL^2}{8}x+c_4,\ \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases}$$

y como $y(x)$ es continua en $x = \frac{L}{2}$, resolvemos la ecuación $y\left(\frac{L}{2}\right)^{-} = y\left(\frac{L}{2}\right)^{+}$ para obtener $c_4 = -\frac{SL^3}{48} - \frac{\omega L^4}{24}$, con lo cual se tiene finalmente que la curva elástica está dada por la función:

$$y(x) = \frac{1}{EI}\begin{cases} \frac{\omega}{24}(x-L)^4 - \frac{Sx^3}{6} + \frac{SLx^2}{4} + \frac{\omega L^3 x}{6} - \frac{\omega L^4}{24}, \ 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \\ \frac{\omega}{24}(x-L)^4 + \left(\frac{\omega L^3}{6} + \frac{SL^2}{8}\right)x - \frac{SL^3}{48} - \frac{\omega L^4}{24}, \ \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 3.57** Si en el ejemplo 3.51, además asumimos que una carga concentrada S actúa en su centro, determine la ecuación de la curva elástica.

Resolución

Agregando la carga S al ejemplo 3.51 la resistencia en cada uno de los extremos es $R = \frac{\omega L}{2} + \frac{S}{2}$. Veamos la siguiente figura:

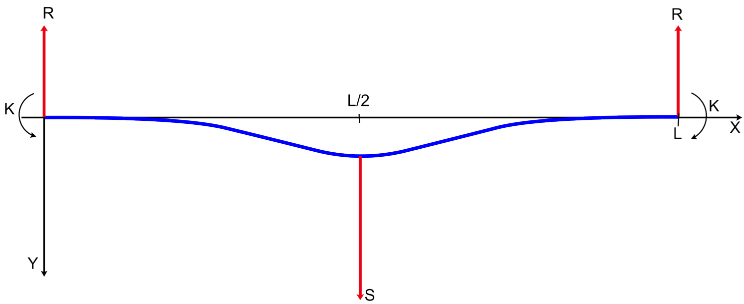


Figura 3.49: Curva elástica de una viga empotrada en ambos extremos con una carga S actuando en su centro.

Para un punto $P(x,y)$ en la curva elástica, desarrollamos el momento flexionante en dos tramos. En efecto:
Para $0 < x < \frac{L}{2}$: el peso de la sección de viga en el intervalo $[0,x]$ es ωx y actúa en el centro que es $\frac{x}{2}$. Calculando el momento flexionante a la izquierda del punto $P(x,y)$ se tiene:

$$M(x) = \omega x\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{\omega L + S}{2}\right)x + K \equiv \frac{\omega x^2}{2} - \left(\frac{\omega L + S}{2}\right)x + K$$

Para $\frac{L}{2} < x < L$: en forma similar a lo anterior el momento flexionante en el punto P y a su izquierda está dado por:

$$\begin{aligned} M(x) &= \omega x\left(\frac{x}{2}\right)+S\left(x-\frac{L}{2}\right)-\left(\frac{\omega L+S}{2}\right)x+K \\ &\equiv \frac{\omega x^2}{2}+\left(\frac{S-\omega L}{2}\right)x+K-\frac{SL}{2} \end{aligned}$$

Poniendo $M(x)$ en (3.73) se tiene el problema:

$$\begin{cases} EIy''(x)=\begin{cases} \frac{\omega x^2}{2}-\left(\frac{\omega L+S}{2}\right)x+K,\ 0<x<\frac{L}{2} \\ \\ \frac{\omega x^2}{2}+\left(\frac{S-\omega L}{2}\right)x+K-\frac{SL}{2},\ \frac{L}{2}<x<L \end{cases} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y(L)=0 \\ y'(L)=0 \\ y'\left(\frac{L}{2}\right)^-=y'\left(\frac{L}{2}\right)^+ \end{cases} \tag{3.81}$$

Integrando la ecuación diferencial de (3.81) y aplicando la condición $y'(0)=0$ se obtiene:

$$EIy'(x)=\begin{cases} \frac{\omega x^3}{6}-\left(\frac{\omega L+S}{4}\right)x^2+Kx,\ 0\le x<\frac{L}{2} \\ \\ \frac{\omega x^3}{6}+\left(\frac{S-\omega L}{4}\right)x^2+\left(K-\frac{SL}{2}\right)x+c_2,\ \frac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

donde el valor de la constante c_2 se encuentra de $y'(L)=0$, obteniéndose así

$$c_2=\frac{\omega L^3}{12}+\frac{SL^2}{4}-KL$$

además,

$$EIy'(x)=\begin{cases} \frac{\omega x^3}{6}-\left(\frac{\omega L+S}{4}\right)x^2+Kx,\ 0\le x<\frac{L}{2} \\ \\ \frac{\omega x^3}{6}+\left(\frac{S-\omega L}{4}\right)x^2+\left(K-\frac{SL}{2}\right)x+\frac{\omega L^3}{12}+\frac{SL^2}{4}-KL,\ \frac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

Asimismo, la condición de continuidad de $y'(x)$ en $x=\frac{L}{2}$ hace que $y'\left(\frac{L}{2}\right)^-=y'\left(\frac{L}{2}\right)^+$; de cuyo desarrollo vemos que

$$K=\frac{\omega L^2}{12}+\frac{SL}{8}$$

Con estos resultados se tiene $y'(x)$ dada por la siguiente relación:

$$EIy'(x)=\begin{cases} \frac{\omega x^3}{6}-\left(\frac{\omega L+S}{4}\right)x^2+\left(\frac{\omega L^2}{12}+\frac{SL}{8}\right)x,\ 0\le x\le\frac{L}{2} \\ \\ \frac{\omega x^3}{6}+\left(\frac{S-\omega L}{4}\right)x^2+\left(\frac{\omega L^2}{12}-\frac{3SL}{8}\right)x+\frac{SL^2}{8},\ \frac{L}{2}\le x\le L \end{cases}$$

Integrando esto último y aplicando la condición $y(0)=0$ se obtiene:

$$EIy(x)=\begin{cases}\frac{\omega x^4}{24}-\left(\frac{\omega L+S}{12}\right)x^3+\left(\frac{\omega L^2}{12}+\frac{SL}{8}\right)\frac{x^2}{2},\ 0\leq x\leq \frac{L}{2}\\ \\ \frac{\omega x^4}{24}+\left(\frac{S-\omega L}{12}\right)x^3+\left(\frac{\omega L^2}{12}-\frac{3SL}{8}\right)\frac{x^2}{2}+\frac{SL^2}{8}x+c_4,\ \frac{L}{2}\leq x\leq L\end{cases}$$

en la cual, aplicando la condición $y(L)=0$ resulta que $c_4=-\frac{SL^3}{48}$. Finalmente, la curva elástica está dada por la función:

$$y(x)=\frac{1}{EI}\begin{cases}\frac{\omega x^4}{24}-\left(\frac{\omega L+S}{12}\right)x^3+\left(\frac{\omega L^2}{24}+\frac{SL}{16}\right)x^2,\ 0\leq x\leq \frac{L}{2}\\ \\ \frac{\omega x^4}{24}+\left(\frac{S-\omega L}{12}\right)x^3+\left(\frac{\omega L^2}{24}-\frac{3SL}{16}\right)x^2+\frac{SL^2}{8}x-\frac{SL^3}{48},\ \frac{L}{2}\leq x\leq L\end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 3.58** Un extremo de una Viga de longitud L pies cuyo peso es uniforme y ω libras por unidad de longitud está simplemente apoyada, mientras que el otro extremo está horizontalmente fijo.

a) Encuentre la ecuación de la curva elástica.

b) Muestre que la deflexión máxima ocurre a una distancia $\frac{(15-\sqrt{33})L}{16}\approx 0,578L$ pies, aproximadamente del extremo fijo y tiene una magnitud aproximada de $0,00542\frac{\omega L^4}{EI}$.

Resolución

a) Si asumimos que la viga está empotrada en su lado izquierdo y simplemente apoyada en su lado derecho, un gráfico apropiado es el siguiente:

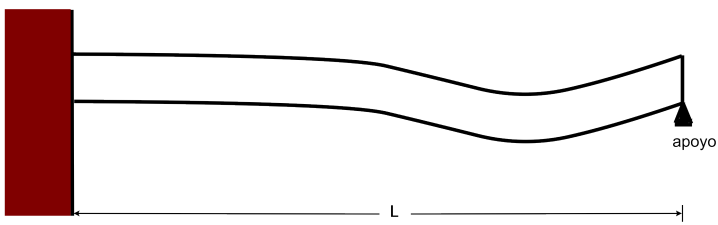


Figura 3.50: Viga empotrada en su lado izquierdo y simplemente apoyada en el derecho.

De acuerdo a los datos del problema se deduce que el peso de la viga es ωL. Si la viga hubiera estado simplemente apoyada en ambos extremos, entonces cada una de las reacciones en los extremos tendrían el valor de

$\frac{\omega L}{2}$; pero el caso es que el hecho de estar empotrada en su extremo izquierdo, hace que se modifique la reacción en el lado derecho, llamamos R a tal reacción. Veamos la curva elástica en un sistema de coordenadas en la figura 3.51.

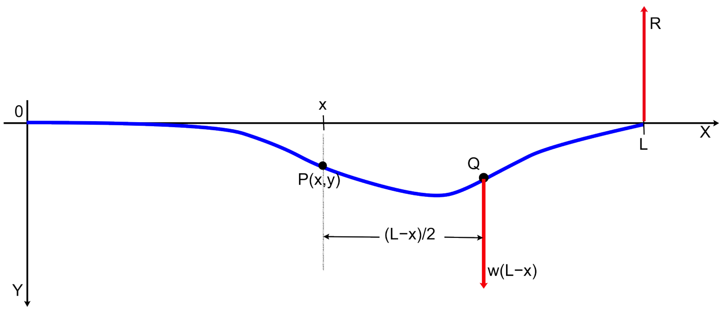


Figura 3.51: Curva elástica para la viga de la figura 3.50.

Si nos fijamos en la sección de viga en el intervalo $[x,L]$, su peso es $\omega(L-x)$ y actúa en el centro de gravedad que en este caso es el punto Q. Calculando el momento flexionante en el punto P y a su derecha, vemos que

$$M(x) = \omega(L-x)\left(\frac{L-x}{2}\right) - R(L-x) \equiv \frac{\omega}{2}(L-x)^2 + R(x-L)$$

Poniendo $M(x)$ en (3.73) se tiene el problema:

$$\begin{cases} EIy''(x) = \frac{\omega}{2}(x-L)^2 + R(x-L),\ 0<x<L \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y(L)=0 \end{cases} \tag{3.82}$$

Integrando la ecuación diferencial de (3.82) y aplicando la condición inicial $y'(0)=0$ se obtiene:

$$EIy'(x) = \frac{\omega}{6}(x-L)^3 + \frac{R}{2}(x-L)^2 + \frac{\omega L^3}{6} - \frac{RL^2}{2}$$

Integrando esto último y aplicando la condición inicial $y(0)=0$ se obtiene $y(x)$ dada por la relación:

$$EIy(x) = \frac{\omega}{24}(x-L)^4 + \frac{R}{6}(x-L)^3 + \left(\frac{\omega L^3}{6} - \frac{RL^2}{2}\right)x + \frac{RL^3}{6} - \frac{\omega L^4}{24}$$

en la cual para determinar el valor de R usamos la condición $y(L) = 0$, resultando que

$$R = \frac{3\omega L}{8}$$

Con este valor de R se tiene finalmente que la ecuación de la curva elástica de la viga está dada por la función:

$$y(x) = \frac{\omega}{48EI}\left(2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2\right) \tag{3.83}$$

b) Para determinar el valor máximo de la deflexión usamos el criterio de la primera derivada. En efecto, de (3.83) se tiene:

$$y'(x) = \frac{\omega}{48EI}\left(8x^3 - 15Lx^2 + 6L^2x\right)$$

Luego, resolviendo la ecuación $y'(x) = 0$ se obtiene

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{15L \pm \sqrt{33}L}{16}$$

Por lo tanto, la máxima deflexión de la viga debe ocurrir en

$$x_m = \frac{(15 - \sqrt{33})L}{16} \approx 0,57846L$$

Evaluando $y(x)$ en x_m se obtiene que la deflexión máxima está dada por:

$$y_{\text{máx}} = y(x_m) = 0,00542\frac{\omega L^4}{EI}$$

■

■ **Ejemplo 3.59** Una viga de longitud L pies y peso despreciable está simplemente apoyada en ambos extremos y en el centro. La viga soporta una carga de ω libras por unidad de longitud (pies). Determine la ecuación de la curva elástica.

Resolución

Según los datos se tiene la figura 3.52,

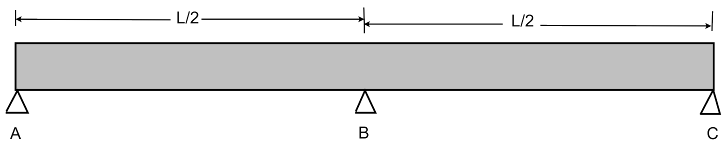


Figura 3.52: Viga con tres apoyos; en este caso, en sus extremos y en el centro.

donde A, B y C son los apoyos. En un sistema de coordenadas como el de la figura 3.53 podemos ver:

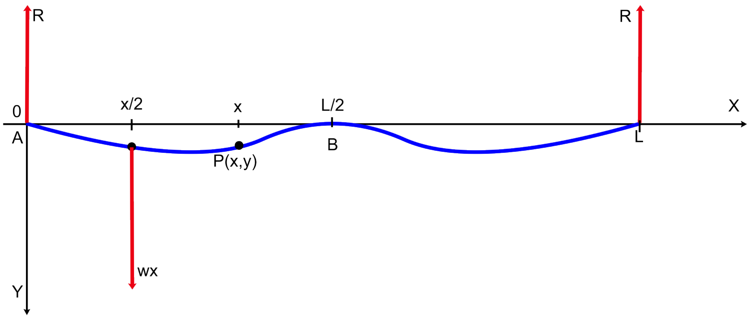


Figura 3.53: Curva elástica para el caso de la viga en la figura 3.52.

Como el tramo AB es simétrico con el tramo BC, entonces sólo analizamos el primero. Analizando el problema decimos que si no hubiera el punto de apoyo B, la resistencia en el punto A sería $\frac{\omega L}{2}$, igual en el punto C. La presencia del apoyo B hace que la resistencia en A y C disminuya, como no sabemos en cuánto, se asume que en dichos puntos extremos la resistencia es R.
En el tramo AB, se tiene que $x \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$ y el momento flexionante en el punto P calculado a la izquierda es:

$$M(x) = \omega x \left(\frac{x}{2}\right) - Rx \equiv \frac{\omega x^2}{2} - Rx$$

Luego en (3.73) se tiene el problema:

$$\begin{cases} EIy''(x) = \frac{\omega x^2}{2} - Rx, \; 0 < x < \frac{L}{2} \\ y(0) = 0 \\ y'\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \\ y\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Integrando la ecuación diferencial se tiene:

$$EIy'(x) = \frac{\omega x^3}{6} - \frac{Rx^2}{2} + c_1$$

Como $y'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$, entonces $c_1 = \frac{RL^2}{8} - \frac{\omega L^3}{48}$, y de esta manera se tiene $y'(x)$ dada por la relación:

$$EIy'(x) = \frac{\omega x^3}{6} - \frac{Rx^2}{2} + \frac{RL^2}{8} - \frac{\omega L^3}{48}, \; 0 < x \leq \frac{L}{2}$$

Integrando esto último y aplicando la condición inicial $y(0) = 0$ se obtiene:

$$EIy(x) = \frac{\omega x^4}{24} - \frac{Rx^3}{6} + \left(\frac{RL^2}{8} - \frac{\omega L^3}{48}\right)x$$

en la cual el valor de R se determina aplicando la condición $y\left(\frac{L}{2}\right) = 0$, resultando así $R = \frac{3\omega L}{16}$. Con este valor de R la curva elástica[35] de la viga está dada por la función:

$$y(x) = \frac{\omega}{384EI}\left(16x^4 - 12Lx^3 + L^3x\right),\ 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

■

■ **Ejemplo 3.60** Una viga de longitud L pies que tiene un peso de ω libras/pie, está simplemente apoyada y soporta una carga F_0 a una distancia $\frac{L}{4}$ de uno de sus extremos, y otra F_1 a $\frac{L}{4}$ del otro extremo. Formule la ecuación diferencial con sus condiciones iniciales o de frontera.

Resolución

En la figura 3.54 se muestra como la carga F_0 se distribuye en los extremos(apoyos) izquierdo y derecho con $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente, de su magnitud, mientras que la carga F_1 lo hace con $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ respectivamente, de su magnitud.

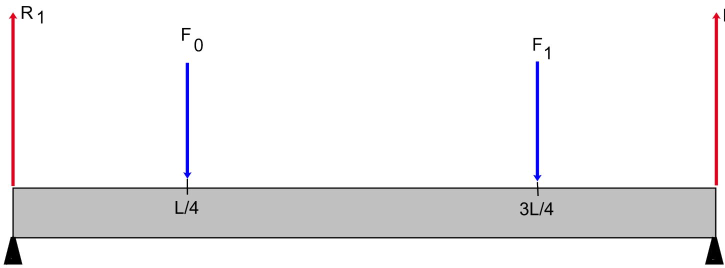


Figura 3.54:

Sabiendo que la viga tiene un peso de ω libras/pie, entonces el peso total de la misma es de ωL libras, el cual se distribuye en su mitad en cada uno de sus apoyos. En estos apoyos las resistencias que se generan son $R_1 = \frac{\omega L}{2} + \frac{3F_0}{4} + \frac{F_1}{4}$ y $R_2 = \frac{\omega L}{2} + \frac{F_0}{4} + \frac{3F_1}{4}$. Dibujando la curva elástica en un sistema de coordenadas se tiene figura 3.55. Así tenemos que para $x \in \left[0, \frac{L}{4}\right]$ el momento

[35] Por la simetría, el otro lado de la curva elástica se obtiene por traslación de la curva obtenida en $\left[0, \frac{L}{2}\right]$.

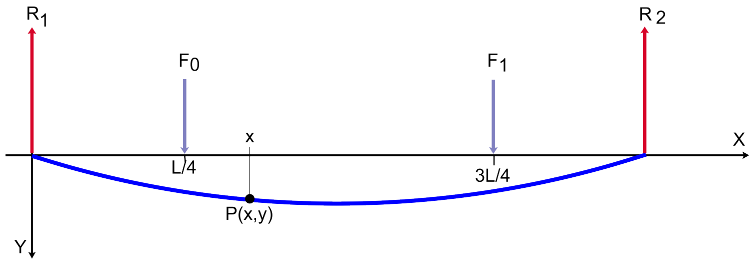


Figura 3.55:

flexionante es:

$$M(x) = (\omega x)\left(\frac{x}{2}\right) - R_1 x \equiv \frac{\omega x^2}{2} - \left(\frac{\omega L}{2} + \frac{3F_0}{4} + \frac{F_1}{4}\right)x$$

Para $x \in \left[\frac{L}{4}, \frac{3L}{4}\right]$, el momento flexionante es:

$$M(x) = (\omega x)\left(\frac{x}{2}\right) + F_0\left(x - \frac{L}{4}\right) - R_1 x \equiv \frac{\omega x^2}{2} + \frac{F_0}{4}(x-L) - \left(\frac{\omega L}{2} + \frac{F_1}{4}\right)x$$

Finalmente, para $x \in \left[\frac{3L}{4}, L\right]$ el momento flexionante está dado por:

$$\begin{aligned} M(x) &= (\omega x)\left(\frac{x}{2}\right) + F_1\left(x - \frac{3L}{4}\right) + F_0\left(x - \frac{L}{4}\right) - R_1 x \\ &\equiv \frac{\omega x^2}{2} + \frac{1}{4}(3F_1 + F_0 - 2\omega L)x - \frac{L}{4}(3F_1 + F_0) \end{aligned}$$

Luego en (3.73) se tiene la ecuación diferencial:

$$y'' = \begin{cases} \frac{1}{EI}\left[\frac{\omega x^2}{2} - \left(\frac{2\omega L + 3F_0 + F_1}{4}\right)x\right], \ 0 < x < \frac{L}{4} \\ \\ \frac{1}{EI}\left[\frac{\omega x^2}{2} + \frac{F_0}{4}(x-L) - \left(\frac{2\omega L + F_0}{4}\right)x\right], \ \frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4} \\ \\ \frac{1}{EI}\left[\frac{\omega x^2}{2} + \frac{1}{4}(3F_1 + F_0 - 2\omega L)x - \frac{L}{4}(3F_1 + F_0)\right], \ \frac{3L}{4} < x < L \end{cases}$$

con las condiciones: $\begin{cases} y(0) = y(L) = 0 \\ y\left(\frac{L}{4}\right)^- = y\left(\frac{L}{4}\right)^+ \wedge y'\left(\frac{L}{4}\right)^- = y'\left(\frac{L}{4}\right)^+ \\ \\ y\left(\frac{3L}{4}\right)^- = y\left(\frac{3L}{4}\right)^+ \wedge y'\left(\frac{3L}{4}\right)^- = y'\left(\frac{3L}{4}\right)^+ \end{cases}$. ■

3.7.1 Ejercicios 3.7

1. Una viga de $2L$ metros de longitud está apoyada en ambos extremos y tiene una carga uniforme de ωkg/m. Tomando el origen de coordenadas en el punto mínimo de la curva elástica de la viga, halle su ecuación y máxima deflexión.
2. Una viga de $3L$ metros de longitud está apoyada en amos extremos. Si la viga tiene un peso de ωkg/m y soporta una carga concentrada de S kg a una distancia de L metros de cada extremos, determinar la curva elástica y deflexión máxima.
3. Una viga en posición horizontal de 9 metros de longitud está empotrada en ambos extremos. Hallar la ecuación de la curva elástica y su máxima deflexión, sabiendo que tiene una carga uniformemente distribuida de 1 kilogramo por metro.
4. Una viga en posición horizontal simplemente apoyada tiene una longitud de 10 metros y un peso despreciable, pero soporta una carga concentrada de 40 kilogramos que está a una distancia de 2 metros del extremo de la izquierda. Hallar la ecuación de la curva elástica.
5. Una viga en posición horizontal de 8 metros de longitud está empotrada en un extremo y libre en el otro. Si la carga que soporta está uniformemente distribuida según $\omega = 4$ kg/m:
    a) Hallar la ecuación de la curva elástica.
    b) Su deflexión máxima.
6. Una viga en posición horizontal de 12 metros de longitud está empotrada en ambos extremos. Si tiene una carga uniformemente distribuida de 3 kg/m hallar la ecuación de la curva elástica y su deflexión máxima.
7. Resolver el problema anterior, si además una carga concentrada de 20 kg actúa en su centro.
8. Una viga sujeta en un extremo y libre en el otro tiene 6 metros de longitud y varias cargas: una carga uniformemente distribuida de 2 kg/m y dos cargas de 10 kg cada una en los puntos que distan 2 y 4 metros del extremo fijo.
    a) Hallar la ecuación de la curva elástica.
    b) Determinar el valor de la máxima deflexión de la viga.

A

A. Aplicación de maple 16

En los últimos años, el desarollo de aplicativos matemáticos ha sido muy vertiginoso, y cada vez, aparecen más sofisticados, con nuevas herramientas que permiten simplificar en gran medida diversas tareas, entre ellas, la de los cálculos numéricos. En matemática, contamos con diversos aplicativos matemáticos, como el Matlab, Derive, Maple, Fortran, etc. los cuales, no solo han permitido la simplicación de los cálculos numéricos, sino también, la programación más eficiente, el cálculo simbólico, la representación geométrica de funciones, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial; y en la actualidad, ya se dispone de paquetes que permiten resolver y simular problemas de matemática difusa.

El Maple 16, que aplicamos en algunas partes de este libro, nos permite no solo hacer cálculo numérico, sino también, hacer cálculo simbólico. En lo que sigue daremos algunas pautas sencillas, de como usar este aplicativo, de tal manera, que el estudiante pueda disponer de una herramienta muy útil para resolver ecuaciones diferenciales, asimismo, pueda analizar su estabilidad y flujo geométrico. Cabe indicar, que es muy importante la escritura correcta de los comandos. Si desean practicar y dominar a cabalidad este aplicativo, sugerimos siempre usar la ventana de ayuda que aparece en la parte superior de la ventana principal de la figura A.1.

En la figura A.1, presentamos la ventana principal de Maple, con algunas de sus funciones más resaltantes, por ejemplo, en la parte lateral izquierda podemos observar las integrales, derivada, sumatoria, producto, límites, etc.

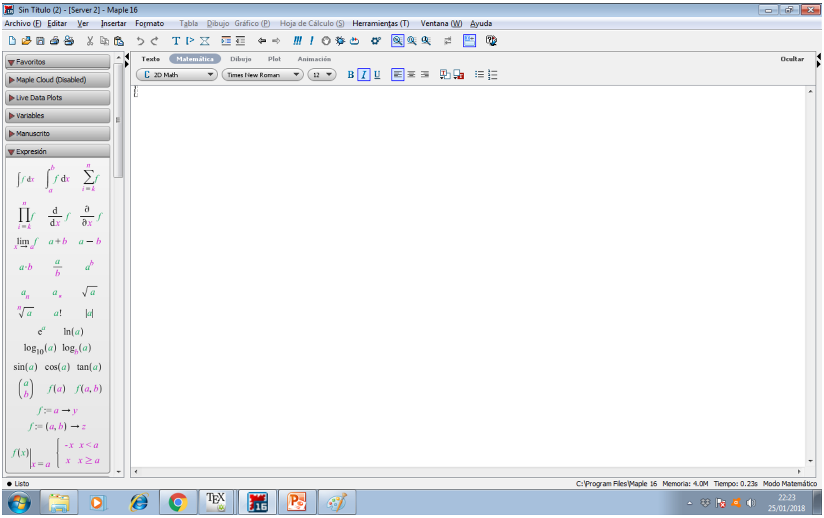


Figura A.1: Ventana principal de Maple 16, con las principales funciones.

A.1 Representación geométrica de la gráfica de funciones reales de variable real

Para graficar funciones reales de variable real en un dominio $[a,b]$, usamos el comando *plot*. El proceso es el siguiente:

$$plot(f(x), x{=}a..b)$$

Después de haber escrito esto, se pone la tecla **enter**, y como resultado se obtiene la representación geométrica de la gráfica de la función en el dominio indicado. Aquí, $f(x)$ representa la regla de correspondencia de la función.

■ **Ejemplo A.1** Para determinar la representación geométrica de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en $x \in [-10, 10]$, hacemos lo siguiente: Ponemos

$$plot\left(\frac{1}{1+x^2},\, x = -10.,10\right)$$

Luego la tecla **enter**. En el entorno de Maple, aparecerá según la figura A.2

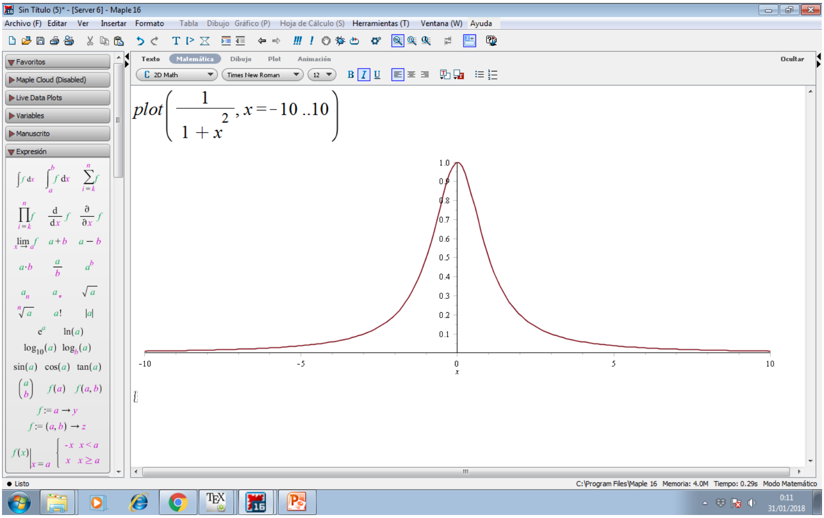


Figura A.2:

■

A.2 Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Acá veremos varias situaciones. En primer lugar, la derivada de la variable (o función desconocida) y respecto de x, se escribe mediante el comando $diff(y(x),x)$, es decir, esto en la notación matemática usual representará a $y'(x)$ o $\frac{dy}{dx}$. La resolución de ecuaciones diferenciales se hará dentro de la librería *DEtools*. Así, para determinar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = f(x,y) \tag{A.1}$$

se procede como sigue:

$$with(DEtools):$$
$$edo{:=}diff(y(x),x){=}f(x,y)$$
$$dsolve(edo)$$

o también, de manera más directa

$$with(DEtools):$$
$$dsolve(diff(y(x),x) = f(x,y))$$

Tenga en cuenta que después de cada línea siempre se pone la tecla **enter**.

■ **Ejemplo A.2** Para resolver la ecuación diferencial $(x-3y)dx - dy = 0$, antes hay que expresarla en la forma de (A.1), así tenemos

$$y' = x - 3y$$

Ahora, usando Maple para su resolución se tiene:

$$with(DEtools):$$
$$edo{:=}diff(y(x),x){=}x\text{-}3y(x)$$
$$dsolve(edo)$$

o también

$$with(DEtools):$$
$$dsolve(diff(y(x),x) = x - 3y(x))$$

Tenga en cuenta que en lugar de y, se escribe $y(x)$. Visto ambos casos en Maple, sería como en la figura A.3 y A.4.

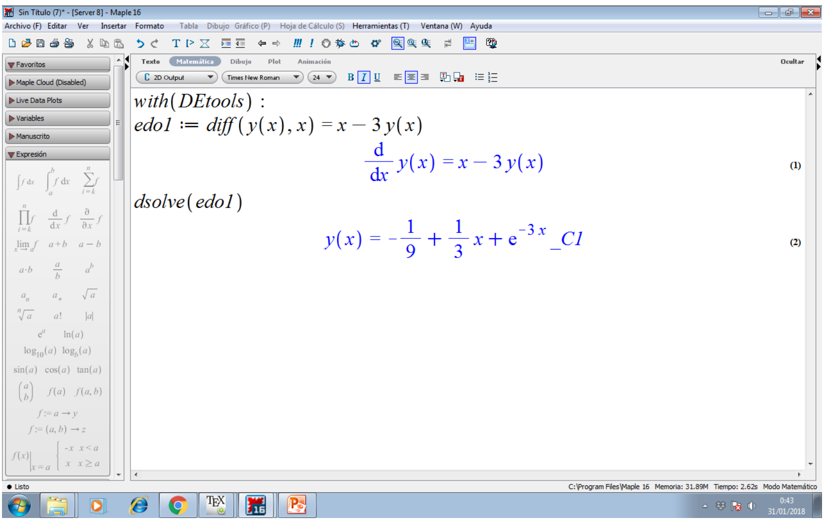


Figura A.3:

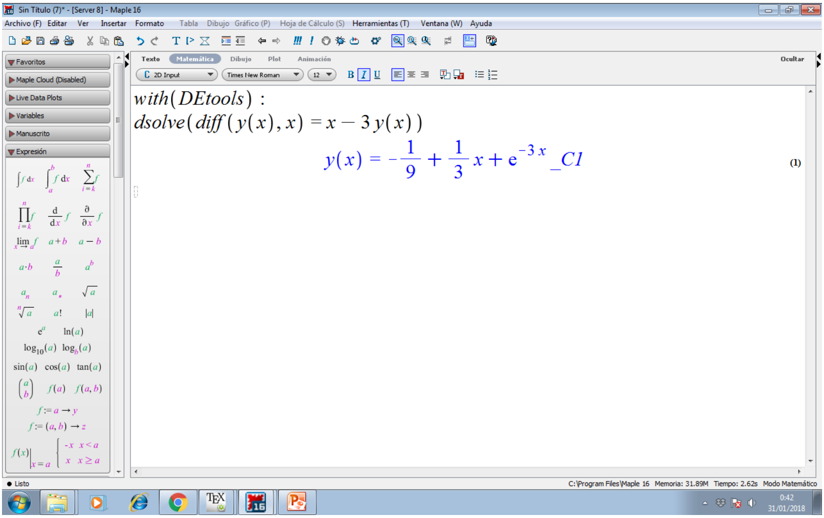


Figura A.4:

Lo que Maple nos da en este caso, es la solución general (o familia de curvas integrales) de la ecuación diferencial dada por

$$y(x) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x + e^{-3x}C1$$

Aquí, la expresión $C1$ representa a la constante C, por eso, el estudiante al momento de usar esta solución, es necesario que la reescriba en la forma usual, es decir, escribirla como:

$$y(x) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x + Ce^{-3x}$$

■

Otra situación que se nos presenta, es cuando se tiene el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{A.2}$$

Vemos que ya no se trata de encontrar la solución general, sino mas bien, la solución particular, que es aquella curva integral que pasa por el punto (x_0, y_0). Antes de aplicar Maple, se sugiere al estudiante que verifique si el punto (x_0, y_0) está en el dominio de f. Para resolver (A.2), se procede de la siguiente manera:

$$with(DEtools):$$

$$dsolve(\{diff(y(x),x) = f(x,y),\ y(x_0) = y_0\},\ y(x))$$

Veamos el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo A.3** Para resolver el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = x^2 + 3y \\ y(1) = 0 \end{cases}$ con Maple, hacemos los siguiente:

$$\begin{aligned} &with(DEtools): \\ &dsolve(\{diff(y(x),x) = x^2 + 3y(x),\ y(1) = 0\},\ y(x)) \end{aligned}$$

que en el entorno de Maple, lo veríamos como en la figura

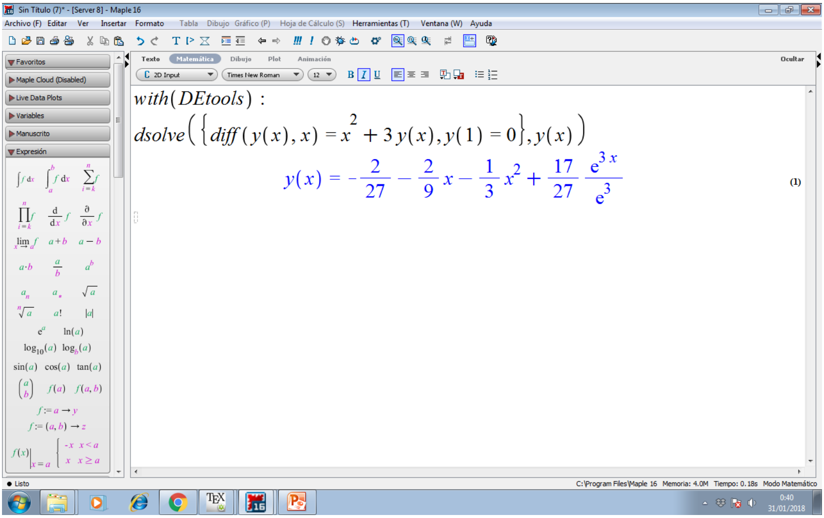


Figura A.5:

Podemos ver que la solución que se obtiene con Maple es

$$y(x) = -\frac{2}{27} - \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{17}{27}\frac{e^{3x}}{e^3}$$

que también lo podemos escribir como

$$y(x) = -\frac{2}{27} - \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{17}{27}e^{3x-3}$$

■

A.3 Resolución de la ecuación de Bernoulli

Se trata de encontrar la solución general de la ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \tag{A.3}$$

La forma como se procede en Maple, es la siguiente:

$$with(DEtools)$$
$$bernoullisol\,(diff(y(x),x)+p(x)*y(x)=q(x)*(y(x))^n)$$

■ **Ejemplo A.4** Para resolver la ecuación diferencial $y'+\frac{1}{3}y=(1+2x)y^3$, se hace lo siguiente:

$$with(DEtools)$$
$$bernoullisol\left(diff(y(x),x)+\frac{1}{3}*y(x)=(1+2x)*(y(x))^3\right)$$

en el entorno de Maple, lo veríamos así (ver figura A.6)

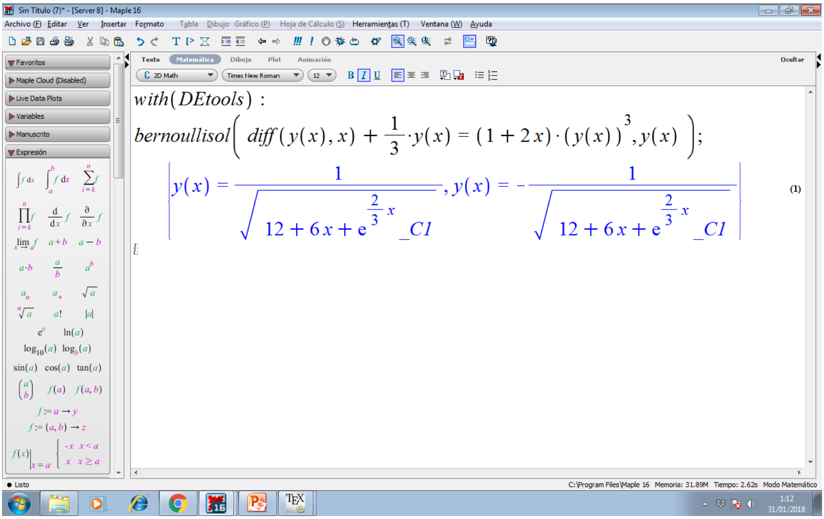


Figura A.6:

Acá podemos ver que nos arroja dos tipos de solución, que en la forma usual lo escribimos como

$$y(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{12+6x+ce^{\frac{2}{3}x}}}$$

donde el signo se escoge según la condición inicial que consideremos. ■

A.4 Resolución de la ecuación de Riccati

Se trata de encontrar la solución general de la ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \; p(x) \not\equiv 0 \tag{A.4}$$

La forma como se procede en Maple, es la siguiente:

$$with(DEtools)$$
$$riccatisol\left(diff(y(x),x) = p(x)*(y(x))^2 + q(x)*y(x) + r(x)\right)$$

■ **Ejemplo A.5** Para resolver la ecuación diferencial $xy' = y^2 - y + \frac{1}{x^2}$, vemos que expresada en la forma (A.4) es:

$$y' = \frac{1}{x}y^2 - \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^3}$$

luego en Maple lo escribimos de la siguiente manera:

$$with(DEtools)$$
$$riccatisol\left(diff(y(x),x) = \frac{1}{x}*(y(x))^2 - \frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{x^3}\right)$$

en el entorno de Maple, lo veríamos así (ver figura A.7)

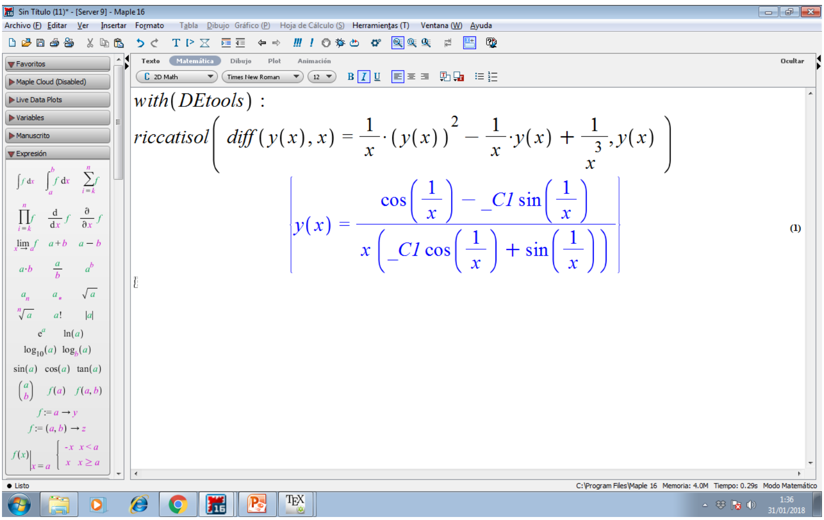


Figura A.7:

■

A.5 Plano fase de una ecuación diferencial de primer orden

La función $f(x,y)$ en (A.1), determina un campo continuo en alguna región del plano, de tal manera que al representar una pequeña sección de la recta tangente a cada curva integral de la ecuación diferencial, en los puntos de la región, se genera un campo de direcciones, llamado plano fase o flujo de la ecuación diferencial. Existen muchas ecuaciones diferenciales de las cuales es muy complicado, hasta imposible obtener sus soluciones en la forma explícita, sin embargo, con el uso de Maple, podemos determinar su plano fase lo que nos permite conocer el comportamiento geométrico de las curvas integrales, y con esto, poder analizar algunos casos de estabilidad. Para determinar el plano fase de la ecuación diferencial (A.1) en un rectángulo $[a,b]\times[c,b]$ donde f sea continua, se hace lo siguiente:

$$with(DEtools)$$
$$dfieldplot(diff(y(x),x) = f(x,y),\ y(x),\ x = a..b,\ \ y = c..d)$$

■ **Ejemplo A.6** Para determinar el plano fase de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{3x}{1+y^2}$$

en el rectángulo $R = [-3,3]\times[-3,3]$, escribimos en el entorno de Maple de la siguiente manera:

$$with(DEtools)$$
$$dfieldplot\left(diff(y(x),x) = \frac{3x}{1+(y(x))^2},\ y(x),\ x = -2.,2,\ \ y = -2.,2\right)$$

Luego la figura A.8 nos muestra como es el plano fase de dicha ecuación diferencial

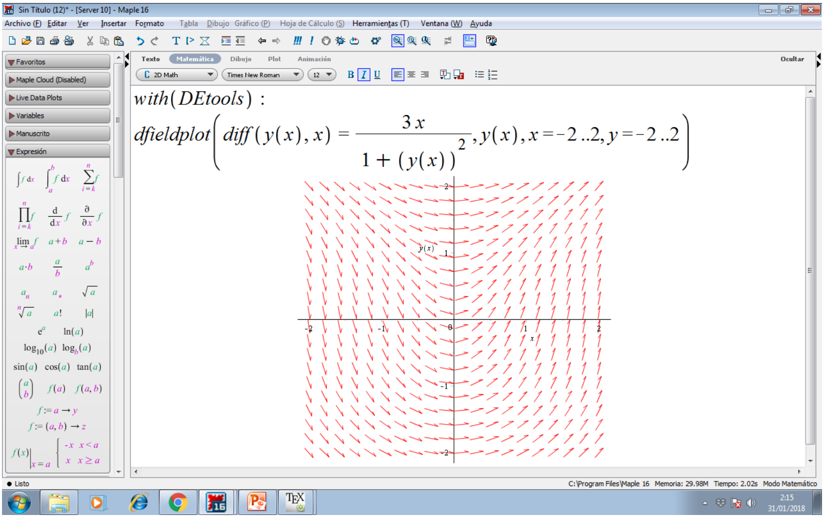


Figura A.8:

■

Además de obtener el plano fase de la ecuación diferencial, Maple también nos permite visualizar las curvas integrales sobre dicho plano fase que nosotros indiquemos. Por ejemplo, para determinar el plano fase de (A.1) y tres curvas (las curvas que queramos) que pasen por los puntos $(0, y_1)$, $(0, y_2)$ y $(0, y_3)$, con $x \in [0, x_0]$, se procede de la siguiente manera:

$$with(DEtools)$$
$$DEplot(diff(y(x),x) = f(x,y), y(x), x = 0..x_0, [y(0) = y_1, y(0) = y_2,$$
$$y(0) = y_3], arrows = medium, linecolor = black)$$

Aquí, el comando **linecolor = black** hará que las curvas integrales que estamos indicando aparezcan de color negro (Usted podría cambiar el color)

■ **Ejemplo A.7** La representación del plano fase de la ecuación diferencial

$$y' = x - 3y$$

para $x \in [0, 1]$, y de las curvas integrales que pasan por los puntos $(0, -2)$, $(0, 2)$ y $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ es como sigue:

$$with(DEtools)$$
$$DEplot(diff(y(x),x) = x - 3y, y(x), x = 0.,1, [y(0) = -2, y(0) = 2,$$
$$y(0) = \tfrac{9}{2}], arrows = medium, linecolor = black)$$

La figura A.9 nos muestra como es en el ambiente de Maple.

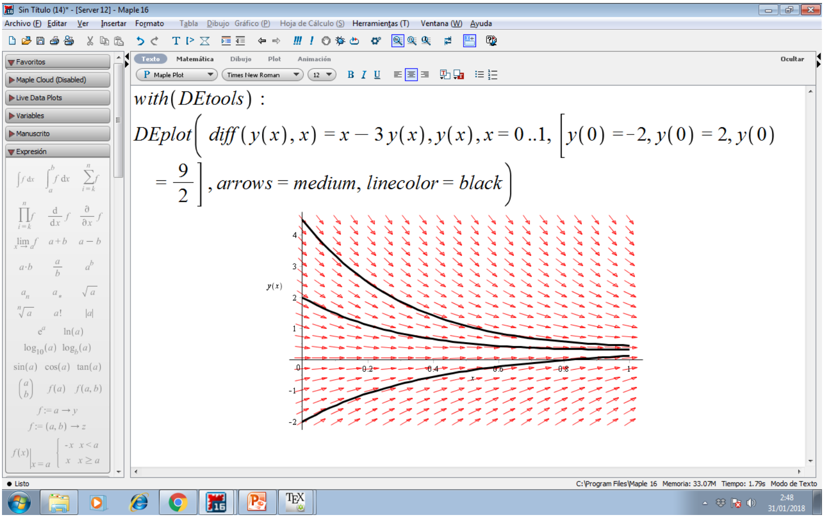


Figura A.9:

■

Como vemos en este ejemplo, no es necesario conocer la solución de la ecuación diferencial, para saber como se comportan las curvas integrales

A

Bibliografía

[1] C. Henry Edwards, David E. Penney *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Pearson Educación, México, 2009.

[2] Daniel A. Marcus, *Ecuaciones Diferenciales*, CECSA.

[3] Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales*, Thomson, México, 2006.

[4] Erwin Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. I*, Limusa S.A, México, 1998.

[5] Evguenii V. Kurmyshev, *Fundamentos de Métodos Matemáticos para Física e Ingeniería*, Limusa, México, 2003.

[6] George F. Simmons, John S. Robertson, *Ecuaciones Diferenciales*, McGraw-Hill, España, 1993.

[7] Isabel Carmona Jover, *Ecuaciones Diferenciales*, Alhambra Mexicana, México, 1996.

[8] James Stewart, *Cálculo*, Thomson, México, 1999.

[9] Jesús San Martín Moreno, Venancio Tomeo Perucha, Isaías Uña Juárez, *Métodos Matemáticos*, Thomson, España, 2005.

[10] Louis Leithold, *El Cálculo con Geometría Analítica*, Harla, México, 1987.

[11] Ma. del Carmen Cornejo Serrano, Eloísa B. Villalobos Oliver, Pedro A. Quintana Hernández, *Ecuaciones Diferenciales*, Reverté, S.A., México, 2008.

[12] Milton M. Cortez Gutierrez, *Ecuaciones Diferenciales-II Edición*, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-Perú.

[13] Murray R. Spiegel, *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A, México,1983.

[14] James Stewart, *Cálculo*, Thomson, México, 1999.

[15] Paul G. Hewitt, *Física Conceptual*, Pearson Addison Wesley, México, 2007.

[16] Robert C. Wrede, Murray Spiegel, *Cálculo Avanzado*, Mc Graw Hill, Madrid, 2004.

[17] Robert L. Borrelli, Courtney S. Coleman, *Ecuaciones Diferenciales*, Oxford, México, 2002.

[18] Víctor Jiménez López, *Ecuaciones Diferenciales*, Universidad de Murcia, Servicio de Publicaciones, España, 2000.

[19] Willian A. Adkins, Mark G. Davidson, *Ordinary differential equations*, Springer Science& Business Media, 2012.

[20] Willian E. Boyce, Richard C. DiPrima, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales*, Limusa, México, 1994.

[21] Viana Marcelo, Espinar José, *Ecuaciones diferenciales: un enfoque de sistemas dinámicos para la teoría y la práctica, Volumen*={212}, Sociedad Matemática Americana, 2021.

Enlaces electrónicos:

[22] http://www.uv.es/ivorra/Libros/Analisis.pdf

[23] http://ladyada.usach.cl/ vguinez/apuntes.html